



UNIL | Université de Lausanne

Faculté des géosciences
et de l'environnement

Mathématiques I

Prof. Dominique Arlettaz
Prof. Alain Clément



Support de cours | 2006–2007



Plan d'études du Bachelor | www.unil.ch/gse

Mathématiques I

pour les étudiants de la
Faculté des géosciences et de l'environnement

Prof. Dominique Arlettaz
Prof. Alain Clément

Ce texte reproduit les éléments principaux du cours de Mathématiques I à l'intention des étudiants en géographie et en géologie de première année de la Faculté des géosciences et de l'environnement de l'Université de Lausanne. Il a été mis en forme grâce à la collaboration du Dr. Jean-François Hämmerli et du Dr. Luc Dessauges.

Lausanne
octobre 2006

Table des matières

1	Calcul différentiel et intégral des fonctions réelles d'une variable	1
1.1	La dérivée	1
1.2	L'approximation linéaire	5
1.3	Développements limités	8
1.4	Règles de dérivation	10
1.5	Primitives	13
1.6	Le logarithme	18
1.7	La fonction exponentielle	21
1.8	Intégration par parties	25
1.9	Équations différentielles ordinaires du premier ordre	26
1.10	Équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre	28
1.11	Équations différentielles linéaires inhomogènes du premier ordre	32
1.12	Autres exemples d'équations différentielles du premier ordre	35
2	Systèmes d'équations linéaires et calcul matriciel	37
2.1	Calcul matriciel	37
2.2	Exemples d'applications du calcul matriciel	41
2.3	Systèmes d'équations linéaires	46
2.4	Combinaisons linéaires, dépendance et indépendance linéaire	53
2.5	Sous-espaces vectoriels	56
2.6	Bases et dimension	57
2.7	Le rang d'une matrice	60
2.8	Matrices inversibles	62
3	Applications linéaires	65
3.1	Définition et exemples	65
3.2	La matrice d'une application linéaire	66
3.3	L'image d'une application linéaire	68

3.4	Le noyau d'une application linéaire	69
3.5	Valeurs propres (première partie)	71
3.6	Déterminants	73
3.7	Valeurs propres (seconde partie)	77
4	Diagonalisation de matrices	79
4.1	Changement de base	79
4.2	Diagonalisation de matrices	82
4.3	Élévation d'une matrice à une puissance	85
4.4	Application à la démographie	87
4.5	Application au développement durable	90
4.6	Application à la génétique	92
4.7	Systèmes d'équations différentielles	94

1 Calcul différentiel et intégral des fonctions réelles d'une variable

1.1 La dérivée

L'objectif de ce chapitre est de clarifier la notion de dérivée, connue de tous, et de l'utiliser pour diverses applications.

Définition. Une *fonction réelle* d'une variable réelle est une application f d'un domaine $D(f) \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} , où \mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres réels. A chaque nombre réel $x \in D(f) \subset \mathbb{R}$, f fait correspondre (de manière unique) un nombre réel $f(x) \in \mathbb{R}$.

- $D(f)$ s'appelle le *domaine de définition* de f .
- $\text{im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \text{ pour un certain } x \in D(f) \}$ s'appelle *l'image* de f .
- Le *graphe* de f est l'ensemble $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D(f) \text{ et } y = f(x) \}$.

Notation. Les intervalles de \mathbb{R} sont notés comme suit :

$$\begin{aligned}[a, b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \\[a, b[&= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \} \\[a, \infty[&= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \} \\]a, b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} \\]\infty, b] &= \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq b \} \\]a, b[&= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}.\end{aligned}$$

Remarque. Attention, une fonction peut être donnée par une formule, par exemple :

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto 3x + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto \sin(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto \frac{1}{x}\end{aligned}$$

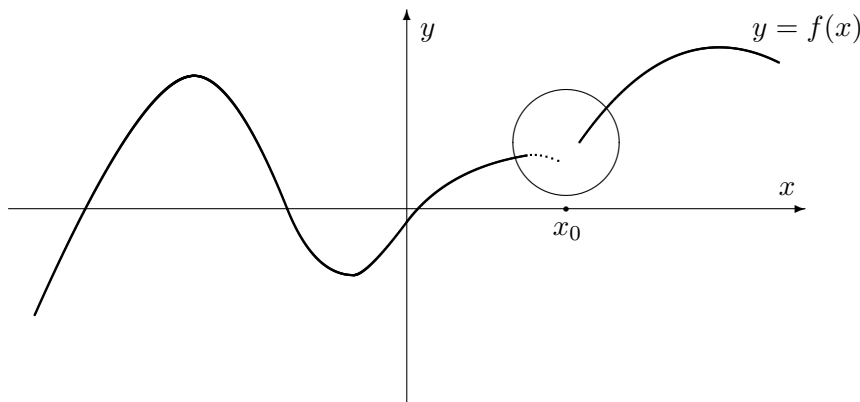
ou par une description de l'image de f en chaque point de $D(f)$,

par exemple :

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si } x = 0; \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1]; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

La notion de dérivée est basée sur la notion de limite, qui a pour but de décrire le comportement d'une fonction f proche d'un point $x_0 \in D(f)$.



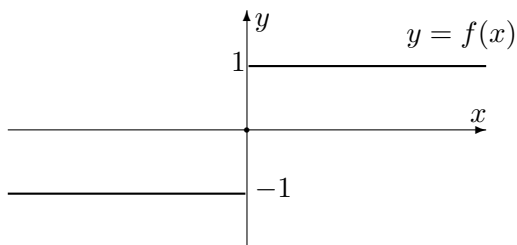
Définitions. Soit $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que f est définie en x_0 ou dans un voisinage de x_0 .

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ si $f(x)$ est aussi près de ℓ que l'on veut lorsque x est suffisamment près de x_0 , mais avec $x < x_0$ (à gauche).
- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ si $f(x)$ est aussi près de ℓ que l'on veut lorsque x est suffisamment près de x_0 , mais avec $x > x_0$ (à droite).
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ si
 1. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ existe ;
 2. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existe ;
 3. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 ; \\ 0 & \text{si } x = 0 ; \\ -1 & \text{si } x < 0 . \end{cases}$$



Alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1$, mais $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas.

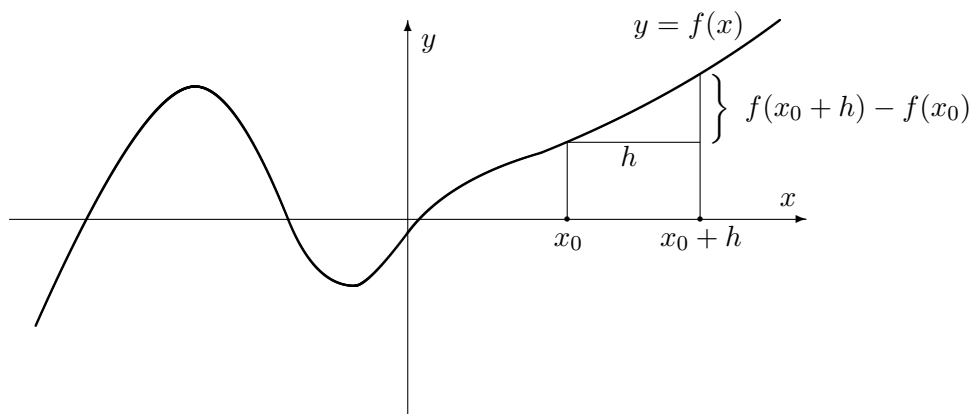
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2}{x - 4} = -\frac{1}{2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \sin(\frac{1}{x})) = 0$ car $|\sin(\frac{1}{x})| \leq 1$.

La notion de limite permet de définir la notion de *continuité* (non évoquée ici).

La notion de limite est essentielle pour définir la dérivée.

Objectif de la notion de dérivée. Comprendre la variation d'une fonction continue au voisinage d'un point.



On s'intéresse au comportement de la fonction f au voisinage d'un point $x_0 \in D(f)$; pour cela on compare la valeur de f en x_0 avec celle de f en un point voisin $x_0 + h \in D(f)$.

Exemple.

$f(x)$	=	position d'un objet au temps x
$f(x_0 + h) - f(x_0)$	=	distance parcourue par cet objet entre le temps x_0 et le temps $x_0 + h$
$\Rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$	=	vitesse moyenne de l'objet entre le temps x_0 et le temps $x_0 + h$.

Si l'on veut une information "ponctuelle", il faut choisir h qui tend vers 0. On obtient :

Définition. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, si cette limite existe ;
 $f'(x_0)$ est la *dérivée* de f en x_0 .

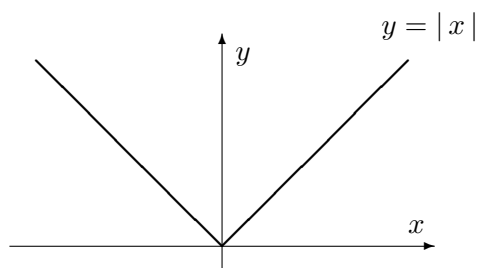
Exemples

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour une constante a ,
 $x \longmapsto ax$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x_0 + h) - ax_0}{h} = a.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 $x \longmapsto 2$

3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la valeur absolue de x qui vérifie $\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$
 $x \longmapsto |x|$



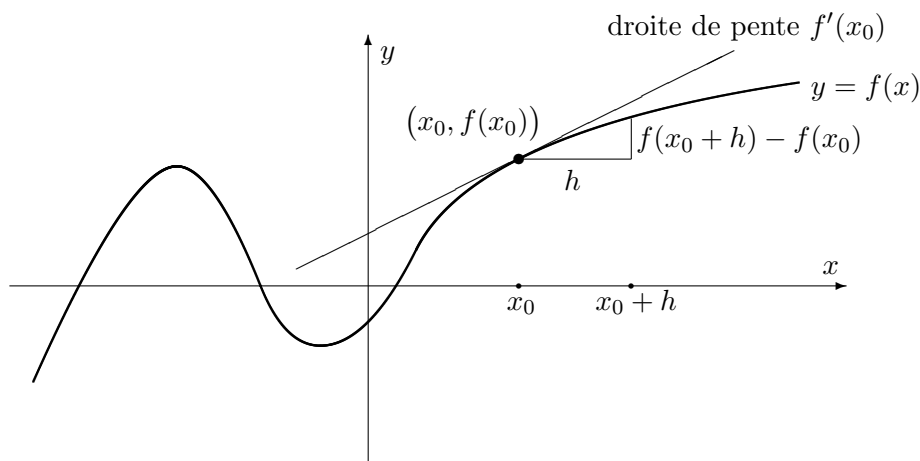
que peut-on dire de $f'(0)$?

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

n'existe pas !

En effet, $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -\frac{h}{h} = -1$
 $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1.$

Interprétation géométrique de la dérivée



$$f'(x_0) = \text{pente de la droite tangente à la courbe } y = f(x) \text{ au point } (x_0, f(x_0)).$$

Si $f'(x_0) > 0$, la fonction est croissante en x_0 .

Si $f'(x_0) < 0$, la fonction est décroissante en x_0 .

Si $f'(x_0) = 0$, la courbe $y = f(x)$ a une tangente horizontale en $(x_0, f(x_0))$.

1.2 L'approximation linéaire

Parfois, il est utile de “remplacer” (ou “approximer”) la fonction f par une nouvelle fonction dont le graphe est une droite de pente $f'(x_0)$ et qui passe par $(x_0, f(x_0))$. L'équation de cette droite est $y = ax + b$, où $a = f'(x_0)$ est la pente et b est l'intersection de la droite avec l'axe Oy .

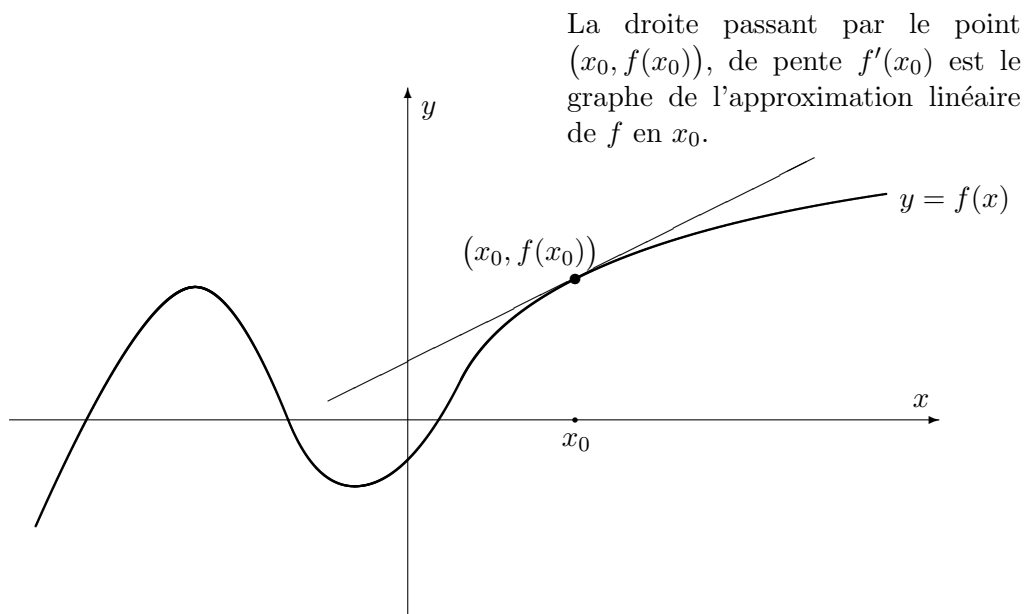
Posons $x = x_0$, on a $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$, d'où $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

\Rightarrow L'équation de l'approximation linéaire est

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Revenons à l'interprétation géométrique de la dérivée :



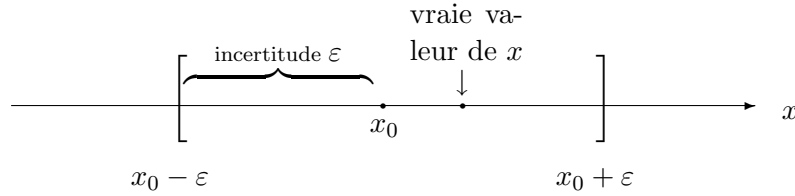
Définition. *L'approximation linéaire* de f en x_0 est la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_{(f, x_0)} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

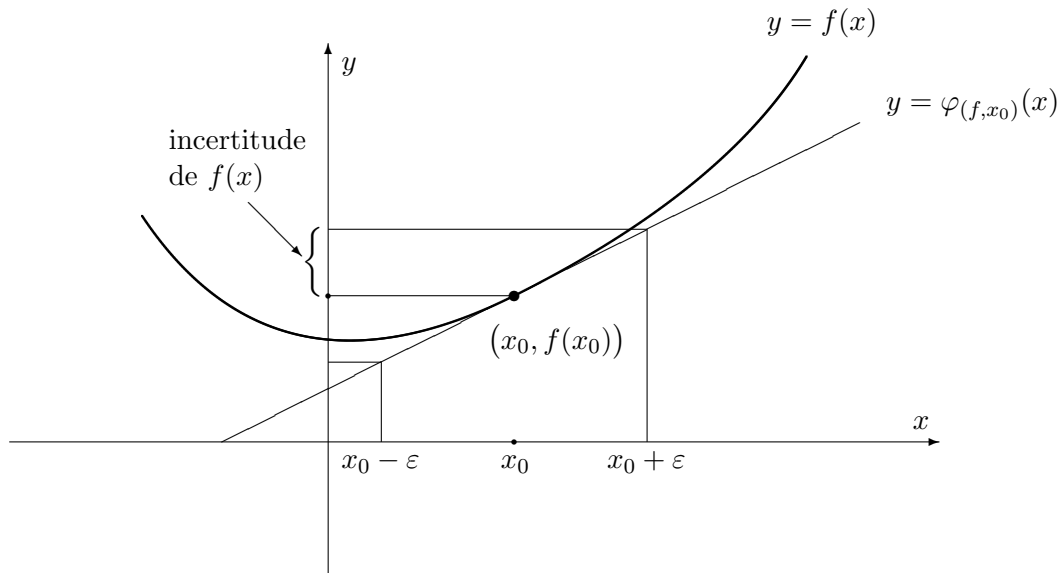
Application au calcul d'incertitude

On mesure une grandeur x et on veut calculer la valeur $f(x)$ d'une fonction f en x .
On mesure x et on obtient le résultat x_0 , mais on a commis une erreur (que l'on

ignore, sinon on ne ferait pas d'erreur). On sait en revanche que la vraie valeur de x est comprise entre $x_0 - \varepsilon$ et $x_0 + \varepsilon$.



On veut calculer $f(x)$, mais on ne peut calculer que $f(x_0)$. On approxime donc $f(x)$ par $f(x_0)$ et on estime l'erreur commise par ce que l'on appelle l'incertitude de $f(x)$ qui est définie par le graphique suivant :



On estime que $f(x)$ est situé sur l'intervalle $[\varphi_{(f,x_0)}(x_0 - \varepsilon), \varphi_{(f,x_0)}(x_0 + \varepsilon)]$.

Or $\varphi_{(f,x_0)}(x_0 - \varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0)(-\varepsilon) = f(x_0) - f'(x_0)\varepsilon$

$$\varphi_{(f,x_0)}(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon$$

\Rightarrow

l'incertitude de $f(x)$ vaut $\varepsilon \cdot |f'(x_0)|$.

Attention ! Cela n'implique pas que l'erreur de $f(x)$, c'est-à-dire $|f(x) - f(x_0)|$, soit inférieure à $\varepsilon |f'(x_0)|$, mais c'est une bonne approximation de cette erreur.

Exemple. On mesure le côté d'une table carrée et on trouve 200 cm avec une erreur ≤ 0.5 cm. Donc on approxime l'aire de la table par $40\,000 \text{ cm}^2 = 4 \text{ m}^2$ avec une erreur approximée par l'incertitude $0.5 \cdot (2 \cdot 200) = 200 \text{ cm}^2$. En effet, ici $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ et $\varepsilon = 0.5$.

1.3 Développements limités

Il est utile de remplacer une fonction f par une approximation “facile” à calculer.

Exemple. L’approximation linéaire $\varphi_{(f,x_0)}$ que l’on a traitée au paragraphe ?? est aussi notée $P_1(x)$ car c’est un *polynôme de degré 1* en x ,

$$\begin{aligned}\varphi_{(f,x_0)} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),\end{aligned}$$

qui satisfait : $\varphi_{(f,x_0)}(x_0) = f(x_0)$
et $\varphi'_{(f,x_0)}(x_0) = f'(x_0)$.

On veut généraliser cette idée.

On cherche, pour $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in D(f)$, un polynôme $P_n(x)$ de degré $n \geq 1$ avec les propriétés :

$$\begin{aligned}P_n(x_0) &= f(x_0) \\ P'_n(x_0) &= f'(x_0) \\ P''_n(x_0) &= f''(x_0) \\ &\vdots \\ P_n^{(k)}(x_0) &= f^{(k)}(x_0) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)\end{aligned}$$

où $f^{(k)}$ désigne la k -ième dérivée de f .

Théorème. *L’unique solution de ce problème est donnée par le polynôme*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

où $k! = k(k - 1)(k - 2)(k - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ pour tout entier positif k .

Définition. $P_n(x)$ s’appelle le *développement limité* de degré n de f autour de x_0 ou le *polynôme de Taylor* de degré n de f en x_0 .

Démonstration. $P_n(x)$ est un polynôme de degré n en x . On vérifie que :

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} \\
 P_n(x_0) &= f(x_0) \\
 P'_n(x) &= f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\
 P'_n(x_0) &= f'(x_0) \\
 P''_n(x) &= f''(x_0) + f'''(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} \\
 P''_n(x_0) &= f''(x_0) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

C'est la seule solution car si $Q(x)$ est une autre solution, $T_n(x) = P_n(x) - Q(x)$ est un polynôme de degré $\leq n$, avec $T_n(x_0) = 0$, $T'_n(x_0) = 0$, ..., $T^{(n)}_n(x_0) = 0$. Or un polynôme de degré $\leq n$ s'écrit $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ et

$$\begin{aligned}
 T^{(n)}_n(x_0) = n!a_n = 0 &\implies a_n = 0 \\
 T^{(n-1)}_n(x_0) = 0 &\implies a_{n-1} = 0 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

□

Exemples

1. Considérons la fonction $f(x) = \sin(x)$ et le point $x_0 = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin(x) & f(0) &= 0 \\
 f'(x) &= \cos(x) & f'(0) &= 1 \\
 f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0 \\
 f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(0) &= -1 \\
 f^{(4)}(x) &= \sin(x) & f^{(4)}(0) &= 0 \\
 && \dots &
 \end{aligned}$$

$$\implies P_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \pm \frac{x^n}{n!} \quad \text{pour } n \text{ impair.}$$

2. $f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$

$$\implies P_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \pm \frac{x^n}{n!} \quad \text{pour } n \text{ pair.}$$

3. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ on a $f(0) = 1$ et $f^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$.

$$\implies P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

1.4 Règles de dérivation

Nous rappelons ici les règles de dérivation bien connues :

1. $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$
2. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
4. $f(x) = C \implies f'(x) = 0$ pour tout x
5. $f(x) = x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}$ pour n entier positif ou négatif
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\cos x)' = -\sin x$
8. $(\tan(x))' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
9. $(\cot(x))' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $(e^x)' = e^x$
11. $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{dérivée intérieure}}.$

Exemples

1. $(\sin(x^2))' = 2x \cos(x^2).$
2. $((\sin x)^2)' = 2 \sin x \cos x.$
3. $\left((\sin(x^2))^2\right)' = 2 \sin(x^2) \underbrace{(\sin(x^2))'_{2x \cos(x^2)}} = 4x \sin(x^2) \cos(x^2).$

Définition de la fonction inverse

Soit $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$. Peut-on inverser la flèche $\mathbb{R} \longrightarrow D(f)$?

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & f(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & D(f) \\ f(x) & \longmapsto & x \end{array}$$

En général non car tout point de \mathbb{R} n'est pas nécessairement une image de f , par exemple : $f(x) = x^2$ alors $-1 \in \mathbb{R}$ n'est pas une image de f .

Modifions donc la question posée :

Soit $f : D(f) \longrightarrow \text{im}(f)$. Peut-on inverser la flèche $\text{im}(f) \longrightarrow D(f)$?

$$x \longmapsto f(x) \qquad f(x) \longmapsto x$$

En général non car il est possible d'avoir deux nombres réels $x_1 \neq x_2$ avec la même image $f(x_1) = f(x_2)$, par exemple : $f(x) = x^2$ et $f(2) = f(-2) = 4$.

Supposons que ce ne soit pas le cas :

Soit $f : D(f) \longrightarrow \text{im}(f)$ avec la propriété $f(x_1) \neq f(x_2)$
 $x \longmapsto f(x)$ pour toute paire $x_1 \neq x_2$,

alors $f^{-1} : \text{im}(f) \longrightarrow D(f)$ est bien définie : c'est la *fonction inverse* de f .
 $f(x) \longmapsto x$

On a $f^{-1}(f(x)) = x$ et $f(f^{-1}(x)) = x$.

En dérivant cette dernière égalité on obtient une nouvelle règle de dérivation :

$$\underbrace{\left(f(f^{-1}(x))\right)'}_{f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))'} = (x)' = 1$$

$\implies \qquad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec n un entier impair.
 $x \longmapsto x^n$
 $\sqrt[n]{x} \longleftarrow x : f^{-1}$

Si n est pair, on a $f(-x) = f(x)$. Cela contredit la propriété $f(x_1) \neq f(x_2)$ si $x_1 \neq x_2$. Dans ce cas, il faut restreindre le domaine de définition de f :

Prenons par exemple, $f : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ avec n un entier pair.
 $x \longmapsto x^n$
 $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \longleftarrow x : f^{-1}$

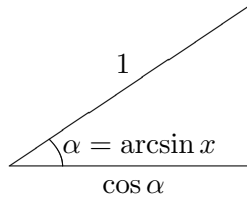
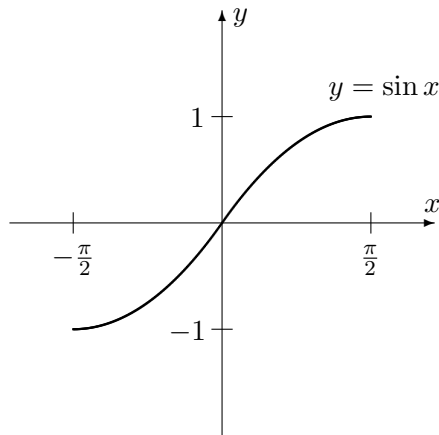
Donc pour tout entier positif n , $f^{-1} : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est bien défini si l'on choisit correctement le domaine de définition de f et l'on a la règle de dérivation :

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

$$\implies \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Par exemple : $\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$

$$2. \quad f : \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$



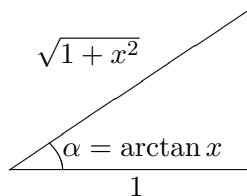
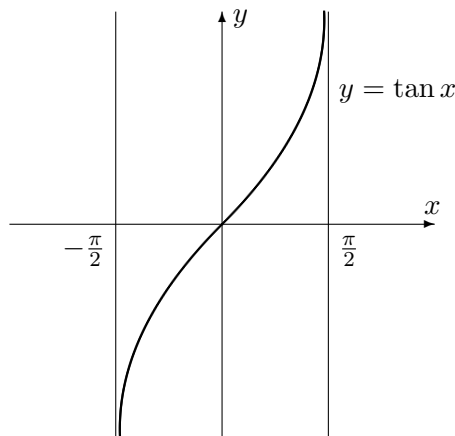
En effet, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ car le théorème de Pythagore implique que $(\cos(\arcsin x))^2 + x^2 = 1$.

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \arcsin x \end{array}$$

où $\arcsin x$ est l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x .

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$3. \quad f : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$$



En effet, $\cos^2(\arctan x) = \cos^2 \alpha = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^2}$.

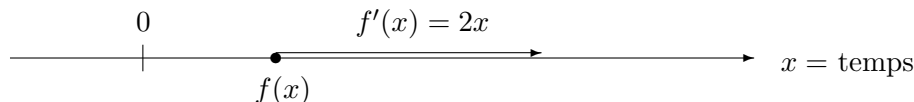
$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \arctan x \end{array}$$

où $\arctan x$ est l'angle strictement compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x .

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

1.5 Primitives

Motivation. On a vu que si $f(x)$ désigne la position d'un objet se déplaçant le long d'une droite au temps x , alors $f'(x)$ représente la vitesse de l'objet au temps x . Si l'on sait que la vitesse vaut $2x$, quelle est la position de l'objet au temps x sachant que sa position au temps 0 était 0 ?



Il faut trouver une fonction f telle que $f'(x) = 2x$ et $f(0) = 0$. On sait que $f(x) = x^2$ satisfait ces deux conditions.

Le problème général consiste à trouver une fonction f si l'on connaît sa dérivée f' .

Définition. Soit f une fonction (continue). Une *primitive* de f est une fonction F telle que $F' = f$.

Si F est une primitive de f , alors $F'(x) = f(x)$ mais aussi $(F(x) + C)' = f(x)$ pour toute constante C .

\implies Si F est une primitive de f , alors f possède une infinité de primitives : toutes les fonctions de la forme $F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

En fait, il n'y a pas d'autre primitives. En effet, si F et G sont deux primitives de f , alors pour tout x on pose :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= F(x) - G(x) \\ \Phi'(x) &= F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0\end{aligned}$$

$\implies \Phi$ est une fonction dont la dérivée est 0 pour tout x

$\implies \Phi$ est une fonction constante, disons $\Phi(x) = -C$ pour tout x

$\implies F(x) - G(x) = -C \implies G(x) = F(x) + C$.

On a donc démontré :

Théorème. On obtient toutes les primitives de f en ajoutant les constantes réelles à une primitive F de f .

Définition/Notation. L'intégrale indéfinie $\int f(x) dx$ est l'ensemble de toutes les primitives de f . On a donc :

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Règles d'intégration

On déduit facilement du paragraphe ?? les règles suivantes :

1. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int (a \cdot f(x)) dx = a \cdot \int f(x) dx$ pour toute constante a
3. $\int 0 dx = C$
4. $\int a dx = ax + C$ pour toute constante a
5. On a vu que $(x^n)' = nx^{n-1}$ si n est un entier positif ou négatif;
si $n = \frac{1}{q}$, $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$ et $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}$
si $n = \frac{p}{q}$, $x^n = (x^{\frac{1}{q}})^p$ et $(x^n)' = p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1} \cdot \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = nx^{n-1}$.

Donc pour tout n rationnel, $(x^n)' = nx^{n-1}$
 $\implies \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{n+1}{n+1}x^n = x^n$ pour $n \neq -1$
 $\implies \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ pour $n \in \mathbb{Q}$, à condition que $n \neq -1$.

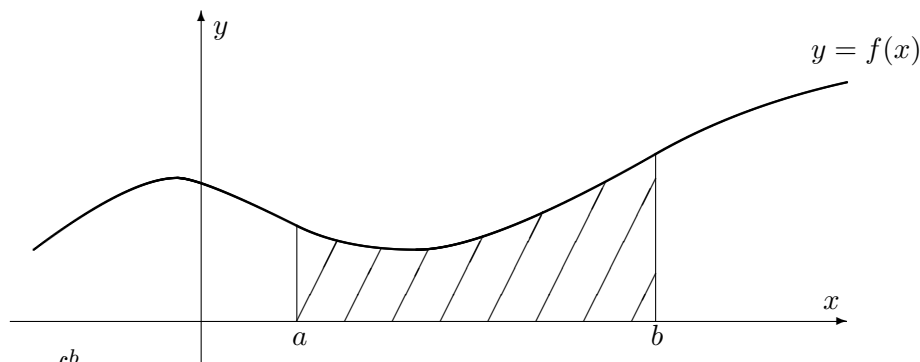
6. $(\sin x)' = \cos x \implies \int \cos x dx = \sin x + C$
7. $(\cos x)' = -\sin x \implies \int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2 x} \implies \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
9. $(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2 x} \implies \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
10. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \implies \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
11. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \implies \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$.

Remarque sur l'intégrale définie

Soit f une fonction (continue) et $[a, b] \subset D(f)$. On peut définir $\int_a^b f(x) dx$ l'intégrale définie de f sur l'intervalle $[a, b]$ ou *intégrale de Riemann* (1826-1866).

Nous ne donnons pas ici cette définition, mais on peut se représenter $\int_a^b f(x) dx$ comme suit :

- Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$,



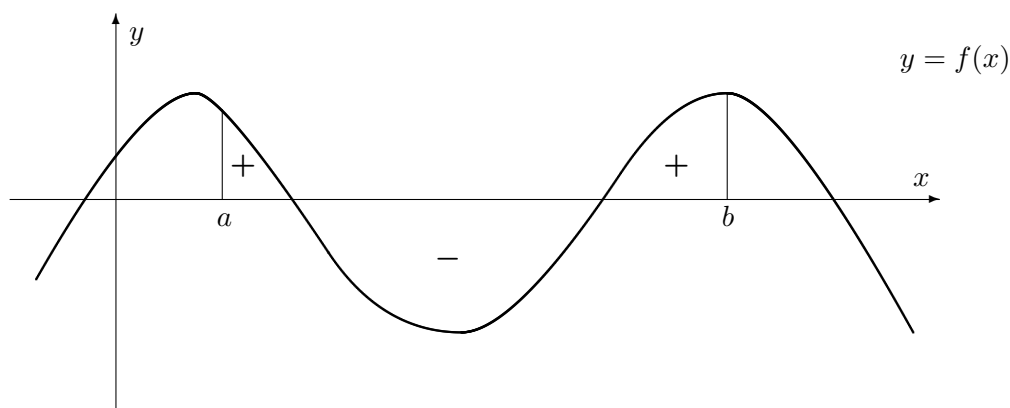
alors $\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire de la surface délimitée par l'axe $0x$, le graphe $y = f(x)$ ainsi que par les droites verticales $x = a$ et $y = b$.

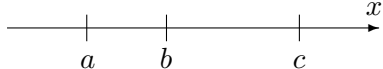
- Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a, b]$,

$$\int_a^b f(x) dx = - \left(\begin{array}{l} \text{l'aire de la surface délimitée par l'axe } 0x, \text{ le} \\ \text{graphe } y = f(x) \text{ ainsi que par les droites ver-} \\ \text{ticales } x = a \text{ et } y = b \end{array} \right).$$

- Si $f(x)$ est quelconque sur $[a, b]$,

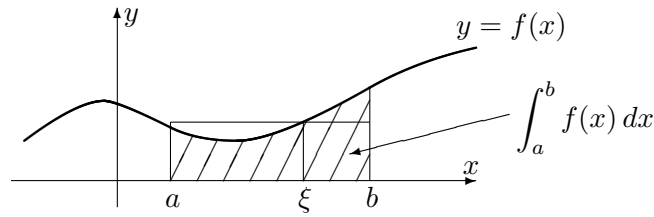
$\int_a^b f(x) dx =$ somme des aires des parties de la surface délimitées par $0x$, $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ avec les signes $+$ pour les parties au-dessus de $0x$ et $-$ pour les parties au-dessous de $0x$.



- Si  alors

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

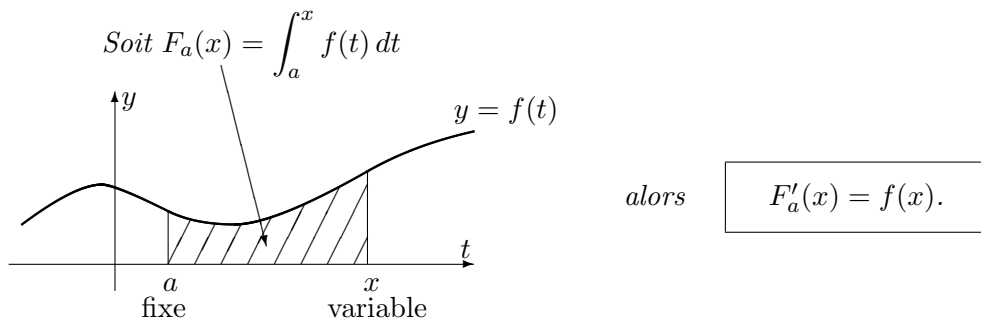
Théorème de la moyenne



Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors il existe un point $\xi \in [a, b]$ tel que

$$f(\xi) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx .$$

Théorème fondamental du calcul différentiel



Démonstration. $F'_a(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$

Par le théorème de la moyenne, il existe $\xi \in [x, x+h]$ tel que $h \cdot f(\xi) = \int_x^{x+h} f(t) dt$
 $\implies F'_a(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$. □

Conséquence

$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f . Soit F une autre primitive de f , alors $F(x) = F_a(x) + C$ pour une constante C . Posons $x = a$, on a $F(a) = \underbrace{F_a(a)}_{=0} + C$ donc

$C = F(a)$ et ainsi

$$F(x) = F_a(x) + F(a) .$$

Posons $x = b$, alors $F_a(b) = F(b) - F(a)$.

Autrement dit

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

pour n'importe quelle primitive F de f .

On note $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple. $\int_1^3 3x^2 dx = x^3|_1^3 = 27 - 1 = 26$.

1.6 Le logarithme

On a vu que $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$ ou $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n$ pour tout nombre rationnel $n \neq -1$. Donc

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ si } n \neq -1, n \in \mathbb{Q}.$$

Mais on a aucune règle d'intégration pour $\int \frac{1}{x} dx$.

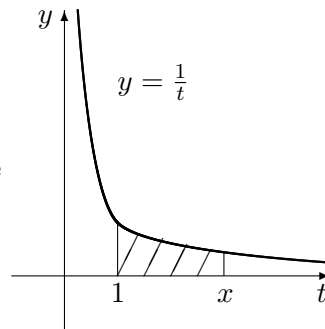
Définition. Le *logarithme naturel* (ou logarithme) est la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$ (définie sur $]0, \infty[$) qui vaut 0 en $x = 1$. On la note $\ln x$.

Donc par définition

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0.$$

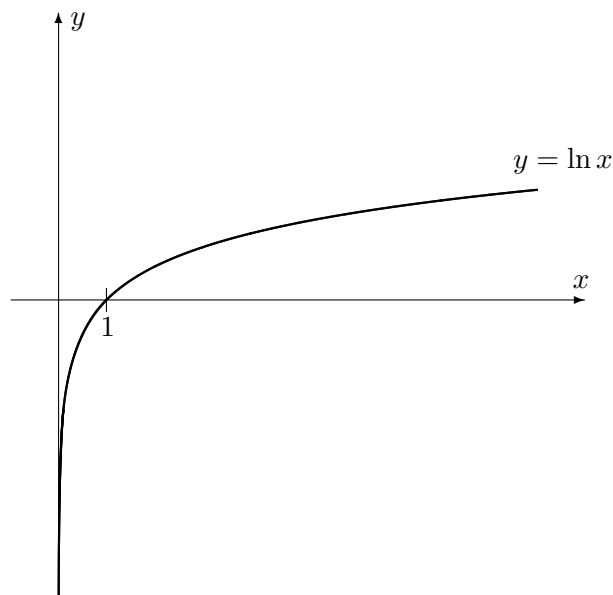
La fonction $f(x) = \ln x$ est définie sur $]0, \infty[$.

Remarque. $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ représente l'aire



Étudions brièvement la fonction logarithme :

$(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$ donc $\ln x$ est une fonction strictement monotone croissante, mais son taux de croissance diminue pour $x \rightarrow \infty$ puisque $\frac{1}{x} \rightarrow 0$.



Pourquoi le logarithme est-il utile ?

Propriétés

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
3. $\ln(x^k) = k \cdot \ln(x)$ pour tout $k \in \mathbb{Q}$.

Démonstration.

1. Considérons $\ln(xy)$ et fixons y . Alors $\ln(xy)$ est une fonction de x que l'on note $g(x) = \ln(xy)$. On a

$$g'(x) = \frac{1}{xy} (xy)' = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}.$$

Donc $g(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ et par suite $\ln(xy) = \ln(x) + C$. Posons $x = 1$, on trouve $\ln(y) = \underbrace{\ln(1)}_{=0} + C$ d'où $C = \ln(y)$.

Finalement on a bien $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

2. Considérons la fonction $g(y) = \ln\left(\frac{1}{y}\right)$. Sa dérivée vaut

$$g'(y) = \frac{1}{\frac{1}{y}} \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{y}{y^2} = -\frac{1}{y}.$$

Donc $g(y)$ est une primitive de $-\frac{1}{y}$ et par suite $g(y) = -\ln(y) + C$. Posons $y = 1$, on trouve $g(1) = -\ln 1 + C$ d'où $C = g(1) = \ln 1 = 0$.

Finalement $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$ et par suite

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

3. Faisons de même pour $g(x) = \ln x^k$ avec k fixé. On a

$$g'(x) = \frac{1}{x^k} \cdot kx^{k-1} = k \cdot \frac{1}{x}.$$

Donc $g(x) = k \ln x + C$ et $g(1) = k \ln 1 + C$ donc $C = g(1) = \ln 1 = 0$.

Finalement $\ln(x^k) = k \cdot \ln(x)$.

□

Remarque. La croissance de la fonction logarithme est plus faible que celle de x^k pour n'importe quel nombre rationnel $k > 0$, lorsque $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Q}, k > 0.$$

Application au calcul intégral

Pour $x > 0$, on a $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ donc $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ pour $x \in]0, \infty[$.

Si $x < 0$, alors $\ln x$ n'est pas défini, mais $\ln(-x)$ est défini et

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Donc $\int \frac{1}{x} dx = \ln(\underbrace{-x}_{|x|}) + C$ si $x \in]-\infty, 0[$.

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \text{ pour } x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

De plus, si f est une fonction qui ne s'annule jamais ($f(x) \neq 0$ pour tout $x \in D(f)$), alors $(\ln |f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$.

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Exemples

1. $\int \frac{3x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$
2. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C.$

1.7 La fonction exponentielle

La fonction $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone croissante, donc si $x \longmapsto \ln x$
 $x_1 \neq x_2$ alors $\ln x_1 \neq \ln x_2$. Ainsi on peut inverser cette fonction et obtenir

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, \infty[, \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \quad \text{que l'on appelle la fonction exponentielle.}$$

Définition. L'exponentielle de $x \in \mathbb{R}$ est le nombre réel positif dont le logarithme vaut x :

$$y = e^x \iff \ln y = x.$$

Le logarithme de y est le nombre réel dont l'exponentielle vaut y .

On a donc

$$\begin{array}{l} \ln e^x = x \\ e^{\ln y} = y \\ e^0 = 1 \text{ car } \ln 1 = 0 \\ e^x > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Définition. L'exponentielle de 1, c'est-à-dire e^1 , s'appelle le *nombre d'Euler* (1707-1783) et est noté e . C'est l'unique nombre réel dont le logarithme vaut 1.

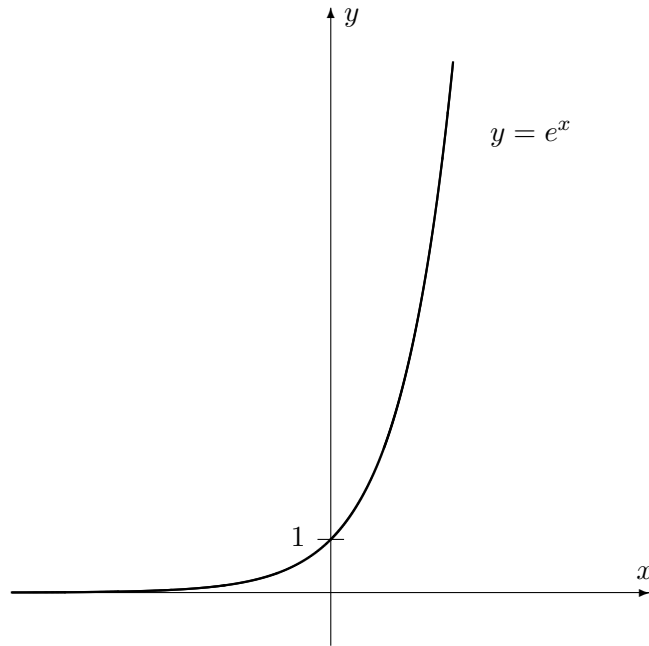
$$e = 2,718281828459045 \dots$$

Étudions brièvement la fonction exponentielle :

On sait que $\lim_{y \rightarrow 0^+} (\ln y) = -\infty$ donc si $y \rightarrow 0^+$ alors $x = \ln y \rightarrow -\infty$ ou autrement dit si $x \rightarrow -\infty$ alors $y = e^x \rightarrow 0^+$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ avec $e^x > 0$ pour tout x .

On sait que $\lim_{y \rightarrow \infty} (\ln y) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$.

Le graphe de la fonction exponentielle est :



Propriétés

1. $e^{x+y} = e^x e^y$.
2. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$.
3. $(e^x)^k = e^{kx}$ pour $k \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit $u = e^x$ et $v = e^y$, on a $x = \ln u$ et $y = \ln v$.

1. On sait que $x + y = \ln u + \ln v = \ln(uv) = \ln(e^x e^y)$ et donc $e^{x+y} = e^{\ln(e^x e^y)} = e^x e^y$.
2. On sait que $x - y = \ln u - \ln v = \ln \frac{u}{v} = \ln \left(\frac{e^x}{e^y} \right)$ et donc $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$.
3. On sait que $kx = k \ln u = \ln(u^k) = \ln(e^x)^k$ et donc $(e^x)^k = e^{kx}$.

□

Remarque. La croissance de la fonction exponentielle est plus forte que celle de x^k pour tout nombre rationnel k , lorsque $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty \text{ pour tout } k \in \mathbb{Q}.$$

Application au calcul différentiel et intégral

Calculons la dérivée de la fonction exponentielle :

$$\begin{aligned}\ln(e^x) &= x \\ (\ln(e^x))' &= 1 \\ \frac{1}{e^x}(e^x)' &= 1 \\ \Rightarrow (e^x)' &= \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (e^x)' &= e^x \\ \Rightarrow \int e^x dx &= e^x + C. \\ (e^{f(x)})' &= f'(x)e^{f(x)} \\ \Rightarrow \int f'(x)e^{f(x)} dx &= e^{f(x)} + C.\end{aligned}$$

Exemples

1. $(e^{\sin x})' = \cos x e^{\sin x}.$
2. $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = e^{\tan x} + C.$

On a défini x^n comme suit : pour n entier > 0 : $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ fois}}$
pour n entier < 0 : $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$
pour n fractionnaire : $n = \frac{p}{q} \Rightarrow x^n = \sqrt[q]{x^p}$

Qu'en est-il pour n réel ? Que signifie x^n ? par exemple que signifie $x^{\sqrt{2}}$ ou x^π ?
Pour donner un sens à ces expressions on pose :

Définition. $a^b = e^{b \ln a}$ pour $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Cette définition coïncide avec ce que l'on a déjà défini dans le cas particulier où $b \in \mathbb{Q}$, car si $b \in \mathbb{Q}$, $a^b = e^{b \ln a} = e^{\ln a^b} = a^b$.

Exemples

1. La fonction $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{R}$ est définie sur $]0, \infty[$ par $f(x) = e^{n \ln x}$.

$$f'(x) = (e^{n \ln x})' = (e^{n \ln x}) \frac{n}{x} = \frac{n e^{n \ln x}}{e^{\ln x}} = n e^{n \ln x - \ln x} = n x^{n-1}.$$

On peut donc étendre la règle de dérivation bien connue au cas où $n \in \mathbb{R}$:

$$(x^n)' = n x^{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{R}.$$

2. On peut aussi considérer la fonction $f(x) = a^x$ pour a réel > 0 .

$$f'(x) = (a^x)' = (e^{x \ln a})' = (e^{x \ln a}) \ln a = a^x \ln a.$$

D'où la nouvelle règle de dérivation :

$$(a^x)' = (\ln a) a^x.$$

Remarque sur les logarithmes

On a défini le logarithme naturel par la formule :

$$\ln x = y \iff e^y = x.$$

De même, si b est un nombre réel > 0 , on peut définir le *logarithme en base b* sur $]0, \infty[$ par la formule :

$$\log_b x = y \iff b^y = x.$$

Le logarithme en base b de x est la puissance à laquelle il faut élever la base b pour obtenir x .

Mais on peut ramener tous les logarithmes au logarithme naturel :

$$\begin{array}{lcl} \text{en effet, } \log_b x = y & \iff & b^y = x \implies \\ & & \underbrace{b^{\log_b x}}_{e^{(\log_b x) \ln b}} = x \\ & & \downarrow \ln \qquad \qquad \downarrow \ln \\ & & (\log_b x) \ln b = \ln x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \log_b x &= \frac{\ln x}{\ln b} \\ (\log_b x)' &= \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

1.8 Intégration par parties

Nous avons obtenu des règles d'intégration à partir des règles de dérivation. Il y a pourtant une règle de dérivation que nous n'avons pas utilisée, celle de la dérivée d'un produit :

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + C$$

$$\Rightarrow \int \underset{\uparrow}{f'(x)} \underset{\downarrow}{g(x)} dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Exemples

$$1. \int \underset{\downarrow}{x} \underset{\uparrow}{e^x} dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ f'(x) = e^x, \quad f(x) = e^x \\ g(x) = x, \quad g'(x) = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2. \int \underset{\downarrow}{x^2} \underset{\uparrow}{\sin x} dx &= -x^2 \cos x + \underbrace{\int \underset{\downarrow}{2x} \underset{\uparrow}{\cos x} dx}_{2x \sin x - \underbrace{\int 2 \sin x dx}_{-2 \cos x + C}} \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

$$3. \int \ln x dx = \int \underset{\uparrow}{1} \underset{\downarrow}{\ln x} dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

$$4. \int \underset{\downarrow}{\sin x} \underset{\uparrow}{e^x} dx = \sin x e^x - \underbrace{\int \underset{\downarrow}{\cos x} \underset{\uparrow}{e^x} dx}_{\cos x e^x + \int \sin x e^x dx}$$

$$\Rightarrow \int \sin x e^x dx = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)e^x + C.$$

Remarque. Il existe de nombreuses autres règles d'intégration (substitution, décomposition en fractions simples, récurrence, ...) mais nous ne les traiterons pas ici.

1.9 Équations différentielles ordinaires du premier ordre

L'un des objectifs principaux du calcul différentiel et intégral est la résolution d'équations différentielles.

Définition. Une *équation différentielle ordinaire du premier ordre* est une équation qui comprend :

- un signe “=”

et tout ou partie de :

- une fonction y d'une variable x que l'on note $y(x)$ qui est l'*inconnue* ;
 - la dérivée $y'(x)$ de cette fonction inconnue ;
 - d'autres termes *connus* qui peuvent être des constantes et/ou d'autres fonctions.
- Résoudre l'équation différentielle signifie chercher la ou les fonctions $y(x)$ qui satisfont l'équation pour tout $x \in D(y)$.

Exemples

1. $y'(x) = 3x^2$

On cherche une ou plusieurs fonctions y telles que $y'(x) = 3x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solutions : $y(x) = x^3 + C$ pour n'importe quelle constante C .

2. $y'(x) = y(x)$

On connaît une solution : $y(x) = e^x$. En fait, toutes les fonctions $y(x) = Ce^x$ sont solutions.

En général, il est difficile de résoudre une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Diverses étapes. Si l'on considère une équation différentielle ordinaire :

1. Existe-t-il une solution ?
2. Si oui, est-elle unique ?
3. Si oui, comment chercher la solution ?

Prenons l'exemple $y'(x) = 3x^2$. Il existe une infinité de solutions $y(x) = x^3 + C$.

Définition. La *solution générale* d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Il y a de nombreuses théories sur l'existence de solutions. Sous certaines conditions légères, le *théorème d'existence et d'unicité* dit que si l'on considère

- une équation différentielle du premier ordre ;
 - une *condition initiale* qui impose que le graphe de la fonction solution $y(x)$ passe par un point donné (x_0, y_0) , c'est-à-dire $y(x_0) = y_0$;
- alors l'équation différentielle possède *exactement une solution* qui satisfait $y(x_0) = y_0$. Cette solution s'appelle la *solution particulière*.

Exemple. $y'(x) = 3x^2$

La solution générale est : $\underbrace{y(x) = x^3 + C}$

car toutes les solutions sont de cette forme.

- Si l'on impose la condition $y(0) = 4$, alors $y(x) = x^3 + C$ doit satisfaire $y(0) = 4$, donc

$$4 = 0^3 + C$$

autrement dit $C = 4$ et on obtient la solution particulière

$$y(x) = x^3 + 4.$$

- Si l'on impose la condition $y(2) = 10$, alors $y(x) = x^3 + C$ doit satisfaire $y(2) = 10$, donc

$$10 = 2^3 + C$$

autrement dit $C = 10 - 8 = 2$ et on obtient la solution particulière

$$y(x) = x^3 + 2.$$

1.10 Équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre

Le but de ce paragraphe consiste à résoudre quelques équations différentielles du premier ordre.

Définition. Une équation différentielle ordinaire du premier ordre est *linéaire* si elle est de la forme

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions continues données et $y(x)$ est la fonction inconnue.

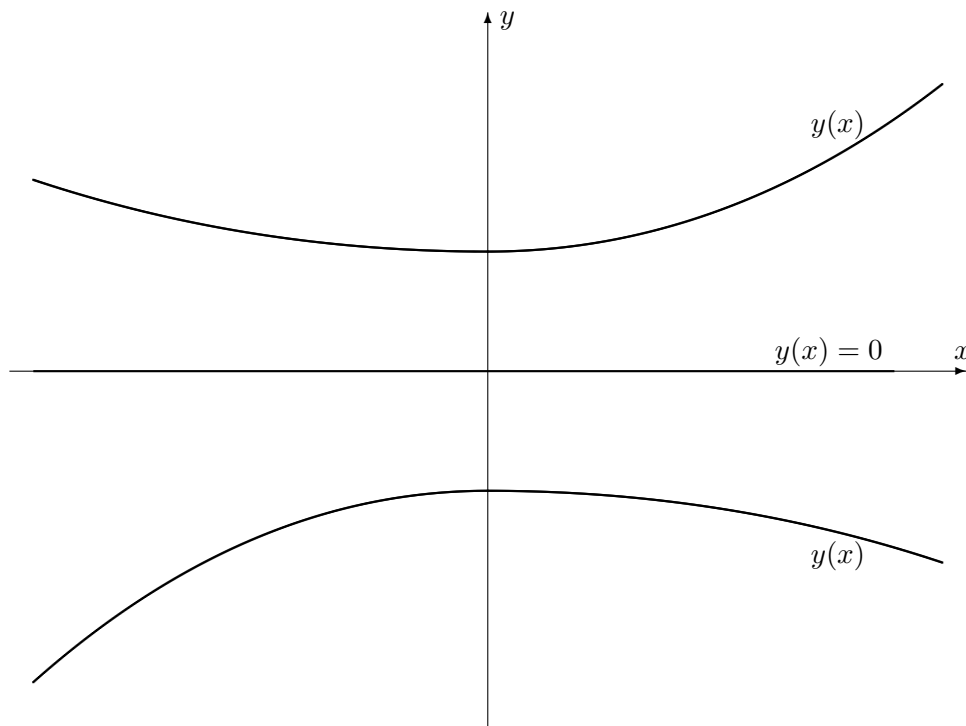
Ce type d'équations différentielles satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité, donc si l'on donne une condition initiale $y(x_0) = y_0$, alors il existe une unique solution qui satisfait cette condition.

Dans un premier temps, nous allons considérer le cas particulier où $q(x)$ est la fonction nulle : $q(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On considère ainsi les équations différentielles de la forme

$$y'(x) = p(x)y(x)$$

que l'on appelle des équations différentielles *linéaires homogènes* du premier ordre.

Remarque. La fonction nulle $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est clairement une solution de l'équation $y'(x) = p(x)y(x)$.



Par le théorème d'existence et d'unicité, toutes les autres solutions de l'équation $y'(x) = p(x)y(x)$ sont des fonctions dont le graphe ne *peut pas* couper l'axe $0x$, car si c'était le cas en un point $(x_0, 0)$, il y aurait deux solutions (la solution considérée et la fonction nulle) dont le graphe passerait par $(x_0, 0)$.

Par conséquent, si $y(x)$ est une solution différente de la fonction nulle, alors $y(x)$ satisfait :

$$\begin{cases} y(x) > 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ ou} \\ y(x) < 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donc, on connaît déjà une solution : la solution nulle $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On cherche *les autres* solutions et on peut donc supposer que $y(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} y'(x) &= p(x)y(x) \\ \frac{y'(x)}{y(x)} &= p(x) \\ \implies \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx &= \int p(x) dx \implies \ln |y(x)| = P(x) + K \end{aligned}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ et K une constante.

Premier cas : On suppose $y(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $|y(x)| = y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \implies \ln(y(x)) &= P(x) + K \\ e^{\ln(y(x))} &= e^{K+P(x)} \\ \implies y(x) &= e^K e^{P(x)}. \end{aligned}$$

Deuxième cas : On suppose $y(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $|y(x)| = -y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \implies \ln(-y(x)) &= P(x) + K \\ e^{\ln(-y(x))} &= e^{K+P(x)} \\ -y(x) &= e^K e^{P(x)} \\ \implies y(x) &= -e^K e^{P(x)}. \end{aligned}$$

On a ainsi trouvé trois “familles” de solutions de l'équation différentielle $y'(x) = p(x)y(x)$:

1. la solution nulle $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
2. les solutions $y(x) = e^K e^{P(x)}$, où K est une constante réelle quelconque ($e^K > 0$) ;
3. les solutions $y(x) = -e^K e^{P(x)}$, où K est une constante réelle quelconque ($-e^K < 0$) ;

que l'on peut regrouper comme suit :

Théorème. *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène*

$$y'(x) = p(x)y(x)$$

est l'ensemble des fonctions

$$y(x) = Ce^{P(x)}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ et C est une constante réelle qui peut être $= 0$, > 0 ou < 0 .

Méthode de résolution de l'équation différentielle $y'(x) = p(x)y(x)$.

1. Calculer une primitive $P(x)$ de $p(x)$.
2. Écrire la *solution générale* $y(x) = Ce^{P(x)}$.
3. S'il y a une condition initiale, l'utiliser pour déterminer C et donner la *solution particulière* en remplaçant C par sa valeur.

Exemples

1. Croissance d'une population

On considère une population dont le nombre d'individus au temps t est noté $y(t)$. L'expérience montre que le taux d'accroissement de la population, c'est-à-dire l'augmentation de la population par unité de temps, est proportionnel à $y(t)$:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{y(t+dt) - y(t)}{dt} = y'(t) = k \cdot y(t)$$

où k est une constante qui dépend de la population.

On obtient donc une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre de la forme

$$y'(t) = p(t)y(t)$$

où $p(t) = k$. On obtient $P(t) = kt$ et la solution générale est

$$y(t) = Ce^{kt}.$$

Si l'on connaît la population au temps 0 : $y(0) = y_0$, on obtient $C = y_0$ et la solution particulière

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

2. Désintégration radioactive

Une substance radioactive se désintègre en une autre substance. L'expérience montre que la proportion de noyaux qui se désintègrent par unité de temps est constante.

Notons $y(t)$ le nombre de noyaux au temps t . Le nombre de noyaux désintégrés entre t et $t + dt$ vaut $y(t) - y(t + dt)$, et par unité de temps ce nombre devient

$$\frac{y(t) - y(t + dt)}{dt}.$$

La proportion de noyaux qui se désintègrent est donc

$$\frac{\frac{y(t)-y(t+dt)}{dt}}{y(t)} = k$$

où k est une constante qui dépend de la substance radioactive. En prenant la limite pour $dt \rightarrow 0$, on obtient :

$$\frac{-y'(t)}{y(t)} = k$$

et l'équation différentielle

$$y'(t) = -ky(t).$$

Ici $p(t) = -k$, donc $P(t) = -kt$ et la solution générale est

$$y(t) = Ce^{-kt}.$$

Si l'on connaît $y(0) = y_0$ le nombre de noyaux au temps $t = 0$, on obtient $C = y_0$, d'où la solution particulière

$$y(t) = y_0 e^{-kt}.$$

Pour décrire la constante k qui dépend de la substance radioactive, on considère Δ le temps nécessaire pour que la quantité de noyaux diminue de moitié, appelé temps de *demi-vie* de la substance.

$$\begin{aligned} \text{On a alors } y(t + \Delta) &= \frac{1}{2}y(t) \\ y_0 e^{-k(t+\Delta)} &= \frac{1}{2}y_0 e^{-kt} \\ e^{-k\Delta} &= \frac{1}{2} \\ -k\Delta &= \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \\ \implies k &= \frac{\ln 2}{\Delta}. \end{aligned}$$

1.11 Équations différentielles linéaires inhomogènes du premier ordre

Nous traitons maintenant le cas général des équation différentielles linéaires du premier ordre :

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x). \quad (*)$$

L'équation homogène associée à (*) est : $y'(x) = p(x)y(x)$. (**)

Constatations

1. La solution générale de l'équation (**) est $y(x) = Ce^{P(x)}$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$.

Si φ est une solution de (*), alors $\varphi'(x) = p(x)\varphi(x) + q(x)$. Dans ce cas, la fonction $y(x) = Ce^{P(x)} + \varphi(x)$ est aussi solution de l'équation (*).

$$\begin{aligned} \text{En effet, } y'(x) &= Cp(x)e^{P(x)} + \underbrace{\varphi'(x)}_{p(x)\varphi(x)+q(x)} \\ &= p(x) \underbrace{[Ce^{P(x)} + \varphi(x)]}_{y(x)} + q(x). \end{aligned}$$

2. Soit $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux solutions de (*). Alors

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(x) &= p(x)\varphi(x) + q(x) \\ \psi'(x) &= p(x)\psi(x) + q(x) \end{aligned} \right\} \implies \psi'(x) - \varphi'(x) = p(x)(\psi(x) - \varphi(x))$$

$$\implies \psi(x) - \varphi(x) \text{ est solution de (**) donc de la forme } \psi(x) - \varphi(x) = Ce^{P(x)}.$$

$$\implies \psi(x) = Ce^{P(x)} + \varphi(x).$$

Nous avons montré :

Théorème. La solution générale de l'équation différentielle linéaire inhomogène (*)

$$y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$$

est l'ensemble des fonctions

$$y(x) = Ce^{P(x)} + \varphi(x)$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$, C est une constante et $\varphi(x)$ est une solution de (*).

Remarque. Ce théorème nous dit que si l'on trouve une solution $\varphi(x)$ de (*), alors on obtient toutes les solutions de (*).

Pour trouver une solution $\varphi(x)$ de (*), on a deux méthodes :

- A.** La chance : par exemple, si $y'(x) = y(x) + 1$, on devine que $y(x) = -1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est une solution. D'où la solution générale $y(x) = Ce^x - 1$.

B. Pas de chance, on ne “devine” pas $\varphi(x)$, alors on utilise la méthode suivante : on pose

$$\varphi(x) = \gamma(x)e^{P(x)}$$

où $\gamma(x)$ est une fonction à trouver.

On introduit $\varphi(x)$ dans (*) :

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \gamma(x)e^{P(x)} &\implies \varphi'(x) = \gamma'(x)e^{P(x)} + \gamma(x)p(x)e^{P(x)} \\ (*) &\implies \varphi'(x) = p(x)\varphi(x) + q(x) \end{aligned}$$

cela nous donne

$$\begin{aligned} \gamma'(x)e^{P(x)} + \gamma(x)p(x)e^{P(x)} &= p(x)\gamma(x)e^{P(x)} + q(x) \\ \implies \gamma'(x)e^{P(x)} &= q(x) \end{aligned}$$

$\implies \gamma'(x) = q(x)e^{-P(x)}.$
--

Ainsi on obtient $\gamma(x)$ en prenant une primitive de $q(x)e^{-P(x)}$ et on obtient ensuite $\varphi(x)$ en posant $\varphi(x) = \gamma(x)e^{P(x)}$.

Méthode de résolution de l'équation différentielle $y'(x) = p(x)y(x) + q(x)$.

1. Calculer une primitive $P(x)$ de $p(x)$.
2. Calculer une primitive $\gamma(x)$ de $q(x)e^{-P(x)}$.
3. Écrire la *solution générale* $\boxed{y(x) = Ce^{P(x)} + \gamma(x)e^{P(x)}}$ où C est une constante.
4. Si une condition initiale $y(x_0) = y_0$ est donnée, l'utiliser pour trouver C et obtenir la *solution particulière*.

Exemples

1. $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x^2$, $x > 0$.

Ici $p(x) = \frac{1}{x}$ et $q(x) = x^2$.

On commence par trouver une primitive $P(x) = \ln x$ de $p(x)$ et donc

$$e^{P(x)} = e^{\ln x} = x.$$

Ensuite on considère $q(x)e^{-P(x)} = x^2 \frac{1}{x} = x$ et on en trouve une primitive $\gamma(x) = \frac{1}{2}x^2$. D'où la solution générale :

$$y(x) = Cx + \frac{1}{2}x^3.$$

2. $y'(x) = 2xy(x) + x$.

Ici $p(x) = 2x$ et $q(x) = x$.

On trouve $P(x) = x^2$ et donc $e^{P(x)} = e^{x^2}$.

On cherche ensuite $\gamma(x)$ une primitive de $q(x)e^{-P(x)} = xe^{-x^2}$:

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int -2xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$$

et on choisit $\gamma(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$. D'où la solution générale :

$$y(x) = Ce^{x^2} - \frac{1}{2}.$$

3. $y'(x) = y(x) + \sin x$.

Ici $p(x) = 1$ et $q(x) = \sin x$.

On trouve $P(x) = x$ et donc $e^{P(x)} = e^x$.

On cherche ensuite $\gamma(x)$ une primitive de $q(x)e^{-P(x)} = \sin xe^{-x}$:

$$\int \underbrace{\sin x e^{-x} dx}_{\substack{\downarrow \quad \uparrow}} = -\sin x e^{-x} + \underbrace{\int \cos x e^{-x} dx}_{\substack{\downarrow \quad \uparrow}} - \cos x e^{-x} - \int \sin x e^{-x} dx$$

$$\int \sin x e^{-x} dx = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^{-x} + k$$

et on choisit $\gamma(x) = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)e^{-x}$. Par suite $\gamma(x)e^{P(x)} = -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$. D'où la solution générale :

$$y(x) = Ce^x - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$$

1.12 Autres exemples d'équations différentielles du premier ordre

Voici un seul exemple d'équation différentielle non linéaire du premier ordre :

Résoudre $y'(x) = xe^{x+y(x)}$ avec la condition initiale $y(1) = 0$.

$$\begin{aligned}y'(x) &= xe^x e^{y(x)} \\ \frac{y'(x)}{e^{y(x)}} &= xe^x \quad \text{car } e^{y(x)} > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \\ y'(x)e^{-y(x)} &= xe^x.\end{aligned}$$

Intégrons par rapport à x des deux côtés du signe “=” :

$$\begin{aligned}\int y'(x)e^{-y(x)} dx &= -e^{-y(x)} + K_1 \\ \int \underset{\downarrow}{xe^x} \underset{\uparrow}{dx} &= ex^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + K_2 \\ \implies -e^{-y(x)} &= xe^x - e^x + \underbrace{(K_2 - K_1)}_C \\ e^{-y(x)} &= e^x(1 - x) - C.\end{aligned}$$

On applique \ln de chaque côté :

$$\begin{aligned}-y(x) &= \ln(e^x(1 - x) - C) \\ y(x) &= -\ln(e^x(1 - x) - C).\end{aligned}$$

La condition initiale donne

$$y(1) = 0 \implies 0 = -\ln(\underbrace{e(1 - 1)}_0 - C) \implies -C = 1.$$

D'où la solution :

$$y(x) = -\ln(e^x(1 - x) + 1).$$

2 Systèmes d'équations linéaires et calcul matriciel

2.1 Calcul matriciel

Définition. Une *matrice* ($m \times n$) est un tableau rectangulaire de nombre réels à m lignes et n colonnes, de la forme

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}} \right\} m \text{ lignes}$$

Un élément (ou coefficient) de la matrice A est donc de la forme

$$a_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

l'indice i signifiant que a_{ij} se trouve à la i -ème ligne et l'indice j signifiant que a_{ij} se trouve à la j -ème colonne.

On note $A = (a_{ij})$.

Exemples

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice (2×2).
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice (2×4).
3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ est une matrice (3×1).
4. $(1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 5 \ \sqrt{2})$ est une matrice (1×6).

Définitions

1. La matrice ($m \times n$) *nulle* est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
2. Une matrice ($m \times n$) avec $m = n$ est dite *matrice carrée*.

$$3. \text{ La matrice carrée } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est appelée *matrice identité* ($n \times n$).

4. Une matrice carrée est *diagonale* si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nous allons faire du “calcul” avec des matrices.

• **Somme :**

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices $(m \times n)$.

On définit :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij});$$

c'est encore une matrice $(m \times n)$.

Exemple. Avec $m = 2$ et $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

• **Produit d'une matrice par un nombre réel :**

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $(m \times n)$ et soit λ un nombre réel.

On définit :

$$\lambda A = (\lambda a_{ij});$$

c'est encore une matrice $(m \times n)$.

Exemple

$$-5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -20 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ces deux opérations ne sont que des généralisations de ce que l'on sait faire avec des vecteurs.

Voici une opération plus compliquée :

• **Produit matriciel :**

Soit A une matrice $(m \times n)$: $A = (a_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Soit B une matrice $(n \times p)$: $B = (b_{jk})$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq p$.

Le produit AB est la matrice $(m \times p)$ dont les éléments sont $AB = (c_{ik})$, où

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \stackrel{\text{notation}}{=} \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}.$$

Interprétation : c_{ik} = produit scalaire de la i -ème ligne de A et de la k -ème colonne de B .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1k}} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & \mathbf{b_{2k}} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \mathbf{b_{nk}} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & \mathbf{c_{ik}} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \uparrow \\ \text{colonne } k \end{matrix}$$

Exemples

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -3 & 12 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 15.$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

En général : si A est une matrice carrée $(n \times n)$ et I la matrice identité $(n \times n)$, alors

$$AI = A = IA.$$

$$4. \left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \text{(En général) si } A \text{ et } B \\ \text{sont deux matrices carrées,} \\ AB \neq BA. \end{matrix}$$

Règles de calcul :

$$1) A(BC) = (AB)C$$

$$2) (\lambda A)B = \lambda(AB).$$

Attention : il est possible que AB soit défini et que BA ne le soit pas.

Définition. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $(m \times n)$, alors la *transposée* de A est la matrice $(n \times m)$

$$A^t = (b_{ij}) \quad \text{où} \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemples

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A^t = (1 \quad 4 \quad 2).$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} = A^t.$$

Soit A une matrice carrée. Si $A = A^t$, alors A est dite *symétrique*.

$$4. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -6 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = -A^t.$$

Si $A = -A^t$, alors A est dite *antisymétrique*.

2.2 Exemples d'applications du calcul matriciel

(A) Application à la démographie

On considère une population dont la durée de vie maximale est 100 ans. On s'intéresse à une population d'individus femelles. On divise cette population en 5 classes d'âge (de durée égale) :

- ① : $[0, 20[$ = les individus d'âge < 20 ans
- ② : $[20, 40[$ = les individus d'âge ≥ 20 ans, mais < 40 ans
- ③ : $[40, 60[$ = les individus d'âge ≥ 40 ans, mais < 60 ans
- ④ : $[60, 80[$ = les individus d'âge ≥ 60 ans, mais < 80 ans
- ⑤ : $[80, 100]$ = les individus d'âge ≥ 80 ans.

On connaît la distribution initiale $\vec{v}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_5^0 \end{pmatrix}$, où $x_i^0 =$ nombre d'individus femelles en classe ①.

Cette distribution varie dans le temps :

$$\begin{array}{ll} t_0 = 0 & \vec{v}^0 = \text{distribution au temps } t_0 \\ t_1 = 20 \text{ ans} & \vec{v}^1 = \text{distribution au temps } t_1 \\ t_2 = 40 \text{ ans} & \vec{v}^2 = \text{distribution au temps } t_2 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

On a : $x_{i+1}^{k+1} = x_i^k \pm$ modifications dues aux décès et aux naissances.

Pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$, on note $a_i =$ nombre de filles nées de chaque individu femelle pendant qu'il était en classe ①
 $b_i =$ fraction d'individus femelles en classe ① qui survit et passe en classe ② ($\Rightarrow b_5 = 0$).

On a $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, $0 < b_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

On suppose au moins un des $a_i > 0$, sinon la population s'éteint.

Question. Comment évolue la répartition de la population dans les différentes classes d'âge ?

Notons encore $\vec{v}^k =$ distribution au temps t_k : $\vec{v}^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_5^k \end{pmatrix}$

$\vec{v}^0 =$ distribution initiale.

Observons que (avec “ $\#$ = nombre de”) :

- $\#$ femelles en classe $\textcircled{1}$ au temps $t_k =$ $\#$ filles nées de femelles en classe $\textcircled{1}$ pendant l'intervalle $[t_{k-1}, t_k]$
- + $\#$ filles nées de femelles en classe $\textcircled{2}$ pendant l'intervalle $[t_{k-1}, t_k]$
- + ...
- + $\#$ filles nées de femelles en classe $\textcircled{5}$ pendant l'intervalle $[t_{k-1}, t_k]$

$$\implies x_1^k = a_1 x_1^{k-1} + a_2 x_2^{k-1} + \dots + a_5 x_5^{k-1}.$$

- $\#$ femelles en classe $\textcircled{i+1}$ au temps $t_k =$ (fraction b_i) \cdot $\#$ femelles en classe \textcircled{i} au temps t_{k-1}

$$\implies x_{i+1}^k = b_i x_i^{k-1}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

On peut donc exprimer l'évolution de la répartition de la population par un produit matriciel :

$$\vec{v}^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \\ x_5^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k-1} \\ x_2^{k-1} \\ x_3^{k-1} \\ x_4^{k-1} \\ x_5^{k-1} \end{pmatrix}.$$

On définit $L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 \end{pmatrix}$ (dite *matrice de Leslie*).

Ainsi

$$\begin{aligned}
\vec{v}^1 &= L\vec{v}^0 \\
\vec{v}^2 &= L\vec{v}^1 = LL\vec{v}^0 = L^2\vec{v}^0 \\
\vec{v}^3 &= L^3\vec{v}^0 \\
&\vdots \\
\boxed{\vec{v}^k &= L^k\vec{v}^0.}
\end{aligned}$$

Exemple

Pour
$$L = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}^0 = \begin{pmatrix} 1'000 \\ 1'000 \\ 1'000 \\ 800 \\ 400 \end{pmatrix},$$

on calcule :

$$\begin{aligned}
L^2 &= \begin{pmatrix} 9/4 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
L^3 &= \begin{pmatrix} 25/8 & 5 & 9/4 & 0 & 0 \\ 9/4 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^4 = \begin{pmatrix} 105/16 & 17/2 & 25/8 & 0 & 0 \\ 25/8 & 5 & 9/4 & 0 & 0 \\ 9/4 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où l'on tire la distribution après 80 ans :

$$\vec{v}^4 = L^4 \begin{pmatrix} 1'000 \\ 1'000 \\ 1'000 \\ 800 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 291/16 \cdot 1'000 \\ 83/8 \cdot 1'000 \\ 19/4 \cdot 1'000 \\ 7/4 \cdot 1'000 \\ 1/8 \cdot 1'000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18'1875 \\ 10'375 \\ 4'750 \\ 1'750 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

Objectif. Pour comprendre l'évolution de la distribution démographique de la population de cet exemple, il suffit de savoir **calculer** L^k , pour tout entier $k \geq 1$.

(B) Application à la génétique

Nous allons considérer la transmission d'une génération à l'autre d'un caractère génétique. Chaque individu d'une population possède une paire de gènes, appelée génotype, qui détermine un de ses traits. Ces deux gènes sont choisis parmi A et B . Les possibilités sont donc

$$AA, AB, BB.$$

Exemples

1. Fleurs : AA = rouge
 AB = rose
 BB = blanche.
2. Humains : AA = yeux bruns
 AB = yeux bruns
 BB = yeux bleus. (Dans ce cas, A est un gène dominant et B un gène récessif.)

Chaque individu possède 2 parents qui lui donnent chacun un gène. D'où le tableau de répartitions (probables) suivant :

Descendants	Parents					
	$AA - AA$	$AA - AB$	$AA - BB$	$AB - AB$	$AB - BB$	$BB - BB$
AA	1	1/2	0	1/4	0	0
AB	0	1/2	1	1/2	1/2	0
BB	0	0	0	1/4	1/2	1

Exemple. Considérons le cas particulier d'une plantation de fleurs qui est fertilisée uniquement par des plantes AA (fleurs rouges).

On note a_k = fraction de fleurs de génotype AA à la k -ème génération
 b_k = fraction de fleurs de génotype AB à la k -ème génération
 c_k = fraction de fleurs de génotype BB à la k -ème génération .

On a $a_k + b_k + c_k = 1$, pour tout $k \geq 0$. Le vecteur $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ décrit la répartition initiale.

Question. Calculer a_k, b_k, c_k , pour tout $k \geq 1$.

Puisque l'on ne fertilise la plantation qu'avec des fleurs de génotype AA , on déduit des trois colonnes de gauche du tableau ci-dessus que pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{cases} a_k = a_{k-1} + \frac{1}{2}b_{k-1} \\ b_k = \frac{1}{2}b_{k-1} + c_{k-1} \\ c_k = 0. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \\ c_{k-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \\ &\dots \end{aligned}$$

En général

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

Objectif. Il suffit donc de **calculer A^k** , pour tout entier $k \geq 1$.

Les objectifs de (A) et (B) sont des motivations pour la suite du cours. Nous reprendrons ces deux applications au Chapitre 4.

2.3 Systèmes d'équations linéaires

Définition. Un *système d'équations linéaires* à m équations et n inconnues (m et n deux entiers positifs) est un ensemble de m équations qui s'écrit comme suit :

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où pour $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$:

- les *coefficients du système* a_{ij} et les *termes inhomogènes* b_i sont des nombres réels donnés ;
- les x_j sont les inconnues que l'on cherche à déterminer.

Une solution du système (*) est un n -tuple $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait simultanément les m équations du système (*).

La solution générale de (*) est l'ensemble de toutes les solutions de (*).

Problème. Étant donné un système d'équations linéaires, déterminer sa solution générale.

Notation. On peut écrire le système (*) sous la forme d'une équation de matrices :

$$\begin{array}{ccc} A & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ (m \times n) & (n \times 1) & (m \times 1) \end{array}$$

où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ est la matrice des coefficients.

Proposition. La solution générale du système (*) est la même que celle du système obtenu à partir de (*) en effectuant les opérations élémentaires suivantes :

- permutation de 2 équations ;
- multiplication d'une équation par un nombre réel $\lambda \neq 0$;
- remplacement d'une équation par la somme de **cette** équation et d'une autre équation.

Démonstration.

a) Trivial.

b) Si $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$, alors $\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \dots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i$.

Inversement, si $\lambda a_{i1}x_1 + \lambda a_{i2}x_2 + \dots + \lambda a_{in}x_n = \lambda b_i$, on divise l'équation par $\lambda (\neq 0)$ pour obtenir $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$.

c) Si (x_1, \dots, x_n) est solution de (*), et en particulier de

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases}$$

alors (x_1, \dots, x_n) est aussi solution de

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ (a_{i1} + a_{k1})x_1 + \dots + (a_{in} + a_{kn})x_n = b_i + b_k, \end{cases}$$

et inversement. □

Notation. Le symbole “ \rightsquigarrow ” signifie “possède la même solution générale que” (également pour la forme matricielle d'un système que l'on verra plus loin).

Exemples

$$1. \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

D'où la solution générale $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

$$2. \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + 6y - 2z = 0 \\ -2x - 3y + z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

La solution générale est donc la solution de l'équation $2x + 3y - z = 0$. On peut par exemple choisir y et z librement et alors $x = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z$. D'où l'on tire la solution générale

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$3. \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 4x + 6y - 2z = 3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 2x + 3y - z = \frac{3}{2} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ \mathbf{0} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

impossible

On déduit que le système n'a pas de solution.

MÉTHODE pour simplifier et résoudre un système d'équations linéaires (méthode d'élimination de Gauss (1777-1855)).

On cherche à résoudre le système

$$(*) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases}$$

- ① Il existe au moins un $a_{i1} \neq 0$, sinon l'inconnue x_1 n'apparaît pas dans le système (*). On permute les équations pour avoir $a_{11} \neq 0$.
- ② On "élimine" x_1 de l'équation (2) par une opération élémentaire, comme suit : on remplace (2) par $a_{11}(2) - a_{21}(1)$. On obtient

$$\text{inchangé} \left[\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ \mathbf{0} + \mathbf{a}'_{22}x_2 + \cdots + \mathbf{a}'_{2n}x_n = \mathbf{b}'_2 & (2') \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 & (3) \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases} \right]$$

où les coefficients $a'_{22}, a'_{23}, \dots, a'_{2n}$ ont été modifiés par l'opération élémentaire.

- ③ On répète la même opération en remplaçant (3) par (3') = $a_{11}(3) - a_{31}(1)$, etc. pour (4), (5), ..., (m). On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1) \\ \mathbf{0} \left| \begin{array}{l} a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad (2') \\ a'_{32}x_2 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \quad (3') \\ \vdots \\ a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \quad (m') \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- ④ En permutant l'ordre des équations et/ou l'ordre des inconnues, on peut supposer $a'_{22} \neq 0$. On répète ② et ③ avec les équations (2'), ..., (m') pour "éliminer" x_2 des équations (3'), ..., (m'). On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1) \\ \mathbf{0} \left| \begin{array}{l} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \quad (2') \\ \mathbf{0} \left| \begin{array}{l} a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \quad (3'') \\ \vdots \\ a''_{m3}x_3 + \cdots + a''_{mn}x_n = b''_m \quad (m'') \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- ⑤ On continue pour obtenir le système sous la forme suivante, après avoir divisé (1) par a_{11} , (2') par a'_{22} , (3'') par a''_{33} etc. :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|l}
 \updownarrow \\
 m \text{ équations}
 \end{array}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \begin{array}{|l}
 \updownarrow \\
 r
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \bar{a}_{13}x_3 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\
 x_2 + \bar{a}_{23}x_3 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2 \\
 x_3 + \dots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3 \\
 \vdots \\
 x_r + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r
 \end{array} \right. \\
 \mathbf{0} \\
 \begin{array}{|l}
 \updownarrow \\
 m-r
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 = \bar{b}_{r+1} \\
 = \bar{b}_{r+2} \\
 = \vdots \\
 = \bar{b}_m
 \end{array} \right. \\
 \mathbf{0}
 \end{array} \right.
 \begin{array}{|l}
 \leftarrow r \rightarrow \quad \leftarrow n-r \rightarrow
 \end{array}
 \end{array}$$

avec $r \leq n$, $r \leq m$ et où les \bar{a}_{ij} , respectivement les \bar{b}_i , sont les coefficients, respectivement les termes inhomogènes, du système transformé. C'est la *forme échelonnée* du système (*).

Le système (*) est ainsi présenté sous une forme simplifiée qui nous permet de déterminer sa solution générale.

CAS 1 $\boxed{r = m}$

CAS 1.1 $\boxed{r = n} = m \implies x_n = \bar{b}_n$. Ensuite

x_{n-1} est déterminé par l'équation $(n-1)$ de la forme échelonnée

x_{n-2} est déterminé par l'équation $(n-2)$ de la forme échelonnée

\vdots

x_1 est déterminé par l'équation (1) de la forme échelonnée.

\implies La solution générale comprend une solution unique.

CAS 1.2 $\boxed{r < n}$ On choisit librement $\underbrace{x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n}_{(n-r) \text{ inconnues}}$ et

$x_r = \bar{b}_r - \bar{a}_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - \bar{a}_{rn}x_n$ et de même on calcule $x_{r-1}, x_{r-2}, \dots, x_1$.

\Rightarrow La solution générale est de la forme

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

CAS 2 $r < m$

CAS 2.1 $\bar{b}_{r+1} = \bar{b}_{r+2} = \cdots = \bar{b}_m = 0$

\Rightarrow les équations $(r+1), (r+2), \dots, (m)$ sont inutiles

\Rightarrow on ne considère que les r premières équations \Rightarrow CAS 1.

CAS 2.2 Il existe un des $\bar{b}_{r+1}, \bar{b}_{r+2}, \dots, \bar{b}_m$ qui est $\neq 0$

\Rightarrow système impossible \Rightarrow le système (*) n'a pas de solution.

PRATIQUEMENT. Pour échelonner le système (*) de départ, on remplace le système par la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Exemples

$$1. \left\{ \begin{array}{cccccc} 2x & + & y & + & z & + & w & = & 1 \\ 3x & + & y & + & z & + & w & = & 2 \\ x & - & y & + & z & - & w & = & 1 \\ -x & + & y & - & z & & & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ccc}
\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} 2(2)-3(1) \\ \rightsquigarrow \\ 2(3)-1(1) \\ 2(4)+(1) \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
\\
\begin{array}{l} -(3)+3(2) \\ \rightsquigarrow \\ (4)+3(2) \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 4 \end{array} \right) & \begin{array}{l} -4(4)+4(3) \\ \rightsquigarrow \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \end{array} \right)
\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} m = 4 \\ n = 4 \\ r = 4 \end{array}$$

$$w = -1$$

$$z = -\frac{1}{2}$$

$$y + z + w = -1 \implies y = -1 - z - w = -1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} - \frac{w}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\implies \text{une unique solution} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad \begin{cases} x & - & z & + & 3w & = & 0 \\ & 4y & - & 4z & & = & 0 \\ x & - & y & - & z & + & w & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 2z & + & 4w & = & 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} m = 4 \\ n = 4 \\ r = 3 \end{array}$$

w choisi librement

$$z = -2w$$

$$y = z = -2w$$

$$x = z - 3w = -5w$$

$$\Rightarrow \text{solution générale} \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = w \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid w \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$3. \begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ z + w = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} m = 2 \\ n = 4 \\ r = 2 \end{array}$$

$x \quad y \quad z \quad w \qquad \qquad \qquad x \quad z \quad y \quad w$

On choisit librement y et w

$$\Rightarrow z = 1 - w$$

$$x = -y - z - w = -y - 1 + w - w = -1 - y$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y, w \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$4. \begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - y + z - w = -1 \\ 2x - 2y + 2z - 2w = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} m = 3 \\ n = 4 \\ r = 2 \end{array}$$

3ème équation : $\boxed{0 = 1} \Rightarrow \text{impossible} \Rightarrow \text{pas de solution.}$

2.4 Combinaisons linéaires, dépendance et indépendance linéaire

Nous allons faire de “l’algèbre linéaire” dans \mathbb{R}^n , l’espace euclidien.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &= \{ (x, y) \mid x \text{ et } y \in \mathbb{R} \} \\ \mathbb{R}^3 &= \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \} \\ \mathbb{R}^n &= \{ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ pour } 1 \leq i \leq n \}.\end{aligned}$$

Un élément de \mathbb{R}^n s’appelle un *vecteur*, noté $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. On peut additionner deux vecteurs :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

On peut multiplier un vecteur par un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Pour construire des vecteurs, on peut considérer un système $S = \{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k \}$ de k vecteurs de \mathbb{R}^n .

Définition. Une *combinaison linéaire* de vecteurs de S est un vecteur \vec{v} de la forme

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ pour } 1 \leq i \leq k.$$

Exemples

1. \mathbb{R}^2 , $S = \{ (1, 0), (0, 1) \}$: $\vec{v} = 3(1, 0) + 2(0, 1) = (3, 2)$.
2. \mathbb{R}^3 , $S = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0) \}$:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 3(1, 0, 0) + (-1)(0, 1, 0) + 4(1, 1, 0) = (7, 3, 0) \\ \text{mais on a aussi } \vec{v} &= 7(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 0(1, 1, 0).\end{aligned}$$

ATTENTION : Un vecteur \vec{v} peut s’exprimer de plusieurs manières comme combinaison linéaire de vecteurs de S .

ATTENTION : $\vec{v} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k$ ne signifie pas que le choix des coefficients réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ soit unique.

Objectif. Choisir S pour que le choix des coefficients soit *unique*.

Si ceci est vrai, on a en particulier $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0) = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ déterminés de manière unique. Mais on peut toujours choisir $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Cela suggère :

Définition. Un système $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k\}$ de vecteurs de \mathbb{R}^n est *linéairement indépendant* si $\vec{0}$ ne peut pas s'écrire sous la forme

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k$$

autrement qu'en choisissant $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

Le système S est dit *linéairement dépendant* dans le cas contraire, donc s'il existe des $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ non tous nuls tel que $\vec{0} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k$.

Théorème. Soit $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k\}$ un système linéairement indépendant de vecteurs de \mathbb{R}^n . Alors si $\vec{v} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k$ est une combinaison linéaire de vecteurs de S , il l'est de manière unique, ce qui signifie que l'on a qu'un seul choix possible des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Démonstration. Supposons que cela ne soit pas le cas :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k \\ &= \beta_1 \vec{s}_1 + \beta_2 \vec{s}_2 + \dots + \beta_k \vec{s}_k \\ \implies \vec{0} &= (\alpha_1 - \beta_1) \vec{s}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \vec{s}_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k) \vec{s}_k \end{aligned}$$

et l'indépendance linéaire du système S implique que :

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - \beta_1) &= 0 \implies \alpha_1 = \beta_1 \\ (\alpha_2 - \beta_2) &= 0 \implies \alpha_2 = \beta_2 \\ &\vdots \\ (\alpha_k - \beta_k) &= 0 \implies \alpha_k = \beta_k. \end{aligned}$$

□

Comment savoir si un système de vecteurs S est linéairement indépendant ?

Exemples

1. \mathbb{R}^3 , $S = \{\vec{s}_1 = (1, 1, 0), \vec{s}_2 = (1, 0, 1), \vec{s}_3 = (0, 1, 1)\}$:

$$\vec{0} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \alpha_3 \vec{s}_3 \iff (\alpha_1, \alpha_1, 0) + (\alpha_2, 0, \alpha_2) + (0, \alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Sous forme de système :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ est l'unique solution et donc S est linéairement indépendant.

2. \mathbb{R}^3 , $S = \{ \vec{s}_1 = (1, 1, 1), \vec{s}_2 = (1, 2, -1), \vec{s}_3 = (3, 4, 1) \}$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Matriciellement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

On peut choisir α_3 librement

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3 = -2\alpha_3.$$

$$\text{Ainsi } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \text{il y a des solutions différentes de } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \implies S \text{ est linéairement dépendant.}$$

Remarques

1. $S = \{ \vec{0}, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k \}$ est linéairement dépendant car $\vec{0} = 1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{s}_2 + 0 \cdot \vec{s}_3 + \dots + 0 \cdot \vec{s}_k$.
2. Tout système $S = \{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k \}$ de vecteurs de \mathbb{R}^n avec $k > n$ est linéairement dépendant. En effet, vérifier l'indépendance linéaire revient à résoudre un système d'équations à k inconnues et n équations qui sous forme échelonnée est

$$\begin{cases} \alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1k}\alpha_k = 0 \\ \quad + \alpha_2 + \dots + a_{2k}\alpha_k = 0 \\ \quad \quad \ddots \\ \quad \quad \quad \alpha_n + \dots + a_{nk}\alpha_k = 0 \end{cases}$$

et on peut donc choisir librement $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_k$.

3. **ATTENTION** : La réciproque est fausse : par exemple, dans \mathbb{R}^3 , le système $S = \{ (1, 1, 0), (2, 2, 0) \}$ est linéairement dépendant.

2.5 Sous-espaces vectoriels

Définition. Un *sous-espace vectoriel* de \mathbb{R}^n est un ensemble V de vecteurs de \mathbb{R}^n tel que

1. si \vec{v} et $\vec{u} \in V$, alors $\vec{v} + \vec{u} \in V$;
2. si $\vec{v} \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda\vec{v} \in V$.

Exemples

1. \mathbb{R}^n est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
2. $\{\vec{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
3. $V = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 car
 - $(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in V$;
 - $\lambda(x, y, 0) = (\lambda x, \lambda y, 0) \in V$.
4. $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 car si $(x, y) \in V$, $\lambda(x, y) \notin V$ lorsque $\lambda \neq 1$.

Proposition. Soit S un système de vecteurs de \mathbb{R}^n . Alors

$$V = \{ \text{combinaisons linéaires de vecteurs de } S \}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Définition. Dans ce cas, on dit que S est un *système de générateurs* de V .

Démonstration. Évident. □

Exemples

1. \mathbb{R}^2
 $S = \{(1, 0)\}$
 $V = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = 0\}$.
2. \mathbb{R}^2
 $S = \{(1, 0), (1, 1)\}$
 $V = \mathbb{R}^2$.

En effet, tout vecteur $\vec{v} = (x, y)$ peut s'écrire $(x, y) = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(1, 1)$ car

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_2 = y \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = y \Rightarrow \alpha_1 = x - y.$$

2.6 Bases et dimension

Soit V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Définition. Une *base* de V est un système de vecteurs S de V qui

1. est un système de générateurs de V ;
2. est linéairement indépendant.

De cette définition, il découle donc :

1. tout vecteur de V s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de S ;
2. il s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de S .

Ainsi, si $S = \{ \vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k \}$ est une base de V , alors tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k .$$

Les nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ s'appellent les coordonnées de \vec{v} dans la base S .

Exemples

1. Dans \mathbb{R}^3

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$S = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}; \text{ } S \text{ s'appelle la } \textit{base standard de } \mathbb{R}^3.$$

$$(x, y, z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unique}}}{=} x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) .$$

2. Dans \mathbb{R}^3

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$S = \{ (1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0) \}.$$

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\text{donné}} = \alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(1, 1, 0) .$$

\uparrow
est-ce soluble ? de manière unique ?

On doit résoudre :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \quad + \alpha_2 + \alpha_3 = y \\ \alpha_1 + \alpha_2 = z \end{cases}$$

Matriciellement :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & x - z \end{array} \right) .$$

D'où

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= x - z \\ \alpha_2 &= y - \alpha_3 = y - x + z \\ \alpha_1 &= x - \alpha_2 - \alpha_3 = x - (y - x + z) - (x - z) = x - y.\end{aligned}$$

Ainsi le système est soluble de manière unique et donc S est une base.

ATTENTION : Un sous-espace vectoriel possède plusieurs bases. MAIS :

Théorème. Soit V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ($V \neq \{\vec{0}\}$). Alors toutes les bases de V possèdent le même nombre de vecteurs.

Démonstration. Commençons par une remarque. Soit V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Soient

$$\begin{aligned}S &= \{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k\} \quad \text{un système de vecteurs de } V \text{ linéairement indépendant;} \\ T &= \{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_\ell\} \quad \text{un système de générateurs de } V.\end{aligned}$$

Alors

- $k \leq \ell$ et
- après renumérotation des \vec{t}_i , on a $\{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k, \vec{t}_{k+1}, \dots, \vec{t}_\ell\}$ est un système de générateurs de V .

Preuve de la remarque par récurrence :

Si $k = 0$ c'est évident. Soit $k \geq 1$: on suppose la remarque vraie pour $k - 1$ et donc $\{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_{k-1}, \vec{t}_k, \dots, \vec{t}_\ell\}$ est un système de générateurs de V . On peut donc écrire

$$\vec{0} \neq \vec{s}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \vec{s}_i + \sum_{j=k}^{\ell} \beta_j \vec{t}_j.$$

Dans cette expression, on a au moins un des $\beta_j \neq 0$. Sinon, on aurait $\vec{s}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \vec{s}_i$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \vec{s}_i - \vec{s}_k = \vec{0}$, ce qui contredit l'indépendance linéaire de S . On renumérote les vecteurs $\vec{t}_k, \dots, \vec{t}_\ell$ pour avoir $\beta_k \neq 0$. On en déduit également que $k \leq \ell$. On peut alors écrire

$$\vec{t}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \left(-\frac{\alpha_i}{\beta_k}\right) \vec{s}_i + \frac{1}{\beta_k} \vec{s}_k + \sum_{j=k+1}^{\ell} \left(-\frac{\beta_j}{\beta_k}\right) \vec{t}_j,$$

ce qui implique que \vec{t}_k est engendré par $\{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_{k-1}, \vec{s}_k, \vec{t}_{k+1}, \dots, \vec{t}_\ell\}$, et donc que tout V est engendré par $\{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k, \vec{t}_{k+1}, \dots, \vec{t}_\ell\}$.

Retournons à la démonstration du théorème.

Soient $S = \{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k\}$ et $T = \{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_\ell\}$ deux bases de V . Par la remarque on a $k \leq \ell$ et $\ell \leq k$. □

Ce théorème permet de donner la définition suivante :

Définition. La *dimension* d'un sous-espace vectoriel V , noté $\dim V$, est le nombre de vecteurs dans une base (et donc dans n'importe quelle base) de V .

Exemple. \mathbb{R}^n a une base à n vecteurs (base standard). Ainsi $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Corollaire. Soit V un sous-espace vectoriel de dimension m de \mathbb{R}^n . Alors

1. Plus de m vecteurs de V sont forcément linéairement dépendants.
2. Moins de m vecteurs de V ne peuvent pas engendrer V .
3. Tout système de m vecteurs linéairement indépendants de V est une base de V .
4. Tout système de m vecteurs générateurs de V est une base de V .

Démonstration.

1. Si $\{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k\}$ est linéairement indépendant, alors $k \leq m$ par la remarque de la preuve précédente.
2. Si $\{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_\ell\}$ est un système de générateurs, alors $\ell \geq m$ par la remarque de la preuve précédente.
3. Si $\{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_m\}$ est linéairement indépendant, alors on peut voir par la remarque que c'est un système de générateurs, donc une base.
4. Si $\{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_m\}$ est un système de générateurs de V et s'il n'est pas linéairement indépendant, alors on peut supprimer un des \vec{t}_j , ce qui contredit 2. \square

Corollaire. Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n avec $U \subset V$. Alors

1. $\dim U \leq \dim V$.
2. Si $\dim U = \dim V$, alors $U = V$.

Démonstration.

1. Soit $S = \{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k\}$ une base de U ; par hypothèse c'est un système linéairement indépendant de V . Soit $T = \{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_\ell\}$ une base de V ; par la remarque, on a $k \leq \ell$.
2. Si $k = \ell$, alors tout vecteur de V est engendré par S et donc $V = U$. \square

2.7 Le rang d'une matrice

Définition. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ une matrice $(m \times n)$.

Le *rang-ligne* de A est la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par les m vecteurs lignes

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ &\vdots \\ \vec{s}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}). \end{aligned}$$

Le *rang-colonne* de A est la dimension du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m engendré par les n vecteurs colonnes

$$\begin{aligned} \vec{t}_1 &= (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) \\ &\vdots \\ \vec{t}_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}). \end{aligned}$$

Mais il y a un miracle :

Théorème. *rang-ligne* de A = *rang-colonne* de A .

Remarques. Comment déterminer le rang-ligne de A ?

a) On ne change pas de rang-ligne en échelonnant A .

Par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\implies le rang-ligne de A = # lignes non-nulles dans la matrice échelonnée

(ici rang-ligne $A = 2$).

b) On ne change pas le rang-colonne en échelonnant A . C'est moins clair !

En échelonnant A , on ne change pas l'indépendance linéaire des colonnes \vec{t}_j .

Ainsi on a rang-colonne de A = rang-colonne de la matrice échelonnée

$$\begin{array}{c} \updownarrow r \\ \left(\begin{array}{ccc} \text{L-shaped staircase} & & * \\ 0 & & \\ & & 0 \end{array} \right) \\ \leftarrow r \rightarrow \end{array}$$

Pour trouver le rang-colonne, il faut constater que les r premières colonnes sont linéairement indépendantes, et que toutes les colonnes sont dans \mathbb{R}^r . Ainsi le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes est engendré par les r premières colonnes.

On obtient ainsi la **preuve du théorème** :

$$\text{rang-ligne} = r = \# \text{ nombre d'échelons} = \text{rang-colonne}.$$

Corollaire. Si A est une matrice $(m \times n)$, alors

$$\begin{aligned} \text{rang-ligne de } A &= \text{rang-colonne de } A \leq m \\ \text{rang-ligne de } A &= \text{rang-colonne de } A \leq n. \end{aligned}$$

Définition. Le *rang* d'une matrice $(m \times n)$ A est le rang-ligne de $A = \text{rang-colonne}$ de A .

Si A est une matrice carrée $(n \times n)$, alors $\text{rang } A \leq n$.

Définition. Une matrice carrée $(n \times n)$ A est *régulière* si $\text{rang } A = n$.

Théorème. Soit A une matrice carrée $(n \times n)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. A est régulière ;
2. $\text{rang } A = n$;
3. les lignes de A sont linéairement indépendantes ;
4. les colonnes de A sont linéairement indépendantes.

Démonstration. Évident. □

2.8 Matrices inversibles

Définition. Une matrice carrée $(n \times n)$ A est *inversible* s'il existe une matrice B telle que

$$AB = I = BA$$

où I est la matrice identité $(n \times n)$, $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Si B existe, elle est unique car si :

$$AB = AC = I = BA = CA,$$

alors

$$B \underbrace{AB}_I = \underbrace{BA}_I C \implies B = BI = IC = C.$$

Si A est inversible, on note cette unique matrice B par A^{-1} : c'est la matrice inverse de A .

Théorème. A inversible $\iff A$ régulière.

Démonstration. Soit A une matrice carrée $(n \times n)$. On considère la matrice $(n \times 2n)$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & & 1 \end{array} \right).$$

Si l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & r_{11} & & r_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} & r_{n1} & & r_{nn} \end{array} \right) = (A'|R),$$

où a'_{ij} = combinaison linéaire des a_{kj} (j fixe) : $a'_{ij} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} a_{kj}$ (λ_{ik} indép. de j).

De même $(r_{i1}, \dots, r_{in}) = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} (0, \dots, 0, \underset{\uparrow k}{1}, 0, \dots, 0)$.

D'où

$$r_{ik} = \lambda_{ik} \implies a'_{ij} = \sum_{k=1}^n r_{ik} a_{kj}, \text{ pour tout } i, j \implies \boxed{A' = RA}.$$

- Soit A inversible. On choisit $R = A^{-1} \implies A' = RA = A^{-1}A = I$
 $\implies A'$ possède n lignes échelonnées
 $\implies \text{rang } A = n$
 $\implies A$ régulière.

- Soit A régulière. Par des opérations élémentaires, on arrive à $A' = I$ et donc à $I = RA$. Comme R est régulière, on a $I = SR$ pour une certaine matrice S . D'où

$$A = IA = SRA = SI = S \implies A = S \implies AR = I.$$

Donc on a $RA = I = AR$, c'est-à-dire $R = A^{-1}$. □

Méthode pour calculer la matrice inverse A^{-1} d'une matrice A :

Soit A une matrice carrée ($n \times n$) régulière.

- 1) On écrit $(A|I)$; c'est une matrice $(n \times 2n)$.
- 2) On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de cette matrice pour obtenir $(I|R)$.
- 3) Alors $R = A^{-1}$.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{On calcule : } & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array} \right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3 Applications linéaires

3.1 Définition et exemples

Définition. Une application $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (où n et m sont des entiers positifs) est *linéaire* si

1. $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$, pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$;
2. $f(\lambda \vec{v}) = \lambda f(\vec{v})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Pourquoi est-ce utile ?

Toute application linéaire f possède par conséquent les propriétés suivantes :

3. $f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$ et donc de manière plus générale :
 $f(\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \dots + \alpha_k f(\vec{v}_k)$;
4. $f(\vec{0}) = \vec{0}$, car $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$ pour n'importe quel \vec{v} et $f(\vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{v}) = \vec{0}$.

Exemples

1. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire car $f(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y = f(x) + f(y)$
 $x \longmapsto 3x$ $f(\lambda x) = 3\lambda x = \lambda 3x = \lambda f(x)$.
2. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est non linéaire car $f(x + y) = 2(x + y) + 3$
 $x \longmapsto 2x + 3$ $\neq f(x) + f(y) = 2x + 3 + 2y + 3 = 2(x + y) + 6$.

L'algèbre linéaire est l'étude des applications linéaires à l'aide du calcul matriciel.

3.2 La matrice d'une application linéaire

Soit S une base de \mathbb{R}^n . L'avantage est que tout vecteur de \mathbb{R}^n s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de S .

Objectif. On veut comprendre l'effet d'une application linéaire $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sur tous les vecteurs de \mathbb{R}^n à l'aide de la connaissance de l'effet de f sur S .

Soient $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire, $S = \{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n\}$ une base de \mathbb{R}^n ;
 $T = \{\vec{t}_1, \dots, \vec{t}_m\}$ une base de \mathbb{R}^m .

Pour $k = 1, 2, \dots, n$, $f(\vec{s}_k) \in \mathbb{R}^m$ et donc s'écrit dans la base T comme suit :

$$f(\vec{s}_k) = \sum_{i=1}^m a_{ik} \vec{t}_i.$$

$A = (a_{ik})$ est une matrice $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} \left| \right. & \left| \right. & \left| \right. & & \left| \right. & \left| \right. \\ & & & & \dots & \\ \left. \left| \right. & \left| \right. & \left| \right. & & \left| \right. & \left| \right. \end{pmatrix}.$$

Coordonnées de $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\vec{s}_1) & f(\vec{s}_2) & f(\vec{s}_3) & \dots & f(\vec{s}_n) \end{matrix}$ dans la base T de \mathbb{R}^m .

La matrice A décrit l'image des vecteurs de la base S de \mathbb{R}^n . Grâce à A , on peut décrire l'image de tous les vecteurs de \mathbb{R}^n . Soit \vec{v} un vecteur quelconque de \mathbb{R}^n , alors il s'écrit $\vec{v} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{s}_k$, où les x_k sont les coordonnées de \vec{v} par rapport à S . Par linéarité de f , on a

$$f(\vec{v}) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k \vec{s}_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k \underbrace{f(\vec{s}_k)}_{\sum_{i=1}^m a_{ik} \vec{t}_i} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k\right) \vec{t}_i.$$

Donc, $f(\vec{v})$ est un vecteur de \mathbb{R}^m qui s'écrit par rapport à la base T de \mathbb{R}^m comme suit :

$$f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^m y_i \vec{t}_i,$$

où les y_i sont les coordonnées de $f(\vec{v})$ par rapport à T . On en déduit que $y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$, pour $1 \leq i \leq m$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}.$$

$(m \times 1) \quad (m \times n) \quad (n \times 1)$

Exemples

1. Considérons \mathbb{R}^2 avec la base standard et l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \longmapsto (2x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{s}_1 = (1, 0), \quad f(\vec{s}_1) = (2, 1) = 2 \cdot \vec{s}_1 + 1 \cdot \vec{s}_2 \\ \vec{s}_2 = (0, 1), \quad f(\vec{s}_2) = (1, -1) = 1 \cdot \vec{s}_1 + (-1) \cdot \vec{s}_2 \end{array} \right\} \implies A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A permet de calculer les coordonnées de l'image de tout vecteur de \mathbb{R}^2 :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit \mathbb{R}^3 avec la base standard et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la rotation de 90° autour de l'axe 0_z dans le sens positif.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{s}_1 = (1, 0, 0), \quad f(\vec{s}_1) = (0, 1, 0) \\ \vec{s}_2 = (0, 1, 0), \quad f(\vec{s}_2) = (-1, 0, 0) \\ \vec{s}_3 = (0, 0, 1), \quad f(\vec{s}_3) = (0, 0, 1) \end{array} \right\} \implies A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Attention, il est parfois utile de travailler avec une autre base que la base standard.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec la base

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + x_2, x_2 - x_3)$$

$S = \{ \vec{s}_1 = (1, 1, 0), \vec{s}_2 = (0, 1, 1), \vec{s}_3 = (1, 0, 1) \}$ de \mathbb{R}^3 et

$T = \{ \vec{t}_1 = (1, 0), \vec{t}_2 = (1, 1) \}$ de \mathbb{R}^2 .

$$\left. \begin{array}{l} f(\vec{s}_1) = (2, 1) = 1 \cdot \vec{t}_1 + 1 \cdot \vec{t}_2 \\ f(\vec{s}_2) = (1, 0) = 1 \cdot \vec{t}_1 + 0 \cdot \vec{t}_2 \\ f(\vec{s}_3) = (1, -1) = 2 \cdot \vec{t}_1 + (-1) \cdot \vec{t}_2 \end{array} \right\} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{v} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \alpha_3 \vec{s}_3$ et $f(\vec{v}) = \beta_1 \vec{t}_1 + \beta_2 \vec{t}_2$, alors

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Soit $g \circ f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$,
 $\vec{v} \longmapsto f(\vec{v}) \longmapsto gf(\vec{v})$

alors on peut montrer que la matrice de $g \circ f$ est la matrice $(p \times n)$

$$C = BA$$

où A est la matrice $(m \times n)$ de f et B est la matrice $(p \times m)$ de g .

3.3 L'image d'une application linéaire

Définition. Soit $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. L'*image* de f est

$$\begin{aligned} \text{im } f &= \{ \text{vecteurs de } \mathbb{R}^m \text{ qui sont images par } f \text{ d'un vecteur de } \mathbb{R}^n \} \\ &= \{ f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^n \}. \end{aligned}$$

Remarque. $\text{im } f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m car si $f(\vec{v})$ et $f(\vec{u}) \in \text{im } f$, alors $f(\vec{v}) + f(\vec{u}) = f(\vec{v} + \vec{u}) \in \text{im } f$ et $\lambda f(\vec{v}) = f(\lambda \vec{v}) \in \text{im } f$.

Soit S une base de \mathbb{R}^n , T une base de \mathbb{R}^m et A la matrice de f par rapport à S et T .

Théorème.

1. $\text{im } f$ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m engendré par les vecteurs de \mathbb{R}^m dont les coordonnées sont les colonnes de A .
2. $\dim(\text{im } f) = \text{rang}(A)$.

Démonstration.

1. $\text{im } f$ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m formé de tous les $f(\vec{v})$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Tous les $f(\vec{v})$ s'expriment comme des combinaisons linéaires des $f(\vec{s}_k)$ où $S = \{\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n\}$. Ainsi $\text{im } f$ est engendré par les $f(\vec{s}_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. On conclut en observant que les coordonnées des $f(\vec{s}_k)$ dans la base T sont les vecteurs colonnes de A .
2. $\text{rang } A =$ dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A
 $\implies \text{rang } A = \dim(\text{im } f)$. □

Exemple

Soit $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base standard de \mathbb{R}^3 .

$\text{im } f$ est le sous-espace de \mathbb{R}^3 engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. On calcule le

$$\text{rang de } A : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $\dim(\text{im } f) = \text{rang } A = 2$. Donc si l'on choisit 2 vecteurs linéairement indépendants

parmi les 3 générateurs, on obtient une base de $\text{im } f$, par exemple : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

3.4 Le noyau d'une application linéaire

Définition. Soit $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Le *noyau* de f est

$$\ker f = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{v}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^m \}.$$

Remarque. $\ker f$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n car si \vec{v} et $\vec{u} \in \ker f$, alors

$$\begin{aligned} f(\vec{v} + \vec{u}) &= \underbrace{f(\vec{v})}_{\vec{0}} + \underbrace{f(\vec{u})}_{\vec{0}} = \vec{0} \implies \vec{v} + \vec{u} \in \ker f \quad \text{et} \\ f(\lambda \vec{v}) &= \lambda \underbrace{f(\vec{v})}_{\vec{0}} = \vec{0} \implies \lambda \vec{v} \in \ker f. \end{aligned}$$

Comment calculer $\ker f$? On choisit une base S de \mathbb{R}^n et une base T de \mathbb{R}^m ; on écrit la matrice A de f par rapport à S et T . On a

$$\vec{v} = x_1 \vec{s}_1 + x_2 \vec{s}_2 + \cdots x_n \vec{s}_n \in \ker f \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Bigg\}^m$$

et donc

$$\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exemple

Soit $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ par rapport à la base standard de \mathbb{R}^3 .

$$\text{On doit résoudre } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} &\text{on choisit } x_3 \text{ librement} \\ &x_2 = -x_3 \\ &x_1 = -2x_2 - 3x_3 = -x_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \ker f &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \text{ c'est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3 \text{ de} \\ \text{base } &\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Théorème. Soit $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors

$$\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f) = n.$$

Démonstration. Le système $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est un système de m équations à

n inconnues. Après échelonnement on a : $A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c} \text{staircase pattern} \end{array} \right) \begin{matrix} \updownarrow \\ m \end{matrix}$

$\begin{matrix} \longleftrightarrow & r & \longleftrightarrow \\ & n & \end{matrix}$

On a donc $n - r$ inconnues libres, où $r = \operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{im} f)$

$$\implies \dim(\ker f) = n - r = n - \dim(\operatorname{im} f) \implies \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f) = n.$$

□

3.5 Valeurs propres (première partie)

Objectif. On cherche à comprendre le plus concrètement possible ce “que fait” une application linéaire $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, dans le cas où $n = m$.

On considère donc une application linéaire $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

On a déjà deux informations : $\text{im } f = \{ \text{vecteurs image de } f \} \subset \mathbb{R}^n$
 $\ker f = \{ \text{vecteurs qui sont envoyés sur } \vec{0} \} \subset \mathbb{R}^n$.

En général, un vecteur \vec{v} est envoyé sur un vecteur “complètement différent”. On va s’intéresser à des vecteurs $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ qui sont envoyés sur un multiple d’eux-mêmes.

Définition. Soit $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire de \mathbb{R}^n dans lui-même. Un nombre réel λ est une *valeur propre* de f s’il existe au moins un vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ avec les deux propriétés suivantes :

1. $\vec{v} \neq \vec{0}$;
2. $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.

Un tel vecteur \vec{v} s’appelle un *vecteur propre* de f associé à la valeur propre λ .

Remarques

1. La condition $\vec{v} \neq \vec{0}$ est essentielle car sinon tout nombre λ serait valeur propre puisque $f(\vec{0}) = \lambda \vec{0}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Si \vec{v} est un vecteur propre associé à λ alors tout multiple ($\neq \vec{0}$) de \vec{v} l’est aussi car si $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ on a $f(\mu \vec{v}) = \mu f(\vec{v}) = \mu \lambda \vec{v} = \lambda(\mu \vec{v})$.
3. Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs propres associés à λ alors
 $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{v} = \lambda(\vec{u} + \vec{v})$
 $\implies \vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur propre associé à λ .
4. Si $\dim(\ker f) > 0$, alors il existe des vecteurs $\vec{v} \neq \vec{0}$ tels que $f(\vec{v}) = \vec{0}$. Dans ce cas $\lambda = 0$ est une valeur propre de f car $f(\vec{v}) = 0 \cdot \vec{v}$, pour tout $\vec{v} \in \ker f$.

Définition. Par les remarques 2 et 3 on voit que si λ est valeur propre de f , l’ensemble de tous les vecteurs \vec{v} tel que $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ forme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n appelé *espace propre* de λ , noté

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \} \\ &= \{ \text{tous les vecteurs propres associés à } \lambda \} \cup \{ \vec{0} \}. \end{aligned}$$

Exemples

1. Si 0 est valeur propre de f , $E_0 = \ker f$.

2. Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, 0)$.

1 est une valeur propre car $f((1, 0)) = 1 \cdot (1, 0)$.

$E_1 = \{ (x_1, x_2) \mid f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \} = \{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \}$ sous-espace vectoriel de dim 1 et de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

0 est valeur propre car $f((0, 1)) = 0 \cdot (0, 1) = (0, 0)$.

$\ker f = E_0 = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}$ sous-espace vectoriel de dim 1 et de base $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans ces exemples, on a eu la chance de pouvoir “deviner” les valeurs propres, mais :

Comment déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f ?

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire donnée par la matrice $(n \times n)$ A par rapport à une base S de \mathbb{R}^n . On a (avec le symbole “ \exists ” qui signifie “il existe”) :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } f &\iff \exists \vec{v} \neq \vec{0} \text{ t.q. } f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \\ &\iff \exists \vec{v} = x_1 \vec{s}_1 + \cdots + x_n \vec{s}_n \neq \vec{0} \text{ t.q. } f(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \\ &\iff \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ t.q. } A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &\iff \exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ t.q. } (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \ker(A - \lambda I) \text{ contient un vecteur } \neq \vec{0} \\ &\iff \dim(\ker(A - \lambda I)) \geq 1 \\ &\stackrel{(*)}{\iff} \dim(\operatorname{im}(A - \lambda I)) < n \\ &\iff \operatorname{rang}(A - \lambda I) < n \end{aligned}$$

où le passage $(*)$ vient du fait que $\dim(\ker) + \dim(\operatorname{im}) = n$.

Nous avons donc prouvé :

Théorème. λ valeur propre de $f \iff \operatorname{rang}(A - \lambda I) < n$
 $\iff (A - \lambda I)$ non régulière.

D’où la question : Comment déterminer si une matrice $(n \times n)$ est non régulière (sans déterminer son rang) ?

Le paragraphe ?? donne une réponse à cette question et nous traiterons les conséquences du théorème au paragraphe ??.

3.6 Déterminants

Objectif. Construire une application

$$\begin{matrix} A \\ \text{matrice carrée } (n \times n) \end{matrix} \longmapsto \det(A) \in \mathbb{R}$$

qui permet de décider si A est régulière.

On obtiendra le théorème suivant : A régulière $\iff \det(A) \neq 0$.

Définition.

• Pour A une matrice (2×2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = +a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

• Pour A une matrice (3×3) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Comment généraliser ces deux définitions au cas général d'une matrice $(n \times n)$ A ?
Remarquons que $\det(A)$ est une somme de produits avec :

- chaque produit est le produit d'un élément de chaque ligne ;
- chaque produit est le produit d'un élément de chaque colonne ;
- il y a autant de produits munis du signe $+$ que de produits munis du signe $-$.

Pour définir cela proprement il faut :

Définition. Une *permutation* σ des entiers $1, 2, \dots, n$ est une application bijective $\{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ qui s'écrit

$$\left. \begin{array}{l} 1 \longmapsto \sigma(1) \\ 2 \longmapsto \sigma(2) \\ \vdots \\ n \longmapsto \sigma(n) \end{array} \right\} \text{ avec : deux éléments distincts ont des images distinctes et tout entier } \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ est l'image d'un entier via } \sigma.$$

On utilise la notation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Il y a $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1$ permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Définition. Soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Notons $s(\sigma)$ le nombre de paires d'entiers $i < j$ ($\in \{1, 2, \dots, n\}$) avec $\sigma(i) > \sigma(j)$. Le *signe* de σ est $(-1)^{s(\sigma)}$.

Exemple. $\{1, 2, 3\}$ 6 permutations :

$$\begin{array}{rcccccc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 s & = & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\
 \text{signe} & = & + & - & - & + & + & -
 \end{array}$$

Définition. Soit A une matrice $(n \times n)$. Le *déterminant* de A est le nombre réel

$$\det(A) = \sum_{\substack{\sigma \\ \text{permutations}}} \text{signe}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

(Cette somme comporte $n!$ termes.)

Exemples

$$1. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

3. $n = 4$ 24 permutations :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \cdots \\
 + & - & + & - & - & + & - &
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \cdots$$

$$4. A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \underbrace{+a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}}_{\uparrow} + \underbrace{\cdots}_0$$

le seul produit $\neq 0$ possible
ayant un coefficient de chaque
colonne et de chaque ligne

Proposition (sans démonstration). Si A et B sont deux matrices $(n \times n)$, alors $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Proposition (sans démonstration). Si les lignes de A sont linéairement dépendantes, alors $\det(A) = 0$.

Théorème. Soit A une matrice carrée $(n \times n)$. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. A régulière ;
2. $\det(A) \neq 0$;
3. A inversible.

Démonstration.

- (2) \Rightarrow (1): A non régulière $\Rightarrow \text{rang}(A) < n$
 \Rightarrow lignes de A linéairement dépendantes $\Rightarrow \det(A) = 0$.
 Donc si $\det(A) \neq 0$, alors A régulière.
- (3) \Rightarrow (2): $AA^{-1} = I \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$.
- (1) \Leftrightarrow (3): Déjà vu.

Donc (1) \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1). □

Comment calculer $\det(A)$?

Si on a le cas particulier

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{a_{ij}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

alors $\det(A) = (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{(i,j)})$ où $A_{(i,j)}$ dénote la matrice obtenue à partir de A en enlevant la i -ème ligne et la j -ème colonne. Cela est clair (sauf pour le signe $(-1)^{i+j}$, sans démonstration).

Dans le cas général,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{(i,j)}) \quad \mathbf{i \text{ fixe}}$$

ou de même

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{(i,j)}) \quad \mathbf{j \text{ fixe}}.$$

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; en choisissant $i = 3$, on obtient :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \underbrace{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{-4} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{-2} = -10.$$

3.7 Valeurs propres (seconde partie)

Au paragraphe ??, nous en étions resté à : soit $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire donnée par la matrice $(n \times n)$ A par rapport à une base de \mathbb{R}^n , on a

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } f &\iff \text{rang}(A - \lambda I) < n \\ &\iff (A - \lambda I) \text{ non régulière.} \end{aligned}$$

On peut donc déduire :

Théorème. λ valeur propre de $f \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Définition. Soit $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire, A la matrice de f par rapport à une base de \mathbb{R}^n . Le *polynôme caractéristique* de A est

$$p_A(x) = \det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn}-x \end{pmatrix}.$$

C'est un polynôme en x de degré n .

On peut donc déduire :

Théorème. λ est une valeur propre de f si λ est un zéro de $p_A(x)$: $p_A(\lambda) = 0$.

Le polynôme caractéristique $p_A(x)$ est un polynôme de degré n , alors on sait par le théorème fondamental de l'algèbre que $p_A(x)$ se décompose comme suit :

$$p_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{\alpha_{\lambda_1}} (x - \lambda_2)^{\alpha_{\lambda_2}} \dots (x - \lambda_r)^{\alpha_{\lambda_r}} \cdot (\text{polynôme sans zéro réel})$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $\alpha_{\lambda_1}, \dots, \alpha_{\lambda_r} \geq 1$ (α_{λ_i} s'appelle la *multiplicité* de λ_i).

Si λ est un zéro de $p_A(x)$, on note α_λ sa multiplicité.

Remarques

1. Si λ est une valeur propre de f , $E_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n de $\dim \geq 1$.
2. On peut montrer que $\dim(E_\lambda) \leq \alpha_\lambda$ et donc on a

$$\boxed{1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \alpha_\lambda.}$$

3. Le nombre de valeurs propres est $\leq n$.

Exemple. Considérons l'application linéaire

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ par rapport à la base standard.

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 4 \\ 2 & 3-x \end{pmatrix} = (1-x)(3-x) - 8 = x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$$

$\implies 2$ valeurs propres $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$.

$$E_5 = \ker(A - 5I) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{-1} = \ker(A + I) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

A quoi cela sert-il ?

$$\text{Si } \vec{v} \in E_5 \text{ (} \vec{v} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \text{ avec } s \in \mathbb{R} \text{), alors } f(\vec{v}) = 5\vec{v} \implies f \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5s \\ 5s \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } \vec{v} \in E_{-1} \text{ alors } f(\vec{v}) = -\vec{v} \implies f \begin{pmatrix} -2s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ -s \end{pmatrix}.$$

Si \vec{v} est quelconque dans \mathbb{R}^2 , on exprime \vec{v} par rapport à la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \implies \vec{v} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On déduit que } f(\vec{v}) = \alpha_1 f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 f \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4 Diagonalisation de matrices

4.1 Changement de base

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire et $A = (a_{ik})$ la matrice de f par rapport à la base standard.

Soit $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n\}$ une autre base de \mathbb{R}^n . Posons $D = (d_{ik})$ la matrice $(n \times n)$ dont les colonnes sont les coordonnées de \vec{s}_1 , resp. $\vec{s}_2, \dots, \vec{s}_n$, par rapport à la base standard.

$$\Rightarrow \quad \vec{s}_k = \begin{pmatrix} d_{1k} \\ d_{2k} \\ \vdots \\ d_{nk} \end{pmatrix}$$

S est une base de $\mathbb{R}^n \Rightarrow D$ régulière, donc inversible.

Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de \mathbb{R}^n exprimé par rapport à la base standard.

$$\begin{aligned} \text{Par rapport à la base } S : \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= y_1 \vec{s}_1 + y_2 \vec{s}_2 + \dots + y_n \vec{s}_n \\ &= y_1 \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{n1} \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{n2} \end{pmatrix} + \dots + y_n \begin{pmatrix} d_{1n} \\ d_{2n} \\ \vdots \\ d_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où y_1, \dots, y_n sont les coordonnées de \vec{v} par rapport à S .

$$\Rightarrow \quad x_i = \sum_{k=1}^n y_k d_{ik} = \sum_{k=1}^n d_{ik} y_k \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Considérons } f(\vec{v}) &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ par rapport à la base standard;} \\ &= \beta_1 \vec{s}_1 + \beta_2 \vec{s}_2 + \dots + \beta_n \vec{s}_n \text{ par rapport à la base } S. \end{aligned}$$

Notons encore A' la matrice de f par rapport à la base S .

$$\begin{aligned}
\text{On a } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} &= DA' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = AD \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\Rightarrow DA' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= AD \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{pour tout } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\Rightarrow DA' &= AD.
\end{aligned}$$

Et comme D est inversible, on a $D^{-1}DA' = D^{-1}AD \Rightarrow A' = D^{-1}AD$
 $DA'D^{-1} = ADD^{-1} \Rightarrow A = DA'D^{-1}.$

Nous avons montré :

Théorème. Soit A la matrice de $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par rapport à la base standard ;
 A' la matrice de f par rapport à une autre base S ;
 D la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de S par rapport à la base standard.

Alors

$$\begin{aligned}
A' &= D^{-1}AD \\
A &= DA'D^{-1}.
\end{aligned}$$

Exemple. Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donnée par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prenons la base $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

On a

$$A' = D^{-1}AD$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Diagonalisation de matrices

Définition. Une matrice $(n \times n)$ A est *diagonale* si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Rappelons que nous avons pour objectif de calculer une puissance quelconque A^k de A . Si A est diagonale, c'est facile car

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on aimerait bien pouvoir diagonaliser une matrice carrée donnée A .

Remarque. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire et supposons que \mathbb{R}^n possède une base formée de vecteurs propres de f :

$$S = \left\{ \underbrace{\vec{s}_1}_{\substack{\text{vecteur} \\ \text{propre} \\ \text{pour } \lambda_1}}, \underbrace{\vec{s}_2}_{\substack{\text{vecteur} \\ \text{propre} \\ \text{pour } \lambda_2}}, \dots, \underbrace{\vec{s}_n}_{\substack{\text{vecteur} \\ \text{propre} \\ \text{pour } \lambda_n}} \right\} \quad (\text{les } \lambda_i \text{ non nécessairement différents})$$

Alors $f(\vec{s}_i) = \lambda_i \cdot \vec{s}_i = 0 \cdot \vec{s}_1 + \dots + 0 \cdot \vec{s}_{i-1} + \lambda_i \cdot \vec{s}_i + 0 \cdot \vec{s}_{i+1} + \dots + 0 \cdot \vec{s}_n$ et la matrice de f par rapport à S est :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Définition. Une matrice carrée A est *diagonalisable* si A est la matrice d'une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par rapport à la base standard et si \mathbb{R}^n possède une base S formée de vecteurs propres de f . Dans ce cas, la matrice de f par rapport à S est $A' = D^{-1}AD$ avec A' diagonale et D est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs propres de f par rapport à la base standard.

Théorème. Pour une matrice carrée A :

A est diagonalisable \iff 1) $p_A(x)$ se décompose en facteurs linéaires ;
 2) pour chaque valeur propre λ_i , la multiplicité de λ_i est égale à la dimension de l'espace propre correspondant E_{λ_i} .

Démonstration.

“ \Rightarrow ” : Si A est diagonalisable, il existe une base formée de vecteurs propres.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad p_A(x) &= p_{A'}(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_n - x). \\ &\quad \uparrow \\ &\quad A' = D^{-1}AD \\ \det(A') &= \underbrace{\det(D^{-1}) \det(A) \det(D)}_{\frac{1}{\det(D)} \det(A)} = \det(A) \end{aligned}$$

“ \Leftarrow ” : Si les conditions 1) et 2) sont satisfaites, on choisit une base S de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres. Pour cela, on choisit une base de chaque espace propre E_{λ_i} et on réunit tous ces vecteurs. Il y en a bien n car $\sum \dim(E_{\lambda_i}) = \sum \alpha_{\lambda_i} = n$. Il faudrait encore montrer qu'ils sont linéairement indépendants.

□

Corollaire. Si une matrice $(n \times n)$ A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Démonstration. Le polynôme $p_A(x)$, de degré n , possède n zéros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distincts, de multiplicité $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ toutes ≥ 1 . Comme la somme des multiplicités égale le degré du polynôme $p_A(x)$, il s'ensuit que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$. Toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1, et le polynôme se décompose en facteurs linéaires. De plus $1 \leq \dim(E_{\lambda_i}) \leq \alpha_i$ donc $\dim(E_{\lambda_i}) = 1 = \alpha_i$. □

Méthode pour diagonaliser une matrice

Soit A une matrice $(n \times n)$, diagonalisable.

1. On calcule $p_A(x)$, les valeurs propres et les multiplicités de chaque valeur propre.
2. Pour chaque valeur propre λ , on calcule E_λ et une base de E_λ (formée de α_λ éléments).
3. D = matrice dont les colonnes sont les coordonnées (par rapport à la base standard) de tous les vecteurs de base obtenus.
4. $A' = D^{-1}AD$; $A = DA'D^{-1}$ avec A' une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres correspondant aux vecteurs propres.

Exemple. Diagonalisons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\text{On a } p_A(x) &= \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 4 & -2-x \end{pmatrix} = (1-x)(-2-x) - 1 \cdot 4 \\
&= -2 + x + x^2 - 4 = x^2 + x - 6 \\
&= (x+3)(x-2).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -3$ de multiplicité 1.

$$\begin{aligned}
E_2 &= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \implies \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
E_{-3} &= \ker \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \implies \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\implies & \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Et finalement $A' = D^{-1}AD$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4.3 Élévation d'une matrice à une puissance

Nous avons vu que l'un des objectifs de l'algèbre linéaire est de décrire diverses applications pratiques du calcul matriciel. Souvent, le problème consiste alors à élever une matrice carrée à une puissance quelconque.

Soit A une matrice carrée ($n \times n$).

Problème. Calculer A^k pour tout $k \geq 1$.

Hypothèse. On suppose que A est diagonalisable.

Solution

1. On diagonalise A :

Il existe une matrice carrée ($n \times n$) D telle que $A = DA'D^{-1}$ avec A' diagonale

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 2. \quad A^k &= \underbrace{(DA'D^{-1})(DA'D^{-1})(DA'D^{-1}) \dots (DA'D^{-1})}_{n \text{ fois}} \\ &= DA' \underbrace{(D^{-1}D)}_I A' \underbrace{(D^{-1}D)}_I A' \underbrace{(D^{-1}D)}_I A' \dots \underbrace{(D^{-1}D)}_I A' D^{-1} \\ &= D(A')^k D^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^k = D \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} D^{-1}.$$

Exemple. Élevons à la puissance k la matrice de l'exemple du paragraphe précédent :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Rappel : } A = DA'D^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\text{On a donc : } A^k &= \frac{1}{5} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-3)^k \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2^k & -(-3)^k \\ 2^k & 4(-3)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2^{k+2} + (-3)^k & 2^k - (-3)^k \\ 2^{k+2} - 4(-3)^k & 2^k + 4(-3)^k \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4.4 Application à la démographie

Revenons sur les matrices de Leslie (Modèle de Leslie, paragraphe ??). Pour simplifier l'exemple, divisons la durée de vie des individus en 3 classes d'âge (1), (2), (3).

$$\begin{aligned}\vec{v}^0 &= \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \text{ où } x_i^0 = \text{nombre d'individus femelles en classe (i) au temps } t_0 \\ a_i &= \text{nombre de filles nées de chaque individu femelle pendant qu'elle était en classe (i), par exemple : } a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 0 \\ b_i &= \text{fraction d'individus femelles en classe (i) qui survit en classe (i+1), par exemple : } b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Exemple. La distribution du nombre d'individus femelles après k étapes vérifie $\vec{v}^k = L \cdot \vec{v}^{k-1} = L^k \cdot \vec{v}^0$ où

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$p_L(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 2 & 0 \\ 1/2 & -x & 0 \\ 0 & 1/4 & -x \end{pmatrix} = -x^3 + x = -x(x^2 - 1) = -x(x+1)(x-1)$$

\Rightarrow 3 valeurs propres $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1$.

$$E_1 = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_0 = \ker L = \left\{ s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{-1} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Calcul de } D^{-1} : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 & 0 & -8 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 16 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 16 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 16 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De plus } (L')^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L^k = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

\Rightarrow Si k est impair : $L^k = L$.

$$\begin{aligned} \text{Si } k \text{ est pair : } L^k &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2^0 \\ (1/2) \cdot x_1^0 \\ (1/4) \cdot x_2^0 \end{pmatrix} & \text{pour } k \text{ impair;} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ (1/8) \cdot x_1^0 \end{pmatrix} & \text{pour } k \text{ pair.} \end{cases}$$

$$\text{Par exemple, } \vec{v}^0 = \begin{pmatrix} 16'000 \\ 16'000 \\ 16'000 \end{pmatrix}, \vec{v}^1 = \begin{pmatrix} 32'000 \\ 8'000 \\ 4'000 \end{pmatrix}, \vec{v}^2 = \begin{pmatrix} 16'000 \\ 16'000 \\ 2'000 \end{pmatrix}, \vec{v}^3 = \begin{pmatrix} 32'000 \\ 8'000 \\ 4'000 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}^4 = \begin{pmatrix} 16'000 \\ 16'000 \\ 2'000 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

On parle dans ce cas de “vagues” de population.

Remarque. On peut faire beaucoup de choses avec ce modèle. En particulier, on peut montrer que L , une matrice de Leslie, possède une unique valeur propre réelle positive λ_1 et que :

- si $\lambda_1 > 1$, la population augmente ;
- si $\lambda_1 < 1$, la population diminue ;
- si $\lambda_1 = 1$, la population est stable.

En général, une matrice de Leslie a la forme suivante :

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & 0 & & 0 \\ & b_2 & 0 & \\ 0 & & \ddots & \ddots \\ & & & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} p_L(x) &= \det \begin{pmatrix} a_1 - x & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & -x & & 0 \\ & b_2 & -x & \\ 0 & & \ddots & \ddots \\ & & & b_{n-1} & -x \end{pmatrix} \\ &= (a_1 - x) \det \underbrace{\begin{pmatrix} -x & & 0 \\ b_2 & -x & \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & b_{n-1} & -x \end{pmatrix}}_{(-x)^{n-1}} - b_1 \det \begin{pmatrix} a_2 & \dots & a_n \\ b_2 & -x & \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & b_{n-1} & -x \end{pmatrix} \\ &\quad a_2(-x)^{n-2} - b_2 \det \begin{pmatrix} a_3 & \dots & a_n \\ b_3 & -x & \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & b_{n-1} & -x \end{pmatrix} \\ &= (a_1 - x)(-x)^{n-1} - b_1(a_2(-x)^{n-2} - b_2(\dots)) \\ &= (-1)^n (x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 b_1 x^{n-2} - a_3 b_1 b_2 x^{n-3} - a_4 b_1 b_2 b_3 x^{n-4} - \dots - a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1}). \end{aligned}$$

Ainsi la population est stable $\iff \lambda = 1$ est valeur propre
 $\iff a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + a_4 b_1 b_2 b_3 + \dots + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} = 1.$

4.5 Application au développement durable

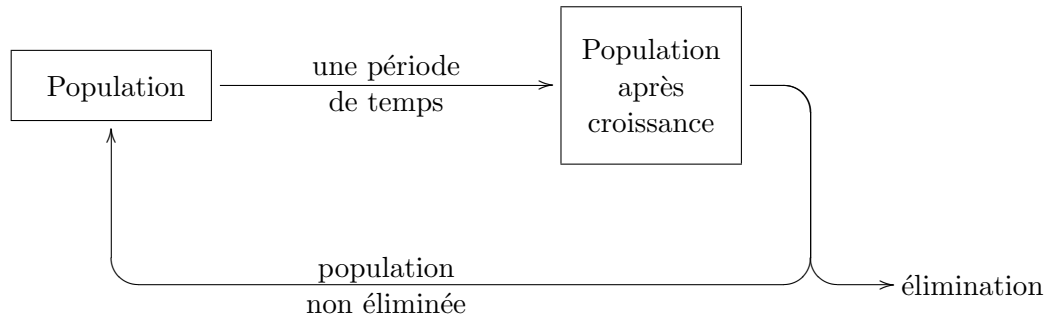
On considère un élevage de bétail, caractérisé par

- la croissance naturelle de la population ;
- l'élimination d'une partie des têtes de bétail pour la vente.

Définition. Une politique d'élevage est *durable* si la population de bétail est périodiquement partiellement éliminée, mais avec les deux conditions suivantes :

1. après chaque élimination, la distribution en classes d'âge de la population est identique ;
2. le rapport de l'élimination est le même à chaque élimination.

Le modèle de Leslie est perturbé par l'élimination artificielle des bêtes :



Soit L la matrice de Leslie décrivant la croissance naturelle de la population et soit E la matrice décrivant l'élimination :

$$E = \begin{pmatrix} e_1 & & & 0 \\ & e_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e_n \end{pmatrix}$$

où e_i = fraction des femelles en classe d'âge (i) qui sont éliminées ($0 \leq e_i \leq 1$ pour $i = 1, 2, \dots, n$).

Pour avoir une politique d'élevage durable, il faut :

$$\begin{aligned} \vec{v}^k - \text{abbatage} &= \vec{v}^{k-1} \\ \Leftrightarrow \underbrace{L\vec{v}^{k-1} - EL\vec{v}^{k-1}}_{(I-E)L\vec{v}^{k-1}} &= \vec{v}^{k-1} \\ (I-E)L\vec{v}^{k-1} &= \vec{v}^{k-1} \end{aligned}$$

\Rightarrow \vec{v}^{k-1} doit être un vecteur propre pour la valeur propre 1 de la matrice $(I-E)L$.

En fait, cette situation doit déjà être satisfaite au temps $t = 0$ pour \vec{v}^0 .

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & 0 & & 0 \\ & b_2 & 0 & \\ 0 & & \ddots & \ddots \\ & & & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} e_1 & & 0 \\ & e_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e_n \end{pmatrix}$$

$$(I - E)L = \begin{pmatrix} (1 - e_1)a_1 & (1 - e_1)a_2 & \dots & (1 - e_1)a_n \\ (1 - e_2)b_1 & 0 & & 0 \\ & (1 - e_3)b_2 & 0 & \\ 0 & & \ddots & \ddots \\ & & & (1 - e_n)b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le dernier résultat du paragraphe précédent indique que $\lambda = 1$ est valeur propre de $(I - E)L$ si

$$(1 - e_1) \left(a_1 + a_2 b_1 (1 - e_2) + a_3 b_1 b_2 (1 - e_2)(1 - e_3) + \dots \right. \\ \left. + a_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} (1 - e_2)(1 - e_3) \dots (1 - e_n) \right) = 1$$

Il “suffit” de trouver un vecteur propre pour la valeur propre 1 de $(I - E)L$.

En voici un :

$$\vec{v}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1(1 - e_2) \\ b_1 b_2(1 - e_2)(1 - e_3) \\ b_1 b_2 b_3(1 - e_2)(1 - e_3)(1 - e_4) \\ \vdots \\ b_1 b_2 \dots b_{n-1}(1 - e_2)(1 - e_3) \dots (1 - e_n) \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $(I - E)L\vec{v}^0 = \vec{v}^0$.

4.6 Application à la génétique

Revenons à l'exemple du paragraphe ?? :

a_k = fraction des fleurs rouges à la k -ième génération

b_k = fraction des fleurs roses à la k -ième génération

c_k = fraction des fleurs blanches à la k -ième génération.

Si on fertilise la population uniquement avec des fleurs rouges, on a :

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \\ c_{k-1} \end{pmatrix} = A^k \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

$$p_A(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2-x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = (1-x)(\frac{1}{2}-x)(-x)$$

\Rightarrow 3 valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ et $\lambda_3 = 0$.

$$E_1 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{1/2} = \ker \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_0 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^k &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 1/2^k & 0 \\ 0 & -1/2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2^k & 0 \\ 0 & -1/2^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1-1/2^k & 1-1/2^{k-1} \\ 0 & 1/2^k & 1/2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{a_0 + b_0 + c_0}_1 - b_0/2^k - c_0/2^{k-1} \\ b_0/2^k + c_0/2^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc à la deuxième génération il n'y a plus de fleurs blanches et lorsque k tend vers l'infini :

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.7 Systèmes d'équations différentielles

On peut appliquer la méthode du paragraphe ?? à de nombreux problèmes concrets, par exemple : les réseaux électriques, les chaînes de Markov (propagation des probabilités), la théorie des jeux, l'économie, la gestion des forêts, la distribution de températures, la tomographie, la cryptographie, etc.

Voici une dernière application aux systèmes d'équations différentielles, que nous traitons par un exemple.

Problème. Dans une région de l'océan vivent une population X de poissons et une population Y de crustacés. Au temps $t = 0$, X comprend $2a$ poissons et Y comprend a crustacés. Les poissons mangent les crustacés. On constate que l'évolution du nombre de poissons au temps t , noté $x(t)$, et celle du nombre de crustacés au temps t , noté $y(t)$, satisfont le *système d'équations différentielles* suivant :

$$\begin{cases} x'(t) &= \frac{3}{4}y(t) \\ y'(t) &= y(t) - \frac{1}{4}x(t). \end{cases}$$

Déterminer $x(t)$ et $y(t)$. Les populations X et Y survivront-elles ?

Solution. On cherche à résoudre le système d'équations différentielles

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} & \text{avec } E_{1/4} \text{ de base } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \lambda_2 = \frac{3}{4} & \text{avec } E_{3/4} \text{ de base } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Donc $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$ et $A' = D^{-1}AD$.

Posons $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, où $u(t)$ et $v(t)$ sont des nouvelles fonctions définies par

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

On a $D \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = AD \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{D^{-1}AD}_{A'} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \cdot u(t) \\ 3/4 \cdot v(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) &= \frac{1}{4}u(t) \\ v'(t) &= \frac{3}{4}v(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) &= C_1 e^{t/4} \\ v(t) &= C_2 e^{3t/4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_D \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) &= 3C_1 e^{t/4} + C_2 e^{3t/4} \\ y(t) &= C_1 e^{t/4} + C_2 e^{3t/4}. \end{cases}$$

$$\text{En tenant compte des deux conditions initiales : } \begin{cases} x(0) &= 2a \\ y(0) &= a \end{cases}$$

$$\text{on obtient : } \begin{cases} 2a &= 3C_1 + C_2 \\ a &= C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{a}{2} \text{ et } C_2 = \frac{a}{2}.$$

$$\text{D'où la solution } \begin{cases} x(t) &= \frac{3a}{2} e^{t/4} + \frac{a}{2} e^{3t/4} \\ y(t) &= \frac{a}{2} \left(e^{t/4} + e^{3t/4} \right). \end{cases}$$

Les deux populations survivent et se développent.