Unil
UNIL | Université de Lausanne
Faculté des géosciences
et de l'environnement

# Mathématiques II

Prof. Dominique Arlettaz
Prof. Alain Clément


Support de cours | 2006–2007

# Mathématiques II

## pour les étudiants de la Faculté des géosciences et de l'environnement

**Prof. Dominique Arlettaz**
**Prof. Alain Clément**

Ce texte reproduit les éléments principaux du cours de Mathématiques II à l'intention des étudiants en géologie de première année de la Faculté des géosciences et de l'environnement de l'Université de Lausanne. Il a été mis en forme grâce à la collaboration du Dr. Jean-François Hämmerli et du Dr. Luc Dessauges.

**Lausanne**
**octobre 2006**

# Table des matières

# 1 Calcul différentiel des fonctions réelles de plusieurs variables

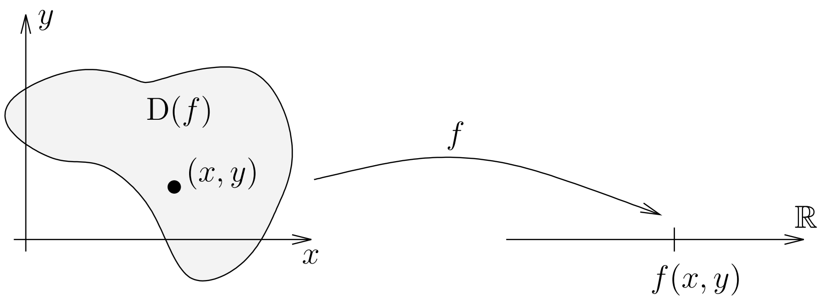
## 1.1 Définition et exemples

**Définition.** Une *fonction réelle* de $n$ variables réelles est une application $f$ d'un domaine $\mathrm{D}(f) \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ : à chaque point $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathrm{D}(f)$ correspond de manière unique son image $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{D}(f)$ s'appelle le *domaine de définition* de $f$.

**Notation.** $$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{D}(f) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n)\,. \end{array}$$

On considère spécialement les cas $n = 2$ et $n = 3$ avec les notations respectives $(x, y) \mapsto f(x, y)$ et $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$.




**Exemples**

1. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy\,. \end{array}$$
2. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^3 - \{\,(0, 0, 0)\,\}$.
3. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4, \quad \mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^4$.

**Remarque.** Pour bien comprendre la différence entre les fonctions d'*une* variable et les fonctions de *plusieurs* variables, il est utile de se concentrer sur le comportement des fonctions de 2 variables.

**Remarque.** On peut aussi considérer des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \big(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big). \end{array}$$

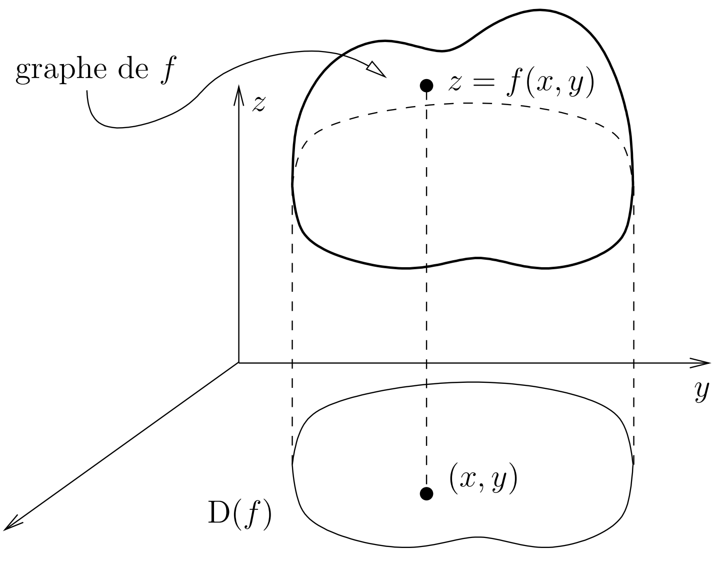
Cela revient à considérer $m$ fonctions de $n$ variables.

## 1.2 Le graphe d'une fonction de plusieurs variables

**Définition.** Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction de $n$ variables. Le *graphe* de $f$ est l'ensemble de tous les points $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tels que

1. $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{D}(f) \subset \mathbb{R}^n$;
2. $x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)$.

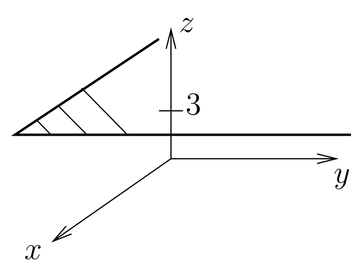
Traitons le cas des fonctions de 2 variables. Pour une telle fonction $f$, le graphe est $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (x, y) \in \mathrm{D}(f) \subset \mathbb{R}^2,\ z = f(x, y) \right\}$ :




**Exemples**

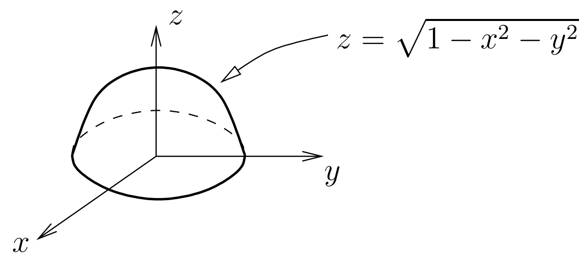
1. $f(x, y) = 3, \quad \mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^2$.

   Le graphe de $f$ est un plan dans $\mathbb{R}^3$ :




2. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \mathrm{D}(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, c'est-à-dire $\mathrm{D}(f)$ est le disque de rayon 1 centré à l'origine. Pour le graphe :

   $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ implique $z^2 + x^2 + y^2 = 1$ et $z \geq 0$, donc le graphe est une demi-sphère :



En général, il est difficile de tracer le graphe d'une fonction de 2 variables, encore plus celui d'une fonction de $n$ variables avec $n \geq 3$.

Pour nous aider à “comprendre” le comportement d'une fonction de 2 (ou plusieurs) variables, on en considère les courbes de niveau :

**Définition.** Soit $f(x, y)$ une fonction de 2 variables. Les *courbes de niveau* de $f$ sont les sous-ensembles de $\mathrm{D}(f) \subset \mathbb{R}^2$ (souvent des courbes de $\mathrm{D}(f)$) sur lesquels $f$ est constante.

Si $C$ est une valeur de $f$, la courbe de niveau $C$ est l'ensemble $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x, y) \in \mathrm{D}(f) \text{ et } f(x, y) = C \right\}$ et a pour équation

$$\boxed{f(x, y) = C\,.}$$

Les courbes de niveau se dessinent dans $\mathrm{D}(f) \subset \mathbb{R}^2$.

**Exemple.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Clairement $f$ prend des valeurs $\geq 0$.

Les courbes de niveau ont pour équation $\sqrt{x^2 + y^2} = C$, $C \geq 0$. Ceci implique que $x^2 + y^2 = C^2$ et donc que les courbes de niveau sont des cercles de rayon $C$ ($> 0$) centrés à l'origine. La courbe de niveau 0 est un point, l'origine.

Dans le cas général, on peut définir :

**Définition.** Soient $f(x_1, \dots, x_n)$ une fonction de $n$ variables et $C$ une valeur de $f$. La *surface de niveau* $C$ est le sous-ensemble de $\mathrm{D}(f) \subset \mathbb{R}^n$

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{D}(f) \text{ et } f(x_1, \dots, x_n) = C \right\}.$$

**Exemple.** Considérons la fonction $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$. Clairement $f$ prend des valeurs $C$ telles que $0 \leq C \leq 1$.

Les surfaces de niveau ont pour équation $\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} = C$, $C \geq 0$. On obtient donc $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - C^2$ ; ainsi les surfaces de niveau sont des sphères de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon $\sqrt{1 - C^2}$, $0 \leq C < 1$. La surface de niveau 1 est l'origine.

### 1.3 La continuité

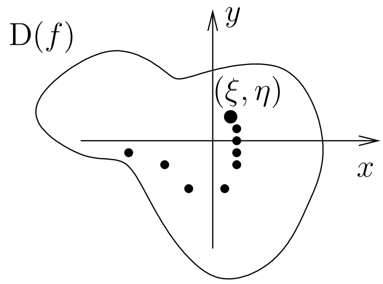
**Définition.** Soit $f(x,y)$ une fonction de 2 variables, $(\xi,\eta)$ un point de $D(f)$. La fonction $f$ est *continue en* $(\xi,\eta)$ si :

pour toute suite de points

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n),\ldots$$

qui tend vers $(\xi,\eta)$ dans $D(f)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = f(\xi,\eta)\,.$$




La fonction $f$ est *continue* si elle est continue en tout point de $D(f)$.

**Exemples**

1. Comme dans le cas des fonctions d'une variable, on a les règles suivantes :
   - Si $f$ et $g$ sont continues, alors

     $$f+g\,,\quad f\cdot g\,,\quad \frac{f}{g}\ (\text{avec } g\neq 0)$$

     sont continues.
   - Si $g$ est continue et $f$ est une fonction d'une variable, continue, alors $f\circ g$ est continue.

   On en tire, par exemple, que les fonctions suivantes sont continues :

   $$\begin{aligned} f(x,y) &= \sin(xy)\\ f(x,y) &= \frac{xy}{x^2+y^2+2}\\ f(x,y) &= |\,xy - cos(xy)\,|. \end{aligned}$$

2. On considère la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0). \end{cases}$

   La fonction $f$ est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 - \{\,(0,0)\,\}$. Étudions la continuité en $\{\,(0,0)\,\}$ : la suite

   $$(1,1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ldots,(\frac{1}{n},\frac{1}{n}),\ldots$$

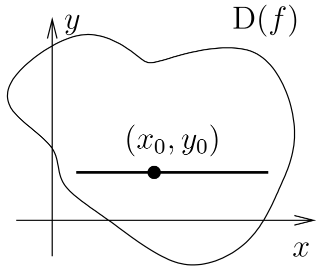
   tend vers $(0,0)$. D'autre part on calcule que $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ pour tout entier $n\geq 1$ ; il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. D'où l'on conclut que $f$ n'est *pas* continue en $(0,0)$.

**Remarque.** On définit de même la continuité des fonctions de $n$ $(n\geq 3)$ variables.

## 1.4 Dérivées partielles

Considérons d'abord le cas des fonctions de 2 variables.

Soit $f(x,y)$ une fonction de 2 variables et $(x_0,y_0) \in \mathrm{D}(f)$ un point de son domaine de définition.




### Définitions

1. Considérons la fonction d'***une*** variable $x \mapsto f(x,y_0)$, où $y_0$ est fixe, et calculons sa dérivée au point $x = x_0$.

   On obtient :

   $$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}, \text{ si cette limite existe ;} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \text{ est la } \textit{dérivée partielle} \text{ de } f \textit{ par rapport à } x, \text{ en } (x_0,y_0). \end{array}}$$

2. De même, la fonction d'une variable $y \mapsto f(x_0,y)$, où $x_0$ est fixe, a pour dérivée au point $y = y_0$ :

   $$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}, \text{ si cette limite existe ;} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \text{ est la } \textit{dérivée partielle} \text{ de } f \textit{ par rapport à } y, \text{ en } (x_0,y_0). \end{array}}$$

### Exemples

1. $f(x,y) = 2x + y$

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1\,.$$

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

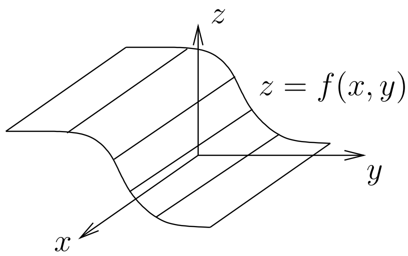
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

3. $f(x,y) = \cos x$

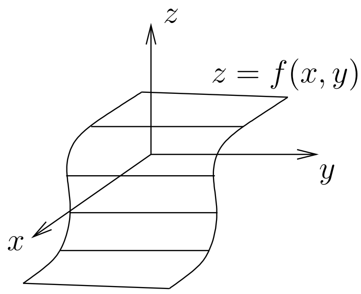
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin x\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\,.$$

**Remarques**

1. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$, alors $f$ ne dépend que de $y$.




2. De même, si $\dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$, alors $f$ ne dépend que de $x$.




3. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y}$, alors $f(x,y)$ est constante.

La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est à nouveau une fonction de 2 variables, on peut donc la dériver partiellement. On obtient :

$$\boxed{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big) & , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big) & , & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big) . \end{array}}$$

De même, on peut définir $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, etc.

**Exemples**

1. Pour $f(x,y) = xy$, on a : $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \ , \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \ , \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$
2. Pour $f(x,y) = \sin(xy)$, on a :

   $$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) \, , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2 \sin(xy) \, , \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -y^3\cos(xy) \, , \ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = y^4 \sin(xy) \, ,$$

   etc.

**Question.** A-t-on $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ?

En général, la réponse est non. Cependant, on a le théorème suivant :

**Théorème (sans démonstration).** *Soit $f(x,y)$ une fonction de 2 variables et soit $(x_0,y_0) \in \mathrm{D}(f)$ tels que $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et soient continues dans un voisinage de $(x_0,y_0)$. Alors*

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)\,.}$$

**Remarque.** Avec les bonnes hypothèses, on a également
$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0)$, etc.

**Remarque.** On peut faire de même pour les fonctions de $n$ variables ($n \geq 3$).

**Exemple.** Pour une fonction de trois variables $f(x,y,z)$, on définit (si les limites existent) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0,z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}\,, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h,z_0) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}\,, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0,z_0+h) - f(x_0,y_0,z_0)}{h}\,.
\end{aligned}$$

Par analogie avec le cas $n = 2$ : si $\dfrac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$, alors $f$ ne dépend que de $y$ et $z$, etc.

De même, avec les bonnes hypothèses on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_0,y_0,z_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x_0,y_0,z_0)$, etc.

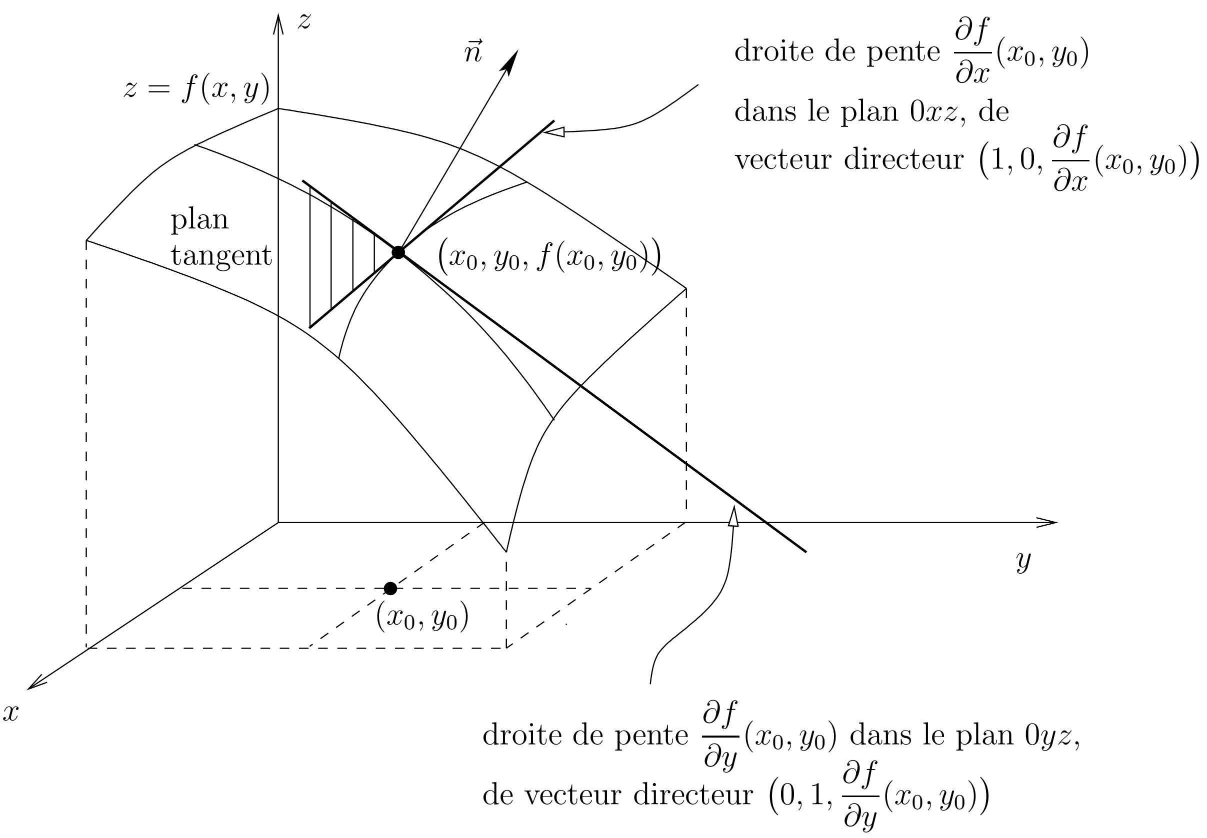
Écrivons encore la définition de la dérivée partielle par rapport à une variable dans le cas général d'une fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ à $n$ variables :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_i+h,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_n)}{h}\,.$$

### 1.5 L'approximation linéaire

Soit $f(x,y)$ une fonction de 2 variables ; posons $z = f(x,y)$.

Interprétons géométriquement les dérivées partielles :




On veut déterminer l'équation du plan tangent au graphe de $f$ au point $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$.

Un plan est déterminé par un point $(x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ perpendiculaire au plan ; dans ce cas, rappelons que son équation est

$$\boxed{n_1 x + n_2 y + n_3 z = n_1 x_0 + n_2 y_0 + n_3 z_0\,.}$$

On connaît le point $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$ du plan tangent et on cherche un vecteur $\vec{n}$ ; ce dernier vérifie $\vec{n} \perp \big(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\big)$ et $\vec{n} \perp \big(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\big)$.
On choisit $\vec{n} = \Big(-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\Big)$. On en tire l'égalité

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y + z = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y_0 + f(x_0,y_0)\,.$$

On obtient donc l'*équation du plan tangent* au graphe de $f$ au point $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ :

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\,.}$$

**Définition.** La fonction

$$(x, y) \longmapsto f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est l'*approximation linéaire* de $f$ en $(x_0, y_0)$.

On écrit parfois $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$ et $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$ ; $df$ est appelée la *différentielle totale* de $f$ en $(x_0, y_0)$.

**Application : calcul d'incertitudes**

On doit mesurer deux grandeurs $x$ et $y$ et calculer $f(x, y)$, où $f$ est une fonction de 2 variables donnée.

On mesure et on obtient :

- $x_0$ avec une incertitude : $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, noté $x = x_0 \pm h$, respectivement
- $y_0$ avec une incertitude : $y \in [y_0 - \ell, y_0 + \ell]$, noté $y = y_0 \pm \ell$.

On approxime $f(x, y)$ par $f(x_0, y_0)$ avec une erreur approximée par

$$\left|\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\right| h + \left|\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\right| \ell\,.$$

**Exemple.** On mesure les côtés d'un rectangle $x = 2 \pm 0.01$ et $y = 5 \pm 0.02$ et on veut calculer l'aire $f(x, y) = xy$ du rectangle.

On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$. Ainsi on approxime l'aire par 10 avec une erreur estimée $\leq |\,5\,| 0.01 + |\,2\,| 0.02 = 0.09$.

On peut étendre les notions de ce paragraphe aux fonctions de plus de 2 variables.

## 1.6 La règle généralisée de dérivation d'une composition de fonctions

Soient $f(x,y)$ une fonction de 2 variables, $x(t)$ et $y(t)$ deux fonctions d'une variable.

Par composition, on définit une nouvelle fonction d'une variable

$$\varphi\colon t \longmapsto \varphi(t) := f\big(x(t), y(t)\big)\,.$$

**Question. Que vaut la dérivée $\varphi'(t)$ ?**

**Théorème.** $$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t).$$

*Démonstration.* Par définition de $\varphi(t)$ et de la dérivée, on a

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big(x(t+h), y(t+h)\big) - f\big(x(t), y(t)\big)}{h}\,.$$

Notons $\Delta x = x(t+h) - x(t)$ et $\Delta y = y(t+h) - y(t)$. En remplaçant dans l'égalité cidessus et en appliquant la formule de l'approximation linéaire vue dans le paragraphe précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f\big(x(t)+\Delta x, y(t)+\Delta y\big) - f\big(x(t), y(t)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\right),
\end{aligned}$$

où $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ est l'erreur de l'approximation linéaire. On peut montrer que cette erreur vérifie

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}{h} = 0\,.$$

En reprenant l'expression de $\varphi'(t)$ calculée précédemment, on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)\lim_{h\to 0}\frac{\Delta x}{h} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon(\Delta x, \Delta y)}{h} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\,.
\end{aligned}$$

□

On a de même :

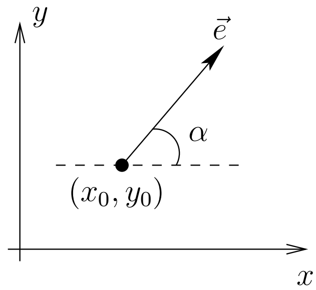
**Théorème.** *Si* $\varphi(t) = f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$, *alors*

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(x(t), y(t), z(t)\big)\, z'(t)\,.$$

## 1.7 La dérivée dans une direction et le gradient

Soit $f(x, y)$ une fonction de 2 variables.

Soit $\vec{e} = (e_1, e_2)$ un vecteur unitaire. Comme $\vec{e}$ est de longueur 1, il existe un angle $\alpha$ tel que $\vec{e} = (e_1, e_2) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.




**Définition.** La *dérivée de $f$ au point $(x_0, y_0)$ dans la direction du vecteur $\vec{e}$* est

$$\boxed{\mathrm{D}_{\vec{e}}\, f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + he_1, y_0 + he_2) - f(x_0, y_0)}{h}\,.}$$

**Exemple.** Pour $\vec{e} = (1, 0)$, on a :

$$\mathrm{D}_{\vec{e}}\, f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,.$$

De même, pour $\vec{e} = (0, 1)$, on a : $\mathrm{D}_{\vec{e}}\, f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,.$

**Comment calculer $\boldsymbol{\mathrm{D}_{\vec{e}}\, f(x_0, y_0)}$ ?**

Considérons la fonction $\varphi(t) = f(x_0 + te_1, y_0 + te_2)$. Par définition :

$$\varphi'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(0 + h) - \varphi(0)}{h} = \mathrm{D}_{\vec{e}}\, f(x_0, y_0)\,.$$

Il nous suffit donc de calculer $\varphi'(0)$. En posant $x(t) = x_0 + te_1$ et $y(t) = y_0 + te_2$, on obtient (c.f. paragraphe 1.6) :

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)e_2
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)e_2 \qquad (*)$$

Ce développement suggère la définition suivante :

**Définition.** Le *gradient d'une fonction $f$ au point $(x_0, y_0)$* est

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).}$$

Le gradient $\overrightarrow{\text{grad}}$ est un “opérateur” qui à une fonction associe un vecteur en chaque point.

Grâce à cette définition et à $(*)$, on obtient finalement :

**Proposition.** *Pour un vecteur unitaire $\vec{e}$, la dérivée de $f$ au point $(x_0, y_0)$ dans la direction de $\vec{e}$ est donnée par*

$$\boxed{\mathrm{D}_{\vec{e}}\, f(x_0, y_0) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0) \cdot \vec{e}}$$

*où “ $\cdot$ ” dénote le produit scalaire.*

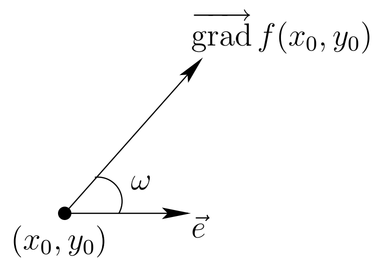
**Interprétation géométrique**

Considérons une fonction $f(x, y)$ et fixons un point $(x_0, y_0) \in \mathrm{D}(f)$.

Par propriété du produit scalaire, on peut récrire

$$\mathrm{D}_{\vec{e}}\, f(x_0, y_0) = |\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)\,|\, \underbrace{|\,\vec{e}\,|}_{1} \cos\omega = |\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)\,| \cos\omega\,,$$

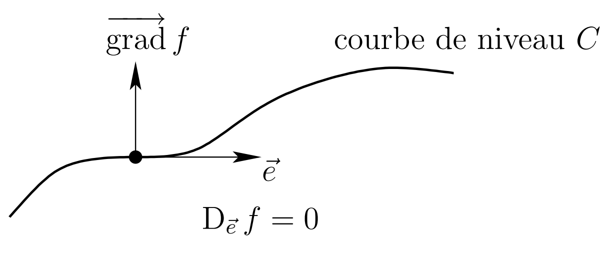
où $\omega$ dénote l’angle entre les vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)$ et $\vec{e}$.




La direction selon laquelle la dérivée de $f$ en $(x_0, y_0)$ est maximale est celle pour laquelle on a $\cos\omega = 1$ et donc $\omega = 0$. D’où l’on tire :

| |
|---|
| $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)$ indique la direction et le sens selon lequel la dérivée de $f$ en $(x_0, y_0)$ est maximale. De plus, cette dérivée maximale vaut $|\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)\,|$. |

D’autre part si $\omega = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\mathrm{D}_{\vec{e}}\, f(x_0, y_0) = 0$, ce qui signifie que $f(x, y)$ est constante lorsque $(x, y)$ se déplace dans la direction de $\vec{e}$.




Plus précisément :

| |
|---|
| $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la courbe de niveau de $f$ passant par $(x_0, y_0)$. |

**Exemple.** Soit la fonction $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

La courbe de niveau $f(x,y) = C$ est un cercle d'équation $x^2+y^2 = 1-C^2$ $(0 \leq C < 1)$. D'autre part, on calcule :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = \left( \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right),$$

qui est orthogonal au cercle $x^2 + y^2 = 1 - C^2$.

Comme dans les paragraphes précédents, on peut procéder de même pour les fonctions de $n$ variables, avec $n \geq 3$. Donnons encore les expressions et résultats dans le cas $n = 3$.

**Définition.** La *dérivée de $f$ au point $(x_0, y_0, z_0)$ dans la direction du vecteur unitaire* $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$\boxed{\mathrm{D}_{\vec{e}}\, f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_1, y_0 + he_2, z_0 + he_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}.}$$

**Définition.** Le *gradient d'une fonction $f$ au point* $(x_0, y_0, z_0)$ est

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right).}$$

A nouveau, on a :

$$\boxed{\mathrm{D}_{\vec{e}}\, f(x_0, y_0, z_0) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{e} = |\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0) \,| \cos \omega}$$

où $\omega$ dénote l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0)$ et $\vec{e}$.

> $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0)$ indique la direction et le sens selon lequel la dérivée de $f$ en $(x_0, y_0, z_0)$ est maximale. De plus, cette dérivée maximale vaut $|\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0) \,|$.

Dans ce cas, on peut montrer la propriété suivante :

> $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0, y_0, z_0)$ est orthogonal à la surface de niveau de $f$ passant par $(x_0, y_0, z_0)$.

## 1.8 Points d'extremum

**Définition.** Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction de $n$ variables.

Le point $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est un point de *maximum absolu* (respectivement de *maximum relatif*) de $f$ si

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{D}(f)$ (respectivement pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ dans un voisinage de $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$).

Le point $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathrm{D}(f)$ est un point de *minimum absolu* (respectivement de *minimum relatif*) de $f$ si

$$f(x_1, \ldots, x_n) \geq f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{D}(f)$ (respectivement pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ dans un voisinage de $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$).

**Exemples**

1. Soit la fonction $f(x, y, z) = C$. Tout point de $\mathrm{D}(f)$ est un point de maximum et de minimum.
2. Soit la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (avec $\mathrm{D}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$). Alors $f$ n'a pas de maximum, ni de minimum.

Pour le reste de ce paragraphe, on ne traite que le cas des fonctions à 2 variables.

### A) Existence des points d'extremum

**Proposition (sans démonstration).** *Soit* $f\colon \mathrm{D}(f) \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si* $\mathrm{D}(f)$ *est fermé (c'est-à-dire qu'il contient son bord) et borné (c'est-à-dire qu'il est contenu dans un disque de rayon fini centré en* $(0,0)$*), alors* $f$ *possède au moins un point de maximum absolu et au moins un point de minimum absolu.*

**Exemples**

- $\mathrm{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ non fermé, borné
- $\mathrm{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ fermé, borné
- $\mathrm{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ fermé, non borné
- $\mathrm{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ fermé, borné.

## B) Détermination des points d'extremum

> **Théorème.** *Soit $f(x,y)$ une fonction de 2 variables. Si $(x_0,y_0)$ est un point d'extremum relatif, alors*
>
> a) $(x_0,y_0)$ *est un point du bord de* $\mathrm{D}(f)$,
>
> ou b) $(x_0,y_0)$ *est un point où* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *ou* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *n'existe pas,*
>
> ou c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ *existent et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Les points qui satisfont la condition c) sont appelés *points stationnaires* (ce sont les points à plan tangent horizontal).

*Démonstration.* Si $(x_0,y_0)$ ne satisfait pas la condition a) ou b), alors $(x_0,y_0)$ est à l'intérieur de $\mathrm{D}(f)$ et les dérivées partielles existent. Par hypothèse, $x \mapsto f(x,y_0)$ prend un extremum relatif en $x_0$ et ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$. On obtient de même que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$. □

**Exemple.** Soit la fonction $f = \sqrt{1-x^2-y^2}$ définie sur le domaine $\mathrm{D}(f) = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \leq 1 \,\right\}$.

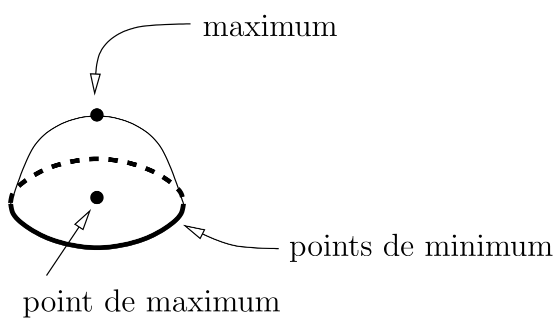
Comme $f$ est continue et que $\mathrm{D}(f)$ est fermé et borné, on sait que $f$ possède au moins un point de maximum et un point de minimum. On a

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y) = \left( \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \right),$$

qui est défini sur tout $\mathrm{D}(f)$ et qui vérifie

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0,y_0) = (0,0) \iff (x_0,y_0) = (0,0)\,.$$

On voit facilement que $(0,0)$ est un point de maximum. Par ce qui précède, les points de minimum sont forcément sur le bord de $\mathrm{D}(f)$, qui est le cercle d'équation $x^2+y^2 = 1$. Comme la valeur de $f$ en tous les points du bord est nulle, ce sont tous des points de minimum.

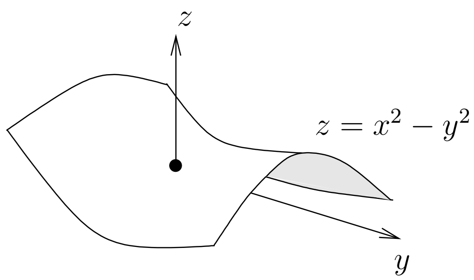



Remarquons que dans cet exemple, l'esquisse aurait permis de résoudre le problème sans appliquer les résultats invoqués.

**Attention.** Si un point appartient à l'une des catégories a), b) ou c), cela ne signifie pas que ce point soit forcément un point d'extremum.

**Exemple.** Soit la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Le point $(0, 0)$ est un point stationnaire, mais pas un point d'extremum.




**Méthode de détermination des points d'extremum**

1. On dresse la liste des points candidats, ce qui signifie la liste des points des catégories (a), (b) ou (c) du théorème précédent.
2. On considère tous les points du bord de $\mathrm{D}(f)$ et on étudie la fonction $f(x, y)$ dans un voisinage de ces points.
3. On fait de même pour les points où $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'existe pas.
4. On dresse la liste des points stationnaires et on applique le théorème suivant.

**Théorème (sans démonstration).** *Soit $f(x, y)$ une fonction de 2 variables telle que les dérivées partielles du 1^er^ et 2^e^ ordre existent et sont continues au voisinage du point stationnaire $(x_0, y_0)$ de $f$. En particulier $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.*
*Soit $\Delta = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2$ (appelé le* Hessien *de $f$ en $(x_0, y_0)$). Alors :*

*1. Si $\Delta > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, le point $(x_0, y_0)$ est un point de minimum relatif.*
*2. Si $\Delta > 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, le point $(x_0, y_0)$ est un point de maximum relatif.*
*3. Si $\Delta < 0$, le point $(x_0, y_0)$ n'est* **pas** *un point d'extremum.*
*4. Si $\Delta = 0$, on ne peut rien conclure.*

**Exemples**

1. $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20\,. \end{array}$$
   $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12\,.$
   Candidats :
   a) Aucun.
   b) Aucun.
   c) $$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3 & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12 & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{points stationnaires :} \\ (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)\,. \end{array}\right.$$

Analyse des points stationnaires :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = 36xy\,.$$

$$\begin{array}{lclcl}
(1,2) & : & \Delta > 0\,, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 & \Longrightarrow & \text{minimum relatif} \\
(1,-2) & : & \Delta < 0 & \Longrightarrow & \text{pas d'extremum} \\
(-1,2) & : & \Delta < 0 & \Longrightarrow & \text{pas d'extremum} \\
(-1,-2) & : & \Delta > 0\,, \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 & \Longrightarrow & \text{maximum relatif.}
\end{array}$$

2. $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & -x^2 - y^2 + 2xy + 4\,. \end{array}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2y\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y + 2x\,.$

Candidats :

a) Aucun.

b) Aucun.

c) $$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2y & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y + 2x & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{ points stationnaires } \left\{ (x,y) \,\middle|\, x = y \right\}.$$

Analyse des points stationnaires :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \Delta = 0$$

$\Longrightarrow$ on ne peut rien conclure.

On doit donc étudier la fonction $f$ au voisinage des points de la droite $x = y$. Or $f(x,y) = 4 - (x-y)^2 \leq 4$ pour tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x = y$, on a $f(x,y) = 4$ et on peut donc conclure que tous les points de la droite $x = y$ sont des points de maximum.

3. $f: \begin{array}{ccc} \mathrm{D}(f) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^2 + 4x\,. \end{array}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y\,.$

Candidats :

a) Les points du bord $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$ de $\mathrm{D}(f)$.

b) Aucun.

c) $$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4 & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & 0\,. \end{array}\right.$$

Or $(-2,0) \notin \mathrm{D}(f)$, d'où l'on tire qu'il n'y a pas de points stationnaires.

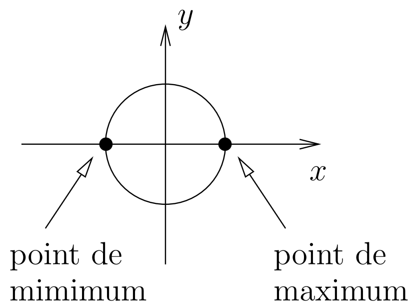
Ainsi tous les points d'extremum de $f$ (la fonction possède un maximum et un minimum car $\mathrm{D}(f)$ est fermé et borné) sont sur le bord, c'est-à-dire sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Or sur le bord $f$ s'écrit

$$f(x, y) = 4x + 1 \,,$$

d'où l'on conclut finalement :

$$\begin{array}{ll} (-1, 0) & \text{est un point de minimum;} \\ (1, 0) & \text{est un point de maximum.} \end{array}$$



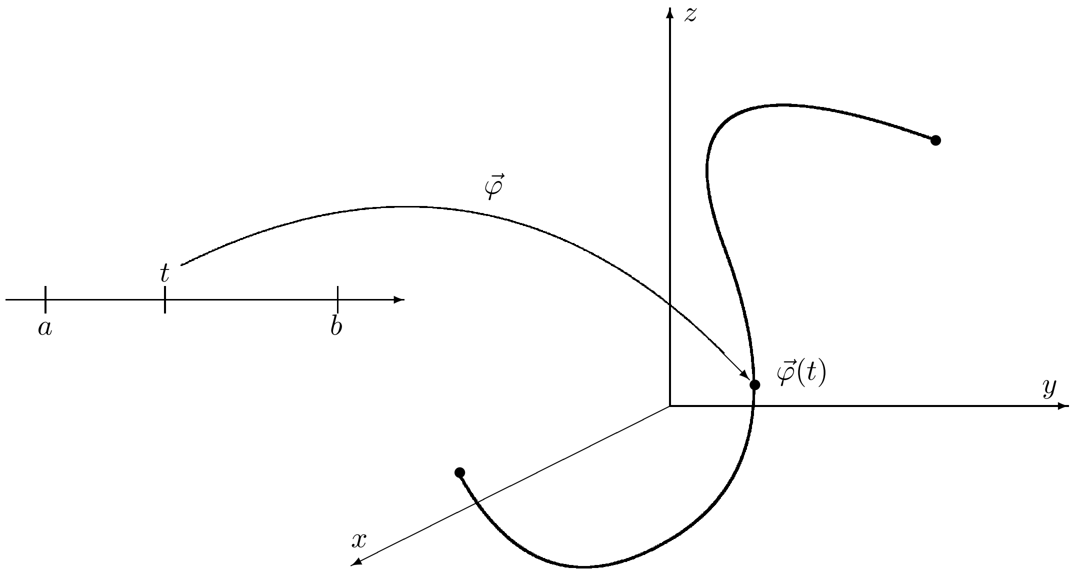
# 2 Intégrales curvilignes

## 2.1 Courbes paramétrées

Le meilleur moyen de représenter une courbe de l'espace est le suivant :

**Définition.** Une *courbe paramétrée* est une application continue

$$\begin{array}{rccl} \vec{\varphi}: & [a,b] \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \vec{\varphi}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)\,. \end{array}$$




A chaque point $t$ de l'intervalle $[a,b]$ correspond un point de la courbe dans $\mathbb{R}^3$, dont les coordonnées sont $x(t)$, $y(t)$, et $z(t)$.

La variable $t$ s'appelle le *paramètre* de la courbe.

La courbe (géométrique) est en fait l'image de $\vec{\varphi}$. On appelle cette manière de représenter une courbe une *représentation paramétrique* de la courbe.

**Exemples**

1. La droite passant par $A$ et $B$ :

$$\begin{array}{rccl} \vec{\varphi}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \overrightarrow{0A} + t\overrightarrow{AB} \\ \text{ou} & t & \longmapsto & \overrightarrow{0A} + 2t\overrightarrow{AB} \\ \text{ou} & t & \longmapsto & \overrightarrow{0B} + t\overrightarrow{BA}\,. \end{array}$$

En particulier, la représentation paramétrique de la courbe n'est pas unique.

2. Le cercle dans le plan $0xy$, de centre $(x_0, y_0)$ et de rayon $R$ :

$$\begin{array}{ccl} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \vec{\varphi}(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\sin t, 0)\,. \end{array}$$

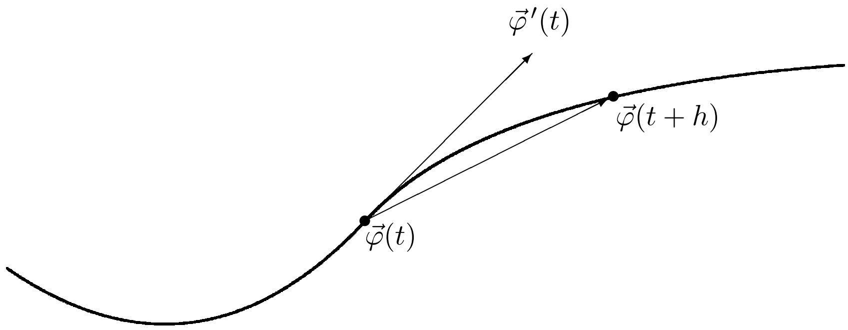
3. Le graphe d'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{ccl} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \vec{\varphi}(t) = \big(t, f(t)\big)\,. \end{array}$$

**Définition.** Soit $\vec{\varphi} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée. Le *vecteur tangent* à la courbe au point $\vec{\varphi}(t)$ est

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}\,'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\vec{\varphi}(t+h) - \vec{\varphi}(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left( \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \frac{z(t+h) - z(t)}{h} \right) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\vec{\varphi}\,'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)\,.}$$




**Définition.** Une courbe paramétrée est *régulière* si $\vec{\varphi}(t)$ est continûment dérivable (continue, dérivable, dérivée continue) et si $\vec{\varphi}\,'(t) \neq 0$ pour tout $t$.

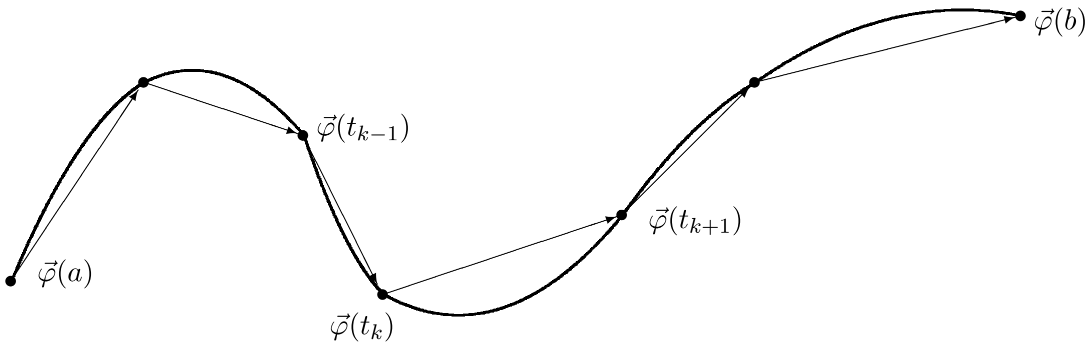
**Exemples**

1. droite : $t \longmapsto \vec{\varphi}(t) = \overrightarrow{0A} + t\overrightarrow{AB}$
   $\vec{\varphi}\,'(t) = \overrightarrow{AB}$
   $t \longmapsto \vec{\varphi}(t) = \overrightarrow{0A} + 2t\overrightarrow{AB}$
   $\vec{\varphi}\,'(t) = 2\overrightarrow{AB}$
   $t \longmapsto \vec{\varphi}(t) = \overrightarrow{0B} + t\overrightarrow{BA}$
   $\vec{\varphi}\,'(t) = \overrightarrow{BA}\,.$
2. cercle : $\vec{\varphi}(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\sin t)$
   $\vec{\varphi}\,'(t) = (-R\sin t, R\cos t)\,.$
3. graphe de $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ : $\vec{\varphi}(t) = \big(t, f(t)\big)$
   $\vec{\varphi}\,'(t) = \big(1, f'(t)\big)\,.$

## 2.2 La longueur d'une courbe

L'objectif de ce paragraphe consiste à calculer la longueur d'une courbe paramétrée

$$\begin{array}{rcll} \vec{\varphi}: & [a,b]\subset\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \vec{\varphi}(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,. \end{array}$$

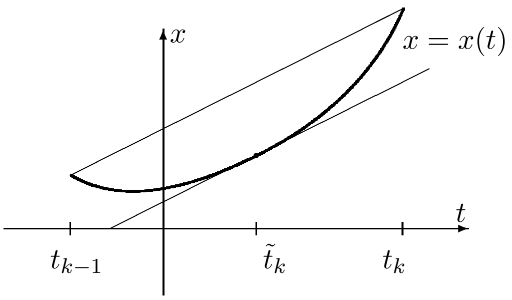



On approxime la longueur recherchée par la longueur de la ligne polygonale obtenue comme suit : on partage $[a,b]$ en $n$ intervalles $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$ et on juxtapose les segments $\vec{\varphi}(t_k)-\vec{\varphi}(t_{k-1})$.

$\Longrightarrow$ La longueur $L$ est approximée par $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\big|\,\vec{\varphi}(t_k)-\vec{\varphi}(t_{k-1})\,\big|$, où

$$\big|\,\vec{\varphi}(t_k)-\vec{\varphi}(t_{k-1})\,\big|^2=\big(x(t_k)-x(t_{k-1})\big)^2+\big(y(t_k)-y(t_{k-1})\big)^2+\big(z(t_k)-z(t_{k-1})\big)^2.$$

Or $x(t_k)-x(t_{k-1})$ se calcule à l'aide du théorème des accroissements finis :




il existe $\tilde{t}_k\in]t_{k-1},t_k[$
tel que $\frac{x(t_k)-x(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}=x'(\tilde{t}_k)$
$\Rightarrow x(t_k)-x(t_{k-1})=x'(\tilde{t}_k)\big(t_k-t_{k-1}\big)$.

De même, il existe $\hat{t}_k$ et $\bar{t}_k\in]t_{k-1},t_k[$ tels que $y(t_k)-y(t_{k-1})=y'(\hat{t}_k)\big(t_k-t_{k-1}\big)$ et $z(t_k)-z(t_{k-1})=z'(\bar{t}_k)\big(t_k-t_{k-1}\big)$.

$\Longrightarrow\ \big|\,\vec{\varphi}(t_k)-\vec{\varphi}(t_{k-1})\,\big|^2=\big[x'(\tilde{t}_k)^2+y'(\hat{t}_k)^2+z'(\bar{t}_k)^2\big](t_k-t_{k-1})^2.$

En passant à la limite sur des partages de l'intervalle $[a,b]$ de plus en plus fin ($n \to \infty$), on obtient $\tilde{t}_k$, $\hat{t}_k$, $\bar{t}_k \longrightarrow t_{k-1}$, puis on intègre pour obtenir :

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt\,.$$

**Théorème.** *La* longueur *de la courbe paramétrée régulière* $\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \vec{\varphi}(t) \end{array}$ *se calcule par la formule*

$$\boxed{L = \int_a^b \left| \vec{\varphi}\,'(t) \right| dt\,.}$$

**Exemples**

1. Pour le cercle $\begin{array}{ccl} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \vec{\varphi}(t) = (x_0 + R\cos t, y_0 + R\sin t, 0) \end{array}$

   on a $\left| \vec{\varphi}\,'(t) \right| = \left| (-R\sin t, R\cos t, 0) \right| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R$ et

$$L = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R\,.$$

2. Pour le graphe d'une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

   on a $\left| \vec{\varphi}\,'(t) \right| = \sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2}$ et

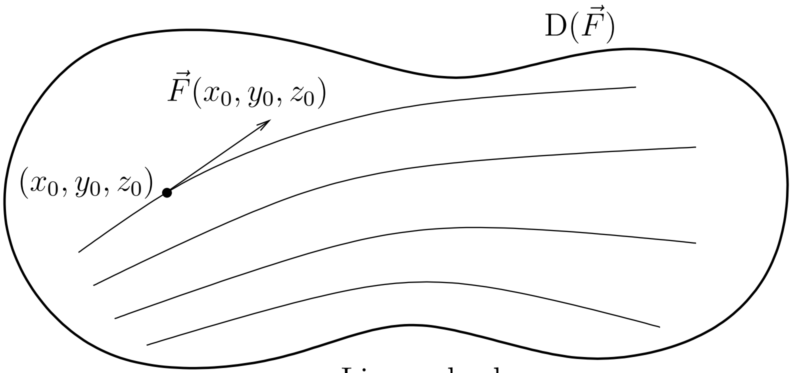
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(t)\big)^2}\, dt\,.$$

## 2.3 Champs vectoriels

**Définition.** Un *champ vectoriel* est une application $\vec{F}$ d'un domaine $\mathrm{D}(\vec{F})$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ : à chaque point $(x, y, z)$ de $\mathrm{D}(\vec{F})$, $\vec{F}$ fait correspondre un vecteur $\vec{F}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :

$$\begin{array}{rccl} \vec{F}: & \mathrm{D}(\vec{F}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \vec{F}(x,y,z) = \big(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\big)\,. \end{array}$$

**Définition.** Une courbe située dans $\mathrm{D}(\vec{F})$ est une *ligne de champ* de $\vec{F}$ si $\vec{F}(x, y, z)$ est tangent à la courbe au point $(x, y, z)$, en chaque point $(x, y, z)$ de la courbe.




Lignes de champ

**Exemple.** Un objet $D$ se déplace linéairement à vitesse constante $\vec{v}$ :

$$D \ni (x, y, z) \mapsto \vec{F}(x, y, z) = \vec{v}\,.$$

Les lignes de champ sont des droites parallèles à $\vec{v}$.

**Définition.** Un champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z)$ est un *champ de potentiel* (ou *champ de gradient*) s'il existe une fonction réelle de 3 variables $f(x, y, z)$ telle que

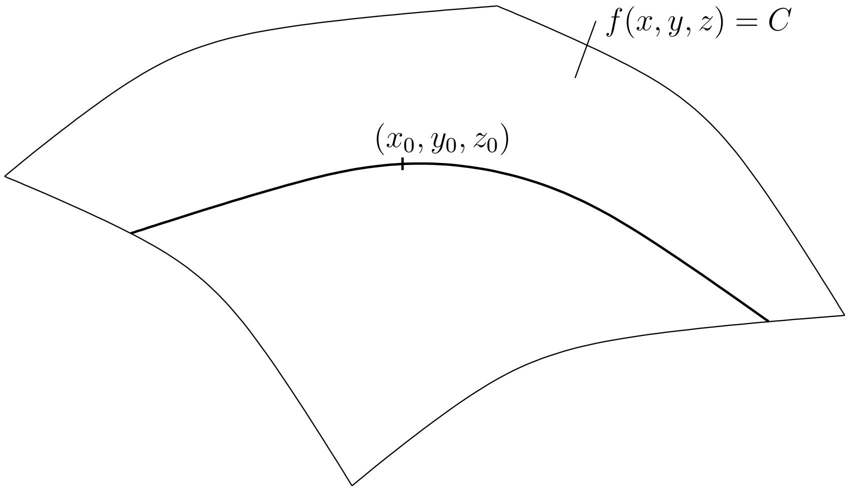
$$\vec{F}(x, y, z) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x, y, z)\,.$$

Une telle fonction $f(x, y, z)$ s'appelle un *potentiel* de $\vec{F}(x, y, z)$.

**Remarque.** Si $f(x, y, z)$ est un potentiel de $\vec{F}(x, y, z)$, alors $f(x, y, z) + C$ en est aussi un, pour toute constante $C$.

**Définition.** Les surfaces de niveau de $f(x, y, z)$, d'équation $f(x, y, z) = C$, s'appellent les *surfaces de potentiel* du champ vectoriel $\vec{F}(x, y, z)$.

Considérons une surface de potentiel $f(x, y, z) = C$, une courbe paramétrée (régulière) $\vec{\varphi} : t \longmapsto \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ sur cette surface et $(x_0, y_0, z_0) = \big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big)$ un point de cette courbe.




On a :

$$f\big(x(t),y(t),z(t)\big)=C$$

$\Longrightarrow$ si l'on dérive le terme de gauche par rapport à $t$ on obtient 0 :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)x'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)y'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)z'(t_0)=0$$

$$\Longrightarrow \qquad \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0),\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\Big)\cdot\big(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\big)=0$$

$$\Longrightarrow \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}f(x_0,y_0,z_0)\perp \text{vecteur tangent } \vec{\varphi}'(t_0).$$

Si l'on fait cela pour toutes les courbes sur la surface de niveau, on obtient :

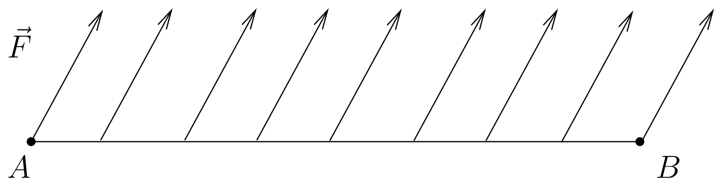
$$\boxed{\vec{F} \text{ est en tout point perpendiculaire aux surfaces de potentiel de } \vec{F}.}$$

## 2.4 Le travail

Nous voulons définir le travail d'un champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z)$ le long d'une courbe paramétrée régulière $\begin{array}{ccc} [a,b] & \xrightarrow{\vec{\varphi}} & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \vec{\varphi}(t)\,. \end{array}$

**Cas particulier**

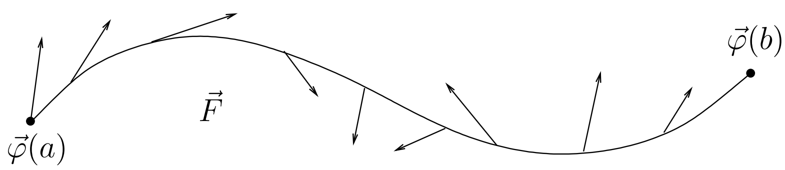
Soit un champ vectoriel constant $\vec{F}$ le long du segment $\overrightarrow{AB}$.




Le tavail "physique" de $\vec{F}$ le long de $\overrightarrow{AB}$ est le produit scalaire $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

**Cas général**

Soit $\vec{F}$ un champ non constant le long d'une courbe quelconque $C$.




On découpe la courbe en partageant $[a,b]$ en $n$ intervalles et on l'approxime par une juxtaposition de $n$ segments $\vec{\varphi}(t_k)-\vec{\varphi}(t_{k-1})$. On suppose que $\vec{F}$ est constant $\left(=\vec{F}\big(\vec{\varphi}(t_k)\big)\right)$ sur chaque segment.

$\Longrightarrow$ On approxime le travail total par :

$$\sum_{k=1}^{n}\vec{F}\big(\vec{\varphi}(t_k)\big)\cdot\big(\vec{\varphi}(t_k)-\vec{\varphi}(t_{k-1})\big)\,.$$

En passant à la limite on obtient :

**Définition.** Le travail d'un champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z)$ le long de la courbe $C$ paramétrée par $\begin{array}{rccc} \vec{\varphi}: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \vec{\varphi}(t) \end{array}$ est :

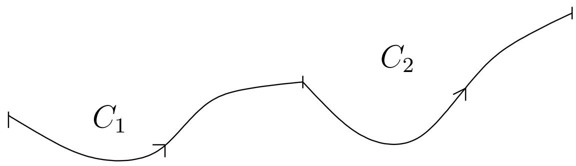
$$Travail = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{\varphi}(t)\big) \cdot \vec{\varphi}\,'(t)\, dt\,.$$

Le "travail" s'appelle aussi *l'intégrale curviligne* de $\vec{F}$ le long de $C$ et se note

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{\varphi}\,.$$

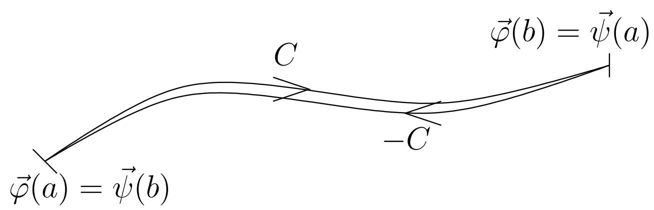
**Propriétés**

1. Le travail ne dépend pas du choix de la paramétrisation de $C$.
2. Le travail d'un champ $\vec{F}$ le long de la juxtaposition de deux courbes est la somme du travail le long de la première courbe et du travail le long de la deuxième courbe.




$$\int_{C_1+C_2} \vec{F}\, d\vec{\varphi} = \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{\varphi} + \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{\varphi}\,.$$

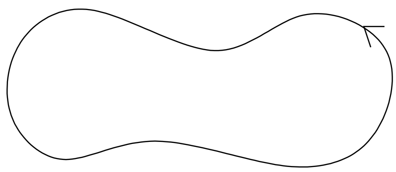
3. Considérons la courbe $C$ paramétrée par $\begin{array}{rccc} \vec{\varphi}: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\,. \\ & t & \longmapsto & \vec{\varphi}(t) \end{array}$ Parcourue dans l'autre sens c'est la courbe $-C$ paramétrée par $\begin{array}{rccc} \vec{\psi}: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \vec{\varphi}(a+b-t). \end{array}$



$$
\begin{aligned}
\int_{-C} \vec{F}\,d\vec{\varphi} &= \int_a^b \vec{F}\big(\vec{\psi}(t)\big)\cdot\vec{\psi}'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \vec{F}\big(\vec{\varphi}(a+b-t)\big)\cdot\vec{\varphi}'(a+b-t)(-1)\,dt \\
&= -\int_a^b \vec{F}\big(\vec{\varphi}(s)\big)\cdot\vec{\varphi}'(s)\,(-ds) \\
&= -\int_C \vec{F}\,d\vec{\varphi} \\
\Longrightarrow \quad & \boxed{\int_{-C} \vec{F}\,d\vec{\varphi} = -\int_C \vec{F}\,d\vec{\varphi}\,.}
\end{aligned}
$$

Le travail change de signe lorsque l'on renverse le sens de parcours.

4. Si $\vec{\varphi}(a) = \vec{\varphi}(b)$, $C$ est une courbe fermée.




Le point de départ ne joue aucun rôle pour le calcul du travail le long d'une courbe fermée orientée. Dans ce cas, le travail de $\vec{F}$ le long de $C$ s'appelle aussi la *circulation* de $\vec{F}$ le long de $C$ et se note

$$\oint_C \vec{F}\,d\vec{\varphi}\,.$$

**Exemples**

1. Le travail du champ $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ le long du cercle

$$
\begin{array}{rccl}
\vec{\varphi}: & [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
& t & \longmapsto & (R\cos t, R\sin t, 0)
\end{array}
$$

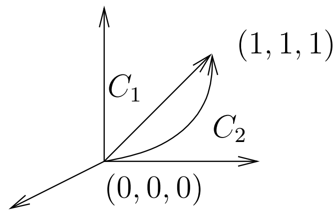
$$\int_C \vec{F}\,d\vec{\varphi} = \int_0^{2\pi} \underbrace{(R\cos t, R\sin t, 0)\cdot(-R\sin t, R\cos t, 0)}_{0}\,dt = 0.$$

2. Le travail du champ $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, xz, 1)$ le long de $\begin{array}{rccl} \vec{\varphi}: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (t,t,t) \end{array}$

$$\int_{C_1} \vec{F}\,d\vec{\varphi} = \int_0^1 (t^2,t^2,1)\cdot(1,1,1)\,dt = \int_0^1 (2t^2+1)\,dt = \Big[\frac{2}{3}t^3 + t\Big]_0^1 = \frac{5}{3}\,.$$

3. Le travail du même champ $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, xz, 1)$ le long de $\begin{array}{rccc} \vec{\varphi}: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (t, t^2, t^3) \end{array}$

$$\int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{\varphi} = \int_0^1 (t^4, t^4, 1)\cdot(1, 2t, 3t^2)\, dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^5 + 3t^2)\, dt = \left[\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^6 + t^3\right]_0^1 = \frac{23}{15}\,.$$




On remarque que le travail du champ $\vec{F}$ le long des deux courbes $C_1$ et $C_2$ reliant $(0,0,0)$ à $(1,1,1)$ n'est pas le même.

## 2.5 Champs conservatifs

On a vu à l'exemple précédent que si deux courbes relient le point $P$ au point $Q$, le travail de $\vec{F}$ le long de la première courbe n'est pas toujours égal au travail de $\vec{F}$ le long de la deuxième courbe.

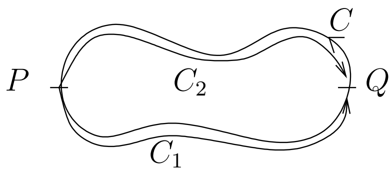
**Définition.** Un champ vectoriel $\vec{F}(x,y,z)$ est *conservatif* si pour toute paire de points $P$ et $Q \in \mathrm{D}(\vec{F})$, le travail de $\vec{F}$ le long de n'importe quelle courbe reliant $P$ à $Q$ a la même valeur.

**Exemple.** Le champ $\vec{F}(x,y,z) = (y^2, xz, 1)$ n'est pas conservatif.

**Proposition.** *$\vec{F}$ est conservatif $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_C \vec{F}\, d\vec{\varphi} = 0$ pour toute courbe fermée $C$.*

*Démonstration.*

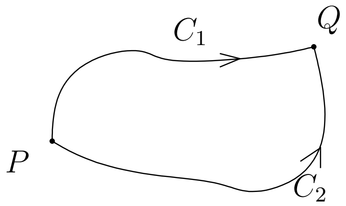
"$\Rightarrow$" :




$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}\, d\vec{\varphi} &= \int_{C_1+(-C_2)} \vec{F}\, d\vec{\varphi} \\ &= \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{\varphi} - \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

car $\vec{F}$ est conservatif.

"$\Leftarrow$" :




Par hypothèse :

$$\int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{\varphi} - \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{\varphi} = \int_{C_1+(-C_2)} \vec{F}\, d\vec{\varphi} = 0$$

donc $\displaystyle\int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{\varphi} = \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{\varphi}$.

□

**Définition.** Un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ est *connexe* si pour toute paire de points $P$ et $Q \in D$, il existe une courbe dans $D$, reliant $P$ à $Q$.

**Théorème.** *Soit $\vec{F}$ un champ vectoriel tel que $\mathrm{D}(\vec{F})$ soit connexe. Alors*

$$\boxed{\vec{F} \text{ est conservatif} \Longleftrightarrow \vec{F} \text{ est un champ de potentiel}}$$

*c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f(x,y,z)$ telle que $\vec{F}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y,z)$.*

*Dans ce cas, le travail de $\vec{F}$ le long de n'importe quelle courbe reliant $P$ à $Q$ satisfait*

$$\boxed{\textit{Travail} = f(Q) - f(P).}$$

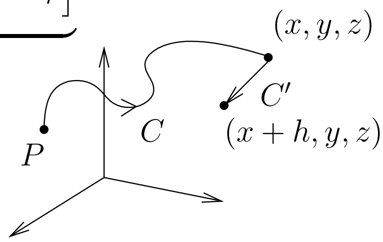
*Démonstration.*

"$\Rightarrow$" : Soit $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ conservatif et $P \in \mathrm{D}(\vec{F})$.

Définissons $f(x,y,z) = \displaystyle\int_C \vec{F}\, d\vec{\varphi}$ où $C$ est n'importe quelle courbe reliant $P$ à $(x,y,z)$ dans $\mathrm{D}(\vec{F})$ (cela a un sens vu que $\mathrm{D}(\vec{F})$ est connexe et que $\vec{F}$ est conservatif).

$$\text{Calculons } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \underbrace{\Big[ \int_{C+C'} \vec{F}\, d\vec{\varphi} - \int_C \vec{F}\, d\vec{\varphi} \Big]}_{\int_{C'} \vec{F}\, d\vec{\varphi}}$$




$$\text{où } C' : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & (x+th,y,z) \end{array}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \underbrace{\int_0^1 \underbrace{\vec{F}(x+th,y,z)\cdot(h,0,0)}_{F_1(x+th,y,z)\cdot h}\, dt}_{\substack{h\cdot F_1(x+t^*h,y,z) \text{ pour un } t^* \in [0,1] \\ \text{par le théorème de la moyenne du calcul intégral}}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} h F_1(x+t^*h,y,z)$$

$$= F_1(x,y,z).$$

On montre de même que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = F_2(x,y,z)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = F_3(x,y,z)$

$\Longrightarrow \vec{F}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y,z)$.

"$\Leftarrow$" : Soit $\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$.

Calculons le travail de $\vec{F}$ le long d'une courbe quelconque $c$ de $P = \vec{\varphi}(a)$ à $Q = \vec{\varphi}(b)$ dans $\mathrm{D}(\vec{F})$.

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}\, d\vec{\varphi} &= \int_a^b \overrightarrow{\mathrm{grad}} f\big(\vec{\varphi}(t)\big)\cdot \vec{\varphi}\,'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \underbrace{\Big( \frac{\partial f}{\partial x}\big(\vec{\varphi}(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\vec{\varphi}(t)\big)y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(\vec{\varphi}(t)\big)z'(t) \Big)}_{\left(f\left(\vec{\varphi}(t)\right)\right)'}\, dt \\ &= f\big(\vec{\varphi}(b)\big) - f\big(\vec{\varphi}(a)\big) = f(Q) - f(P). \end{aligned}$$

$\square$

**Exemple.** Le champ $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ est un champ de potentiel dont on détermine le potentiel $f$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= x && \Longrightarrow \quad f(x,y,z) = \tfrac{x^2}{2} + g(y,z) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial y} = y && \Longrightarrow \quad g(y,z) = \tfrac{y^2}{2} + h(z) \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= h'(z) = z && \Longrightarrow \quad h(z) = \tfrac{z^2}{2} + C \\
& && \Longrightarrow \quad f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

$$\vec{F} \text{ conservatif} \quad \Longrightarrow \quad \int_{\substack{\text{courbe} \\ \text{fermée}}} \vec{F}\, d\vec{\varphi} = 0.$$

# 3 Nombres et fonctions complexes

## 3.1 Les nombres complexes

Les ensembles de nombres :

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ = les nombres entiers $\geq 0$, appelés *nombres naturels*.
On peut additionner dans $\mathbb{N}$.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ = les *nombres entiers*.
On peut additionner, soustraire et multiplier dans $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$ = les *nombres rationnels*.
On peut additionner, soustraire, multiplier et diviser (sauf par 0) dans $\mathbb{Q}$.
C'est ce que l'on appelle un corps.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ = les *nombres réels*, qui correspondent aux points de la droite.
C'est aussi un corps.
Attention ! $\sqrt{2}, \pi, e \in \mathbb{R}$ mais $\notin \mathbb{Q}$.

Dans $\mathbb{R}$, on ne peut pas résoudre toutes les équations : par exemple, $z^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Pour cela on introduit un nouveau nombre *"imaginaire"* :

$$i \text{ est une solution de l'équation } z^2 + 1 = 0.$$

Donc $$\boxed{i^2 = -1.}$$

**Définition.** L'ensemble des *nombres complexes* $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres de la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, avec la propriété que deux tels nombres $x + iy$ et $x' + iy'$ (avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$) sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

$$\begin{aligned}
\text{On peut additionner :} \quad & (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\
& 0 = 0 + i0 \\
\text{multiplier :} \quad & (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\
& 1 = 1 + i0 \\
\text{soustraire :} \quad & (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \\
\text{diviser :} \quad & (x + iy)^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \text{ pour } (x + iy) \neq 0 \\
& \text{car } (x + iy)\frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.
\end{aligned}$$

Un nombre complexe s'écrit $z = x + iy$ et $x = \mathrm{Ré}(z)$ s'appelle la *partie réelle* de $z$, tandis que $y = \mathrm{Im}(z)$ s'appelle la *partie imaginaire* de $z$.

**Remarques**

1. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ car si $x \in \mathbb{R}$, $x = x + i0 \in \mathbb{C}$.

2. Les nombres complexes de la forme $0 + iy = iy$ s'appellent *"purement imaginaires"*.
3. $\dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = (x_1 + iy_1)\dfrac{(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \dfrac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$.
4. L'équation $z^2 + 1 = 0$ a deux solutions : $z = x + iy$, $z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy = -1$ $\Longrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x^2 - y^2 = -1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow z = +i$ ou $z = -i$.

**Exemples**

1. $(2 + 4i)(5 - i) = (10 + 4) + i(20 - 2) = 14 + 18i$.
2. $i^3 = -i$.
3. $\dfrac{1}{i} = -i$.

L'avantage de travailler avec les nombres complexes $\mathbb{C}$ réside dans le résultat suivant sur la résolution des équations polynomiales, démontré par Gauss dans sa thèse en 1799 :

**Théorème fondamental de l'algèbre (sans démonstration)**
*Tout polynôme*

$$z^z + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n_2} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0\,,$$

*avec* $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, *possède au moins un zéro dans* $\mathbb{C}$. *(On dit que* $\mathbb{C}$ *est* algébriquement clos.*)*

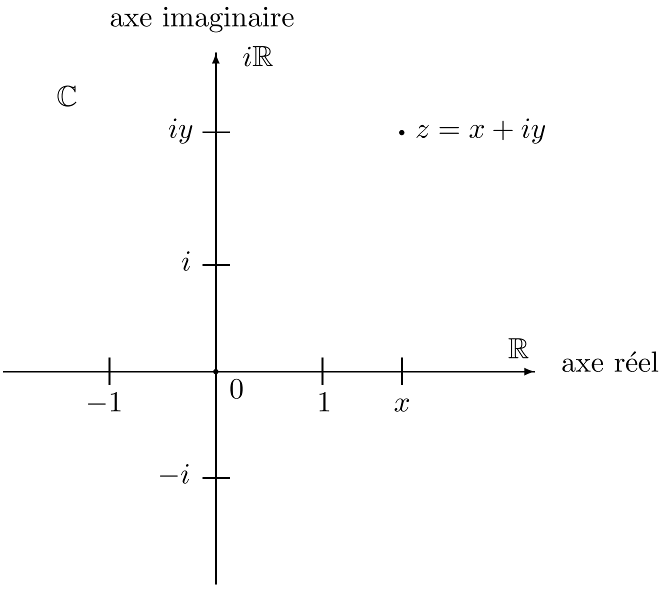
**Corollaire (sans démonstration).** *Tout polynôme comme ci-dessus se décompose en facteurs linéaires :*

$$z^z + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n_2} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0 = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

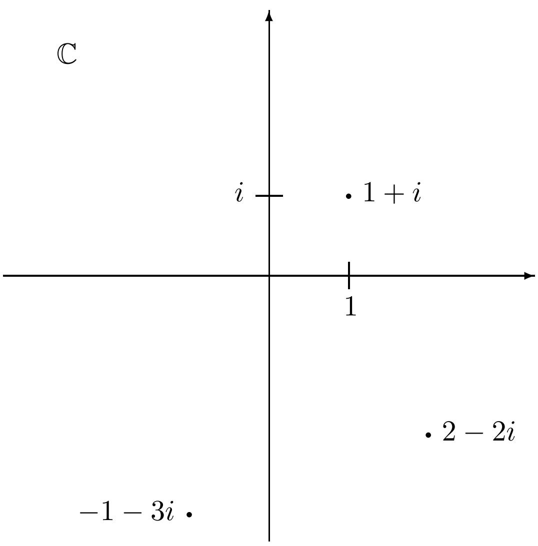
*avec* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

## 3.2 Le plan de Gauss

On représente géométriquement $\mathbb{R}$ par une droite. Comment représenter $\mathbb{C}$ ? Un nombre complexe est un nombre de la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Donc il y a correspondance entre les nombres complexes $z$ et les couples de nombres réels $(x, y)$ où $x = \text{Ré}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$.
$\Longrightarrow$ On représente un nombre complexe par un point du plan. C'est le *plan de Gauss* ou *plan complexe*.

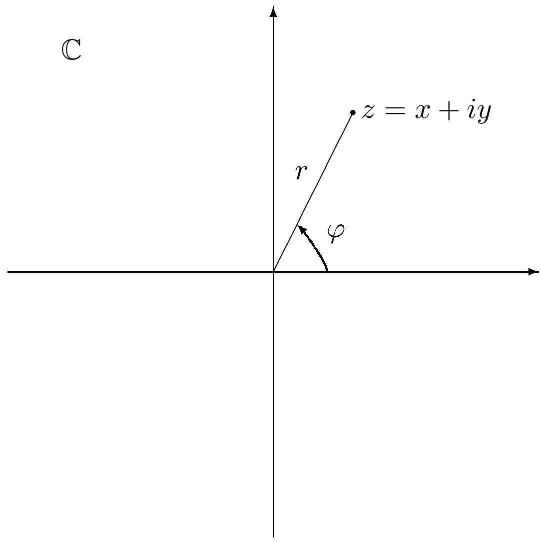



**Exemples**. Représentation de nombres complexes :




**Remarque.** On peut donc voir un nombre complexe comme un $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ ou comme un point du plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Un point du plan de Gauss $z = x + iy$ est identifié par ses deux coordonnées cartésiennes $x$ et $y$. Mais il peut aussi être identifié par deux coordonnées polaires (le rayon et l'angle) :




$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ = *valeur absolue* ou *module* de $z$, on note $r = |\,z\,|$, $|\,z\,|$ réel $\geq 0$.
$\varphi$ est l'angle mesuré depuis l'axe réel = *argument* de $z$, on note $\varphi = \arg(z)$.

**Attention !** Les angles sont toujours mesurés en radians.
De plus, $\arg z$ n'est pas déterminé de manière unique mais seulement à un multiple entier de $2\pi$ près. Par exemple : $\arg(1) = 0$ ou $2\pi$ ou $4\pi$ ou $-2\pi \ldots$

$$\arg(i) = \tfrac{\pi}{2} \text{ ou } \tfrac{5\pi}{2} \text{ ou } \ldots$$
$$\arg(-1) = \pi \text{ ou } -\pi \text{ ou } 3\pi \text{ ou } \ldots$$
$$\arg(-i) = -\tfrac{\pi}{2} \text{ ou } \tfrac{3\pi}{2} \text{ ou } \ldots$$
$$\arg(1+i) = \tfrac{\pi}{4} \text{ ou } \tfrac{9\pi}{4} \text{ ou } \ldots$$

On note parfois $\arg(z) = \varphi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

**Remarque.** Si $\mathrm{Ré}(z) > 0$, $\arg(z)$ est (l'angle $\in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente vaut $\frac{y}{x}$)$+2k\pi$.
Si $\mathrm{Ré}(z) < 0$, $\arg(z)$ est (l'angle $\in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ dont la tangente vaut $\frac{y}{x}$)$+2k\pi$.
Si $\mathrm{Ré}(z) = 0$, $\begin{cases} \text{si } \mathrm{Im}(z) > 0, & \arg(z) = \frac{\pi}{2}\,; \\ \text{si } \mathrm{Im}(z) < 0, & \arg(z) = -\frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$
Si $z = 0$, l'argument n'est pas défini.

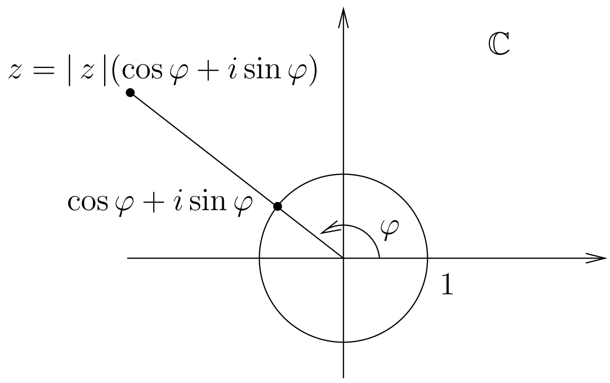
On peut donc donner un nombre complexe soit sous la forme $z = x + iy$ avec $x = \mathrm{Ré}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$, soit (si $z \neq 0$) sous la forme $\begin{cases} |\,z\,| = r \\ \arg(z) = \varphi\,. \end{cases}$

Si l'on connaît $r = |\,z\,|$ et $\varphi = \arg(z)$, on retrouve Ré$(z)$ et Im$(z)$ par les formules :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi\,. \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{z = r\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big).}$$

C'est la *formule d'Euler*, avec $r = |\,z\,|$ un nombre réel $\geq 0$ et $\big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big)$ un nombre complexe de valeur absolue 1.

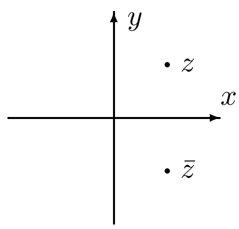



**Remarque.** $\big\{\, z \in \mathbb{C} \,\big|\, |\,z\,| = R \,\big\}$ = cercle de rayon $R$ centré à l'origine.
$\big\{\, z \in \mathbb{C} \,\big|\, \arg(z) = \varphi \,\big\}$ = demi-droite.

**Le conjugué complexe**

**Définition.** Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ son *conjugué complexe* est $\bar{z} = x - iy$.

On a donc $\begin{cases} \text{Ré}(\bar{z}) = \text{Ré}(z) \\ \text{Im}(\bar{z}) = -\,\text{Im}(z) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} |\,\bar{z}\,| = |\,z\,| \\ \arg(\bar{z}) = -\arg(z). \end{cases}$




Ainsi que les règles : $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

**Remarques**

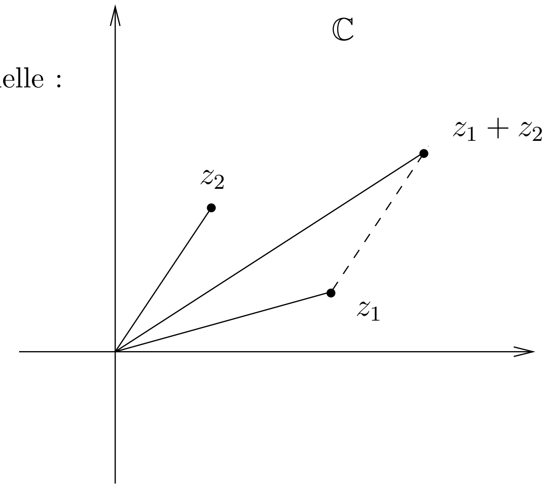
1. Ré$(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ et Im$(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2}$.
2. $z = \bar{z} \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
3. $\bar{z} = -z \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.
4. $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = |\,z\,|^2$ ;

   si $z \neq 0$, $z \cdot \dfrac{\bar{z}}{|\,z\,|^2} = 1 \Rightarrow z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|\,z\,|^2} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

**Interprétation géométrique des opérations**

**Addition**

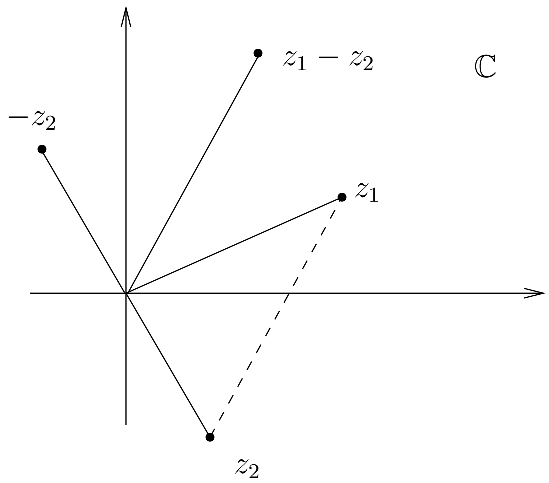
Cela correspond à l'addition vectorielle :




On a l'inégalité du triangle :
$|\, z_1 + z_2 \,| \leq |\, z_1 \,| + |\, z_2 \,|$.

**Soustraction**

$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$




$|\, z_1 - z_2 \,| =$ distance entre $z_1$ et $z_2$.

**Multiplication**

$$\begin{array}{ll} z_1 = x_1 + iy_1 & z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \\ z_2 = x_2 + iy_2 & z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \end{array}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= r_1r_2\big[\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\underbrace{(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\sin\varphi_1)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)} \\ \Longrightarrow z_1 \cdot z_2 &= r_1r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} |\, z_1 \cdot z_2 \,| &= |\, z_1 \,||\, z_2 \,| \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \arg(z_1) + \arg(z_2). \end{aligned}}$$

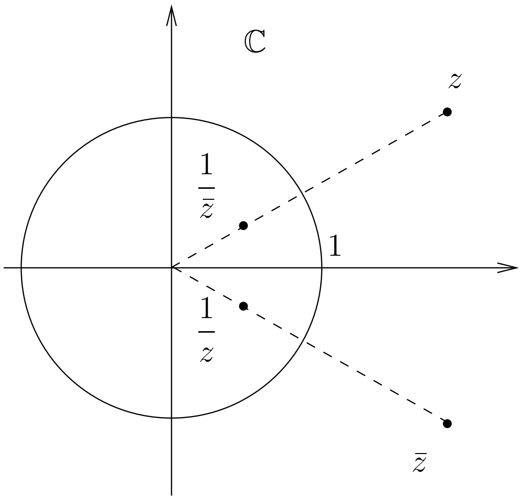
**Élévation à une puissance**

Pour $n$ entier $> 0$ :
$$\begin{aligned} z &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ z^n &= r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} |\, z^n \,| &= |\, z \,|^n \\ \arg(z^n) &= n \cdot \arg(z). \end{aligned}}$$

**Division**

$$z = x + iy \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{z} = \frac{\bar z}{|\, z\,|^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} \left|\frac{1}{z}\right| &= \frac{1}{|\, z\,|} \\ \arg\left(\frac{1}{z}\right) &= -\arg(z). \end{aligned}}$$




**Remarque.** $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar z}$

car $\left|\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|\, z\,|} = \frac{1}{|\, \bar z\,|}$

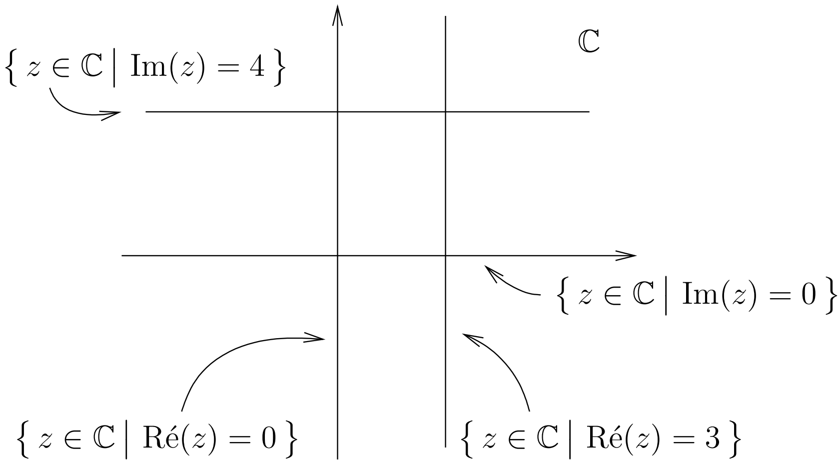
et
$$\begin{aligned} \arg\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= -\arg\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= \arg(z) = \arg\left(\frac{1}{\bar z}\right). \end{aligned}$$

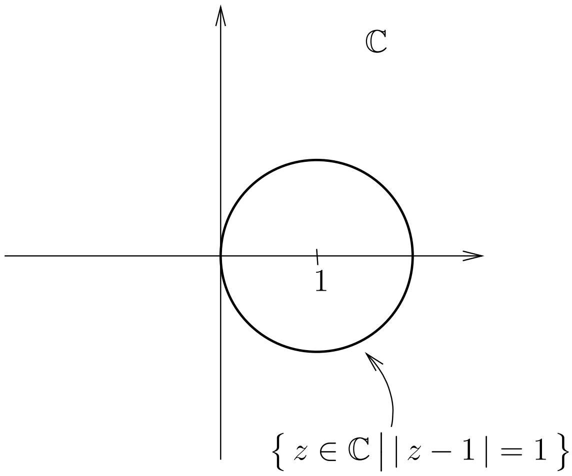
$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

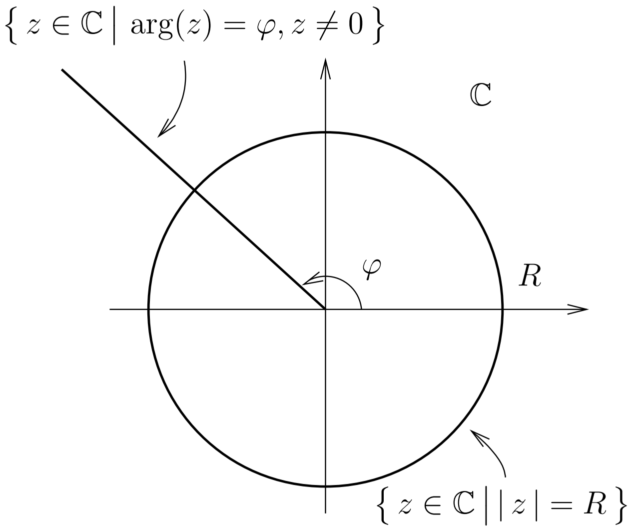
$$\Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= |\, z_1 \,| \cdot \left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{|\, z_1\,|}{|\, z_2\,|} \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) + \arg\left(\frac{1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|\, z_1\,|}{|\, z_2\,|} \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg(z_1) - \arg(z_2). \end{aligned}}$$

**Exemples de sous-ensembles de $\mathbb{C}$**



### 3.3 Résolution de certaines équations complexes

**A) Équation** $\boldsymbol{z^2 = a}$, où $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$.

On cherche tous les nombres complexes $z$ tels que $z^2 = a$.

**Remarque.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, le symbole $\sqrt{x}$ signifie la racine carrée positive ou nulle de $x$, c'est-à-dire le nombre réel $y$ tel que $y \geq 0$ et $y^2 = x$.

**Première méthode.** On pose $z = x + iy$ et on cherche à avoir :

$$(x+iy)^2 = a = a_1 + ia_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 & = a_1 \\ 2xy & = a_2\,. \end{cases}$$

**Exemple.** $z^2 = -3+4i \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 & = -3 \\ 2xy & = 4 \end{cases} \Longrightarrow y = \frac{2}{x} \Longrightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

$x^2 = \frac{-3\pm 5}{2} = 1$ ($-4$ exclus) $\Longrightarrow x = \pm 1$, $y = \pm 2 \Longrightarrow z = \pm(1+2i)$.

**Deuxième méthode.** Si $a = 0$, $z = 0$.

On suppose $a \neq 0$. $a = |\,a\,|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $\alpha = \arg(a)$.

On pose $z = |\,z\,|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi = \arg(z)$.

$$z^2 = a \Longleftrightarrow \begin{cases} |\,z^2\,| = |\,z\,|^2 = |\,a\,| \\ \arg(z^2) = 2\arg(z) = \arg(a) + 2k\pi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} |\,z\,| = \sqrt{|\,a\,|} \\ \arg(z) = \frac{1}{2}\arg(a) + k\pi \end{cases}$$

$$\Longrightarrow z = \sqrt{|\,a\,|}\big(\cos\tfrac{\alpha}{2} + i\sin\tfrac{\alpha}{2}\big) \text{ ou } z = \sqrt{|\,a\,|}\big(\underbrace{\cos(\tfrac{\alpha}{2}+\pi)}_{-\cos\frac{\alpha}{2}} + i\underbrace{\sin(\tfrac{\alpha}{2}+\pi)}_{-\sin\frac{\alpha}{2}}\big)$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{z = \pm\sqrt{|\,a\,|}\big(\cos\tfrac{\alpha}{2} + i\sin\tfrac{\alpha}{2}\big).}$$

Les solutions sont toujours de la forme $\pm w$ pour un $w \in \mathbb{C}$.

**Exemple.** $z^2 = -1$, $a = -1$, $|\,a\,| = 1$ et $\arg(a) = \pi$.

$$z = \pm 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \pm 1(0 + i)$$

$$z = \pm i\,.$$

**B) Équation $\boldsymbol{az^2+bz+c=0}$**, $a,b,c\in\mathbb{C}$.

On cherche tous les nombres complexes $z$ tels que $az^2+bz+c=0$.

Si $a=0$, $bz+c=0 \quad\Longrightarrow\quad$ si $b\neq 0$, $z=-\dfrac{c}{b}$ ;
si $b=0$ il n'y a pas d'équation.

Si $a\neq 0$, $\qquad z^2+\dfrac{b}{a}z+\dfrac{c}{a}=0$ ;

$$\Big(z+\frac{b}{2a}\Big)^2+\Big(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\Big)=0.$$

On pose $w=z+\frac{b}{2a}$ et on obtient une équation : $w^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ dont les solutions sont $w=\frac{\pm u}{2a}$ pour $u$ une solution de l'équation $u^2=b^2-4ac$ que l'on détermine par **A)**.

Finalement $\qquad \boxed{z=\dfrac{-b\pm u}{2a}.}$

**Exemple.** $z^2+z+iz+i=0$

Ici $a=1$, $b=1+i$ et $c=i$.

Donc $b^2-4ac=(1+i)^2-4i=2i-4i=-2i$.

On cherche $u$ tel que $u^2=-2i=2\big(\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2})\big)$.

On a $u=\pm\sqrt{2}\big(\cos(\frac{3\pi}{4})+i\sin(\frac{3\pi}{4})\big)=\pm(-1+i)$.

Par suite, $z=\dfrac{-(1+i)\pm(-1+i)}{2}=\Big\langle\begin{array}{l} z=-i\,; \\ z=-1\,. \end{array}$

**C) Équation $\boldsymbol{z^n=a}$**, $a\in\mathbb{C}$.

On cherche tous les nombres complexes $z$ tels que $z^n=a$, autrement dit on cherche toutes les *racines $n$-ièmes* de $a\in\mathbb{C}$.

On suppose $a\neq 0$ (si $a=0$ alors $z=0$).

$a=|\,a\,|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $\alpha=\arg(a)$

$z^n$ est un nombre complexe avec $|\,z^n\,|=|\,z\,|^n$ et $\arg(z^n)=n\arg(z)$.

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} |\,z\,|^n=|\,a\,| \\ n\arg(z)=\alpha+2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

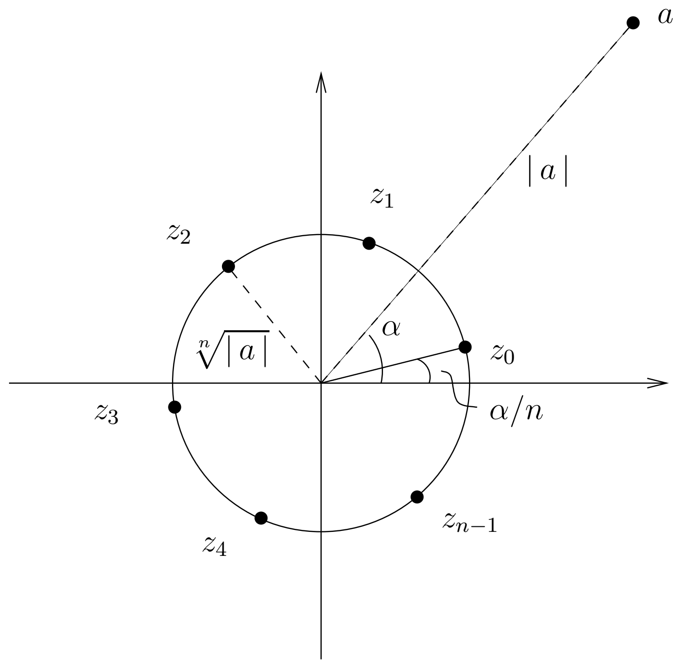
$\Longrightarrow |\,z\,|=\sqrt[n]{|\,a\,|}\in\mathbb{R} \quad \geq 0$. Toutes les racines $n$-ièmes de $a$ sont sur le cercle de rayon $\sqrt[n]{|\,a\,|}$, centré à l'origine.

$\Longrightarrow \arg(z)=\frac{\alpha}{n}$ ou $\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}$ ou $\frac{\alpha}{n}+\frac{4\pi}{n}$ ou $\ldots$ ou $\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}$ ou $\underbrace{\frac{\alpha}{n}+\underbrace{\frac{2n\pi}{n}}_{2\pi}}_{\text{inutile.}}$

L'équation $z^n = a$ ($a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$) possède $n$ solutions distinctes, situées sur le cercle de centre 0, de rayon $\sqrt[n]{|\,a\,|}$ :

$$z_k = \sqrt[n]{|\,a\,|}\big(\cos(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n})\big) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

**Notation.** On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, le symbole $\sqrt[n]{x}$ désigne l'unique nombre réel positif ou nul $y$ tel que $y^n = x$.




**Exemple.** $z^3 = i$

On a $|\,i\,| = 1$ et $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

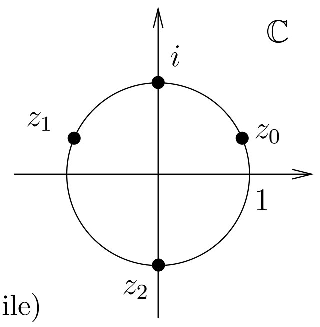
Solutions : $z_0 = 1(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$z_1 = 1(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$z_2 = 1(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}) = -i$

$z_3 = 1(\cos\frac{13\pi}{6} + i\sin\frac{13\pi}{6}) = z_0$ (inutile)

$\ldots$



## 3.4 Quelques fonctions complexes

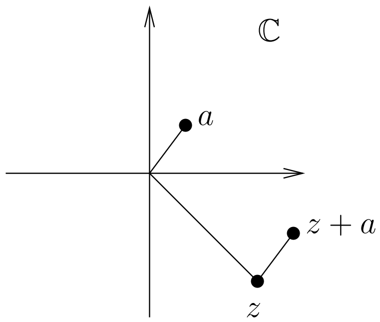
**Définition.** Une *fonction complexe* d'une variable complexe est une application $f$ d'un domaine $\mathrm{D}(f) \subset \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{D}(f) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f(z). \end{array}$$

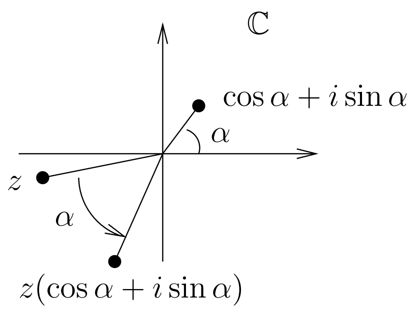
Nous n'exposons pas ici une théorie complète sur les fonctions complexes, mais allons uniquement considérer quelques exemples. Une difficulté des fonctions complexes est que l'on ne peut pas dessiner leur graphe puisqu'il se situe dans $\mathbb{C}^2$.

**Exemples**

1. Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z+a. \end{array}$
   Géométriquement, il s'agit d'une translation donnée par $a \in \mathbb{C}$.




2. Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & (\cos\alpha + i\sin\alpha)z. \end{array}$
   Géométriquement, il s'agit d'une rotation d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$.



## 3.5 La fonction exponentielle complexe

On connaît $e^x$ pour $x$ réel. On veut définir $e^z$ pour $z \in \mathbb{C}$. Vu que $z = x + iy$, on pose $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Le terme $e^x$ est l'exponentielle réelle du nombre réel $x$. Il reste à définir $e^{iy}$ pour $y \in \mathbb{R}$ : on veut $\left(e^{iy}\right)' = ie^{iy}$.

**Définition.** $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ pour $y \in \mathbb{R}$.
C'est le nombre complexe d'argument $y$ et de valeur absolue 1.

Justification :

$$\left(e^{iy}\right)' = \big(\cos y + i\sin y\big)' = -\sin y + i\cos y = i(\cos y + i\sin y) = ie^{iy}\,.$$

Donc si $z = x + iy$, $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$ et

$$\boxed{\left| e^z \right| = e^x > 0 \text{ et } \arg(e^z) = y.}$$

Ainsi $e^z$ peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{C} - \{0\}$.

**Propriété.** $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

*Démonstration.* Soit $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.
$\left| e^{z_1}e^{z_2} \right| = \left| e^{z_1} \right| \left| e^{z_2} \right| = e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, par la propriété de l'exponentielle réelle.
$\arg(e^{z_1}e^{z_2}) = \arg(e^{z_1}) + \arg(e^{z_2}) = y_1 + y_2 = \arg(e^{z_1+z_2})$. □

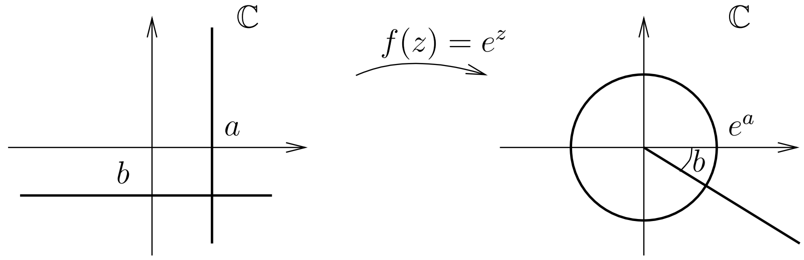
**Exemples**.
$$\begin{aligned} e^{i\pi} &= -1 \\ e^{i\pi/2} &= i \\ e^{-i\pi/2} &= -i \\ e^{i\pi/4} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ e^{a+2\pi i} &= e^a \underbrace{e^{2\pi i}}_{1} = e^a. \end{aligned}$$

**Remarque.** Vu que $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ et $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \ \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.}$$

**Interprétation géométrique**

Si l'on considère la droite $a + iy$ ($a$ constant et $y$ variable), son image par la fonction exponentielle $z \longmapsto e^z$ est un cercle de rayon $e^a$.
Si l'on considère la droite $x + ib$ ($b$ constant et $x$ variable), son image par la fonction exponentielle est une demi-droite d'argument $b$ (formant un angle $b$ avec l'axe $0x$).



## 3.6 Le logarithme complexe

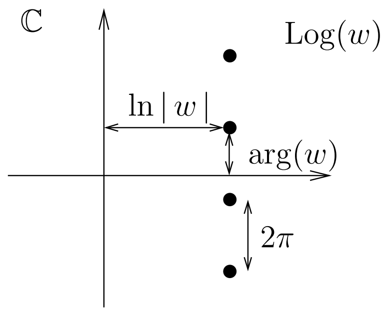
Si l'on parle de logarithme, c'est que l'on a envie d'inverser l'exponentielle. Mais la fonction $z \longmapsto e^z$ n'est pas injective (contrairement à l'exponentielle réelle) car $e^{x+iy} = e^{x+i(y+2\pi)}$, par exemple.

**Définition.** Le *logarithme complexe* du nombre complexe $w$ est l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $e^z = w$ ; on le note $\mathrm{Log}(w)$.

Log n'est pas une fonction, mais une manière d'associer à tout $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ un ensemble de nombres. $\mathrm{Log}(w)$ est défini pour tout $w \neq 0$.

Voyons comment calculer tous les $z$ tels que $e^z = w$. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$e^z = e^x e^{iy} = w \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |\,w\,| = e^x \Leftrightarrow x = \ln|\,w\,| \\ \arg(w) = y + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$




Pour tout $w \in \mathbb{C} - \{0\}$ :

$$\boxed{\mathrm{Log}(w) = \left\{ \ln|\,w\,| + i\big(\arg(w) + 2k\pi\big) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Soient $w$ et $z$ deux nombres complexes, on définit :

**Définition.** $w^z = e^{z\,\mathrm{Log}(w)}$.

**Exemples**

1. $\ln 1 = 0$ et $\mathrm{Log}\, 1 = \underbrace{\ln 1}_{0} + i\big(\underbrace{\arg(1)}_{0} + 2k\pi\big) = i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\mathrm{Log}(i) = \underbrace{\ln|\,i\,|}_{0} + i\big(\underbrace{\arg(i)}_{\pi/2} + 2k\pi\big) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
   $i^i = e^{i\,\mathrm{Log}\, i} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)}$ = une infinité de nombres réels.

**Remarque.** On peut construire une fonction complexe

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{C} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ w & \longmapsto & \ln|\,w\,| + i\arg(w) \\ & & \text{en choisissant } \arg(w) \in ]-\pi, \pi]. \end{array}$$

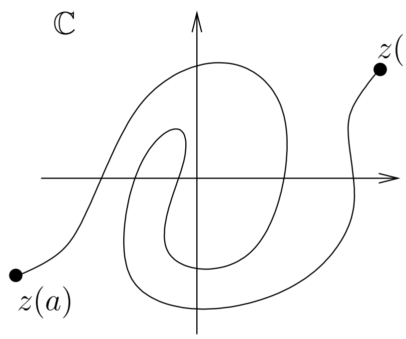
C'est la *détermination principale du logarithme complexe.*

### 3.7 Fonctions complexes d'une variable réelle

Il est souvent utile de considérer des fonctions

$$\begin{array}{rccl} f: & D(f) \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \underbrace{x(t) + iy(t)}_{z(t)}. \end{array}$$

**Exemple.** Une courbe dans le plan complexe $\begin{array}{rccl} f: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & z(t)\,. \end{array}$




**Remarques**

1. On peut dériver par rapport à $t$ une fonction complexe $z(t) = x(t) + iy(t)$ d'une variable réelle $t$ :
$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)\,.$$

2. On peut intégrer par rapport à $t$ une fonction complexe $z(t) = x(t) + iy(t)$ d'une variable réelle $t$ :
$$\int z(t)\,dt = \int x(t)\,dt + i \int y(t)\,dt\,;$$
$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i \int_a^b y(t)\,dt\,.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Ré} \int f(t)\,dt &= \int \text{Ré}\big(f(t)\big)\,dt \\ \text{Im} \int f(t)\,dt &= \int \text{Im}\big(f(t)\big)\,dt \\ \text{Ré} \int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b \text{Ré}\big(f(t)\big)\,dt \\ \text{Im} \int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^b \text{Im}\big(f(t)\big)\,dt\,. \end{aligned}}$$

**Remarque.** Si $w = a + ib \in \mathbb{C}$, $e^{wt} = e^{(a+ib)t} = e^{at}e^{ibt} = e^{at}\big(\cos(bt) + i\sin(bt)\big)$.

$$\Longrightarrow \quad \big(e^{wt}\big)' \begin{array}[t]{cl} = & ae^{at}\big(\cos(bt) + i\sin(bt)\big) + e^{at}\big(-b\sin(bt) + ib\cos(bt)\big) \\ = & (a+ib)e^{at}\big(\cos(bt) + i\sin(bt)\big) \\ = & we^{wt}. \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \int e^{wt}\,dt = \frac{1}{w}e^{wt}, \text{ si } w \neq 0.$$

**Exemples**

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,dt$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

   Si $k \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikt}\,dt = \frac{1}{ik}e^{ikt}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{ik}\big(e^{ik2\pi} - e^0\big) = 0.$

   Si $k = 0$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^{2\pi} e^{ikt}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0\,; \\ 2\pi & \text{si } k = 0\,. \end{cases}$$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} te^t \sin t\,dt.$

   On va utiliser le fait que $te^t\sin t = \operatorname{Im}\big(te^{(1+i)t}\big)$.

$$\text{Calculons} \quad \int_0^{2\pi} \underset{\downarrow}{t}\,\underset{\uparrow}{e^{(1+i)t}}\,dt \begin{array}[t]{cl} = & \underbrace{\frac{te^{(1+i)t}}{1+i}\bigg|_0^{2\pi}} - \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{(1+i)t}}{1+i}\,dt \\ = & \dfrac{2\pi e^{2\pi}}{1+i} - \dfrac{1}{(1+i)^2}e^{(1+i)t}\bigg|_0^{2\pi} \\ = & \dfrac{2\pi e^{2\pi}}{1+i} - \dfrac{1}{2i}\big(e^{2\pi} - 1\big) \\ = & \dfrac{2\pi e^{2\pi}(1-i)}{2} + \dfrac{i}{2}\big(e^{2\pi} - 1\big). \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^{2\pi} te^t\sin t\,dt \begin{array}[t]{cl} = & \displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\big(te^{(1+i)t}\big)\,dt \\ = & \operatorname{Im}\Big(\displaystyle\int_0^{2\pi} te^{(1+i)t}\,dt\Big) \\ = & -\pi e^{2\pi} + \dfrac{e^{2\pi}}{2} - \dfrac{1}{2}\,. \end{array}$$

# 4 Équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur à 1

## 4.1 Généralités

Une équation différentielle ordinaire d'ordre $n$ ($n \geq 1$) est une équation qui contient une fonction inconnue d'une variable réelle $y(x)$ et ses dérivées $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$.

Elle peut s'écrire $y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big)$ .

**Théorème d'existence et d'unicité**

*Si $f$ satisfait certaines hypothèses, alors l'équation différentielle*

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big)$$

*possède exactement une solution $y(x)$ qui satisfait les conditions initiales données*

$$\left.\begin{array}{rcl} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \\ y''(x_0) & = & y_2 \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \textit{n conditions au} \\ \textit{même point } x_0\,. \end{array}$$

**Exemple.** Considérons l'équation différentielle $y^{(n)} = 0$ avec les $n$ conditions initiales

$$y(0) = y_0\,,\ y'(0) = y_1\,,\ y''(0) = y_2\,, \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}\,.$$

En intégrant successivement, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} y^{(n)}(x) & = & 0 \\ y^{(n-1)}(x) & = & K_1 \\ y^{(n-2)}(x) & = & K_1 x + K_2 \\ y^{(n-3)}(x) & = & \dfrac{K_1}{2}x^2 + K_2 x + K_3 \\ & \vdots & \\ y(x) & = & c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0 \end{array}$$

où les $K_i$ et les $c_j$ sont des constantes. On détermine alors ces dernières à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}c@{\qquad}rcl} y(0) & = & c_0 & \Longrightarrow & c_0 & = & y_0 \\ y'(0) & = & c_1 & \Longrightarrow & c_1 & = & y_1 \\ y''(0) & = & 2c_2 & \Longrightarrow & c_2 & = & \dfrac{y_2}{2} \\ & \vdots & & & & & \\ y^{(n-1)}(0) & = & (n-1)!c_{n-1} & \Longrightarrow & c_{n-1} & = & \dfrac{y_{n-1}}{(n-1)!}\,. \end{array}$$

D'où finalement la solution

$$y(x) = \frac{y_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots + \frac{y_k}{k!}x^k + \cdots + y_1 x + y_0\,.$$

**Cas particulier.** Si $y(x)$ n'apparaît pas dans l'équation différentielle

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big)\,,$$

alors on fait la substitution $z(x) = y'(x)$ pour obtenir

$$z^{(\boldsymbol{n-1})}(x) = f\big(x, z(x), z'(x), \ldots, z^{(\boldsymbol{n-2})}(x)\big)\,.$$

On diminue ainsi l'ordre d'une unité.

**Exemple.** L'équation qui décrit la chute d'un corps avec frottement est

$$y''(t) = g - ay'(t)$$

où $g$ est la constante de gravitation terrestre et $a$ est une constante qui dépend du coefficient de frottement.

En posant $z(t) = y'(t)$, l'équation s'écrit $z'(t) = -az(t) + g$. En appliquant la méthode vue dans le cours de Mathématiques I, on obtient la solution générale

$$z(t) = Ce^{-at} + \frac{g}{a}\,.$$

Si l'on choisit les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, on obtient

$$0 = z(0) = C + \frac{g}{a} \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{g}{a}\,.$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} y'(t) \;=\; z(t) & = & -\dfrac{g}{a}e^{-at} + \dfrac{g}{a} \\ \Longrightarrow \qquad\qquad y(t) & = & +\dfrac{g}{a^2}e^{-at} + \dfrac{g}{a}t + D \\ y(0) & = & 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = \dfrac{g}{a^2} + D\,, \end{array}$$

et finalement l'équation du mouvement est

$$y(t) = \frac{g}{a^2}e^{-at} + \frac{g}{a}t - \frac{g}{a^2}\,.$$

## 4.2 Équations différentielles linéaires homogènes

**Définition.** Une équation différentielle d'ordre $n$ est *linéaire* si elle a la forme

$$\boxed{y^{(n)}(x)+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+p_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x)+\cdots+p_1(x)y'(x)+p_0(x)y(x)=q(x)}$$

où $p_{n-1}(x), p_{n-2}(x), \ldots, p_0(x), q(x)$ sont des fonctions d'une variable (on les suppose toutes continues).

La fonction $q(x)$ s'appelle le *terme inhomogène.*

L'équation différentielle est *linéaire homogène* si $q(x)\equiv 0$, elle est *linéaire inhomogène* si $q(x)\not\equiv 0$.

Nous allons considérer d'abord les équations différentielles linéaires **homogènes**

$$\boxed{y^{(n)}(x)+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+p_{n-2}(x)y^{(n-2)}(x)+\cdots+p_1(x)y'(x)+p_0(x)y(x)=0 \quad (*)}$$

**Théorème 1.** *Si $y_1(x),\ldots,y_k(x)$ sont des fonctions réelles solutions de $(*)$, alors*

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots c_ky_k(x) \qquad (\textit{avec } c_1,\ldots,c_k \textit{ des constantes réelles})$$

*est aussi solution de $(*)$.*

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_0y &= [c_1y_1^{(n)}+\cdots+c_ky_k^{(n)}]+ \\ &\quad +p_{n-1}[c_1y_1^{(n-1)}+\cdots+c_ky_k^{(n-1)}]+ \\ &\quad +\cdots+p_0[c_1y_1+\cdots+c_ky_k] \\ &= c_1[y_1^{(n)}+\cdots+p_0y_1]+\cdots+c_k[y_k^{(n)}+\cdots+p_0y_k] \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.** *La fonction complexe d'une variable réelle $y(x)=y_1(x)+iy_2(x)$ (avec $y_1(x),y_2(x)$ deux fonctions réelles) est solution de $(*)$ si et seulement si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont solutions de $(*)$.*

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_0y &= [y_1^{(n)}+iy_2^{(n)}]+p_{n-1}[y_1^{(n-1)}+iy_2^{(n-1)}]+ \\ &\quad +\cdots+p_0[y_1+iy_2] \\ &= [y_1^{(n)}+p_{n-1}y_1^{(n-1)}+\cdots+p_0y_1]+ \\ &\quad +i[y_2^{(n)}+p_{n-1}y_2^{(n-1)}+\cdots+p_0y_2] \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant vérifiée si et seulement si la partie réelle et la partie imaginaire sont nulles, c'est-à-dire si et seulement si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont solutions de $(*)$. $\square$

**Définition.** Les solutions de $(*)$ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$ sont *linéairement indépendantes* si la condition suivante est satisfaite :

Si $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots c_ky_k(x) = 0$ pour tout $x$ (avec $c_1, \ldots, c_k$ des constantes réelles), alors $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

Dans le cas contraire, les solutions sont *linéairement dépendantes.*

**Théorème 3 (sans démonstration).**

*a) Si $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ sont des solutions linéairement indépendantes de $(*)$, alors $k \leq n$.*

*b) L'équation $(*)$ possède $n$ solutions linéairement indépendantes $y_1(x), \ldots, y_n(x)$.*

**Théorème 4.** *Si $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ sont $n$ solutions linéairement indépendantes de $(*)$, alors*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) \quad (\text{avec } c_1, \ldots, c_n \text{ des constantes réelles})$$

*est la solution générale de $(*)$.*

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que toute solution $y(x)$ de $(*)$ se laisse écrire

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots c_ny_n(x)\,.$$

Or $y(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ sont linéairement dépendantes par le théorème 3. Donc il existe des nombres $k_0, k_1, \ldots .k_n$, non tous nuls, avec

$$k_0y(x) + k_1y_1(x) + \cdots k_ny_n(x) \equiv 0\,, \quad \text{pour tout } x\,.$$

On distingue alors deux cas :

1er cas : $k_0 = 0$. L'égalité précédente devient $k_1y_1(x) + \cdots k_ny_n(x) \equiv 0$, avec les $k_i$ non tous nuls, ce qui contredit l'indépendance linéaire de $y_1, \ldots, y_n$ et implique que ce cas est impossible.

2e cas : $k_0 \neq 0$. On obtient $y(x) = -\dfrac{k_1}{k_0}y_1(x) - \dfrac{k_2}{k_0}y_2(x) - \cdots - \dfrac{k_n}{k_0}y_n(x)$. $\square$

On en tire :

**MÉTHODE** pour trouver la solution générale (réelle) de l'équation différentielle ordinaire linéaire homogène

$$\boxed{y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = 0\,.}$$

1. Trouver $n$ solutions réelles linéairement indépendantes $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

2. Écrire

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots c_n y_n(x)$$

avec $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ des constantes.

3. Si l'on a $n$ conditions initiales
$$\begin{array}{rcl} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \\ \vdots & & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{array}$$
alors on calcule les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

L'étape 1 est en général la plus difficile.

## 4.3 Équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

On cherche à résoudre des équations différentielles de la forme

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (*)}$$

où $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ sont des constantes réelles.

On cherche des solutions linéairement indépendantes.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Posons :} & y(x) & = & e^{rx}. \\
\text{On a donc :} & y'(x) & = & re^{rx} \\
 & y''(x) & = & r^2 e^{rx} \\
 & \vdots & & \\
 & y^{(n)}(x) & = & r^n e^{rx}
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl}
r^n e^{rx} + a_{n-1}r^{n-1}e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} & = & 0 \\
\underbrace{e^{rx}}_{\substack{\neq 0 \\ \text{pour tout } x, \\ \text{pour tout } r \in \mathbb{C}}} (r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0) & = & 0\,.
\end{array}$$

**Définition.** Le polynôme $p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$ est le *polynôme caractéristique* associé à l'équation différentielle $(*)$.

Par le développement précédent, on a :

$$e^{rx} \text{ est solution de } (*) \iff r \text{ est un zéro du polynôme caractéristique.}$$

**Théorème 1.** *Si le polynôme caractéristique associé à $(*)$ possède $n$ zéros réels distincts $r_1, r_2, \ldots, r_n$, la solution générale de $(*)$ est*

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}}$$

*avec $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer l'indépendance linéaire des solutions $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$, où $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont distincts par hypothèse. Supposons donc que $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme cette égalité est vraie pour tout $x$, elle l'est en particulier pour $x = 0$. D'autre part en dérivant l'égalité par rapport à $x$, on en obtient une nouvelle que l'on peut également évaluer en $x = 0$. En faisant de même jusqu'à la dérivée d'ordre $n-1$, on obtient $n$ équations, avec les n inconnues $c_1, c_2, \ldots, c_n$ :

$$\begin{array}{ccccccccc}
c_1 & + & c_2 & + & \ldots & + & c_n & = & 0 \\
c_1 r_1 & + & c_2 r_2 & + & \ldots & + & c_n r_n & = & 0 \\
 & & & & & & & \vdots & \\
c_1 r_1^{n-1} & + & c_2 r_2^{n-1} & + & \ldots & + & c_n r_n^{n-1} & = & 0\,.
\end{array}$$

On doit ensuite vérifier que ce système possède uniquement la solution $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Faisons-le dans le cas $n = 2$, le cas général se traitant de manière analogue. Dans ce cas, le système ci-dessus s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $r_1 \neq r_2$, la seule solution du système est $c_1 = c_2 = 0$. □

**Exemple.** $y''(x) - y(x) = 0$.
Le polynôme caractéristique est $p(r) = r^2 - 1$ ; il possède deux zéros $r = \pm 1$. La solution générale est donc $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

**Théorème 2.** *On considère l'équation différentielle linéaire homogène* $(*)$ *et on en cherche la solution générale réelle. Supposons que le polynôme caractéristique de l'équation possède* $n$ *zéros distincts. Les zéros complexes vont par paires de zéros conjugués, notons les*

$$r_1, \bar{r}_1, r_2, \bar{r}_2, \ldots, r_k, \bar{r}_k \quad (2k \leq n).$$

*Notons* $r_{2k+1}, r_{2k+2}, \ldots, r_n$ *les zéros restants, qui sont réels.*

*Alors la solution générale réelle est*

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \operatorname{Ré}(e^{r_1} x) + c_1' \operatorname{Im}(e^{r_1} x) + \cdots + c_k \operatorname{Ré}(e^{r_k} x) + c_k' \operatorname{Im}(e^{r_k} x) \\ &\quad + c_{2k+1} e^{r_{2k+1}} x + \cdots + c_n e^{r_n} x. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Notons $p(r) = r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$ le polynôme caractéristique de l'équation $(*)$. Si $p(r) = 0$, $\bar{r}$ en est aussi un zéro puisque les coefficients du polynôme caractéristique sont réels. En effet :

$$0 = \overline{p(r)} = \bar{r}^n + a_{n-1} \bar{r}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{r} + a_0.$$

Or par le théorème 2 du paragraphe 4.2, si $r = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

- $\operatorname{Ré}(e^{rx}) = \operatorname{Ré}(e^{\bar{r}x}) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ et
- $\operatorname{Im}(e^{rx}) = -\operatorname{Im}(e^{\bar{r}x}) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

sont solutions de $(*)$. On peut alors vérifier que toutes les solutions obtenues sont linéairement indépendantes. □

**Exemples**

1. Considérons l'équation $y''(x) + y(x) = 0$.
   Le polynôme caractéristique est $p(r) = r^2 + 1$ et ses deux zéros sont $\pm i$.
   La solution générale réelle est $y(x) = c_1 \cos x + c_1' \sin x$.
2. Considérons l'équation $y'''(x) + 2y''(x) + 5y'(x) = 0$.
   Le polynôme caractéristique est $p(r) = r^3 + 2r^2 + 5r$ et ses trois zéros sont $0, -1 + 2i, -1 - 2i$.
   La solution générale réelle est $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} \cos(2x) + c_2' e^{-x} \sin(2x)$.

**Problème.** Que faire si le polynôme caractéristique ne possède pas $n$ zéros distincts ?

**Théorème 3.** *Si $r$ est un zéro de multiplicité $m$ du polynôme caractéristique associé à $(*)$, alors*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{rx} \\ y_2(x) &= xe^{rx} \\ y_3(x) &= x^2e^{rx} \\ &\vdots \\ y_m(x) &= x^{m-1}e^{rx} \end{aligned}$$

*sont des solutions de $(*)$ linéairement indépendantes.*

*Démonstration.* On prouve le théorème en introduisant les solutions proposées dans l'équation différentielle $(*)$. Traitons le cas $n = 2$, avec $r$ de multiplicité 2. Dans ce cas $(*)$ s'écrit $y''(x) - 2ry'(x) + r^2y(x) = 0$ et on a $y_1(x) = e^{rx}$ et $y_2(x) = xe^{rx}$.

On calcule :

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= re^{rx} & y_1''(x) &= r^2e^{rx} \\ y_2'(x) &= e^{rx}(1+rx) & y_2''(x) &= e^{rx}(r^2x+2r)\,. \end{aligned}$$

Et on introduit dans $(*)$ :

$$\begin{aligned} y_1''(x) - 2ry_1'(x) + r^2y_1(x) &= r^2e^{rx} - 2r^2e^{rx} + r^2e^{rx} \;=\; 0 \\ y_2''(x) - 2ry_2'(x) + r^2y_2(x) &= e^{rx}(r^2x + 2r - 2r - 2r^2x + r^2x) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

On vérifie encore l'indépendance linéaire des deux solutions : si $c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} = 0$ pour tout $x$, on évalue l'expression en $x = 0$ et on obtient $c_1 = 0$. La constante $c_2$ est alors clairement nulle. □

En résumé :

**MÉTHODE** de résolution de

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0 \quad (*)}$$

1. On écrit le polynôme caractéristique

$$p(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0\,.$$

2. On le décompose en facteurs linéaires, ce qui est toujours possible par le théorème fondamental de l'algèbre :

$$p(r) = (r-r_1)^{m_1}(r-r_2)^{m_2}\cdots(r-r_k)^{m_k}$$

   avec $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

3. Pour chaque zéro réel $r_i$, on considère les solutions

$$e^{r_ix},\ xe^{r_ix},\ x^2e^{r_ix},\ \ldots,\ x^{m_i-1}e^{r_ix}\,.$$

   Pour chaque paire de zéros complexes conjugués $r_j$ et $\bar{r}_j$, on considère

$$\text{Ré}(e^{r_jx}),\ x\,\text{Ré}(e^{r_jx}),\ x^2\,\text{Ré}(e^{r_jx}),\ \ldots,\ x^{m_j-1}\,\text{Ré}(e^{r_jx})$$

et

$$\mathrm{Im}(e^{r_j x}),\ x\,\mathrm{Im}(e^{r_j x}),\ x^2\,\mathrm{Im}(e^{r_j x}),\ \ldots,\ x^{m_j-1}\,\mathrm{Im}(e^{r_j x})\,.$$

Au total, on obtient ainsi $n$ solutions réelles linéairement indépendantes.

4. On écrit la solution générale de $(*)$ en combinant linéairement ces $n$ solutions.

**Exemple.** Soit l'équation différentielle $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0$.
Le polynôme caractéristique est $p(r) = r^5 - 3r^4 + 3r^3 - r^2 = r^2(r-1)^3$. On a donc $r = 0$ de multiplicité 2 et $r = 1$ de multiplicité 3. D'où la solution générale

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x + c_5 x^2 e^x\,.$$

## 4.4 Équations différentielles linéaires inhomogènes à coefficients constants

On cherche maintenant à résoudre des équations différentielles de la forme

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = q(x) \quad (**)}$$

où $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ sont des constantes réelles, et $q(x)$ est une fonction continue.

L'équation homogène correspondante

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad (*)}$$

a été étudiée au paragraphe précédent.

**Théorème.** *On obtient la solution générale $y(x)$ de $(**)$ en ajoutant à une solution particulière de $(**)$ la solution générale de l'équation différentielle homogène correspondante $(*)$ :*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + \varphi(x)$$

*où $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ sont $n$ solutions linéairement indépendantes de $(*)$ et $\varphi(x)$ est une solution particulière de $(**)$.*

*Démonstration.* C'est la même que pour les équations différentielles linéaires inhomogènes du premier ordre. □

Une méthode pour trouver la solution générale de l'équation homogène $(*)$ ayant été présentée au paragraphe précédent, il reste donc à "*deviner*" une solution $\varphi(x)$ de $(**)$. On présente deux cas dans lesquels on peut appliquer une méthode ad hoc.

**Cas 1 : $q(x) = p_d(x)e^{\alpha x}$** où $p_d(x)$ est un polynôme de degré $d \geq 0$ en $x$ et $\alpha$ une constante réelle.

**Cas 1.1 :** Si $\alpha$ n'est pas un zéro du polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle homogène $(*)$, on pose

$$\varphi(x) = (b_d x^d + b_{d-1}x^{d-1} + b_{d-2}x^{d-2} + \cdots + b_1 x + b_0)e^{\alpha x}\,.$$

**Cas 1.2 :** Si $\alpha$ est un zéro de multiplicité $m$ du polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle homogène $(*)$, on pose

$$\varphi(x) = (b_d x^d + b_{d-1}x^{d-1} + b_{d-2}x^{d-2} + \cdots + b_1 x + b_0)x^m e^{\alpha x}\,.$$

Ensuite on introduit $\varphi(x)$ dans l'équation différentielle $(**)$ et on détermine les constantes $b_0, b_1, \ldots, b_d$.

**Cas 2 :**
**Cas 2.1 : $q(x) = p_d(x)\cos(\alpha x)$**
**Cas 2.2 : $q(x) = p_d(x)\sin(\alpha x)$**

avec $p_d(x)$ un polynôme réel de degré $d \geq 0$ en $x$ et $\alpha$ une constante réelle.
Dans ce cas, on remplace $(**)$ par

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = p_d(x)e^{i\alpha x} \quad (***)$$

En appliquant la méthode du cas 1, on trouve une solution particulière $\tilde{\varphi}(x)$ de $(***)$. Finalement on obtient :
Cas 2.1 : $\varphi(x) = \text{Ré}(\tilde{\varphi}(x))$ est solution particulière de $(**)$ ;
Cas 2.2 : $\varphi(x) = \text{Im}(\tilde{\varphi}(x))$ est solution particulière de $(**)$.

On a en résumé :

**MÉTHODE** de résolution de

$$\boxed{y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = q(x) \quad (**)}$$

1. On considère l'équation homogène associée $(*)$.

2. On trouve la solution homogène $y_h(x)$ par la méthode du paragraphe 4.3.

3. On cherche une solution particulière $\varphi(x)$, en appliquant la méthode proposée ci-dessus si l'on est dans l'un des deux cas traités.

4. On écrit la solution générale de $(**)$ :

$$y(x) = y_h(x) + \varphi(x)\,.$$

**Exemples**

1. $y''(x) - y(x) = e^{2x}$.
Polynôme caractéristique : $p(r) = r^2 - 1$. Les zéros sont $r = \pm 1$. Comme $\alpha = 2$ n'est pas un zéro de $p(r)$, on pose $\varphi(x) = b_0 e^{2x}$. En introduisant $\varphi(x)$ dans l'équation différentielle, on obtient
$$(4b_0 - b_0)e^{2x} = e^{2x} \implies b_0 = \frac{1}{3} \implies \varphi(x) = \frac{1}{3}e^{2x}$$
$$\implies \quad \text{solution générale : } y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}\,.$$

2. $y''(x) + y(x) = \cos x$.
Polynôme caractéristique : $p(r) = r^2 + 1$. Les zéros sont $r = \pm i$. On cherche d'abord à résoudre l'équation $(***)$ qui est $y''(x) + y(x) = e^{ix}$. Comme $i$ est un zéro de multiplicité 1 de $p(r)$, on pose $\tilde{\varphi}(x) = b_0 x e^{ix}$. On calcule :
$$\tilde{\varphi}'(x) = b_0 e^{ix} + b_0 i x e^{ix} \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}''(x) = b_0 i e^{ix} + b_0 i e^{ix} + b_0 i^2 x e^{ix} = 2b_0 i e^{ix} - b_0 x e^{ix}$$
$$\implies e^{ix}(2b_0 i - b_0 x + b_0 x) = e^{ix} \implies 2b_0 i = 1 \implies b_0 = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$
$$\implies \tilde{\varphi}(x) = -\frac{i}{2}xe^{ix} = -\frac{i}{2}x(\cos x + i\sin x)$$
$$\varphi(x) = \text{Ré}\left(\tilde{\varphi}(x)\right) = \frac{1}{2}x\sin x$$
$$\implies \quad \text{solution générale : } y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{x\sin x}{2}\,.$$