Séminaire de
topologie algébrique

23 et 30 mars 1999

Résumé sur les invariants de Postnikov

Nous allons définir les invariants de Postnikov d'un CW-complexe simple et étudier le cas particulier où ils sont triviaux. Tous les espaces topologiques considérés dans cet exposé sont des CW-complexes pointés et connexes (par arcs).

Approximation homologique : la théorie de J.H.C. Whitehead

Rappelons qu'un CW-complexe (défini par J.H.C. Whitehead en 1949) est construit à partir de cellules qu'on attache par leur bord. Le sous-complexe constitué des cellules de X de dimension $\leqslant n$ est appelé le n-squelette de X et noté X^n. La suite des squelettes, $X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n \subset \cdots \subset X$, possède les propriétés suivantes :

1. L'inclusion $X^i \subset X^j$ est une cofibration ($i \leqslant j$).
2. On a
$$H_k X^n \cong \begin{cases} H_k X & \text{si } k < n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$
3. Le quotient X^n / X^{n-1} a le type d'homotopie d'un bouquet de n-sphères, $\bigvee_\alpha S^n_\alpha$.

On peut résumer ces observations à l'aide du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & X^n \arrow[dl] \arrow[r] & \bigvee_{\alpha_n} S^n_{\alpha_n} \\
X & X^2 \arrow[l] \arrow[u, dotted, dash] \arrow[r] & \bigvee_{\alpha_2} S^2_{\alpha_2} \\
 & X^1 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[r] & \bigvee_{\alpha_1} S^1_{\alpha_1} \\
 & X^0. \arrow[uul] \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

La théorie de Postnikov, apparue entre 1957 et 1959, est l'analogue en homotopie de cette décomposition de l'espace X, utilisant des fibrations plutôt que des cofibrations.

Approximation homotopique : la théorie de Postnikov

Sections et tour de Postnikov

1. Lemme. *Soient X un CW-complexe et $n \geqslant 1$ un entier. Il existe un CW-complexe X' et une inclusion $i : X \to X'$ tels que $i_* : \pi_k X \to \pi_k X'$ est un isomorphisme pour tout $k \leqslant n$ et $\pi_{n+1}X' = 0$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de générateurs pour le groupe $\pi_{n+1}X$. On pose

$$X' = X \sqcup \Big(\bigsqcup_{[\alpha]\in\mathcal{A}} D^{n+2}_{[\alpha]} \Big) / \sim$$

où $x \sim \alpha(x)$ pour tout $x \in \partial D^{n+2}_{\alpha}$ et pour tout $[\alpha] \in \mathcal{A}$. On vérifie que $i_*([\alpha]) = 0$ pour tout $[\alpha] \in \mathcal{A}$. La suite exacte de la paire (X', X) en homotopie fournit le résultat. □

Remarquons que X' est obtenu en attachant des cellules de dimension $n+2$ au CW-complexe X, de sorte que l'inclusion $i : X \to X'$ induit un isomorphisme en homologie jusqu'en dimension n. Notons également que la construction de X' dépend du choix de l'ensemble de générateurs pour le groupe $\pi_{n+1}X$.

2. Proposition. *Soient X un CW-complexe et $n \geqslant 1$ un entier. Il existe un CW-complexe $X[n]$ et une inclusion $i_n : X \to X[n]$ tels que $i_* : \pi_k X \to \pi_k X[n]$ est un isomorphisme pour tout $k \leqslant n$ et $\pi_k X[n] = 0$ pour tout $k > n$. On appelle* **extension $(n+1)$-anticonnexe** *un tel espace.*

Démonstration. A l'aide du lemme, on construit X' tel que $\pi_{n+1}X' = 0$. En itérant, on construit $X^{(r)}$ tel que $\pi_{n+s}X^{(r)} = 0$ pour tout $1 \leqslant s \leqslant r$. On a $X^{(r)} \subset X^{(r+1)}$ pour tout $r \geqslant 1$, de sorte qu'on peut poser

$$X[n] = \bigcup_{r\geqslant 1} X^{(r)}.$$

□

Le résultat suivant, dont on trouvera une démonstration topologique dans [Wh, Chap. IX, Theorem 1.5, p.418], assure qu'une extension anticonnexe est unique à homotopie près. Le lecteur trouvera également une preuve simpliciale dans [MC, Theorem 4.24, pp.110-111].

3. Théorème. *Soit $f : X \to Y$ une application entre deux CW-complexes et $m, n \geqslant 1$ des entiers. Soient encore $X[m]$ et $Y[n]$ des extensions anticonnexes de X et Y respectivement. On a les résultats suivants :*

1. *si $m \geqslant n$ alors il existe une application $f_{m,n} : X[m] \to Y[n]$ qui étend f,*
2. *si $m \geqslant n-1$ alors deux applications $f_{m,n}, g_{m,n} : X[m] \to Y[n]$ qui étendent f sont homotopes.*

En particulier, toute extension anticonnexe d'un CW-complexe est unique à homotopie près,

L'unicité se prouve en considérant l'identité $id_X : X \to X$ et deux extensions anticonnexes $X[m]_0$ et $X[m]_1$ de X. En effet, en vertu de la première assertion, il existe deux applications $f : X[m]_0 \to X[m]_1$ et $g : X[m]_1 \to X[m]_0$ qui étendent id_X, la seconde assertion affirme que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes aux identités appropriées.

4. Définition. Soient X un CW-complexe et $n \geqslant 1$ un entier. On appelle **n-ième section de Postnikov** l'inclusion (unique à homotopie près) de X dans une de ses extensions $(n+1)$-anticonnexe, on la note $\alpha_n : X \to X[n]$.

Comme corollaire du théorème ci-dessus, on obtient également un lien naturel entre deux sections de Postnikov consécutives. On verra dans la suite de cet exposé que ce lien renferme beaucoup d'information sur la structure de l'espace.

5. Corollaire. *Soient X un CW-complexe, $n \geqslant 2$ un entier et α_{n-1}, α_n les $(n-1)$-ième et n-ième sections de Postnikov de X. Il existe une application $\gamma_{n-1} : X[n] \to X[n-1]$, unique à homotopie près, qui fait commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} & X[n] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] \\ X \arrow[ur, "\alpha_n"] \arrow[r, "\alpha_{n-1}"'] & X[n-1]. \end{tikzcd}$$

Démonstration. Il suffit d'étendre l'identité sur X et de poser $\gamma_n = id_{n,n-1}$. □

L'application γ_{n-1} est de fibre homotopique $K(\pi_n X, n)$, de sorte qu'on a le diagramme commutatif à homotopie près suivant, qu'on nomme **tour de Postnikov** :

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d, dotted, no head] & \\ & X[n+1] \arrow[d, "\gamma_n"] & K(\pi_{n+1}X, n+1) \arrow[l] \\ X \arrow[ur, "\alpha_{n+1}"] \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[dr, "\alpha_{n-1}"] \arrow[ddr, "\alpha_1"'] & X[n] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] & K(\pi_n X, n) \arrow[l] \\ & X[n-1] \arrow[d, dotted, no head] & K(\pi_{n-1}X, n-1) \arrow[l] \\ & X[1] & K(\pi_1 X, 1). \arrow[l, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

Fibre homotopique d'une section de Postnikov

On peut voir toute application $f : X \to Y$ comme une fibration à homotopie près (cf. [Cl, 2.2, pp.10-11]). En effet, le produit fibré $I^f = \{(x, \omega) \in X \times Y^{[0,1]} \mid \omega(0) = *\}$ a le type d'homotopie de X et donne lieu à la fibration suivante :

$$T^f \hookrightarrow I^f \xrightarrow{p} Y,$$

où $T^f = \{(x, \omega) \in I^f \mid \omega(1) = f(x) \text{ pour tout } x \in X\}$ est la fibre homotopique et $p : (x, \omega) \mapsto \omega(1)$.

Notons $X(n)$ la fibre homotopique de la section de Postnikov $\alpha_n : X \to X[n]$. La fibration

$$X(n) \longrightarrow X \longrightarrow X[n]$$

induit une suite exacte longue en homotopie qui montre que

1. $X(n)$ est n-connexe,
2. l'inclusion $X(n) \to X$ induit un isomorphisme $\pi_k X(n) \cong \pi_k X$ pour tout $k > n$.

L'application γ_{n-1} de la tour de Postnikov induit une inclusion $\widehat{\gamma_{n-1}} : X[n] \to \widehat{X[n-1]}$ où

$$\widehat{X[n-1]} = I_{\gamma_{n-1}}/\{[x,t] = [x,0] \mid x \in X[n],\ t \in [0,1]\},$$

avec $I_{\gamma_{n-1}}$ le cylindre de l'application γ_{n-1} (qu'on obtient en amalgamant la partie supérieure de $X[n] \times [0,1]$ sur $X[n-1]$ via γ_{n-1}). En effet, par construction, $\widehat{X[n-1]}$ contient $X[n-1]$ comme sous-espace et tous deux ont même type d'homotopie. On peut donc considérer la paire $(\widehat{X[n-1]}, X[n])$ qu'on conviendra de noter $(X[n-1], X[n])$.

6. Proposition. *Soient X un CW-complexe et $n \geqslant 2$ un entier. Pour tout entier $k \geqslant 1$ on a*

$$\pi_k(X[n-1], X[n]) \cong \begin{cases} \pi_n X & \textit{si } k = n+1, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Par inspection de la suite exacte en homotopie de la paire $(X[n-1], X[n])$. □

7. Proposition. *Soient X un CW-complexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. L'homomorphisme d'Hurewicz*

$$h_{n+1} : \pi_{n+1}(X[n-1], X[n]) \to H_{n+1}(X[n-1], X[n])$$

est un isomorphisme, de même que l'homomorphisme

$$\kappa^{n+1} : H_{n+1}(X[n-1], X[n]) \xrightarrow{h_{n+1}^{-1}} \pi_{n+1}(X[n-1], X[n]) \xrightarrow{\partial} \pi_n X[n] \xrightarrow{(\alpha_n)_*^{-1}} \pi_n X,$$

où ∂ est l'homomorphisme de connexion dans la suite exacte longue de la paire en homotopie et α_n la n-ième section de Postnikov. De plus, pour tout $k \leqslant n$ on a

$$H_k(X[n-1], X[n]) = 0.$$

Démonstration. Le CW-complexe $X[n]$ possède les même groupes d'homotopie que X jusqu'en dimension n et est $(n+1)$-anticonnexe, $X[n]$ est donc simple. Le théorème d'Hurewicz (cf. Annexe) et la proposition précédente permettent de conclure. □

L'application κ^{n+1} appartient au groupe $\mathrm{Hom}(H_{n+1}(X[n-1], X[n]); \pi_n X)$. Considérons la décomposition du groupe de cohomologie $H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n X)$ donnée par le théorème des coefficients universels, on a la suite exacte courte scindée suivante :

$$\mathrm{Ext}(H_n(X[n-1], X[n]), \pi_n X) \rightarrowtail H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n X) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}(H_{n+1}(X[n-1], X[n]), \pi_n X).$$

Or d'après le lemme $H_n(X[n-1], X[n]) = 0$, de sorte que ρ est un isomorphisme et l'application κ^{n+1} peut être vue comme une classe de cohomologie appartenant au groupe $H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n X)$ via ρ^{-1}. Considérons encore l'inclusion j de $X[n-1]$ dans la paire $(X[n-1], X[n])$. Elle induit l'homomorphisme suivant en cohomologie :

$$j^* : H^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n X) \to H^{n+1}(X[n-1], \pi_n X).$$

On est maintenant en mesure de définir les **invariants de Postnikov** d'un CW-complexe simple.

8. Définition. Soient X un CW-complexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov ou k-invariant de X, noté k^{n+1}, est la classe de cohomologie

$$j^* \circ \rho^{-1}(\kappa^{n+1}) \in H^{n+1}(X[n-1]; \pi_n X).$$

Le résultat suivant (cf. [Wh, Chap. V, Theorem 6.17, p.243]) classifie les classes d'applications homotopes de $X[n-1]$ dans $K(\pi_n X, n+1)$ à l'aide des classes de cohomologie du groupe $H^{n+1}(X[n-1]; \pi_n X)$. Il donne lieu à une seconde définition, plus topologique cette fois, des invariants de Postnikov, à savoir les **invariants homotopiques**.

9. Théorème (Eilenberg). *Soient X un CW-complexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Les groupes*

$$[X[n-1], K(\pi_n X, n+1)] \text{ et } H^{n+1}(X[n-1]; \pi_n X)$$

sont isomorphes.

10. Définition. Soient X un CW-complexe simple, $n \geqslant 2$ un entier et k^{n+1} le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X. Un $(n+1)$-ième invariant homotopique de X est une application $l^{n+1} : X[n-1] \to K(\pi_n X, n+1)$ qui représente la classe d'homotopie classifiée par k^{n+1} via le théorème d'Eilenberg.

Relation entre deux sections de Postnikov consécutives

11. Lemme. *Soient X un CW-complexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. La n-ième section de Postnikov, $X[n]$, a le type d'homotopie de la fibre homotopique de n'importe quel $(n+1)$-ième invariant homotopique de X.*

Démonstration. Nécessite une meilleure compréhension du théorème d'Eilenberg. Pour une démonstration plus détaillée, cf. [Cl, 6.2-6.3, pp.29-33]. □

12. Théorème. *Soient X un CW-complexe simple, $n \geqslant 2$ un entier et l^{n+1} un $(n+1)$-ième invariant homotopique de X. Le diagramme suivant est commutatif à homotopie près (le carré du bas est un pullback) :*

$$\begin{tikzcd}
K(\pi_n X, n) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & K(\pi_n X, n) \arrow[d] \\
X[n] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & * \arrow[d] \\
X[n-1] \arrow[r, "l^{n+1}"'] & K(\pi_n X, n+1),
\end{tikzcd}$$

où la colonne de droite est la fibration des chemins de $K(\pi_n X, n+1)$.

Démonstration. Le pullback de $* \to K(\pi_n X, n+1)$ et l^{n+1} a le type d'homotopie de la fibre de l^{n+1}, donc de $X[n]$ d'après le lemme. □

13. Corollaire. *Soient X un CW-complexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X est trivial si et seulement si $X[n]$ a le type d'homotopie du produit $X[n-1] \times K(\pi_n X, n)$.*

Démonstration. Le CW-complexe $X[n]$ a le type d'homotopie de la fibre homotopique de l'application constante sur le point base, T^*. Or, par définition, pour toute application $f : X \to Y$, on a $T^f = \{(x, \omega) \in X \times Y^{[0,1]} \mid \omega(0) = *$ et $\omega(1) = f(x)$ pour tout $x \in X\}$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}
X[n] \simeq T^* &= \{(x, \omega) \in X[n-1] \times PK(\pi_n X, n+1) \mid \omega(0) = \omega(1) = *\} \\
&= X[n-1] \times \Omega K(\pi_n X, n+1) \\
&\simeq X[n-1] \times K(\pi_n X, n).
\end{aligned}$$

□

Application aux doubles espaces de lacets

Dans l'un de ses articles ([Ar]), D. Arlettaz établit que le premier invariant de Postnikov d'un double espace de lacets, $k^3(\Omega^2 X)$, est forcément trivial, ceci sans aucune hypothèse sur la finitude de l'espace. On a donc le résultat suivant :

14. Théorème (D. Arlettaz). *Soient $Y = \Omega^2 X$ un double espace de lacets, $\pi_1 = \pi_1 Y$ et $\pi_2 = \pi_2 Y$. Alors*

1. $k^3(Y) = 0 \in H^3(K(\pi_1, 1), \pi_2)$,
2. $Y[2] = K(\pi_1, 1) \times K(\pi_2, 2)$.

Annexe

Soit X un CW-complexe. Le groupe fondamental $\pi_1 X$ agit sur les groupes d'homotopie supérieure de la façon suivante : soient $[u] \in \pi_1 X$ et $[f] \in \pi_n X$ $(n \geqslant 1)$, la classe $[u] \cdot [f] \in \pi_n X$ est représentée par l'application $g : S^n \to X$ homotope à f le long de u. Par exemple, l'action du groupe fondamental sur lui-même est l'action par conjugaison.

15. Définition. Un CW-complexe est simple si l'action du groupe fondamental sur les groupes d'homotopie supérieure est triviale. Par exemple, les CW-complexes simplement connexes et les H-espaces sont simples.

16. Théorème (Hurewicz). *Soient (X, A) une paire de CW-complexes $(n-1)$-connexe, avec $n \geqslant 2$ un entier et A simple. Alors $H_k(X, A) = 0$ pour tout $k \leqslant n-1$ et l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. cf. [Wh, Theorem 7.2, p.178]. □

Références

[Ar] Dominique ARLETTAZ. *The first k-invariant of a double loop space is trivial.* Arch. Math., Vol. 54, 84-92 (1990).

[Cl] Alain CLÉMENT. *Sur une décomposition des invariants de Postnikov.* Travail de diplôme. Université de Lausanne, mai 1998.

[MC] John MCCLEARY. *User's Guide to Spectral Sequences, Mathematics Lecture Series.* Publish or Perish, Inc., 1985.

[PT] Nicole POINTET-TISCHLER. *Invariants de Postnikov des espaces de lacets.* Thèse de doctorat. Université de Lausanne, décembre 1996.

[Wh] George W. WHITEHEAD. *Elements of Homotopy Theory*, volume 61 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, 1978.