Sur une décomposition des invariants de Postnikov

Travail de Diplôme

Alain Clément

Institut de Mathématiques
Université de Lausanne
1015 Lausanne, Suisse

Mai 1998

Introduction

Le point de départ de ce travail est le résultat bien connu suivant.

Théorème (7.1.1)**.** *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes,*
(i) l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ est une injection scindée, i.e. possède un inverse à gauche,
(ii) le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov, $k^{n+1}(X)$, est trivial.

La question posée par D. Arlettaz , constituant le sujet du diplôme, est la suivante : que ce passe-t-il, en termes d'invariant de Postnikov, lorsque l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ est une injection non nécessairement scindée ? On peut répondre à cette question en considérant une décomposition particulière des invariants de Postnikov, la décomposition Hom-Ext qui associe au $(n+1)$-ième invariant de Postnikov $k^{n+1}(X) \in \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X))$ la paire $(k^{n+1}(X)_\bullet, k^{n+1}(X)_\dagger) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]), \pi_n(X)) \times \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_\bullet)$, de sorte que la partie Hom est un homomorphisme de groupes et la partie Ext une classe d'extension de groupes abéliens. On obtient le résultat suivant.

Théorème (7.3.2)**.** *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes,*
(i) l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ est injectif,
(ii) la partie Hom *du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov est triviale.*

En observant la démonstration de ce Théorème, on remarque qu'on peut encore généraliser le résultat, en fait la partie Hom du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov caractérise le noyau de l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$.

Théorème (8.1.4)**.** *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$ un entier, $\alpha_{n-1} : X \to X[n-1]$ la $(n-1)$-ième section de Postnikov de X, $k^{n+1}(X)_\bullet$ la partie* Hom *du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X et $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ l'homomorphisme d'Hurewicz. La suite suivante est exacte,*

$$\mathrm{H}_{n+1}(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \xrightarrow{k^{n+1}(X)_\bullet} \pi_n(X) \xrightarrow{h_n} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_n(X[n-1]) \longrightarrow 0.$$

Comme corollaire de ce Théorème et d'un résultat dû à Milnor et Moore, affirmant que pour les H-espaces l'homomorphisme d'Hurewicz est rationnellement trivial, on peut déduire le Théorème d'Arkowitz et Curjel pour les H-espaces de type fini.

Théorème (d'Arkowitz et Curjel)**.** *Soit X un H-espace connexe de type fini. Les invariants de Postnikov de X sont d'ordre fini.*

Comme corollaires également, on obtient une caractérisation de la finitude de l'ordre de la partie Hom d'un invariant de Postnikov et un critère pour l'injectivité de l'homomorphisme d'Hurewicz.

Théorème (8.2.3)**.** *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$, $\varrho \geqslant 1$ des entiers. Les assertions suivantes sont équivalentes,*

(i) la partie Hom *du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X, $k^{n+1}(X)_\bullet$, est d'ordre fini ϱ dans* $\mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]), \pi_n(X))$*, i.e.* $\varrho k^{n+1}(X)_\bullet = 0$,

(ii) l'exposant du noyau de l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ divise ϱ, i.e. $\varrho \ker h_n = 0$,

(iii) il existe un homomorphisme $\varphi_n : \operatorname{im} h_n \to \mathrm{H}_n(X)$ tel que la composée

$$\pi_n(X) \xrightarrow{\widehat{h_n}} \operatorname{im} h_n \xrightarrow{\varphi_n} \pi_n(X),$$

avec $\widehat{h_n}$ induit par l'homomorphisme d'Hurewicz, soit la multiplication par ϱ.

Théorème (8.2.4)**.** *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Si le n-ième groupe d'homotopie de X, $\pi_n(X)$, est sans torsion et la partie* Hom *du $(n+1)$-invariant de Postnikov, $k^{n+1}(X)_\bullet$, est d'ordre fini, alors l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n, $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$, est injectif.*

Manifestement, comme la partie Hom de l'invariant de Postnikov caractérise l'injectivité de l'homomorphisme d'Hurewicz, la partie Ext de ce même invariant contient une information sur la section éventuelle de l'homomorphisme d'Hurewicz. Cette remarque motive l'étude de la partie Ext de l'invariant de Postnikov, on a le résultat final suivant.

Théorème (9.1.6)**.** *Soient X un CW-complexe connexe simple, $\alpha_{n-1} : X \to X[n-1]$ la $(n-1)$-ième section de Postnikov de X et $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n. Le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X, $k^{n+1}(X)$, se décompose en la paire* Hom-Ext $(k^{n+1}(X)_\bullet, k^{n+1}(X)_\dagger)$ *qui induit la suite exacte suivante,*

$$\mathrm{H}_{n+1}(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \xrightarrow{k^{n+1}(X)_\bullet} \pi_n(X) \xrightarrow{h_n} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_n(X[n-1]) \longrightarrow 0,$$

avec comme représentant de l'extension $k^{n+1}(X)_\dagger$ dans $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet)$ *la suite exacte courte suivante,*

$$\operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet \rightarrowtail^{\widetilde{h_n}} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_n(X[n-1]),$$

avec $\widetilde{h_n}$ induite par l'homomorphisme d'Hurewicz h_n.

Comme corollaire de ce Théorème, on a bien évidemment le Théorème 7.1.1, avec comme information supplémentaire que l'injectivité et la section de l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n proviennent respectivement des parties Hom et Ext du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov. On a également un résultat analogue, pour la partie Ext, au Théorème 8.2.3 valable pour la partie Hom.

La première partie du travail, nommée **Généralités**, aborde de manière peu formelle les sujets incontournables de la Topologie algébrique (homotopie, (co)fibrations, CW-complexes, liens avec l'homologie, etc.) et donne les définitions indispensables à la compréhension de ce travail. Rares sont les Lemmes, Propositions, Théorèmes ou Corollaires qui possèdent une preuve exhaustive, néanmoins tous sont dotés d'une référence bibliographique que le lecteur pourra aisément consulter.

La seconde partie aborde la **théorie de M. M. Postnikov**, à la manière de B. Gray et G. W. Whitehead. On commence par construire les espaces de Moore, puis les espaces d'Eilenberg-MacLane par extension anticonnexe. On énonce le Théorème de Moore, selon lequel un CW-complexe connexe simple a le type d'homotopie faible d'un produit faible d'espaces d'Eilenberg-MacLane si et seulement si tous les homomorphismes d'Hurewicz possèdent un inverse à gauche, résultat qu'on généralise dans la troisième partie de ce travail. On définit les sections, tour et invariants de Postnikov, puis on établit un lien entre deux sections de Postnikov consécutives. Finalement on ébauche la manière dont on peut reconstruire un espace connaissant son système de Postnikov.

La troisième partie donne les démonstrations des résultats principaux du travail. On conclut avec une Conjecture sur l'ordre de la partie Hom des invariants de Postnikov d'un espace classifiant d'un groupe fini parfait auquel on applique la construction "plus" de Quillen.

* * *

Je tiens à remercier cordialement mon directeur de diplôme, Monsieur le Professeur Dominique Arlettaz, pour son soutien constant, tant scientifique qu'humain, durant l'élaboration de ce travail, ainsi que pour ses innombrables conseils rédactionnels et son infinie patience ! Je tiens également à remercier Monsieur le Professeur Manuel Ojanguren pour avoir accepté de servir d'expert à ce travail. Mes remerciements vont également à Monsieur Christian Ausoni pour ses très nombreux conseils, sa disponibilité et sa gentillesse.

Table des matières

Première partie

Généralités

Sont supposés connus la théorie générale de la topologie (topologie induite, base, sous-base, compacité, topologie produit, topologie quotient), la théorie générale des catégories (catégorie, foncteur, transformation naturelle, adjonction, dualité, catégorie quotient, universalité), la théorie de l'homologie ordinaire (réduite), par exemple l'homologie singulière (réduite), les groupes de cohomologie, la notion d'homotopie (relative) et quelques notions d'algèbre homologique (exactitude, extensions de groupes, groupes Ext). On notera $\mathrm{H}_n(-)$ le foncteur $\mathrm{H}_n(-;\mathbb{Z})$. Sauf avis du contraire, toutes les applications sont continues.

1 Homotopie

Dans cette section, on résume les quelques notions de théorie de l'homotopie.

1.1 Espaces de lacets et suspension

1.1.1 Définition. Soient X et Y deux espaces topologiques. La topologie *compacte ouverte* sur $Y^X = \{f : X \to Y \mid f \text{ est continue}\}$ a pour sous-base tous les sous-ensembles $\{f \in Y^X \mid f(K) \subset U\}$, notés $(K;U)$, avec K un compact de X et U un ouvert de Y.

Remarque. Un ouvert de Y^X muni de la topologie compacte ouverte est une réunion d'intersections finies de $(K;U)$.

1.1.2 Définition. Soit (X, x_0) un espace pointé. L'*espace de lacets* $\Omega(X, x_0)$ de (X, x_0) est l'espace pointé $((X, x_0)^{(I,\partial I)}, \omega_0)$ muni de la topologie induite par celle compacte ouverte de X^I et avec $\omega_0 \equiv x_0$, le chemin constant en x_0.

1.1.3 Proposition. *Soit* $\mathbf{h}\mathfrak{Top}_*$ *la catégorie homotopique des espaces topologiques pointés i.e. dont les morphismes sont les classes d'équivalence d'homotopie d'applications continues. Alors*

$$\begin{array}{rrcl} \Omega : & \mathbf{h}\mathfrak{Top}_* & \longrightarrow & \mathbf{h}\mathfrak{Top}_* \\ & (X, x_0) & \rightsquigarrow & \Omega(X, x_0) \\ & f & \rightsquigarrow & \Omega f : \omega \mapsto f \circ \omega \end{array}$$

est un foncteur.

Démonstration. *cf.* [**?**, Theorem 11.8, p.326-327]. □

1.1.4 Proposition. *Soit* (X, x_0) *un espace pointé.* $[-, \Omega(X, x_0)]$ *est un foncteur de* $\mathbf{h}\mathfrak{Top}_*$ *dans* $\mathfrak{Groups}$*, la catégorie des groupes. Soient encore* (Y, y_0) *un espace pointé et* $[f], [g] \in [(Y, y_0), \Omega(X, x_0)]$*, leur produit est* $[f * g]$*, où* $*$ *désigne la composition des chemins.*

Démonstration. *cf.* [**?**, Corollary 11.10, p.328]. □

1.1.5 Définition. Soit (X, x_0) un espace pointé. La *suspension (réduite)* $\Sigma(X, x_0)$ de (X, x_0) est l'espace quotient

$$(X \times I)/((X \times \partial I) \cup (\{x_0\} \times I))$$

pointé en $(X \times \partial I) \cup (\{x_0\} \times I)$.

1.1.6 Proposition.

$$\begin{array}{rccl} \Sigma : & \mathbf{h\mathfrak{Top}}_* & \longrightarrow & \mathbf{h\mathfrak{Top}}_* \\ & (X, x_0) & \rightsquigarrow & \Sigma(X, x_0) \\ & f & \rightsquigarrow & \Sigma f : [x, t] \mapsto [f(x), t] \end{array}$$

est un foncteur.

Démonstration. cf. [**?**, Theorem 11.11, p.329-330]. □

1.1.7 Proposition.

$$\begin{array}{rccl} -\Sigma : & \mathbf{h\mathfrak{Top}}_* & \longrightarrow & \mathbf{h\mathfrak{Top}}_* \\ & (X, x_0) & \rightsquigarrow & \Sigma(X, x_0) \\ & f & \rightsquigarrow & -\Sigma f : [x, t] \mapsto [f(x), 1-t] \end{array}$$

est un foncteur. □

1.1.8 Définition. Le foncteur $-\Sigma(-)$ est appelé foncteur d'*antisuspension*.

1.1.9 Proposition. $(-\Sigma)^2 = \Sigma$. □

1.1.10 Proposition. *Soit S^n la sphère de dimension $n \geqslant 0$ un entier. Alors il existe une équivalence d'homotopie $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$.*

Démonstration. cf. [**?**, Theorem 11.16, p.334]. □

1.1.11 Théorème. (Σ, Ω) *est une paire de foncteurs adjoints.*

Démonstration. cf. [**?**, Theorem 11.12, p.331]. □

1.1.12 Corollaire. *Soit (X, x_0) un espace pointé. $[\Sigma(X, x_0), -]$ est un foncteur de $\mathbf{h\mathfrak{Top}}_*$ dans $\mathfrak{Groups}$.* □

1.2 Groupes d'homotopie (relatifs)

1.2.1 Lemme. *Soit ΩX un espace de lacets. Le groupe fondamental $\pi_1(\Omega X)$ est abélien*

Démonstration. cf. [**?**, Theorem 3.20, p.56 ; Corollary 11.21, p.335]. □

1.2.2 Proposition. *Soient* (X, x_0) *un espace pointé et* n *un entier. L'ensemble* $[(S^n, *), (X, x_0)]$ *est un groupe abélien si* $n \geqslant 2$.

Démonstration. Si $n \geqslant 2$, on a $[(S^n, *), (X, x_0)] = [\Sigma^{n-1}(S^1, *), (X, x_0)] = [(S^1, *), \Omega^{n-1}(X, x_0)] = \pi_1(\Omega^{n-1}(X, x_0))$. On conclut à l'aide du Lemme. □

1.2.3 Définition. Soients (X, x_0) un espace pointé et $n \geqslant 1$ un entier. Le *n-ième groupe d'homotopie* de (X, x_0), noté $\pi_n(X, x_0)$, est le groupe $[(S^n, *), (X, x_0)]$. $\pi_n(-)$ est un foncteur de $\mathfrak{Top}_*$ dans $\mathfrak{Groups}$.

1.2.4 Définition. Soients (X, x_0) un espace pointé et $x_0 \in A \subset X$. (X, A, x_0) est une *paire pointée.* Une *application de paires pointées* $f : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ est une application telle que $f(x_0) = y_0$ et $f(A) \subset B$. On désigne par $\mathfrak{Top}_*^2$ la *catégorie des paires pointées.*

1.2.5 Définition. Soient $f, g : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ des applications de paires pointées. Une *homotopie (de paires pointées)* entre les applications de paires pointées f et g, notée $F : f \simeq g$, est une homotopie $F : X \times I \to Y$ entre les applications pointées f et g telle que $F(A \times I) \subset B$. On note $[(X, A, x_0), (Y, B, y_0)]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de paires pointées de (X, A, x_0) dans (Y, B, y_0) et $\mathbf{h}\mathfrak{Top}_*^2$ la *catégorie homotopique* des paires pointées *i.e.* dont les morphismes sont les classes d'équivalence d'homotopie d'application de paires pointées.

1.2.6 Définition. Soient (X, A, x_0) une paire pointée et $n \geqslant 2$ un entier. Le n-ième *groupe d'homotopie relatif* de (X, A, x_0), noté $\pi_n(X, A, x_0)$, est le groupe $[(D^n, S^{n-1}, *), (X, A, x_0)]$. De plus, $\pi_n(-)$ est un foncteur de $\mathfrak{Top}_*^2$ dans $\mathfrak{Groups}$.

1.2.7 Proposition. *Soit* (X, x_0) *un espace pointé. On a* $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$ *pour tout entier* n.

Démonstration. D'après [?, Corollary 8.10, p.190], on a $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = [(D^n, S^{n-1}, *), (X, \{x_0\}, x_0)] \cong [(D^n/S^{n-1}, *), (X, x_0)] \cong [(S^n, *), (X, x_0)] = \pi_n(X, x_0)$. □

1.3 Connexité

1.3.1 Définition. Soit X un espace topologique. X est *connexe* s'il n'est pas réunion disjointe de deux ouverts non vides.

1.3.2 Définition. Soit X un espace topologique. X est *n-connexe*, avec n un entier, si $\pi_i(X) = 0$ pour tout entier $0 \leqslant i \leqslant n$. Si X est 0-connexe on dit aussi qu'il est *connexe par arcs.*

1.3.3 Proposition. *Soit* X *un espace topologique. Si* X *est connexe par arcs alors* X *est connexe.*

Démonstration. cf. [**?**, Theorem 1.14, p.25]. □

Remarque. La réciproque est fausse, par exemple, le très célèbre espace $y = \sin(\frac{1}{x})$ est connexe mais pas connexe par arcs (*cf.* [**?**, Example 1.8, p.25]).

1.3.4 Définition. Soit X un espace topologique. X est *n-anticonnexe*, avec n un entier, si $\pi_i(X) = 0$ pour tout entier $i \geqslant n$. Si X est 0-anticonnexe on dit aussi qu'il est *contractible* ou qu'il a le *type d'homotopie d'un point.*

1.4 Suite ((anti)co)exacte de Puppe

1.4.1 Définition. Dans $\mathfrak{Sets}_*$, la catégorie des ensembles pointés, une suite

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} (X_{n+1}, *) \xrightarrow{f_n} (X_n, *) \xrightarrow{f_{n-1}} (X_{n-1}, *) \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots$$

est *exacte* si $\operatorname{im} f_n = f_{n-1}^{-1}(*)$ pour tout entier n.

1.4.2 Définition. Une suite dans $\mathbf{h}\mathfrak{Top}_*$

$$\cdots \longrightarrow (X_{n+1}, *) \longrightarrow (X_n, *) \longrightarrow (X_{n-1}, *) \longrightarrow \cdots$$

est exacte (resp. coexacte) si, pour tout espace pointé (Z, z_0), la suite induite par $[(Z, z_0), -]$ (resp. $[-, (Z, z_0)]$) est exacte dans $\mathfrak{Sets}_*$.

Remarque. En particulier, une suite exacte dans $\mathbf{h}\mathfrak{Top}_*$ induit via $\pi_n(-)$ une suite exacte au sens usuel dans $\mathfrak{Groups}$.

1.4.3 Définition. Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application. Le *produit fibré* I^f de f est le pullback dans $\mathfrak{Top}$ de f et $q : Y^I \to Y$, $\omega \mapsto \omega(1)$, *i.e.*

$$I^f = \{(x, \omega) \in X \times Y^I \,|\, \omega(1) = f(x) \text{ pour tout } x \in X\}.$$

La *fibre homotopique* T^f de f est le pullback dans $\mathfrak{Top}_*$ de f et $q : (Y, y_0)^{(I,0)} \to (Y, y_0)$, $\omega \mapsto \omega(1)$, *i.e.*

$$T^f = \{(x, \omega) \in I^f \,|\, \omega(0) = b_0\},$$

pointé en (x_0, ω_0) avec $\omega_0 \equiv y_0$, le chemin constant en y_0.

Remarque. Cette définition découle d'un exercice dans [**?**, Exercice 11.41, p.359].

1.4.4 Lemme. *Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application. La suite*

$$(T^f, (x_0, \omega_0)) \xrightarrow{f'} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0),$$

où $\omega_0 \equiv y_0$ et $f' : (x, \omega) \mapsto x$, est exacte.

Démonstration. *cf.* [**?**, Lemma 11.35, p.348] □

1.4.5 Corollaire. *Soit* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *une application. La suite*

$$\cdots \xrightarrow{f^4} (T^{f^2}, *) \xrightarrow{f^3} (T^{f^1}, *) \xrightarrow{f^2} (T^f, (x_0, \omega_0)) \xrightarrow{f^1} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0),$$

où $\omega_0^i \equiv y_0$ *et* $f^{(i)} : (x, \omega) \mapsto x$*,* $i \geqslant 1$ *un entier, est exacte.* □

1.4.6 Corollaire. *Soit* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *une application. La suite*

$$\Omega(X, x_0) \xrightarrow{\Omega f} \Omega(Y, y_0) \xrightarrow{k} (T^f, (x_0, \omega_0)) \xrightarrow{f'} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0),$$

où $\omega_0 \equiv y_0$*,* $f' : (x, \omega) \mapsto x$ *et* $k : \omega \mapsto (x_0, \omega)$*, est exacte.*

Démonstration. cf. [**?**, Corollary 11.37, p.349] □

1.4.7 Lemme. *Soit* $(X', *) \longrightarrow (X, *) \longrightarrow (X'', *)$ *une suite exacte, elle induit une suite exacte via* $\Omega(-)$*.*

Démonstration. Soit $(Z, *)$ un espace pointé. Considérons le diagramme commutatif dont les applications verticales sont des bijections pointées (Ω et Σ sont adjoints),

$$\begin{tikzcd}
{[\Sigma(Z,*), (X',*)]} \arrow[r] \arrow[d] & {[\Sigma(Z,*), (X,*)]} \arrow[r] \arrow[d] & {[\Sigma(Z,*), (X'',*)]} \arrow[d] \\
{[(Z,*), \Omega(X',*)]} \arrow[r] & {[(Z,*), \Omega(X,*)]} \arrow[r] & {[(Z,*), \Omega(X'',*)]}.
\end{tikzcd}$$

La ligne du haut est exacte par hypothèse, de sorte que celle du bas aussi. □

1.4.8 Théorème (Suite exacte de Puppe)**.** *Soit* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *une application. La suite*

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow \Omega^2(T^f, (x_0, \omega_0)) &\xrightarrow{\Omega^2 f'} \Omega^2(X, x_0) \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2(Y, y_0) \xrightarrow{\Omega k} \\
\Omega(T^f, (x_0, \omega_0)) &\xrightarrow{\Omega f'} \Omega(X, x_0) \xrightarrow{\Omega f} \Omega(Y, y_0) \xrightarrow{k} \\
(T^f, (x_0, \omega_0)) &\xrightarrow{f'} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0),
\end{aligned}$$

où $\omega_0 \equiv y_0$*,* $f' : (x, \omega) \mapsto x$ *et* $k : \omega \mapsto (x_0, \omega)$*, est exacte.*

Démonstration. D'après le Corollaire 1.4.6, la suite

$$\Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(Y, y_0) \longrightarrow (T^f, (x_0, \omega_0)) \longrightarrow (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

est exacte et d'après le Lemme 1.4.7, la suite

$$\Omega^2(X, x_0) \longrightarrow \Omega^2(Y, y_0) \longrightarrow \Omega(T^f, (x_0, \omega_0)) \longrightarrow \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(Y, y_0)$$

est exacte. On conclut en remarquant que ces deux suites se recouvrent et par itération. □

1.4.9 Définition. Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application. Le *cylindre* I_f de f est le pushout dans $\mathfrak{Top}$ de f et $j : X \to I \times X$, $x \mapsto (1, x)$, *i.e.*

$$I_f = (I \times X) \cup_{f'} Y,$$

où $f' : I \times X \to Y$, $(1, x) \mapsto f(x)$.
Le *cône* T_f de f est le pushout dans $\mathfrak{Top}_*$ de f et $j : (X, x_0) \to (I, 0) \times (X, x_0)$, $x \mapsto (1, x)$, *i.e.*

$$T_f = I_f/(\{0\} \times X),$$

pointé en $\{0\} \times X$.

1.4.10 Lemme. *Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application. La suite*

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \hookrightarrow (T_f, *)$$

est coexacte.

Démonstration. *cf.* [?, (6.4), p.128]. □

1.4.11 Proposition. *Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application. La suite*

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{f^1} (T_f, *) \xrightarrow{f^2} (T_{f^1}, *) \xrightarrow{f^3} (T_{f^2}, *) \xrightarrow{f^4} \cdots,$$

où f^i, $i \geqslant 1$ un entier, est l'inclusion, est coexacte. □

1.4.12 Corollaire. *Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application. La suite*

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{f^1} (T_f, *) \xrightarrow{q} \Sigma(X, x_0) \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma(Y, y_0),$$

où f^1 est l'inclusion et q l'application quotient $(T_f, *) \twoheadrightarrow \Sigma(X, x_0) \simeq (T_f, *)/(Y, y_0)$, est coexacte.

Démonstration. *cf.* [?, (6.10), p.130] □

1.4.13 Lemme. *Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application. Le diagramme suivant commute à homotopie près,*

$$\begin{tikzcd} (T_{f^1}, *) \arrow[r, "f^3"] \arrow[d, "q_1"', "\simeq"] & (T_{f^2}, *) \arrow[d, "\simeq"', "q_2"] \\ \Sigma(X, x_0) \arrow[r, "-\Sigma f"'] & \Sigma(Y, y_0), \end{tikzcd}$$

où f^1, f^2, f^3 sont les applications de la Proposition 1.4.11 et q_1, q_2 sont des équivalences d'homotopie.

Démonstration. *cf.* [?, Lemma 6.15, pp.132-133]. □

1.4.14 Corollaire. *Soit* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *une application. La suite*

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{f^1} (T_f, *) \xrightarrow{q} \Sigma(X, x_0) \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma(Y, y_0),$$

où f^1 *est l'inclusion et* q *l'application quotient* $(T_f, *) \twoheadrightarrow \Sigma(X, x_0) \simeq (T_f, *)/(Y, y_0)$*, est coexacte.* □

1.4.15 Lemme. *Soit* $(X', *) \longrightarrow (X, *) \longrightarrow (X'', *)$ *une suite coexacte, elle induit une suite coexacte via* $\Sigma(-)$ *ou* $-\Sigma(-)$.

Démonstration. cf. preuve du Lemme 1.4.7. □

1.4.16 Théorème (Suite coexacte de Puppe)**.** *Soit* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *une application. La suite*

$$\begin{aligned}
&(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{f^1} (T_f, *) \xrightarrow{q} \\
&\Sigma(X, x_0) \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma(Y, y_0) \xrightarrow{\Sigma f^1} \Sigma(T_f, *) \xrightarrow{\Sigma q} \\
&\Sigma^2(X, x_0) \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2(Y, y_0) \xrightarrow{\Sigma^2 f^1} \Sigma^2(T_f, *) \xrightarrow{\Sigma^2 q} \cdots,
\end{aligned}$$

où f^1 *est l'inclusion et* q *l'application quotient* $(T_f, *) \twoheadrightarrow \Sigma(X, x_0) \simeq (T_f, *)/(Y, y_0)$*, est coexacte.*

Démonstration. cf. preuve du Théorème 1.4.8. □

1.4.17 Théorème (Suite anticoexacte de Puppe)**.** *Soit* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *une application. La suite*

$$\begin{aligned}
&(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{f^1} (T_f, *) \xrightarrow{q} \\
&\Sigma(X, x_0) \xrightarrow{-\Sigma f} \Sigma(Y, y_0) \xrightarrow{-\Sigma f^1} \Sigma(T_f, *) \xrightarrow{-\Sigma q} \\
&\Sigma^2(X, x_0) \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2(Y, y_0) \xrightarrow{\Sigma^2 f^1} \Sigma^2(T_f, *) \xrightarrow{\Sigma^2 q} \cdots,
\end{aligned}$$

où f^1 *est l'inclusion et* q *l'application quotient* $(T_f, *) \twoheadrightarrow \Sigma(X, x_0) \simeq (T_f, *)/(Y, y_0)$*, est coexacte.*

Démonstration. cf. preuve du Théorème 1.4.8. □

1.5 Suite exacte longue d'une paire

1.5.1 Lemme. *Soient* (X, A, x_0) *une paire pointée et* $i : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ *l'inclusion des paires. Il existe une bijection* θ *telle que le diagramme commute (dans* $\mathfrak{Sets}$*),*

$$\begin{tikzcd} & {[(S^0,*), \Omega^n(T^i,(x_0,\omega_0))]} \arrow[dd, "\theta"] \arrow[dr, "(\Omega^n i')_*"] & \\ \pi_{n+1}(X, \{x_0\}, x_0) \arrow[ur, "(\Omega^n k)_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \pi_n(A, x_0), \\ & \pi_{n+1}(X, A, x_0) \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}$$

où $\omega_0 \equiv x_0$*,* $j : (X, \{x_0\}, x_0) \to (X, A, x_0)$ *est l'inclusion,* $d : [\beta] \mapsto [\beta|_{S^n}]$*,* $i' : (x, \omega) \mapsto x$ *et* $k : \omega \mapsto (x_0, \omega)$*.*

Démonstration. cf. [**?**, Lemma 11.42, pp. 352-354] □

1.5.2 Théorème (Suite exacte d'une paire en homotopie)**.** *Soit* (X, A, x_0) *une paire pointée. La suite*

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(A, x_0) \longrightarrow \pi_{n+1}(X, x_0) \longrightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{d} \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \cdots$$

$$\pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{d} \pi_0(A, x_0) \longrightarrow \pi_0(X, x_0),$$

avec $d : \pi_{n+1}(X, A, x_0) \to \pi_n(A, x_0)$*,* $[\beta] \mapsto [\beta|_{S^n}]$ *et les autres homomorphismes induits par les inclusions, est exacte et "naturelle".*

Démonstration. Considérons la suite exacte longue de Puppe de l'inclusion $(A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$. Puisque $\pi_{n+1}(A, x_0) \cong \pi_1(\Omega^n(A, x_0))$, elle induit la suite exacte longue dans $\mathfrak{Sets}$ via $[(S^0, *), -]$,

$$\cdots \longrightarrow \pi_{n+1}(A, x_0) \longrightarrow \pi_{n+1}(X, x_0) \longrightarrow [(S^0, *), \Omega^n(T^i, *)] \xrightarrow{d} \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \cdots$$

$$\pi_1(A, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \longrightarrow [(S^0, *), (T^i, *)] \xrightarrow{d} \pi_0(A, x_0) \longrightarrow \pi_0(X, x_0),$$

où $\omega_0 \equiv x_0$. On vérifie facilement la "naturalité" et on conclut à l'aide du Lemme. □

1.5.3 Théorème. *Soient* (X, A, x_0) *une paire pointée et* n *un entier. Le groupe* $\pi_n(X, A, x_0)$ *est abélien si* $n \geqslant 3$.

Démonstration. La bijection θ transporte la stucture de groupe abélien de $[(S^0, *), \Omega^n(T^i, (x_0, \omega_0))] \cong [(S^n, *), (T^i, (x_0, \omega_0))] \cong \pi_n(T^i, (x_0, \omega_0))$ à $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$ si $n \geqslant 2$. □

2 (Co)Fibrations

Dans cette section on définit la notion de fibration et celle, duale, de cofibration. On observe que toute application peut être vue comme une (co)fibration à homotopie près. On construit la suite exacte longue d'une fibration en homotopie, et d'une cofibration en homologie.

2.1 Espaces fibrés de Serre et d'Hurewicz, cofibrations

2.1.1 Définition. Une application $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ possède la *propriété de relèvement des homotopies* (HLP pour *homotopy lifting property*) relativement à (X, x_0) si pour toute application $f : (X, x_0) \to (E, e_0)$ et toute homotopie G de $p \circ f$ il existe une homotopie $F : (X, x_0) \times (I, 0) \to (E, e_0)$ qui *relève* G *i.e.* telle que $f = F(-, 0)$ et $p \circ F = G$, ou, en d'autre termes, telle que le diagramme suivant commute,

$$\begin{tikzcd}
(X, x_0) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\
(X, x_0) \times (I, 0) \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dotted, "F"'] & (B, b_0),
\end{tikzcd}$$

où $i_0(x) = (x, 0)$ pour tout $x \in X$.

2.1.2 Définition. Une application $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ est une *fibration* au sens d'Hurewicz si p possède la HLP relativement à tout (X, x_0). C'est une *fibration faible*, ou fibration au sens de Serre, si p possède la HLP relativement à tout disque pointé D^n, n un entier. Les espaces (E, e_0), (B, b_0) et $(p^{-1}(b_0), e_0)$ sont respectivement l'*espace total*, *la base* et la *fibre* de p. On dit que (E, e_0) est un *espace fibré* au-dessus de (B, b_0) relativement à p.

Convention. On dit que le diagramme

$$F \hookrightarrow X \xrightarrow{p} B$$

est une fibration pour signifier que $p : X \to B$ est une fibration (les espaces étant pointés) et que F est la fibre de p.

Exemple. La projection $p_B : B \times F \to B$ est une fibration de fibre F, on l'appelle la fibration *triviale* sur B de fibre F.

2.1.3 Lemme. *Soient $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ une fibration et $f : (X, x_0) \to (E, e_0)$ une application. Si la composée $p \circ f$ est nullhomotope (i.e. homotope à l'application qui envoie tout sur le point base) alors f se relève dans la fibre de p, en d'autre termes on a le diagramme commutatif à homotopie près suivant,*

$$\begin{tikzcd}
 & (F, e_0) \arrow[d, hook] \\
(X, x_0) \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dotted] \arrow[dr, bend right, "*"'] & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\
 & (B, b_0).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Considérons l'homotopie $G : p \circ f \simeq *$ qu'on relève en F par la HLP de p. Alors l'application $F(-,1)$ relève f. En effet, d'une part $\operatorname{im} F(-,1) \subset F$ puisque $p(\operatorname{im} F(-,1)) = \operatorname{im} p \circ F(-,1) = \operatorname{im} G(-,1) = b_0$. D'autre part $p \circ F = G : p \circ f \simeq *$, ainsi $p \circ F(-,1) \equiv *$ et le diagramme commute. $\square$

2.1.4 Définition. Une paire pointée (X, A, x_0) possède la *propriété d'extension des homotopies* (HEP pour *homotopy extension property*) relativement à (Y, y_0) si pour toute application $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ et toute homotopie $G : (A, x_0) \times (I, 0) \to (Y, y_0)$ de $f|_A$ telle que $G(a, 0) = f(a, 0)$ pour tout $a \in A$, il existe une homotopie $F : (X, x_0) \times (I, 0) \to (Y, y_0)$ qui *étend* G *i.e.* telle que le diagramme suivant commute,

$$\begin{tikzcd}
(X,x_0)\times(I,0) \arrow[drr, dotted, "F"] & & \\
(X,x_0)\times(\{0\},0)\cup(A,x_0)\times(I,0) \arrow[u, hook] \arrow[rr, "(f\times\{0\})\cup G"'] & & (Y,y_0)
\end{tikzcd}$$

2.1.5 Définition. Soit (X, A, x_0) une paire pointée. L'inclusion $i : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ est une *cofibration* si (X, A, x_0) possède la HEP relativement à tout espace pointé (Y, y_0). L'espace quotient $(X, x_0)/(A, x_0)$ est la *cofibre* de i.

Convention. On dira que le diagramme

$$A \longrightarrow X \twoheadrightarrow C$$

est une cofibration pour signifier que $i : A \to X$ est une cofibration (les espaces étant pointés) et que C est la cofibre de i.

2.2 (Co)Fibration induite par une application

2.2.1 Proposition. *Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application. Le produit fibré I^f a même type d'homotopie que X et*

$$(T^f, (x_0, \omega_0)) \hookrightarrow (I^f, (x_0, \omega_0)) \xrightarrow{p} (Y, y_0) ,$$

où $\omega_0 \equiv y_0$ et $p : (x, \omega) \mapsto \omega(1)$, est une fibration.

Démonstration. *cf.* [**?**, Theorem 7.30, pp.42-43] $\square$

Convention. Par abus de langage, on dit que l'application $f : X \to Y$ induit la fibration

$$T^f \longrightarrow X \longrightarrow Y ,$$

sans préciser à homotopie près.

Remarque. Etant donnée une application $f : X \to Y$, on considère souvent le diagramme des fibrations suivant, commutatif à homotopie près,

$$\begin{tikzcd}
\Omega Y \arrow[d, "k"'] & & \\
T^f \arrow[dd, "f'"'] \arrow[dr, hook] & & \\
& I^f \arrow[dl, "\simeq"'] \arrow[dr, "p"] & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y.
\end{tikzcd}$$

Il faut remarquer que ce diagramme contient une partie de la suite exacte de Puppe et que ΩY est la fibre de f'. La section suivante (*cf.* 2.3) va permettre de compléter ce diagramme à l'aide d'une fibration, nommée *fibration des chemins.*

2.2.2 Proposition. *Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application. Le cylindre I_f a même type d'homotopie que Y, en fait l'inclusion j de Y dans le cylindre I_f est une équivalence d'homotopie. De plus*

$$(X, x_0) \xrightarrow{i} (I_f, *) \twoheadrightarrow (T_f, *),$$

avec i l'inclusion de X dans le cylindre I_f, est une cofibration.

Démonstration. *cf.* [**?**, pp.43-44] □

Convention. Par abus de langage, on dit que l'application $f : X \to Y$ induit la cofibration

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow T_f \ ,$$

sans préciser à homotopie près.

Remarque. Il existe également un diagramme des cofibrations pour une application $f : X \to Y$, dual du diagramme ci-dessus.

2.3 Fibration des chemins

2.3.1 Définition. Soit (X, x_0) un espace pointé. L'espace des chemins $P(X, x_0)$ de (X, x_0) est l'espace pointé $((X, x_0)^{(I,0)}, \omega_0)$ muni de la topologie induite par celle compacte ouverte de X^I et avec $\omega_0 \equiv x_0$.

2.3.2 Proposition. *Soit (X, x_0) un espace pointé. On a la fibration, dite* des chemins*,*

$$\Omega(X, x_0) \longrightarrow P(X, x_0) \xrightarrow{q} (X, x_0) \ ,$$

où $q : \omega \mapsto \omega(1)$.

Démonstration. D'une part, on a clairement $q^{-1}(x_0) = \{\omega \in PX \mid \omega(1) = x_0\} = \Omega X$. D'autre part, soient Y un espace pointé, $f : Y \to PX$ une application et $G : Y \times I \to X$ une homotopie telle que $G(-, 0) = q \circ f$, définissons $F' : Y \times I \times I \to X$ par

$$F'(y,t,s) = \begin{cases} (f(y))\,(s(t+1)) & 0 \leqslant s \leqslant \frac{1}{t+1} \\ G(y, s(t+1)-1) & \frac{1}{t+1} \leqslant s \leqslant 1, \end{cases}$$

avec $y \in Y$ et $t \in I$. On vérifie facilement que F' est continue, de plus F' induit $F : Y \times I \to PX$ qui est le relèvement requis pour G. En effet, on a $F(-, 0) = f$ et $q \circ F = G$. ☐

2.3.3 Proposition. *Soit (X, x_0) un espace pointé. L'espace des chemins $P(X, x_0)$ est contractible i.e. a le type d'homotopie d'un point.*

Démonstration. On définit $H' : PX \times I \times I \to X$, $(\omega, t, s) \mapsto \omega(s(1-t))$. On vérifie facilement que H' est continue, de plus H' induit $H : PX \times I \to PX$ qui est une homotopie rel ω_0. Pour une preuve complète, *cf.* [**?**, Proposition 4.4, p.53]. ☐

Remarque. Etant donné une application $f : X \to Y$, on considère le **diagramme des fibrations** suivant, commutatif à homotopie près,

$$\begin{tikzcd}
\Omega Y \arrow[rr, equal] \arrow[d, "k"'] & & \Omega Y \arrow[d] \\
T^f \arrow[rr, dotted] \arrow[dr, hook] \arrow[ddd, "f'"'] & & PY \simeq * \arrow[ddd, "q"] \\
& I^f \arrow[ur, "r"] \arrow[ddl, "\simeq"] \arrow[ddr, "p"] & \\
& & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y,
\end{tikzcd}$$

où $r : (x, \omega) \mapsto \omega$. On note généralement ce diagramme de la manière suivante,

$$\begin{tikzcd}
\Omega Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega Y \arrow[d] \\
T^f \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

2.4 Suite exacte longue d'une fibration (faible) en homotopie

2.4.1 Lemme. *Soient $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ une application qui a la HLP relativement à tout $I \times X$, $b_0 \in B' \subset B$ et $E' = p^{-1}(B') \subset E$. L'application $P(p) : P(E; e_0, E') \to P(B; b_0, B')$ a la HLP relativement à tout X. En particulier, si p est une fibration (resp. fibration faible) alors $P(p)$ est une fibration (resp. fibration faible).*

Démonstration. cf. [**?**, Proposition 4.5, p.54]. $\square$

2.4.2 Proposition. *Soient $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ une fibration (faible), $b_0 \in B' \subset B$ et $E' = p^{-1}(B') \subset E$. L'application $\pi_n(p) : \pi_n(E, E', e_0) \to \pi_n(B, B', b_0)$ est un isomorphisme pour tout entier $n \geqslant 1$.*

Démonstration. cf. [**?**, Proposition 4.6, pp.54-55]. $\square$

2.4.3 Théorème. *Soit $(F, e_0) \xrightarrow{i} (E, e_0) \xrightarrow{p} (B, b_0)$ une fibration (faible). On a la suite exacte longue en homotopie,*

$$\cdots \xrightarrow{p_*} \pi_{n+1}(B, b_0) \xrightarrow{\partial'} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial'} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\partial'} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0).$$

Démonstration. Considérons la suite exacte longue de la paire (E, F, e_0) en homotopie et l'isomorphisme de la Proposition 2.4.2. On obtient le diagramme commutatif avec la ligne du haut exacte

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \pi_{n+1}(E, e_0) \arrow[r, "j_*"] \arrow[ddr, "p_*"'] & \pi_{n+1}(E, F, e_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "p_*", "\cong"'] & \pi_n(F, e_0) \arrow[r, "i_*"] & \cdots, \\
& & \pi_{n+1}(B, \{b_0\}, b_0) \arrow[d, "\cong"'] & & \\
& & \pi_{n+1}(B, b_0) \arrow[uur, dotted, "\partial'"'] & &
\end{tikzcd}$$

où j_* est induite par l'inclusion $j : (E, \{e_0\}, e_0) \to (E, F, e_0)$. $\square$

2.4.4 Corollaire. *Soit $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ une fibration (faible) de fibre F avec E n-connexe pour $n \geqslant 1$ un entier. L'application $\partial' : \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, e_0)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. La suite exacte longue donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial'} \pi_{n-1}(F, e_0) \longrightarrow 0 .$$

$\square$

Exemple. Considérons la fibration des chemins de X. L'espace des chemins PX est contractible (donc n-connexe pour tout entier $n \geqslant 1$) et ΩX est la fibre, de sorte que $\pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Remarquons qu'on obtient le même résultat sachant que (Σ, Ω) est une paire de foncteurs adjoints. En effet, on a $\pi_n(X) = [S^n, X] \cong [\Sigma S^{n-1}, X] \cong [S^{n-1}, \Omega X] = \pi_{n-1}(\Omega X)$.

2.5 Suite exacte longue d'une cofibration en homologie

2.5.1 Lemme. *Soit $f : X \to Y$. On a la suite exacte en homologie réduite,*

$$\widetilde{\mathrm{H}}_n(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{\mathrm{H}}_n(Y) \xrightarrow{f^1_*} \widetilde{\mathrm{H}}_n(T_f) \ ,$$

pour tout entier n.

Démonstration. *cf.* [**?**, Proposition 2.3, pp.69-71] □

2.5.2 Lemme. *Soit $f : X \to Y$. On a la suite exacte en homologie réduite,*

$$\widetilde{\mathrm{H}}_n(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{\mathrm{H}}_n(Y) \xrightarrow{f^1_*} \widetilde{\mathrm{H}}_n(T_f) \xrightarrow{q} \widetilde{\mathrm{H}}_n(\Sigma X) \xrightarrow{\Sigma f} \widetilde{\mathrm{H}}_n(\Sigma Y) \ ,$$

où f^1 est l'inclusion et q l'application quotient $T_f \twoheadrightarrow \Sigma X \simeq T_f/Y$, pour tout entier n.

Démonstration. *cf.* [**?**, Proposition 3.1, pp.72-74] □

2.5.3 Théorème (Suite homologique de Puppe)**.** *Soit $f : X \to Y$. On a la suite exacte en homologie réduite,*

$$\cdots \xrightarrow{f^1_*} \widetilde{\mathrm{H}}_{n+1}(T_f) \xrightarrow{\sigma'} \widetilde{\mathrm{H}}_n(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{\mathrm{H}}_n(Y) \xrightarrow{f^1_*} \widetilde{\mathrm{H}}_n(T_f) \xrightarrow{\sigma'} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\sigma'} \widetilde{\mathrm{H}}_0(X) \xrightarrow{f_*} \widetilde{\mathrm{H}}_0(Y) \xrightarrow{f^1_*} \widetilde{\mathrm{H}}_0(T_f),$$

où f^1 est l'inclusion et $\sigma' = \sigma^{-1} \circ q_*$ avec σ l'isomorphisme de suspension et q l'application quotient $T_f \twoheadrightarrow \Sigma X \simeq T_f/Y$. □

2.5.4 Corollaire. *Soit $A \xrightarrow{i} X \longrightarrow C$ une cofibration. On a la suite exacte en homologie réduite,*

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial'} \widetilde{\mathrm{H}}_n(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{\mathrm{H}}_n(X) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_n(C) \xrightarrow{\partial'} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial'} \widetilde{\mathrm{H}}_0(A) \xrightarrow{i_*} \widetilde{\mathrm{H}}_0(X) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{H}}_0(C).$$

□

2.6 Suite spectrale de Leray-Serre

Les résultats suivants sont obtenus à l'aide d'un outil très puissant, à savoir les suites spectrales, ici la **suite spectrale de Leray-Serre**. Les démonstrations des Théorèmes qui suivent sortent du cadre de ce travail puisqu'elles demandent un exposé des méthodes liées aux suites spectrales. On trouvera une étude détaillée du sujet dans [**?**] ou [**?**].

2.6.1 Théorème. *Soit* $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ *une fibration orientable, i.e. telle que* $\pi_1(B)$ *agit trivialement sur* $\mathrm{H}_n(F)$*, et de fibre* F $(n-1)$*-connexe. Alors il existe une suite exacte à cinq termes suivante,*

$$\mathrm{H}_{n+1}(E) \xrightarrow{p_*} \mathrm{H}_{n+1}(B) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}_n(F) \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}_n(E) \xrightarrow{p_*} \mathrm{H}_n(B) \longrightarrow 0.$$

Remarque. Le résultat suivant affirme que cette manière d'associer une suite exacte à une telle fibration est "naturelle".

2.6.2 Théorème. *Soit le diagramme commutatif à homotopie près constitué de fibrations orientables et de fibres* $(n-1)$*-connexes suivant,*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\epsilon"'] & B \arrow[d, "\beta"'] \\
F' \arrow[r, "i'"'] & E' \arrow[r, "p'"'] & B'.
\end{tikzcd}$$

Il induit le diagramme commutatif formé de lignes exactes suivant,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_{n+1}(E) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\epsilon_*"'] & \mathrm{H}_{n+1}(B) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\beta_*"'] & \mathrm{H}_n(F) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\phi_*"'] & \mathrm{H}_n(E) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\epsilon_*"'] & \mathrm{H}_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"'] & 0 \\
\mathrm{H}_{n+1}(E') \arrow[r, "p'_*"'] & \mathrm{H}_{n+1}(B') \arrow[r, "\partial'"'] & \mathrm{H}_n(F') \arrow[r, "i'_*"'] & \mathrm{H}_n(E') \arrow[r, "p'_*"'] & \mathrm{H}_n(B') \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

3 CW-complexes

De manière générale, calculer les groupes d'homotopie d'un espace topologique pointé n'est pas chose facile. La difficulté provient en particulier du fait que pour deux espaces topologiques X et Y, il est difficile de construire une application $f : X \to Y$. Mais dès lors qu'on fixe son attention sur des espaces construits à l'aide de composants simples (*e.g.* complexes simpliciaux), on peut espérer construire une telle application par extension d'applications définies sur les composantes. On peut voir un complexe simplicial comme construit par itération (éventuellement transfinie) d'un processus, à savoir, ajouter une cellule. Le processus est particulièrement simple : le bord de chaque nouveau simplexe Δ est déjà présent comme sous-complexe, constituant une sorte de trou, et ajouter le simplexe revient à combler ce trou. Le complexe ainsi obtenu est donc le cône T_i de l'inclusion $i : \partial\Delta \to \Delta$. L'idée d'attacher des cellules est survenue dans les travaux de O. Veblen (*cf.* [**?**]) en 1921 : il remarqua que tout groupe G peut être réalisé comme groupe fondamental d'un complexe de dimension 2, constitué d'un bouquet d'autant de cercles qu'il y a de générateurs, auquel on a attaché une 2-cellule pour chaque relation. La notion de CW-complexe, généralisation des complexes simpliciaux, n'est apparue qu'en 1949, introduite par J.H.C Whitehead (*cf.* [**?**]).

Convention. Dans ce paragraphe, on appellera *espace* tout espace topologique de Hausdorff, de même qu'une *paire* désignera une paire d'espaces topologiques de Hausdorff.

3.1 Topologie faible déterminée par un recouvrement

3.1.1 Définition. Soient X un ensemble et $\{e_\alpha \,|\, \alpha \in J\}$ un recouvrement de X qui vérifie
(i) pour tout $\alpha \in J$, e_α est un espace topologique,
(ii) pour tout $\alpha, \beta \in J$, les topologies de e_α et e_β sont compatibles sur $e_\alpha \bigcap e_\beta$,
(iii) pour tout $\alpha, \beta \in J$, l'intersection $e_\alpha \bigcap e_\beta$ est un fermé dans e_α et e_β.
La *topologie faible* sur X déterminée par le recouvrement $\{e_\alpha \,|\, \alpha \in J\}$ est la topologie pour laquelle W est un fermé si et seulement si $F \bigcap e_\alpha$ est un fermé dans e_α pour tout $\alpha \in J$.

Remarque. Pour tout $\alpha \in J$, e_α est un fermé de X muni de la topologie faible, de plus la topologie faible de X induite sur e_α est celle de e_α.

3.1.2 Proposition. *Soient X un ensemble muni de la topologie faible induite par le recouvrement $\{e_\alpha \,|\, \alpha \in J\}$ et Y un espace topologique. Une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si $f|_{e_\alpha}$ est continue pour tout $\alpha \in J$.*

Démonstration. *cf.* [**?**, Lemma 8.14, pp.197-198]. □

3.2 Décompositions cellulaires

3.2.1 Définition. Soit (X, A) une paire et $K = \{e^n_\alpha \,|\, n \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha \in J_n\}$ un ensemble indexé de sous-espaces de X contenant A. La *dimension* de K, notée $\dim K$, est $\sup\{n \,|\, J_n \neq \emptyset\}$ ($\dim K$ peut prendre la valeur ∞). On pose

$$K^n = \begin{cases} \{e^r_\alpha \,|\, 0 \leqslant r \leqslant n \text{ et } \alpha \in J_r\} & \text{si } n \geqslant 0, \\ A & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

K^n est le *n-squelette* de K. Pour chaque sous-espace e^n_α on définit son bord

$$\partial e^n_\alpha = e^n_\alpha \bigcap \cup K^{n-1}$$

et son intérieur

$$\mathring{e}^n_\alpha = e^n_\alpha - \partial e^n_\alpha.$$

3.2.2 Définition. Soit (X, A) une paire. Un *complexe cellulaire K sur* (X, A) est un ensemble indexé de sous-espaces de X contenant A, $\{e^n_\alpha \,|\, n \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha \in J_n\}$, qui vérifie

(i) $X = \cup K$, *i.e.* X est la réunion de toutes les cellules du complexe cellulaire,

(ii) $\mathring{e}^n_\alpha \bigcap \mathring{e}^m_\beta \neq \emptyset$ implique $n = m$ et $\alpha = \beta$,

(iii) pour tout e^n_α il existe une surjection continue $f^n_\alpha : (D^n, S^{n-1}) \to (e^n_\alpha, \partial e^n_\alpha)$ qui applique $\mathring{D}^n$ homéomorphiquement sur $\mathring{e}^n_\alpha$.

$e^n_\alpha \in J_n$ est une *cellule de dimension n* (ou n-cellule) et f^n_α en est l'*application caractéristique*. La cellule e^m_β est une *face immédiate* de la cellule e^n_α si $\mathring{e}^m_\beta \bigcap e^n_\alpha \neq \emptyset$.

Remarque. Comme X est de Hausdorff, (iii) implique que chaque cellule e^n_α est un sous-espace compact de X, donc fermé. Les assertions (i) et (ii) impliquent que X est la réunion disjointe des intérieurs $\mathring{e}^n_\alpha$. De plus, A est contenu dans le bord de chaque cellule. Il se peut que, pour un certain n, $J_n = \emptyset$. En particulier, $J_0 = \emptyset$ implique $X = A$.

De manière générale, l'intérieur d'une cellule, $\mathring{e}^n_\alpha$, n'est pas un ouvert de X. En fait, un complexe cellulaire possédant un nombre infini de cellules peut porter une topologie *désagréable* ! On considère donc une catégorie plus petite de complexes.

3.2.3 Définition. Soit (X, A) une paire. Un *CW-complexe K sur* (X, A) est un complexe cellulaire K sur (X, A) qui vérifie

(C) K est de *fermeture finie* (*closure finiteness*), *i.e.* chaque cellule ne possède qu'un nombre fini de faces immédiates,

(W) X porte la topologie faible (*weak topology*) induite par K, *i.e.* $W \subset X$ est un fermé si et seulement si $W \bigcap e^n_\alpha$ est fermé dans e^n_α pour tout entier n et $\alpha \in J_n$.

Remarque. Si K est un CW-complexe sur (X, A) avec X, A connexes, alors X, A sont connexes par arcs. Cette assertion est en général fausse pour les complexes cellulaires.

Convention. Considérons une paire (X, A). On dit que (X, A) est un CW-complexe pour signifier qu'on considère un CW-complexe K sur (X, A). Si $A \neq \emptyset$ on parle souvent de CW-complexe *relatif*, sinon on écrit X au lieu de $(X, \emptyset)$. De plus, avec les conventions qu'on vient de faire, on dit souvent que (X, A) est un CW-complexe pour signifier que (X, A) à le type d'homotopie d'un CW-complexe.

Remarque. Considérons la sphère S^2. Elle est composée d'une 0-cellule qu'on peut choisir n'importe où sur sa surface et d'une 2-cellule complémentaire. Ainsi on a une infinité de CW-complexes sur S^2 qui ont le *même* squelette. Mais on peut également voir S^2 comme une 0-cellule, une 1-cellule et deux 2-cellules. Ce CW-complexe n'a pas le même squelette. Ainsi, il peut exister *beaucoup* de CW-complexes sur un espace donné X.

Exemple. Tout complexe simplicial est un CW-complexe sur son polyèdre sous-jacent.

3.3 Construction des CW-complexes

Jusqu'ici nous avons supposé que (X, A) était une paire donnée et considéré un éventuel CW-complexe K sur (X, A) *i.e.* une prescription pour *décomposer* X en cellules qui *respectent* A. Maintenant nous allons construire une paire (X, A), cellule par cellule, par *recollements*.

3.3.1 Définition. Soient (X, A) une paire et une application $g : S^{n-1} \to X$ avec $A \subset \operatorname{im} g$, $n \geqslant 1$ un entier. La paire (X, A) *avec une n-cellule attachée* est le cône (T_g, A) et g en est l'*application attachante*. Si $n = 0$, (X, A) *avec une 0-cellule attachée* est $(X \sqcup *, A)$.

Convention. On dit qu'*on attache une n-cellule e^n à (X, A)*, $n \geqslant 1$, pour signifier qu'on considère (X, A) avec une n-cellule attachée en identifiant $(I \times S^{n-1})/(\{0\} \times S^{n-1})$ à e^n (*cf.* Définition 1.4.9).

3.3.2 Lemme. *Soit K un CW-complexe de dimension $(n-1)$ sur une paire (X, A). $K \bigcup \{e^n\}$ est un CW-complexe sur (X, A) auquel on a attaché une n-cellule e^n.*

Démonstration. cf. [?, Lemma 5.11, pp.70-71]. □

3.3.3 Théorème. *Soit $A = X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n \subset \cdots \subset X$ une suite d'espaces telle que (X^n, A) est obtenu à partir de (X^{n-1}, A) auquel on attache des n-cellules, $n \geqslant 1$ entier. Soit encore $X = \bigcup_{-1 \leqslant n} X^n$ muni de la topologie faible. $K = \{$toutes les cellules en jeu$\}$ est un CW-complexe sur (X, A).*

Démonstration. cf. [?, Proposition 5.12, p.71]. □

Nous sommes maintenant en mesure de construire des CW-complexes ayant nos propres spécificités (pourvu qu'elles soient raisonnables !).

3.4 Résumé

Il y a deux façons d'appréhender la notion de CW-complexe : la façon **descendante** qui consiste à *découper* un espace topologique donné X en cellules qui contiennent une partie donnée A dans leur bord, et la façon **ascendante** qui consiste à *attacher* ou *recoller* des cellules par leur bord sur un espace donné A pour obtenir un espace X. Dans les deux cas, on dit que (X, A) est un

CW-complexe, parce qu'il est facile, connaissant un CW-complexe de façon descendante (resp. ascendante), d'en déduire la façon ascendante (resp. descendante) de l'appréhender.

Considérons un exemple. Soit A un CW-complexe auquel on attache une n-cellule par son bord, on obtient un CW-complexe X qui contient A. Alors X, comme CW-complexe, possède toutes les cellules de A plus la n-cellule qu'on vient d'attacher, alors que (X, A), comme CW-complexe relatif, ne contient que la n-cellule. Ainsi, parler en termes de **CW-complexes relatifs** permet de mettre en évidence uniquement les cellules qu'on attache à un espace de base donné, considérant quelque peu comme *acquises* les éventuelles cellules qui composent cet espace de base. Par exemple, dire que (S^2, S^1) est un CW-complexe relatif qui ne possède que deux 2-cellules est équivalent à dire qu'on obtient S^2 en attachant deux 2-cellules, par leur bord, à S^1.

3.5 Un résultat en homologie

3.5.1 Lemme. *Soient (X, A) un CW-complexe avec A un CW-complexe et n un entier. On a la relation suivante,*

$$\mathrm{H}_n(X, A) \cong \mathrm{H}_n(X/A, *) \cong \widetilde{\mathrm{H}}_n(X/A).$$

En fait, la projection $p : (X, A) \to (X/A, *)$ induit un isomorphisme en homologie.

Démonstration. *cf.* [**?**, Theorem 8.41, p.219]. □

3.5.2 Définition. Soient X et Y deux CW-complexes. Une *équivalence d'homologie* est une application $f : X \to Y$ telle que $\mathrm{H}_n(f)$ est un isomorphisme pour tout entier n. On dit que X *et* Y *ont même type d'homologie* s'il existe une telle application.

3.5.3 Proposition. *Soient (X, A) un CW-complexe avec A un CW-complexe et $j : A \to X$ l'inclusion. Le cône de j, T_j, a le type d'homologie de (X, A). En fait, l'application $\omega = p \circ i$, avec $i : (X, A) \to (I_j, A)$ défini par l'inclusion dans le cylindre et $p : (I_j, A) \to (I_j/A, *) = T_j$ défini par la projection, induit un isomorphisme en homologie.*

Démonstration. L'application $i : (X, A) \to (I_j, A)$ induit le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{H}_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "q_*"] & \mathrm{H}_n(X, A) \arrow[r] \arrow[d, "i_*"'] & \mathrm{H}_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{H}_{n-1}(X) \arrow[d, "\cong"', "q_*"] \\
\mathrm{H}_n(A) \arrow[r] & \mathrm{H}_n(I_j) \arrow[r] & \mathrm{H}_n(I_j, A) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n-1}(A) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n-1}(I_j),
\end{tikzcd}$$

avec q une équivalence d'homotopie. En vertu du Lemme des cinq, i_* est un isomorphisme. On conclut à l'aide du Lemme. □

4 Théorèmes d'Hurewicz et Whitehead

Dans cette section, on commence par définir l'homomorphisme d'Hurewicz puis on énonce les Théorèmes d'Hurewicz et de Whitehead qui sont d'une importance capitale dans la suite de ce travail.

4.1 L'homomorphisme d'Hurewicz

4.1.1 Définition. Soient (X, A, x_0) une paire pointée et $n \geqslant 1$ un entier. Une *application d'Hurewicz* en dimension n est une application

$$\begin{array}{rccc} h_n : & \pi_n(X, A, x_0) & \longrightarrow & \mathrm{H}_n(X, A) \\ & [\gamma] & \mapsto & \mathrm{H}_n(\gamma)\,(e) \end{array}$$

avec $\gamma : (D^n, S^{n-1}, *) \to (X, A, x_0)$ et e un générateur du groupe cyclique infini $\mathrm{H}_n(D^n, S^{n-1})$.

Remarque. Une application d'Hurewicz est bien définie en vertu de l'axiome d'homotopie en homologie. Toutefois, la définition dépend du choix d'un générateur pour le groupe cyclique infini $\mathrm{H}_n(D^n, S^{n-1})$, de sorte que h_n est défini au signe près. En particulier, le diagramme suivant, avec ∂ les homomorphismes de connexion des suites exactes longues des paires en homotopie et en homologie, commute au signe près,

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X, A, x_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_n"'] & \pi_{n-1}(A, \{x_0\}, x_0) \arrow[d, "h_{n-1}"] \\ \mathrm{H}_n(X, A) \arrow[r, "\partial'"'] & \mathrm{H}_{n-1}(A, \{x_0\}). \end{tikzcd}$$

Pour rendre ce diagramme strictement commutatif, il est nécessaire de choisir les générateurs en dimensions consécutives de façon *cohérente.* Rappelons que si E est une n-cellule, ∂E est déterminé de manière unique par l'image de $\partial\Delta^n$ par n'importe quel homéomorphisme $\Delta^n \to E$ (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer). On peut donc définir une **orientation** sur E avec un générateur ϵ du groupe cyclique infini $\mathrm{H}_n(E, \partial E)$, on dit que (E, ϵ) est une *n-cellule orientée.* On fait de même pour les sphères : si S^n est une n-sphère, une *orientation* σ de S^n est un générateur du groupe cyclique infini $\mathrm{H}_n(S^n, *)$, (S^n, σ) est une *n-sphère orientée.* Maintenant, si (E, ϵ) est une n-cellule orientée avec point base $* \in \partial E$, alors ∂E est une $(n-1)$-sphère et l'isomorphisme $\partial : \mathrm{H}_n(E, \partial E) \to \mathrm{H}_{n-1}(\partial E, *)$ transporte l'orientation ϵ de E en une orientation $\partial\epsilon$ de ∂E. On dit que ϵ et $\partial\epsilon$ sont des orientations **cohérentes**. Il suffit donc de convenir d'une orientation pour S^0, ainsi on pourra choisir une orientation cohérente pour D^1, parler de **l'homomorphisme d'Hurewicz** h_1 et choisir les générateurs en dimensions supérieures de façon à ce que le diagramme ci-dessus commute.

Convention. La 0-sphère S^0 est orientée par la classe d'homologie de 1. Le 1-disque D^1 est orienté de manière cohérente avec l'orientation de la 0-sphère S^0, on note $\mathbf{e}$ cette orientation. Lorsqu'on parle de *l'application d'Hurewicz en dimension* 1, on désigne l'application d'Hurewicz avec $\mathbf{e}$ pour choix de générateur du groupe cyclique infini $\mathrm{H}_n(D^1, S^0)$. Lorsqu'on parle de *l'application d'Hurewicz en dimension n*, $n \geqslant 2$ un entier, on désigne l'application d'Hurewicz qui fait commuter le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,A,x_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_n"'] & \pi_{n-1}(A,x_0) \arrow[d, "h_{n-1}"] \\
\mathrm{H}_n(X,A) \arrow[r, "\partial'"'] & \mathrm{H}_{n-1}(A),
\end{tikzcd}$$

avec ∂ les homomorphismes de liaison des suites exactes longues des paires en homotopie et en homologie.

4.1.2 Théorème. *Soient (X, A, x_0) une paire pointée et n un entier. L'application d'Hurewicz est un homomorphisme si $n \geqslant 1$ ou si $n = 0$ et $A = \{*\}$.*

Démonstration. cf. [**?**, Chap IV, Theorem 4.1, p.167]. □

4.1.3 Proposition. *L'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n, h_n, est une transformation naturelle des foncteurs $\pi_n(-)$ et $\mathrm{H}_n(-)$. En d'autres termes, si $f : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ est une application de paires pointées alors le diagramme suivant commute,*

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,A,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "h_n"'] & \pi_n(Y,B,y_0) \arrow[d, "h_n"] \\
\mathrm{H}_n(X,A) \arrow[r, "f_*"'] & \mathrm{H}_n(Y,B).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. D'une part on a $h_n \circ f_* ([\gamma]) = h_n([f \circ \gamma]) = (f \circ \gamma)_* (e)$. D'autre part on a $f_* \circ h_n ([\gamma]) = f_* \circ \gamma_* (e) = (f \circ \gamma)_* (e)$. □

4.2 Théorèmes d'Hurewicz

4.2.1 Théorème (d'Hurewicz absolu)**.** *Soit $(X, *)$ un espace pointé $(n-1)$-connexe, avec $n \geqslant 2$ un entier. Alors $\mathrm{H}_i(X, *) = 0$ pour tout entier $i < n$ et l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X, *) \to \mathrm{H}_n(X, *)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. cf. [**?**, Corollary (7.7), p.180] □

4.2.2 Théorème. *Soit $(X, *)$ un espace pointé 1-connexe avec $\mathrm{H}_i(X, *) = 0$ pour tout $i < n$, $n \geqslant 2$ des entiers. Alors $(X, *)$ est $(n-1)$-connexe et l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X, *) \to \mathrm{H}_n(X, *)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. cf. [**?**, Corollary (7.8), p.180] □

4.2.3 Théorème (d'Hurewicz relatif I)**.** *Soit $(X, A, *)$ une paire pointée $(n-1)$-connexe, avec $n \geqslant 2$ un entier et $(A, *)$ 1-connexe. Alors $\mathrm{H}_i(X, A, *) = 0$ pour tout entier $i < n$ et l'homomorphisme d'Hurewicz relatif $h_n : \pi_n(X, A, *) \to \mathrm{H}_n(X, A)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. *cf.* [**?**, Corollary (7.10), p.181] □

4.2.4 Théorème. *Soit* $(X, A, *)$ *une paire pointée* 1*-connexe avec* $(A, *)$ 1*-connexe et* $\mathrm{H}_i(X, A, *) = 0$ *pour tout* $i < n$, $n \geqslant 2$ *des entiers. Alors* $(X, A, *)$ *est* $(n-1)$*-connexe et l'homomorphisme d'Hurewicz relatif* $h_n : \pi_n(X, A, *) \to \mathrm{H}_n(X, A)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. *cf.* [**?**, Corollary (7.11), p.181] □

Remarque. Dans la version relative du Théorème d'Hurewicz, l'hypothèse selon laquelle l'espace topologique pointé $(A, *)$ est 1-connexe est nécessaire. En effet, il existe beaucoup d'exemples d'espaces acycliques possédant un groupe fondamental non trivial. Néanmoins, on peut faire une hypothèse moins restrictive sur $(A, *)$, à savoir exiger qu'il soit connexe et *simple*. Rappelons que le groupe fondamental $\pi_1(A, x_0)$ agit sur les groupes d'homotopie $\pi_n(X, A, x_0)$. Pour une description de ce phénomène, étudié par Eilenberg en 1939 dans [**?**], *cf.* [**?**, Chap III, §1, pp.98-102 ; Chap IV, §3, pp.164-166].

4.2.5 Définition. Soit $(A, *)$ un espace pointé, resp. $(X, A, *)$ une paire pointée. On dit que $(A, *)$, resp. $(X, A, *)$, est *n-simple*, $n \geqslant 1$ un entier, si $\pi_1(A, *)$ agit trivialement sur $\pi_n(A, *)$, resp. $\pi_n(X, A, *)$. Plus généralement on dit qu'un espace ou une paire est *simple* si il ou elle est n-simple pour tout entier $n \geqslant 1$.

Remarque. Si l'espace pointé $(A, *)$ est simple, alors $\pi_1(A, *)$ est abélien. En effet, $\pi_1(A, *)$ agit par conjugaison sur $\pi_1(A, *)$ et trivialement par simplicité.

Exemple. Soit $(A, *)$ un espace pointé. Si $(A, *)$ est 1-connexe *i.e.* $\pi_1(A, *)$ est trivial, alors (A, x_0) est connexe et simple *a fortiori.*

4.2.6 Théorème (d'Hurewicz relatif II)**.** *Soit* $(X, A, *)$ *une paire pointée* $(n-1)$*-connexe, avec* $n \geqslant 2$ *un entier et* $(A, *)$ *connexe simple. Alors* $\mathrm{H}_i(X, A, *) = 0$ *pour tout entier* $i < n$ *et l'homomorphisme d'Hurewicz relatif* $h_n : \pi_n(X, A, *) \to \mathrm{H}_n(X, A)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. *cf.* [**?**, Theorem 7.2, p.178]. □

4.2.7 Théorème. *Soit* $(X, A, *)$ *une paire pointée* 1*-connexe avec* $(A, *)$ *connexe simple et* $\mathrm{H}_i(X, A, *) = 0$ *pour tout* $i < n$, $n \geqslant 2$ *des entiers. Alors* $(X, A, *)$ *est* $(n-1)$*-connexe et l'homomorphisme d'Hurewicz relatif* $h_n : \pi_n(X, A, *) \to \mathrm{H}_n(X, A)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. *cf.* [**?**, Theorem 7.2, p.178]. □

4.3 Théorèmes de Whitehead

4.3.1 Définition. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) des espaces pointés connexes par arcs. Une application $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ est *n-connexe*, avec n un entier, si $\pi_i(f) : \pi_i(X, x_0) \to \pi_i(Y, y_0)$ est un isomorphisme pour tout entier $i < n$ et un épimorphisme pour $i = n$.

4.3.2 Théorème (de Whitehead)**.** *Soient* (X, x_0) *et* (Y, y_0) *des espaces pointés connexes par arcs,* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *une application et* n *un entier. Si* f *est* n*-connexe alors* $\mathrm{H}_n(f) : \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{H}_n(Y)$ *est un isomorphisme pour tout entier* $i < n$ *et un épimorphisme pour* $i = n$*. Réciproquement, si* (X, x_0) *et* (Y, y_0) *sont* 1*-connexe,* $\mathrm{H}_n(f) : \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{H}_n(Y)$ *est un isomorphisme pour tout entier* $i < n$ *et un épimorphisme pour* $i = n$*, alors* f *est* n*-connexe.*

Démonstration. cf. [**?**, Theorem 7.13, p.181]. □

4.3.3 Corollaire. *Soient* (X, x_0) *et* (Y, y_0) *des espaces pointés connexes par arcs,* G *un groupe,* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *une application* n*-connexe avec* n *un entier. En homologie à coefficients dans* G*,* $\mathrm{H}_i(f) : \mathrm{H}_i(X; G) \to \mathrm{H}_i(Y; G)$ *est un isomorphisme pour tout entier* $i < n$ *et un épimorphisme pour* $i = n$*.*

Démonstration. cf. [**?**, Corollary 7.14, p.181]. □

4.3.4 Définition. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces pointés connexes par arcs. Une application $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ telle que $\pi_n(f)$ est un isomorphisme, *i.e.* f est n-connexe, pour tout entier n, est une *équivalence d'homotopie faible.* On dit que (X, x_0) *et* (Y, y_0) *ont même type d'homotopie faible* s'il existe une telle application.

4.3.5 Définition. Soit (X, x_0) un espace pointé connexe par arcs. Une *CW-approximation* de (X, x_0) est une équivalence d'homotopie faible $f : (K, *) \to (X, x_0)$ avec $(K, *)$ un CW-complexe connexe.

4.3.6 Proposition. *Soient* (X, x_0) *et* (Y, y_0) *deux espaces pointés. Si* (X, x_0) *et* (Y, y_0) *ont même type d'homotopie alors ils ont même type d'homotopie faible.* □

Remarque. La réciproque est en général fausse, sauf pour les CW-complexes.

4.3.7 Théorème. *(de Whitehead II) Soient* $(X, *)$ *et* $(Y, *)$ *deux CW-complexe connexes. Si* $f : (X, *) \to (Y, *)$ *est une équivalence d'homotopie faible, alors* f *est une équivalence d'homotopie.*

Démonstration. cf. [**?**, Chap. V, Theorem 3.5, p.220-221] ou [**?**, Theorem 16.22, pp.139-140]. □

Deuxième partie

La théorie de Postnikov

La théorie de M. M. Postnikov, telle qu'elle est exposée dans cette partie *i.e.* dans le cas *absolu*, est apparue en 1957 dans [?], puis complétée dans [?].

Convention. Dans cette partie, tous les espaces topologiques et les paires d'espaces topologiques sont pointés, sauf mention du contraire, et on note X un CW-complexe au lieu de $(X, *)$.

5 Espaces de Moore et d'Eilenberg-MacLane

5.1 Espaces de Moore

5.1.1 Lemme. *Soit $\{S^n_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ une famille de sphères de dimension $n \geqslant 1$ un entier.*

$$\pi_n(\bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_\alpha) = \begin{cases} \mathrm{F}(\{i_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}) & si\ n = 1\ et \\ \mathrm{FA}(\{i_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}) & si\ n \geqslant 2, \end{cases}$$

où i_α est l'inclusion $S^n_\alpha \to \bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_\alpha$, $\mathrm{F}(\{i_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}})$ le groupe libre et $\mathrm{FA}(\{i_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}})$ le groupe libre-abélien engendrés par $\{i_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$.

Démonstration. *cf.* [?, Lemma 17.4, p.158]. □

5.1.2 Lemme. *Soient $n \geqslant 1$ un entier, F, resp. G, des groupes libres (libre-abéliens si $n \geqslant 2$) sur les ensembles $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{B}$, et $\varphi : F \to G$ un homomorphisme de groupes. Il existe une application, unique à homotopie près, $f : \bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_\alpha \to \bigvee_{\beta\in\mathcal{B}} S^n_\beta$, où $\{S^n_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$, resp. $\{S^n_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$, sont des familles de sphères de dimension n, et telle que $\pi_n(f) = \varphi$.* □

Démonstration. L'existence est évidente en vertu du Lemme 5.1.1. On montre facilement l'unicité à homotopie près. □

5.1.3 Théorème. *Soient $n \geqslant 1$ un entier et G un groupe (abélien si $n \geqslant 2$). Il existe un CW-complexe $\mathrm{M}(G, n)$ constitué uniquement d'une 0-cellule, de cellules en dimensions n et $(n+1)$, et tel que $\pi_n(\mathrm{M}(G, n)) \cong G$.*

Démonstration. Supposons G libre (libre-abélien si $n \geqslant 2$) sur $\mathcal{A}$, on pose $\mathrm{M}(G, n) = \bigvee_{\alpha\in\mathcal{A}} S^n_\alpha$ et on conclut à l'aide du Lemme 5.1.1 et du Lemme 5.1.2.

Soient $R \overset{\varphi}{\rightarrowtail} F \twoheadrightarrow G$ une présentation libre de G et, d'après le Lemme 5.1.2, $f : \mathrm{M}(R,n) \to \mathrm{M}(F,n)$ avec $f_* = \varphi$. On pose $\mathrm{M}(G,n) = T_f$. En vertu du Théorème 3.5.3, T_f a le type d'homologie de la paire $(\mathrm{M}(F,n), \mathrm{M}(R,n))$. Par le Théorème de Whitehead, on a donc $\pi_n(\mathrm{M}(G,n)) \cong G$ et $\pi_i(\mathrm{M}(G,n)) = 0$ pour tout entier $i < n$. □

5.1.4 Corollaire. *Soient $n \geqslant 1$ un entier et G un groupe (abélien si $n \geqslant 2$). On a $\pi_i(\mathrm{M}(G,n)) = 0$ pour tout entier $i < n$.*

Démonstration. $\mathrm{M}(G,n)$ ne possède que des cellules en dimensions 0, n et $(n+1)$. □

5.1.5 Définition. Soient $n \geqslant 1$ un entier et G un groupe (abélien si $n \geqslant 2$). Le CW-complexe $\mathrm{M}(G,n)$ est un *espace de Moore* (pour G).

Exemple. Soit $\mathrm{M}(\mathbb{Z}/d,n) = S^n \cup_f D^{n+1}$ avec $f : S^n \to S^n$ une application de degré d. $\mathrm{M}(\mathbb{Z}/d,n)$ est un espace de Moore pour $\mathbb{Z}/d$.

5.1.6 Théorème. *Soient $n \geqslant 1$ un entier et $\varphi : F \to G$ un homomorphisme de groupes (abéliens si $n \geqslant 2$). Il existe une application $f : \mathrm{M}(F,n) \to \mathrm{M}(G,n)$ telle que $\pi_n(f) = \varphi$.*

Démonstration. *cf.* [**?**, Proposition 17.7, pp.159-160] □

5.2 Extensions anticonnexes et espaces d'Eilenberg-MacLane

5.2.1 Lemme. *Soient X un CW-complexe et $n \geqslant 1$ un entier. Il existe un CW-complexe relatif (X', X) avec des cellules uniquement en dimension $(n+1)$ et tel que $\pi_n(X') = 0$ et $\pi_i(X') \cong \pi_i(X)$ pour tout entier $i < n$.*

Démonstration. Soit $\{[e_\alpha] \in [S^n, X] \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ un ensemble de générateurs de $\pi_n(X)$. On pose

$$X' = X \sqcup (\bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} D^{n+1}_\alpha)/\{e_\alpha(x) \mid x \in S^n \text{ et } \alpha \in \mathcal{A}\},$$

cf. [**?**, Lemma 17.9, p.160]. □

5.2.2 Théorème. *Soient X un CW-complexe et $n \geqslant 1$ un entier. Il existe un CW-complexe $X[n]$ et une inclusion $i_n : X \to X[n]$ tels que*
(i) la paire $(X[n], X)$ est un CW-complexe relatif avec des cellules uniquement en dimensions $\geqslant n+2$,
(ii) $\pi_i(X[n]) = 0$ pour tout entier $i \geqslant n+1$,
(iii) $(i_n)_* : \pi_i(X) \to \pi_i(X[n])$ est un isomorphisme pour tout entier $i \leqslant n$.

Démonstration. A l'aide du Lemme 5.2.1 on construit X' tel que $\pi_{n+1}(X') = 0$. En itérant, on construit $X^{(r)}$ tel que $\pi_{n+r}(X^{(r)}) = 0$. On pose $X[n] = \bigcup X^{(r)}$ qu'on munit de la topologie faible. (i) est clair, (iii) découle de (i), et (ii) se déduit de $\pi_i(X^{(r)}) = 0$ pour $n-1 \leqslant i \leqslant r$ et du fait que $\pi_i(X[n]) = \varinjlim \pi_i(X^{(r)})$. □

5.2.3 Définition. Soient X un CW-complexe et $n \geqslant 1$ un entier. L'inclusion $i_n : X \to X[n]$ est une *extension* $(n+1)$*-anticonnexe* de X.

Convention. Plutôt que de parler de l'inclusion, on dit souvent que le CW-complexe $X[n]$ *est* une extension $(n+1)$-anticonnexe de X.

5.2.4 Corollaire. *Soient $n \geqslant 1$ un entier et G un groupe (abélien si $n \geqslant 2$). Il existe un CW-complexe* $\mathrm{K}(G,n)$ *avec un seul groupe d'homotopie non nécessairement trivial isomorphe à G en dimension n.*

Démonstration. Il suffit de prendre une extension $(n+1)$-anticonnexe d'un espace de Moore $\mathrm{M}(G,n)$, *i.e.* on pose $\mathrm{K}(G,n) = \mathrm{M}(G,n)[n]$ (l'inclusion $i_n : \mathrm{M}(G,n) \to \mathrm{M}(G,n)[n]$ induit un isomorphisme). $\square$

5.2.5 Définition. Soient $n \geqslant 1$ un entier et G un groupe (abélien si $n \geqslant 2$). Le CW-complexe $\mathrm{K}(G,n)$ est appelé un *espace d'Eilenberg-MacLane.*

5.2.6 Lemme. *Soient* $\mathrm{K}(G,n)$ *un espace d'Eilenberg-MacLane pour le groupe G et $n \geqslant 2$ un entier. Les CW-complexes* $\Omega\,\mathrm{K}(G,n)$ *et* $\mathrm{K}(G,n-1)$ *ont même type d'homotopie.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'ils ont même type d'homotopie faible puisque ce sont des CW-complexes. On conclut en remarquant que $\pi_{n-1}(\Omega\,\mathrm{K}(G,n)) \cong \pi_n(\mathrm{K}(G,n)) \cong G$ et $\pi_i(\Omega\,\mathrm{K}(G,n)) = 0$ pour tout entier $i \neq n$. $\square$

5.3 Théorème de Moore

Remarque. Soit X un espace topologique $(n-1)$-connexe simple, $n \geqslant 1$ un entier. Tous les groupes d'homotopie de X sont abéliens par simplicité et le Théorème des coefficients universels en cohomologie de dimension n donne la suite exacte courte,

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{n-1}(X), \pi_n(X)) \rightarrowtail \mathrm{H}^n(X; \pi_n(X)) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X), \pi_n(X)),$$

avec $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{n-1}(X), \pi_n(X)) = 0$ par connexité ($\mathrm{H}_{n-1}(X)$ est libre : trivial si $n > 1$ et cyclique infini si $n = 1$). Ainsi ρ, l'*homomorphisme des coefficients universels*, est un isomorphisme. De plus, vu la connexité et le Théorème d'Hurewicz, l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ est un isomorphisme (*cf.* Théorème 4.2.1 pour $n \geqslant 2$ et pour $n = 1$ il suffit de remarquer que $\pi_1(X)$ est abélien).

5.3.1 Définition. Soit X un espace topologique $(n-1)$-connexe simple, $n \geqslant 1$ un entier. La *classe caractéristique* $\iota^n(X) \in \mathrm{H}^n(X; \pi_n(X)) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X), \pi_n(X))$ est la classe de cohomologie dont l'image par l'isomorphisme des coefficients universels est l'inverse de l'isomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$.

Convention. On dit que la classe caractéristique $\iota^n(\mathrm{K}(G,n))$, $n \geqslant 2$, d'un espace d'Eilenberg-MacLane appartient au groupe de cohomologie $\mathrm{H}^n(\mathrm{K}(G,n); G)$ plutôt qu'à

$\mathrm{H}^n(\mathrm{K}(G,n),\pi_n(\mathrm{K}(G,n)))$. En réalité, on convient de toujours appeler *classe caractéristique*, et de toujours noter $\iota^n(\mathrm{K}(G,n))$, l'image de $\iota^n(\mathrm{K}(G,n))$ par l'induite en cohomologie de n'importe quel isomorphisme $\pi_n(\mathrm{K}(G,n)) \to G$ (un tel isomorphisme existe en vertu du Corollaire 5.2.4).

5.3.2 Théorème (J. C. Moore)**.** *Soit X un CW-complexe connexe simple. Les assertions suivantes sont équivalentes,*
(i) X a le type d'homotopie d'un produit faible d'espaces d'Eilenberg-MacLane,
(ii) pour tout entier $n \geqslant 1$, l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ possède un inverse à gauche $\varphi_n : \mathrm{H}_n(X) \to \pi_n(X)$, i.e. $\varphi_n \circ h_n = \mathrm{id}_{\pi_n(X)}$.

Démonstration. Supposons que $X = \prod_{k\geqslant 1} \mathrm{K}(G_k,n_k)$. Posons $J_n = \{k \,|\, n_k = n\}$, $X_{\neq n} = \prod_{k\notin J_n} \mathrm{K}(G_k,n_k)$. Ainsi on a $X = \prod_{k\in J_n} \mathrm{K}(G_k,n) \times X_{\neq n} = \mathrm{K}(G,n) \times X_{\neq n}$, où $G = \bigoplus_{k\in J_n} G_k$. Clairement $\pi_n(X_{\neq n}) = 0$, de sorte que $\pi_n(X) \cong G$. Soit $p : X \to \mathrm{K}(G,n)$ la projection sur le premier facteur. Posons $u = p^*\iota^n(\mathrm{K}(G,n)) \in \mathrm{H}^n(X;G)$ avec $\iota^n(\mathrm{K}(G,n))$ la classe caractéristique. On définit $\varphi_n : \mathrm{H}_n(X) \to G \cong \pi_n(X)$ par l'évaluation $z \mapsto <u,z>$. Pour tout $x \in G$ on vérifie facilement que $\varphi_n \circ h_n(x) = p_*(x)$. Puisque p_* est un isomorphisme, on conclut que h_n a un inverse à gauche.

Réciproquement, en utilisant la connexité, on montre qu'il y a une équivalence d'homotopie faible entre X et un produit faible d'espaces d'Eilenberg-MacLane. C'est donc une équivalence d'homotopie puisque les espaces sont des CW-complexes. Pour le détail de la preuve,*cf.* [**?**, Chap. IX, Theorem 1.9, pp.420-421]. □

Remarque. Si l'homomorphisme d'Hurewicz possède un inverse à gauche alors on dit aussi que c'est une **injection scindée**.

6 Systèmes de Postnikov

6.1 Sections et tour de Postnikov

6.1.1 Lemme. *Soient X et Y deux CW-complexes connexes, $f : X \to Y$ une application et $m, n \geqslant 1$ des entiers. Soient encore $X[n]$, resp. $Y[m]$, des extensions $(n+1)$-anticonnexe de X, resp. $(m+1)$-anticonnexe de Y.*
(i) si $m \leqslant n$ alors il existe une application $f_{n,m} : X[n] \to Y[m]$ qui étend f,
(ii) si $m \leqslant n+1$ alors deux applications $f_{n,m}, g_{n,m} : X[n] \to Y[m]$ qui étendent f sont homotopes.

Démonstration. *cf.* [**?**, Chap IX, Theorem 1.5, p.418]. □

6.1.2 Théorème. *Soient X un CW-complexe connexe et $n \geqslant 2$ un entier. Si $X[n]_0$ et $X[n]_1$ sont deux extensions $(n+1)$-anticonnexes de X alors les paires $(X[n]_0, X)$ et $(X[n]_1, X)$ ont même type d'homotopie.*

Démonstration. *cf.* [**?**, Chap IX, Corollary 1.6, p.418]. □

6.1.3 Corollaire. *Soient X un CW-complexe connexe et $n \geqslant 1$ un entier. Alors une extension $(n+1)$-anticonnexe de X est unique à homotopie près.* □

Convention. On convient de parler de *l'extension* $(n+1)$*-anticonnexe* d'un CW-complexe connexe, sous-entendu à homotopie près.

6.1.4 Définition. Soient X un CW-complexe connexe et $n \geqslant 1$ un entier. La *n-ième section de Postnikov* de X est l'extension $(n+1)$-anticonnexe de X, notée $\alpha_n : X \hookrightarrow X[n]$.

6.1.5 Corollaire. *Soient X un CW-complexe connexe, $n \geqslant 1$ un entier, et α_{n-1}, α_n des sections de Postnikov. Il existe une application γ_{n-1}, unique à homotopie près, qui fait commuter le diagramme suivant,*

$$\begin{tikzcd}
 & X[n] \arrow[dd, "\gamma_{n-1}"] \\
X \arrow[ur, hook, "\alpha_{n-1}"] \arrow[dr, hook, "\alpha_n"'] & \\
 & X[n-1].
\end{tikzcd}$$

Démonstration. On étend l'identité sur X. □

Remarque. L'application γ_{n-1} induit une inclusion $\widehat{\gamma_{n-1}} : X[n] \to \widehat{X[n-1]}$, avec

$$\widehat{X[n-1]} = I_{\gamma_{n-1}} / \{[x,t] = [x,0] \mid x \in X,\ t \in I\}.$$

En effet, par construction, $\widehat{X[n-1]}$ contient $X[n-1]$ comme sous-espace et tous deux ont même type d'homotopie. Les application γ_{n-1} et $\widehat{\gamma_{n-1}}$ sont de fibre homotopique $\mathrm{K}(\pi_n(X), n)$. On peut considérer toutes les sections de Postnikov, elles s'arrangent en un diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd}
 & X[n] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"] \\
 & X[n-1] \arrow[dd, "\gamma_{n-2}"] \\
X \arrow[uur, hook, "\alpha_n"] \arrow[ur, hook, "\alpha_{n-1}"] \arrow[dr, hook, "\alpha_{n-2}"] \arrow[ddr, hook, "\alpha_1"] & \\
 & X[n-2] \arrow[d, dotted, no head] \\
 & X[1] = \mathrm{K}(\pi_1(X), 1),
\end{tikzcd}$$

qu'on appelle **tour de Postnikov**. On peut donc toujours considérer une partie finie de la tour de Postnikov comme constituée uniquement d'inclusions sans pour autant changer ses *propriétés homotopiques*.

CONVENTION. Plutôt que de parler de la paire $(\widehat{X[n-1]}, X[n])$ on parlera de la paire $(X[n-1], X[n])$ bien que $\gamma_{n-1} : X[n-1] \to X[n]$ ne soit pas à proprement parler l'inclusion. On se permet un tel abus parce que $\widehat{X[n-1]}$ et $X[n-1]$ ont même type d'homotopie.

6.1.6 Lemme. *Soient X un CW-complexe connexe et $n \geqslant 1$ un entier. La n-ième section de Postnikov, $\alpha_n : X \to X[n]$, est $(n+1)$-connexe.*

Démonstration. La section de Postnikov induit un isomorphisme en homotopie $\pi_i(\alpha_n)$ pour tout entier $i < n+1$, et $\pi_{n+1}(\alpha_n) : \pi_{n+1}(X) \to \pi_{n+1}(X[n]) = 0$ est clairement un épimorphisme. $\square$

6.2 Invariants et systèmes de Postnikov

6.2.1 Lemme. *Soient X un espace topologique et $n \geqslant 2$ un entier. Pour tout entier $i \geqslant 1$, on a*

$$\pi_i(X[n-1], X[n]) \cong \begin{cases} \pi_n(X) & si\ i = n+1, \\ 0 & si\ i \neq n+1. \end{cases}$$

Démonstration. Considérons la suite exacte longue de la paire $(X[n-1], X[n])$,

$$\cdots \longrightarrow \pi_i(X[n]) \xrightarrow{\gamma_*} \pi_i(X[n-1]) \longrightarrow \pi_i(X[n-1], X[n]) \longrightarrow$$
$$\pi_{i-1}(X[n]) \xrightarrow{\gamma_*} \pi_{i-1}(X[n-1]) \longrightarrow \cdots$$

Si $i \neq n$ alors γ_* est un isomorphisme, de sorte que $\pi_i(X[n-1], X[n]) = 0$ pour tout $i \neq n+1$. Si $i = n+1$, on a $\pi_{n+1}(X[n-1]) = \pi_n(X[n-1]) = 0$ et $\pi_n(X[n]) \cong \pi_n(X)$, d'où l'isomorphisme $\pi_{n+1}(X[n-1], X[n]) \cong \pi_n(X)$. □

6.2.2 Proposition. *Soient X un espace topologique connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. L'homomorphisme d'Hurewicz en dimension $n+1$, $h_{n+1} : \pi_{n+1}(X[n-1], X[n]) \to \mathrm{H}_n(X[n-1], X[n])$, est un isomorphisme, de même que l'homomorphisme*

$$\kappa_{n+1}(X) : \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]) \xrightarrow{h_{n+1}^{-1}} \pi_{n+1}(X[n-1], X[n]) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X[n]) \xrightarrow{(\alpha_n)_*^{-1}} \pi_n(X),$$

où ∂ est l'homomorphisme de connexion dans la suite exacte longue de la paire en homotopie et $\alpha_n : X \to X[n]$ la n-ième section de Postnikov. De plus, $H_i(X[n-1], X[n]) = 0$ pour tout entier $i < n+1$.

Démonstration. La section de Postnikov $X[n]$ est connexe puisque X l'est. De plus, $X[n]$ possède les mêmes groupes d'homotopie que X jusqu'en dimension n et est $(n+1)$-anticonnexe, $X[n]$ est donc simple. Le Théorème d'Hurewicz relatif (*cf.* Théorème 4.2.6) permet de conclure. □

Remarque. Le Théorème des coefficients universels en cohomologie établit un isomorphisme ρ entre $\mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n(X))$ et $\mathrm{Hom}(H_{n+1}(X[n-1], X[n]), \pi_n(X))$ puisque $H_n(X[n-1], X[n])$ est trivial. On peut donc voir l'isomorphisme $\kappa^{n+1}(X)$ de la Proposition 6.2.2 comme une classe de cohomologie via ρ^{-1}. De plus, on peut considérer l'inclusion j de $X[n-1]$ dans la paire $(X[n-1], X[n])$. Elle induit un homomorphisme en cohomologie $j^* : \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n(X)) \to \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X))$. On est maintenant en mesure de définir les invariants de Postnikov ou k-invariants.

6.2.3 Définition. Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Le $(n+1)$*-ième invariant de Postnikov* ou *k-invariant*, noté $k^{n+1}(X)$, est la classe de cohomologie,

$$j^* \circ \rho^{-1}\left(\kappa^{n+1}(X)\right) \in \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], \pi_n(X)),$$

où $\kappa^{n+1}(X) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]), \pi_n(X))$ est l'isomorphisme de la Proposition 6.2.2, $\rho : \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n(X)) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]), \pi_n(X))$ l'isomorphisme des coefficients universels en cohomologie de dimension $n+1$ et $j^* : \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n(X)) \to \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X))$ induit par l'inclusion $j : X[n-1] \to (X[n-1], X[n])$.

6.2.4 Théorème (de classification d'Eilenberg)**.** *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$ un entier et $\iota^{n+1} \in \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1); \pi_n(X))$ la classe caractéristique de l'espace d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1)$. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & [X[n-1], \mathrm{K}(\pi_n(X), n+1)] & \longrightarrow & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X)) \\ & [f] & \longmapsto & f^*\left(\iota^{n+1}\right), \end{array}$$

avec $f^* : \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1); \pi_n(X)) \to \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X))$, est une bijection.

Démonstration. cf. [**?**, Chap V, Theorem 6.17, p.243]. □

Remarque. Pour parler de la classe caractéristique $\iota^{n+1} \in \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1); \pi_n(X))$ il faut identifier $\pi_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1))$ à $\pi_n(X)$ via un isomorphisme ω. C'est bien évidemment le même isomorphisme ω qu'on utilise pour identifier les groupes des coefficients en cohomologie, en d'autres termes, ω_* est utilisé pour identifier $\mathrm{H}^{n+1}(X[n-1];\pi_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X),n+1))$ à $\mathrm{H}^{n+1}(X[n-1];\pi_n(X))$. Le Théorème reste vrai quel que soit le choix de ω, bien évidemment. Néanmoins, on convient souvent sans le dire d'identifier à l'aide de l'isomorphisme du Corollaire 5.2.4, ce qu'on fait ici.

6.2.5 Définition. Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$ un entier et $k^{n+1}(X)$ le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X. Un $(n+1)$*-ième invariant homotopique* de X, noté $l^{n+1}(X) : X[n-1] \to \mathrm{K}(\pi_n(X), n+1)$, est un représentant de la classe d'homotopie $\Phi^{-1}(k^{n+1}(X))$ où Φ est la bijection du Théorème de classification d'Eilenberg.

6.2.6 Proposition. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$ un entier, $\iota^{n+1} \in \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1);\pi_n(X))$ la classe caractéristique de l'espace d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1)$, $k^{n+1}(X)$ le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X et $l^{n+1}(X)$ un $(n+1)$-ième invariant homotopique de X. On a la relation suivante,*

$$k^{n+1}(X) = l^{n+1}(X)^*\,(\iota^{n+1}),$$

avec $l^{n+1}(X)^* : \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1);\pi_n(X)) \to \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1];\pi_n(X))$.

Démonstration. Par définition de $l^{n+1}(X)$ on a $[l^{n+1}(X)] = \Phi^{-1}(k^{n+1}(X))$ et par définition de Φ on a $\Phi([l^{n+1}(X)]) = l^{n+1}(X)^*\,(\iota^{n+1})$, de sorte que $l^{n+1}(X)^*\,(\iota^{n+1}) = \Phi\circ\Phi^{-1}\,(k^{n+1}(X)) = k^{n+1}(X)$. $\square$

6.2.7 Définition. Soit X un CW-complexe connexe simple. Le *système de Postnikov* de X, noté $\mathcal{P}(X)$, est l'ensemble $\{(\pi_n(X), X[n-1], k^{n+1}(X), \gamma_{n-1}) \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2\}$.

6.3 Relation entre deux sections de Postnikov consécutives

6.3.1 Lemme. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. La n-ième section de Postnikov de X, $X[n]$, à même type d'homotopie que la fibre homotopique de n'importe quel $(n+1)$-ième invariant homotopique de X.*

Démonstration. Soient $k^{n+1}(X)$ le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov, $l^{n+1}(X)$ un $(n+1)$-ième invariant homotopique, F sa fibre homotopique et ι^{n+1} la classe caractéristique de $\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1)$. Considérons le diagramme commutatif à homotopie près suivant,

$$\begin{tikzcd} X[n] \arrow[r, "\gamma_{n-1}"] \arrow[dr, "*"'] & X[n-1] \arrow[d, "j"] \\ & (X[n-1], X[n]). \end{tikzcd}$$

En cohomologie, il induit le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^{n+1}(X[n];\pi_n(X)) & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1];\pi_n(X)) \arrow[l, "\gamma_{n-1}^*"'] \\ & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], X[n];\pi_n(X)). \arrow[ul, "0"] \arrow[u, "j^*"'] \end{tikzcd}$$

Ainsi $\gamma_{n-1}^* \circ l^{n+1}(X)^*(\iota^{n+1}) = \gamma_{n-1}^*(k^{n+1}(X)) = \gamma_{n-1}^* \circ j^* \circ \rho^{-1}(\kappa^{n+1}(X)) = 0$. Il s'ensuit que $l^{n+1}(X) \circ \gamma_{n-1}$ est nullhomotope. Ainsi, d'après le Lemme 2.1.3, il existe une application $X[n] \to F$ dont on vérifie facilement (sauf en dimension n) qu'elle est une équivalence d'homotopie faible et qui fait commuter le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, hook] \\ X[n] \arrow[ur] \arrow[r, "\gamma_{n-1}"'] & X[n-1]. \end{tikzcd}$$

□

6.3.2 Théorème. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$ un entier et $l^{n+1}(X)$ un $(n+1)$-ième invariant homotopique de X. Le diagramme suivant est un pullback à homotopie près,*

$$\begin{tikzcd} X[n] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & P\,\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1) \simeq * \arrow[d, "q"] \\ X[n-1] \arrow[r, "l^{n+1}(X)"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n+1), \end{tikzcd}$$

où γ_{n-1} est la section de Postnikov et $q : \omega \mapsto \omega(1)$.

Démonstration. On a le diagramme des fibrations induit par l'invariant homotopique $l^{n+1}(X)$ suivant,

$$\begin{tikzcd} T^{l^{n+1}(X)} \arrow[r] \arrow[d] & P\,\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1) \simeq * \arrow[d, "q"] \\ X[n-1] \arrow[r, "l^{n+1}(X)"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n+1). \end{tikzcd}$$

D'après le Lemme, on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd} & T^{l^{n+1}(X)} \arrow[d, hook] \\ X[n] \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[r, "\gamma_{n-1}"'] & X[n-1], \end{tikzcd}$$

d'où le résultat. □

Remarque. L'existence d'un tel diagramme pour un entier $n \geqslant 2$ donné implique que si $X[n-1]$ et $\pi_n(X)$ sont connus alors la n-ième section de Postnikov est classifiée par le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov. On nomme **diagramme de Postnikov** le diagramme des fibrations suivant,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}(\pi_n(X), n) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n) \arrow[d] \\ X[n] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & * \arrow[d, "q"] \\ X[n-1] \arrow[r, "l^{n+1}(X)"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n+1). \end{tikzcd}$$

6.3.3 Corollaire. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov est trivial si et seulement si $X[n]$ et $X[n-1] \times \mathrm{K}(\pi_n(X), n)$ ont même type d'homotopie.*

Démonstration. L'invariant de Postnikov est trivial si et seulement si tout invariant homotopique est nullhomotope *i.e.* le pullback de la fibre homotopique donne,

$$\begin{tikzcd}
T^* \arrow[r] \arrow[d] & P\,\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1) \arrow[d] \\
X[n-1] \arrow[r, "*"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n+1),
\end{tikzcd}$$

en d'autres termes, on a

$$\begin{aligned}
X[n] \simeq T^* &= \{(x, \omega) \in X[n-1] \times P\,\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1) \,|\, \omega(0) = \omega(1) = *\} \\
&= X[n-1] \times \Omega\,\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1) \\
&\simeq X[n-1] \times \mathrm{K}(\pi_n(X), n).
\end{aligned}$$

□

6.4 Reconstruction

Remarque. Si X est un CW-complexe connexe simple, on a vu que la n-ième section de Postnikov est classifiée (à homotopie près) par le n-ième groupe d'homotopie $\pi_n(X)$, la $(n-1)$-ième section de Postnikov et le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov, *i.e.* un élément du système de Postnikov $\mathcal{P}(X)$. En d'autres termes, il est possible de construire toutes les sections de Postnikov connaissant tous les groupes d'homotopie, la première section de Postnikov et tous les invariants de Postnikov : on construit successivement les pullback suivants,

$$\begin{tikzcd}
X[n] \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & * \arrow[d] \\
X[n-1] \arrow[r, "l^{n+1}(X)"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n+1),
\end{tikzcd}$$

pour tout entier $n \geqslant 2$. Ainsi, si on considère la limite projective de toutes ces sections de Postnikov, on obtient un nouvel espace $\widehat{X}$. En fait, X et $\widehat{X}$ ont même type d'homotopie faible, mais $\widehat{X}$ n'est malheureusement pas forcément un CW-complexe, de sorte qu'on ne peut pas affirmer qu'ils ont même type d'homotopie (*cf.* [**?**, Chap. IX, §4, pp.430-437]). Il reste néanmoins le cas intéressant où X est n-anticonnexe pour un certain entier n.

6.4.1 Proposition. *Soit X un CW-complexe connexe simple n-anticonnexe pour un certain entier n, dont on ne connait que les groupes d'homotopie, la première section de Postnikov et les invariants de Postnikov. On peut reconstruire X à homotopie près.* □

Exemple. Soit X un CW-complexe connexe qui n'admet que deux groupes d'homotopie non triviaux, à savoir $\pi_n(X) = G$ et $\pi_m(X) = H$, $m > n > 1$ des entiers. Comme le groupe fondamental est trivial, X est simple, et le seul invariant de Postnikov de X non trivial est $k^{m+1}(X) \in \mathrm{H}^{m+1}(\mathrm{K}(G,n); H)$. On a donc le diagramme de Postnikov suivant,

$$\begin{tikzcd}
X = X[m] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{m-1}"'] & * \arrow[d] \\
\mathrm{K}(G,n) \arrow[r, "l^{m+1}(X)"'] & \mathrm{K}(H, m+1).
\end{tikzcd}$$

Il en résulte que X est classifié à homotopie près par $k^{m+1}(X) \in \mathrm{H}^{m+1}(\mathrm{K}(G,n); H)$. Par exemple, si $m = n+1$, alors $k^{n+2}(X)$ est une classe de cohomologie dans $\mathrm{H}^{n+2}(\mathrm{K}(G,n); H)$, or ce groupe est isomorphe à $\mathrm{Hom}(G \otimes \mathbb{Z}/2, H)$ lorsque $n \geqslant 3$ (*cf.* [**?**, Chapitre II, introduction]). Si on choisit $G = H = \mathbb{Z}/2$, alors ce groupe est cyclique d'ordre 2, ce qui signifie qu'il existe exactement deux CW-complexes connexes dont les seuls groupes d'homotopie non triviaux sont $\pi_n(X) = \pi_{n+1}(X) = \mathbb{Z}/2$.

Troisième partie
Décomposition des invariants de Postnikov

Il est bien connu (*cf.* Théorème 7.1.1) que le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov est trivial si et seulement si l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n est une injection scindée. Le présent travail a été motivé par les questions suivantes : a-t-on une condition nécessaire, en termes d'invariant de Postnikov, pour que l'homomorphisme d'Hurewicz soit une injection (non nécessairement scindée), auquel cas, la condition trouvée est-elle suffisante ? On verra qu'on peut répondre par l'affirmative à ces deux questions en décomposant l'invariant de Postnikov en deux parties, Hom et Ext, à l'aide du Théorème des coefficients universel en cohomologie. Mieux, on caractérise le noyau de l'homomorphisme d'Hurewicz grâce à la partie Hom de l'invariant de Postnikov. L'étape suivante consiste à détecter un inverse à gauche du monomorphisme d'Hurewicz *dans* la partie Ext de l'invariant de Postnikov. On verra que cela s'avère possible en caractérisant une classe d'extension d'un groupe d'homologie de l'espace grâce à cette partie Ext.

Les liens ainsi établis avec l'homomorphisme d'Hurewicz permettent de donner des démonstrations courtes de théorèmes connus, comme le Théorème d'Arkowitz et Curjel (moyennant un résultat de Milnor et Moore). On obtient également de petits résultats rencontrés nulle part dans la littérature, par exemple une condition nécessaire, en termes de torsion du groupe d'homotopie et d'ordre de la partie Hom de l'invariant de Postnikov, pour que l'homomorphisme d'Hurewicz soit une injection.

En résumé, l'homomorphisme d'Hurewicz entretient des liens étroits avec une décomposition particulière d'un invariant de Postnikov, ce qu'on expose dans cette dernière partie.

7 Liens avec l'homomorphisme d'Hurewicz

7.1 Quelques résultats connus

Le point de départ de ce travail est le résultat suivant,

7.1.1 Théorème. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes,*
(ii) l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ est une injection scindée, i.e. possède un inverse à gauche,
(i) le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov, $k^{n+1}(X)$, est trivial.

Démonstration. Supposons l'invariant de Postnikov trivial. Considérons le Corollaire 6.3.3 et la composée suivante,

$$\varphi_n : X \xrightarrow{\alpha_n} X[n] \simeq X[n-1] \times \mathrm{K}(\pi_n(X), n) \xrightarrow{p_2} \mathrm{K}(\pi_n(X), n),$$

où α_n est la n-ième section de Postnikov de X et p_2 la projection sur le deuxième facteur, et qui induit un isomorphisme en homotopie. Par naturalité de l'homomorphisme d'Hurewicz, on obtient le carré commutatif,

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X) \arrow[r, "\cong", "(\varphi_n)_*"'] \arrow[d, "h_n"'] & \pi_n(\mathrm{K}(\pi_n(X), n)) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{H}_n(X) \arrow[r, "(\varphi_n)_*"'] & \mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\pi_n(X), n)),
\end{tikzcd}$$

de sorte qu'il existe une application $\mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\pi_n(X), n)) \cong \pi_n(X)$ qui est un inverse à gauche de h_n.

Réciproquement, soit φ un inverse à gauche de h_n. Par définition de l'invariant de Postnikov, on a $k^{n+1}(X) = j^* \circ \rho^{-1}(\kappa^{n+1})$ avec $\kappa^{n+1} = (\alpha_n)_*^{-1} \circ \partial \circ h_{n+1}^{-1}$ (*cf.* Définition 6.2.3). En d'autres termes, on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(X[n-1], X[n]) \arrow[r, "\partial", "\cong"'] \arrow[d, "h_{n+1}"', "\cong"] & \pi_n(X[n]) \arrow[r, "(\alpha_n)_*^{-1}", "\cong"'] & \pi_n(X) \arrow[d, "h_n"] \\
\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]) \arrow[r, "\partial"'] \arrow[urr, "\kappa^{n+1}", "\cong"'] & \mathrm{H}_n(X[n]) \arrow[r, "\cong", "(\alpha_n)_*^{-1}"'] & \mathrm{H}_n(X).
\end{tikzcd}$$

Ceci implique que $\kappa^{n+1} = \varphi \circ h_n \circ \kappa^{n+1} = \varphi \circ (\alpha_n)_*^{-1} \circ \partial$.

Considérons maintenant la suite exacte longue de la paire $(X[n-1], X[n])$ en cohomologie,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n(X[n]; \pi_n(X)) \arrow[r, "\widetilde{\partial}"] \arrow[d, shift right, "\rho"'] & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n(X)) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\rho"', "\cong"] & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X)) \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X[n]), \pi_n(X)) \arrow[r, "\partial^*"'] \arrow[u, shift right, "\sigma"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]), \pi_n(X)). &
\end{tikzcd}$$

Finalement on a,

$$\begin{aligned}
k^{n+1}(X) &= j^* \circ \rho^{-1}(\kappa^{n+1}) && \text{par définition de } k^{n+1}(X), \\
&= j^* \circ \rho^{-1}(\varphi \circ (\alpha_n)_*^{-1} \circ \partial) && \text{par ce qui précède,} \\
&= j^* \circ \rho^{-1} \circ \partial^*(\varphi \circ (\alpha_n)_*^{-1}) && \\
&= j^* \circ \widetilde{\partial} \circ \sigma(\varphi \circ (\alpha_n)_*^{-1}) && \text{par commutativité,} \\
&= 0 && \text{par exactitude.}
\end{aligned}$$

□

Remarque. Ce Théorème et le Corollaire 6.3.3 permettent de complèter le Théorème de Moore en termes d'invariants de Postnikov.

7.1.2 Corollaire. *Soit X un CW-complexe connexe simple. Les assertions suivantes sont équivalentes,*
(i) X a le type d'homotopie d'un produit faible d'espaces d'Eilenberg-MacLane,
(ii) pour tout entier $n \geqslant 1$, l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ possède un inverse à gauche $\varphi_n : \mathrm{H}_n(X) \to \pi_n(X)$, i.e. $\varphi_n \circ h_n = \mathrm{id}_{\pi_n(X)}$,

(iii) les invariants de Postnikov de X sont triviaux i.e. $k^{n+1}(X) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

□

Si l'homomorphisme d'Hurewicz possède un inverse à gauche alors c'est une injection scindée. Que se passe-t-il, en termes d'invariants de Postnikov, si l'homomorphisme d'Hurewicz est supposé seulement injectif ? Répondre à cette question constitue le sujet de ce travail de diplôme.

Remarque. La démonstration du Théorème peut être améliorée et fournir un résultat intéressant dans le cas où l'invariant de Postnikov est d'ordre fini comme élément du groupe de cohomologie $\mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X))$.

7.1.3 Théorème (D. Arlettaz, [**?**]). *Soit X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$, $\varrho \geqslant 1$ des entiers. Les assertions suivantes sont équivalentes,*

(i) le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X, $k^{n+1}(X)$, est d'ordre fini ϱ dans $\mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X))$, i.e. $\varrho k^{n+1}(X) = 0$,

(ii) il existe une application $f_n : X \to \mathrm{K}(\pi_n(X), n)$ telle que $\pi_n(f_n)$ soit la multiplication par ϱ,

(iii) il existe un homomorphisme $\varphi_n : \mathrm{H}_n(X) \to \pi_n(X)$ tel que la composée

$$\pi_n(X) \xrightarrow{h_n} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{\varphi_n} \pi_n(X)$$

avec l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n soit la multiplication par ϱ.

Démonstration. (i) ⇒ (ii) : Considérons le diagramme de Postnikov,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}(\pi_n(X), n) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n) \arrow[r, "\mathrm{K}((\varrho\cdot), n)"] \arrow[d, "g_n"] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n) \arrow[d] \\
X[n] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] \arrow[urr, dotted] & * \arrow[r] \arrow[d, "q"] & * \arrow[d] \\
X[n-1] \arrow[r, "l^{n+1}(X)"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n+1) \arrow[r, "\mathrm{K}((\varrho\cdot), n+1)"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n+1),
\end{tikzcd}$$

avec $\mathrm{K}((\varrho\cdot), n)$ et $\mathrm{K}((\varrho\cdot), n+1)$ induites par la multiplication par ϱ. Comme $l^{n+1}(X) \circ \gamma_{n-1}$ est nullhomotope, d'après le Lemme 2.1.3, il existe une application $g_n : X[n] \to \mathrm{K}(\pi_n(X), n)$ qui fait commuter le diagramme à homotopie près. Il suffit alors de poser $f_n = g_n \circ \alpha_n$, avec α_n la n-ième section de Postnikov de X, et éventuellement composer avec une self-équivalence d'homotopie (*cf.* [**?**, Lemma 4]).

(ii) ⇒ (iii) : Par naturalité de l'homomorphisme d'Hurewicz on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X) \arrow[r, "(f_n)_*", "(\varrho\cdot)"'] \arrow[d, "h_n"'] & \pi_n(\mathrm{K}(\pi_n(X), n)) \cong \pi_n(X) \arrow[d, "h_n", "\cong"'] \\
\mathrm{H}_n(X) \arrow[r, "(f_n)_*"'] & \mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\pi_n(X), n)) \cong \pi_n(X).
\end{tikzcd}$$

Ainsi il existe $\varphi_n : \mathrm{H}_n(X) \to \pi_n(X)$ tel que la composée $\varphi_n \circ h_n$ soit la multiplication par ϱ.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Par définition de l'invariant de Postnikov, on a le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(X[n-1],X[n]) \arrow[r, "\partial", "\cong"'] \arrow[d, "h_{n+1}"', "\cong"] & \pi_n(X[n]) \arrow[r, "(\alpha_n)_*^{-1}", "\cong"'] & \pi_n(X) \arrow[d, "h_n"] \\
\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1],X[n]) \arrow[r, "\partial"'] \arrow[urr, "\kappa^{n+1}", "\cong"'] & \mathrm{H}_n(X[n]) \arrow[r, "\cong", "(\alpha_n)_*^{-1}"'] & \mathrm{H}_n(X).
\end{tikzcd}$$

Ceci implique que $\varrho\kappa^{n+1} = \varphi_n \circ h_n \circ \kappa^{n+1} = \varphi_n \circ (\alpha_n)_*^{-1} \circ \partial$.

Considérons maintenant la suite exacte longue de la paire $(X[n-1], X[n])$ en cohomologie,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^n(X[n];\pi_n(X)) \arrow[r, "\widetilde{\partial}"] \arrow[d, shift right, "\rho"'] & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1],X[n];\pi_n(X)) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\rho"', "\cong"] & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1];\pi_n(X)) \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X[n]),\pi_n(X)) \arrow[r, "\partial^*"'] \arrow[u, shift right, "\sigma"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1],X[n]),\pi_n(X)). &
\end{tikzcd}$$

Finalement on a,

$$\begin{aligned}
\varrho k^{n+1}(X) &= j^* \circ \rho^{-1}\left(\varrho\kappa^{n+1}\right) && \text{par définition de } k^{n+1}(X),\\
&= j^* \circ \rho^{-1}\left(\varphi \circ (\alpha_n)_*^{-1} \circ \partial\right) && \text{par ce qui précède,}\\
&= j^* \circ \rho^{-1} \circ \partial^*\left(\varphi \circ (\alpha_n)_*^{-1}\right) && \\
&= j^* \circ \widetilde{\partial} \circ \sigma\left(\varphi \circ (\alpha_n)_*^{-1}\right) && \text{par commutativité,}\\
&= 0 && \text{par exactitude.}
\end{aligned}$$

$\square$

7.2 Décomposition Hom-Ext d'une classe de cohomologie

Soient X un CW-complexe et G un groupe abélien. Le Théorème des coefficients universels en cohomologie de dimension n fournit la suite exacte courte scindée (non naturellement) suivante,

$$\mathrm{Ext}(H_{n-1}(X),G) \xrightarrow{\mu} \mathrm{H}^n(X;G) \underset{\sigma}{\overset{\rho}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X),G).$$

On a donc $\mathrm{H}^n(X;G) \cong \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X),G) \oplus \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X),G)$, en d'autres termes, toute classe de cohomologie $u \in \mathrm{H}^n(X;G)$ possède une composante Ext, notée $u_\ddagger$, et une composante Hom, notée $u_\bullet$. En fait, on a les relations suivantes,

$$u_\bullet = \rho(u) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X),G),$$

$$u_\ddagger = \mu^{-1}(u - \sigma \circ \rho(u)) \in \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{n-1}(X),G).$$

Malheureusement, on ne peut guère travailler avec la composante $u_\ddagger$, et ceci s'explique par la non naturalité de la section σ. On définit donc une autre classe d'extension, $u_\dagger$, en procédant comme suit : considérons l'homomorphisme $u_\bullet$, la surjection canonique $\eta : G \to \operatorname{coker} u_\bullet$ induit le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{H}^n(X;G) \arrow[r, two heads, "\rho"] \arrow[d, "\eta_*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X),G) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\eta)"] \\ \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{n-1}(X),\operatorname{coker} u_\bullet) \arrow[r, tail] & \mathrm{H}^n(X;\operatorname{coker} u_\bullet) \arrow[r, two heads, "\rho"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X),\operatorname{coker} u_\bullet), \end{tikzcd}$$

et $\rho \circ \eta_*(u) = \mathrm{Hom}(\mathrm{id},\eta) \circ \rho\,(u) = \eta \circ u_\bullet = 0$, ainsi, par exactitude, on pose $u_\dagger = \mu^{-1} \circ \eta_*\,(u)$. Remarquons que si $u_\bullet$ est trivial, alors $u_\dagger = u_\ddagger$.

7.2.1 Définition. Soient X un espace topologique, G un groupe abélien et $n \geqslant 1$ un entier. Une classe de cohomologie $u \in \mathrm{H}^n(X;G)$ se décompose en une *paire* Hom-Ext, $(u_\bullet, u_\dagger)$, avec $u_\bullet \in \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(X),G)$ et $u_\dagger \in \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{n-1}(X),\operatorname{coker} u_\bullet)$ définis comme ci-dessus.

Le but du présent chapitre est d'appliquer cette décomposition aux invariants de Postnikov et d'étudier la signification des parties Hom et Ext ainsi obtenues.

7.3 L'injectivité de l'homomorphisme d'Hurewicz

7.3.1 Lemme. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes,*
(i) l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ est injectif,
(ii) l'homomorphisme $(l^{n+1}(X))_* : \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \to \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1))$ induit par un $(n+1)$-ième invariant homotopique de X, $l^{n+1}(X)$, est trivial.

Démonstration. Considérons le diagramme de Postnikov,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}(\pi_n(X),n) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "i_n"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X),n) \arrow[d] \\ X[n] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & * \arrow[d, "q"] \\ X[n-1] \arrow[r, "l^{n+1}(X)"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X),n+1). \end{tikzcd}$$

Les fibres $\mathrm{K}(\pi_n(X),n)$ étant $(n-1)$-connexes, la suite spectrale de Serre (*cf.* Annexes) donne le diagramme commutatif formé de lignes exactes suivant,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}_{n+1}(X[n]) \arrow[r, "(\gamma_{n-1})_*"] \arrow[d] & \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "l^{n+1}(X)_*"] & \mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\pi_n(X),n)) \arrow[r, "(i_n)_*"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{H}_n(X[n]) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X),n+1)) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\pi_n(X),n)) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Ainsi $l^{n+1}(X)_* = 0$ si et seulement si $\partial = 0$ *i.e.* $\ker(i_n)_* = 0$ *i.e.* $(i_n)_*$ est injectif.

Par naturalité de l'homomorphisme d'Hurewicz, on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(\mathrm{K}(\pi_n(X),n)) \arrow[r, "(i_n)_\#", "\cong"'] \arrow[d, "h_n", "\cong"'] & \pi_n(X[n]) \arrow[d, "h_n"] & \pi_n(X) \arrow[l, "(\alpha_n)_\#"', "\cong"] \arrow[d, "h_n"] \\
\mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\pi_n(X),n)) \arrow[r, "(i_n)_*"] & \mathrm{H}_n(X[n]) & \mathrm{H}_n(X) \arrow[l, "(\alpha_n)_*"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

de sorte que $(i_n)_*$ est injectif si et seulement si $h_n : \pi_n(X[n]) \to \mathrm{H}_n(X[n])$ est injectif *i.e.* $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ est injectif. □

Démonstration 2 (D. Arlettaz). Considérons le diagramme de Postnikov suivant,

$$\begin{tikzcd}
X[n] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & * \arrow[d] \\
X[n-1] \arrow[r, "l^{n+1}(X)"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X),n+1),
\end{tikzcd}$$

avec $l^{n+1}(X)$ un $(n+1)$-invariant homotopique de X. On a donc (dans $\mathbf{h}\mathfrak{Top}^2$) une application de paires $l : (X[n-1], X[n]) \to (\mathrm{K}(\pi_n(X),n+1),*)$ qui fait commuter le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
X[n-1] \arrow[r, "j"] \arrow[d, "l^{n+1}(X)"'] & (X[n-1], X[n]) \arrow[d, "l"] \\
\mathrm{K}(\pi_n(X),n+1) \arrow[r] & (\mathrm{K}(\pi_n(X),n+1),*),
\end{tikzcd}$$

avec les applications horizontales les inclusions dans les paires. Le Théorème d'Hurewicz relatif implique que $l_* : \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]) \to \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X),n+1),*)$ est un isomorphisme. On a donc le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_{n+1}(X[n]) \arrow[r] & \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "l^{n+1}(X)_*"'] & \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "l_*", "\cong"'] & \mathrm{H}_n(X[n]) \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X),n+1)) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X),n+1),*) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ainsi ∂ est injectif si et seulement si j_* est trivial *i.e.* $l^{n+1}(X)_*$ est trivial. On conclut en remarquant que le diagramme suivant commute par définition de l'homomorphisme d'Hurewicz,

$$\begin{tikzcd}
\pi_{n+1}(X[n-1], X[n]) \arrow[r, "\partial", "\cong"'] \arrow[d, "h_n"', "\cong"] & \pi_n(X[n]) \arrow[d, "h_n"] \\
\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]) \arrow[r, "\partial"'] & \mathrm{H}_{n+1}(X[n]).
\end{tikzcd}$$

□

Ce Théorème est le résultat principal, la réponse au problème posé. On a une caractérisation de l'injectivité de l'homomorphisme d'Hurewicz en termes d'invariant de Postnikov.

7.3.2 Théorème. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes,*

(i) l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ est injectif,
(ii) la partie Hom *du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov, $k^{n+1}(X)_\bullet$, est triviale, i.e. $k^{n+1}(X)_\bullet = 0$.*

Démonstration. Par naturalité du Théorème des coefficients universels, on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1); \pi_n(X)) \arrow[r, "\rho", "\cong"'] \arrow[d, "l^{n+1}(X)^*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n X, n+1)), \pi_n(X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(l^{n+1}(X)_*, \mathrm{id})"] \\
\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \pi_n(X)) \arrow[r] & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X)) \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]), \pi_n(X)).
\end{tikzcd}$$

On a $k^{n+1}(X)_\bullet = \rho(k^{n+1}(X)) = \rho \circ l^{n+1}(X)^* (\iota^{n+1})$ par la Proposition 6.2.6, avec ι^{n+1} la classe caractéristique de l'espace d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1)$. Ainsi, par commutativité, on a $k^{n+1}(X)_\bullet = 0$ si et seulement si $\mathrm{Hom}(l^{n+1}(X)_*, \mathrm{id}) \circ \rho\,(\iota^{n+1}) = 0$ *i.e.* si et seulement si $\mathrm{Hom}(l^{n+1}(X)_*, \mathrm{id})\,(h_{n+1}^{-1}) = 0$ avec h_{n+1}^{-1} l'inverse de l'isomorphisme d'Hurewicz $h_{n+1} : \pi_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1)) \to \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1)) \cong \pi_n(X)$ *i.e.* si et seulement si $l^{n+1}(X)_* = 0$. On conclut à l'aide du Lemme. □

7.4 Quelques exemples non banals

Exemple. Considérons la sphère S^6. Un résultat connu mais non banal affirme que $\pi_{10}(S^6) \cong 0$ (*cf.* [**?**, p.394]), ainsi l'homomorphisme d'Hurewicz h_{10} est une injection scindée et $k^{11}(S^6) = 0$.

Exemple. Considérons la sphère S^2. Un résultat bien connu affirme que $\pi_2(S^2) \cong \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Ainsi $h_3 : \pi_3(S^2)\,(\cong \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_3(S^2)\,(\cong 0)$ n'est pas injectif et $k^4(S^2)_\bullet \neq 0$. Remarquons que $k^4(S^2) \in \mathrm{H}^4(\mathrm{K}(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z})$. On peut montrer (*cf.* [**?**, pp.437-438]) que $k^4(S^2) = \pm b_2^2 \neq 0$ avec $b_2 = \iota^2(\mathrm{K}(\mathbb{Z}, 2))$ la classe caractéristique de l'espace d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\mathbb{Z}, 2)$.

Afin de présenter un exemple d'invariant de Postnikov non trivial possédant une partie Hom triviale, on énonce les Définitions et Théorèmes ci-dessous.

7.4.1 Définition. Soit $GL(n, \mathbb{C})$ le groupe des matrices complexes $n \times n$ de déterminant non nul muni de la topologie induite par celle usuelle de $\mathbb{R}^{2n^2}$. On définit le *groupe des matrices unitaires* $n \times n$, $U(n)$, comme sous-groupe topologique des matrices $A \in GL(n, \mathbb{C})$ qui vérifient $A\bar{A}^t = 1$, où $\bar{A}^t$ est la matrice conjuguée complexe transposée de A. On définit le *groupe unitaire*, U, comme limite inductive des groupes $U(n)$.

Soit BU l'espace classifiant du groupe unitaire muni de la topologie définie ci-dessus et non de la topologie discrète (*cf.* [**?**]). A noter que cette construction ne fournit pas en général un espace d'Eilenberg-MacLane comme on en a l'habitude dans le cas discret.

7.4.2 Théorème. *Le groupe $\mathrm{H}_*(BU) = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathrm{H}_n(BU)$ est muni d'une structure de $\mathbb{Z}$-algèbre graduée (avec le produit de Pontrjagin). On a*

$$\mathrm{H}_*(BU) \cong \mathbb{Z}[y_1, y_2, y_3, \dots],$$

avec les monômes y_i de degré $2i$, $i \geqslant 1$.

Démonstration. cf. [**?**, Theorem 16.17, pp.384-385, Lemma 16.36, pp.398-399]. □

EXEMPLE. Calculons le groupe $\mathrm{H}_4(BU)$. C'est le groupe libre-abélien engendré par tous les monômes de degré égal à 4, *i.e.* y_1^2 et y_2. Ainsi $\mathrm{H}_4(BU) \cong \mathrm{FA}(\{y_1^2, y_2\})$. Calculons le groupe $\mathrm{H}_6(BU)$. C'est le groupe libre-abélien engendré par tous les monômes de degré égal à 6, *i.e.* y_1^3, y_1y_2 et y_3. Ainsi $\mathrm{H}_6(BU) \cong \mathrm{FA}(\{y_1^3, y_1y_2, y_3\})$. Calculons le groupe $\mathrm{H}_{2n+1}(BU)$ pour $n \geqslant 0$ un entier. C'est le groupe libre-abélien engendré par tous les monôme de degré $2n+1$, or ce degré est impair et tous les y_i sont de degré pair. Ainsi $\mathrm{H}_{2n+1}(BU) \cong 0$.

7.4.3 Théorème.

$$\pi_n(BU) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } n \geqslant 1 \text{ est impair,} \\ \mathbb{Z} & \text{si } n \geqslant 0 \text{ est pair.} \end{cases}$$

Démonstration. cf. [**?**, Theorem (Bott), p.215]. □

REMARQUE. L'homomorphisme d'Hurewicz $h_i : \pi_i(BU) \to \mathrm{H}_i(BU)$ n'est intéressant qu'en dimension i paire puisque en dimension i impaire on a $\pi_i(BU) \cong 0$ et $\mathrm{H}_i(BU) \cong 0$ (*cf.* Exemple ci-dessus).

7.4.4 Théorème. *L'homomorphisme d'Hurewicz $h_{2n} : \pi_{2n}(BU) \to \mathrm{H}_{2n}(BU)$, $n \geqslant 1$ un entier, est donné par*

$$\begin{array}{rccc} h_{2n} : & \pi_{2n}(BU) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{2n}(BU) \\ & e & \longmapsto & \pm(n-1)!\, p_n, \end{array}$$

avec e un générateur de $\pi_{2n}(BU) \cong \mathbb{Z}$ et $(p_1, p_2, p_3, \dots)$ une base du module $P_*(BU)$ des éléments primitifs du groupe $H_*(BU)$.

Démonstration. cf. [**?**, Théorème 6, p.14]. □

EXEMPLE. Considérons l'homomorphisme d'Hurewicz $h_4 : \pi_4(BU) \to \mathrm{H}_4(BU)$. On a calculé que $\mathrm{H}_4(BU)$ est un groupe libre-abélien de rang 2, de sorte que les éléments primitifs p_1 et p_2 l'engendrent. Ainsi on a

$$\begin{array}{rccc} h_4 : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ & 1 & \longmapsto & (0, \pm(2-1)!) = (0, \pm 1). \end{array}$$

L'homomorphisme d'Hurewicz h_4 est donc une injection scindée. Il s'ensuit que $0 = k^5(BU) \in \mathrm{H}^5(BU[3]; \mathbb{Z})$.

7.4.5 Théorème (Künneth)**.** *Soient X et Y des espaces topologiques et $n \geqslant 1$ un entier. On a*

$$\mathrm{H}_n(X \times Y) = \bigoplus_{i+j=n} (\mathrm{H}_i(X) \otimes \mathrm{H}_j(Y)) \oplus \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}(\mathrm{H}_p(X), \mathrm{H}_q(X)).$$

Démonstration. cf. [**?**]. □

7.4.6 Proposition.

(i) $\mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ 0 & \textit{si } n \textit{ est impair.} \end{cases}$

(ii) $\mathrm{H}_5(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \cong 0$.

(iii) $\mathrm{H}_6(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \cong \mathbb{Z}/2$.

(iv) $\mathrm{H}_7(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \cong 0$.

Démonstration. cf. [**?**, pp.29-44]. □

Calculons le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^7(BU[5];\pi_6(BU)) \cong \mathrm{H}^7(BU[5];\mathbb{Z})$. On a $BU[5] \simeq BU[4]$ puisque $\pi_5(BU) \cong 0$. Or $k^5(BU) = 0$ (*cf.* Exemple ci-dessus). Ainsi $BU[5] = \mathrm{K}(\mathbb{Z},2) \times \mathrm{K}(\mathbb{Z},4)$. Il s'ensuit, par le Théorème des coefficients universels, que $H^7(BU[5];\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_7(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2) \times \mathrm{K}(\mathbb{Z},4)),\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_6(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2) \times \mathrm{K}(\mathbb{Z},4)),\mathbb{Z})$. Appliquons le Théorème de Künneth.
D'une part on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_7(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2) \times \mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \cong\ & \mathrm{H}_7(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)) \otimes \mathrm{H}_0(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \oplus \\
& \mathrm{H}_3(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)) \otimes \mathrm{H}_4(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \oplus \\
& \mathrm{H}_2(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)) \otimes \mathrm{H}_5(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \oplus \\
& \mathrm{H}_0(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)) \otimes \mathrm{H}_7(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \oplus \\
& \mathrm{Tor}(\mathrm{H}_6(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)),\mathrm{H}_0(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4))) \oplus \\
& \mathrm{Tor}(\mathrm{H}_2(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)),\mathrm{H}_4(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4))) \oplus \\
& \mathrm{Tor}(\mathrm{H}_0(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)),\mathrm{H}_6(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4))) \\
\cong\ & 0 \oplus && \text{par la Proposition 7.4.6 (i)} \\
& 0 \oplus && \text{par la Proposition 7.4.6 (i)} \\
& 0 \oplus && \text{par la Proposition 7.4.6 (ii)} \\
& 0 \oplus && \text{par la Proposition 7.4.6 (iv)} \\
& 0 \oplus && \text{par la Proposition 7.4.6 (i)} \\
& \mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \oplus \\
& \mathrm{Tor}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2) && \text{par la Proposition 7.4.6 (iii)} \\
\cong\ & 0 && \text{puisque } \mathbb{Z} \text{ est libre.}
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_6(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2) \times \mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \cong\ & \mathrm{H}_6(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)) \otimes \mathrm{H}_0(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \oplus \\
& \mathrm{H}_2(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)) \otimes \mathrm{H}_4(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \oplus \\
& \mathrm{H}_0(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)) \otimes \mathrm{H}_6(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4)) \oplus \\
& \mathrm{Tor}(\mathrm{H}_5(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)),\mathrm{H}_0(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4))) \oplus \\
& \mathrm{Tor}(\mathrm{H}_0(\mathrm{K}(\mathbb{Z},2)),\mathrm{H}_5(\mathrm{K}(\mathbb{Z},4))) \\
\cong\ & \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \oplus && \text{par la Proposition 7.4.6 (i)} \\
& \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \oplus \\
& \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2 \oplus && \text{par la Proposition 7.4.6 (iii)} \\
& 0 \oplus && \text{par la Proposition 7.4.6 (i)} \\
& 0 && \text{par la Proposition 7.4.6 (ii)} \\
\cong\ & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2.
\end{aligned}$$

Finalement on a

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{H}_7(BU[5]), \mathbb{Z}) \cong 0,$$

$$\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_6(BU[5]), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2,$$

de sorte que

$$\mathrm{H}^7(BU[5]; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_6(BU[5]), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2.$$

Exemple. Considérons l'homomorphisme d'Hurewicz $h_6 : \pi_6(BU) \to \mathrm{H}_6(BU)$. On a calculé que $\mathrm{H}_6(BU)$ est un groupe libre-abélien de rang 3, de sorte que les éléments primitifs p_1, p_2 et p_3 l'engendrent. Ainsi on a

$$\begin{array}{rccl} h_6 : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ & 1 & \longmapsto & (0, 0, \pm(3-1)!) = (0, 0, \pm 2). \end{array}$$

L'homomorphisme d'Hurewicz h_6 est donc injectif mais pas scindé. Il s'ensuit que $0 \neq k^7(BU) \in \mathrm{H}^7(BU[5]; \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_6(BU[5]), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2$.

8 Etude de la partie Hom des invariants de Postnikov

Il s'agit ici d'étudier les propriétés de la partie Hom des invariants de Postnikov d'un CW-complexe connexe simple.

8.1 Caractérisation de $k^{n+1}(X)_\bullet$

Remarque. En observant bien les démonstrations du Lemme 7.3.1, on voit qu'il est très facile de généraliser le résultat de telle manière qu'on obtienne une caractérisation du noyau de l'homomorphisme d'Hurewicz par $k^{n+1}(X)_\bullet$, la partie Hom du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov.

8.1.1 Lemme. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$ un entier et $l^{n+1}(X)$ un $(n+1)$-ième invariant homotopique de X. Le noyau de l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ est caractérisé par l'image de $l^{n+1}(X)_* : \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \to \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1))$. En d'autres termes, on a*

$$\ker h_n \cong \operatorname{im} l^{n+1}(X)_*.$$

L'image de $(\alpha_{n-1})_* : \mathrm{H}_{n+1}(X) \to \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1])$ est caractérisée par le noyau de $l^{n+1}(X)_* : \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \to \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1))$. En d'autres termes, on a

$$\operatorname{im}(\alpha_{n-1})_* \cong \ker l^{n+1}(X)_*.$$

Démonstration. Considérons le diagramme de Postnikov,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}(\pi_n(X), n) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "i_n"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n) \arrow[d] \\
X[n] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_{n-1}"'] & * \arrow[d, "q"] \\
X[n-1] \arrow[r, "l^{n+1}(X)"'] & \mathrm{K}(\pi_n(X), n+1).
\end{tikzcd}$$

Les fibres $\mathrm{K}(\pi_n(X), n)$ étant $(n-1)$-connexes, la suite spectrale de Serre donne le diagramme commutatif formé de lignes exactes suivant,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_{n+1}(X[n]) \arrow[r, "(\gamma_{n-1})_*"] \arrow[d] & \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "l^{n+1}(X)_*"] & \mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\pi_n(X), n)) \arrow[r, "(i_n)_*"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{H}_n(X[n]) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1)) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\pi_n(X), n)) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Ainsi, d'une part $\operatorname{im}(\gamma_{n-1})_* \cong \ker l^{n+1}(X)_*$, mais $\operatorname{im}(\alpha_{n-1})_* \cong \operatorname{im}(\gamma_{n-1})_* \circ (\alpha_n)_*$ avec $(\alpha_n)_*$ surjectif en dimension $n+1$ par le Théorème de Whitehead (α_n est $(n+1)$-connexe), d'où $\operatorname{im}(\alpha_{n-1})_* \cong \operatorname{im}(\gamma_{n-1})_* \cong \ker l^{n+1}(X)_*$.

D'autre part $\operatorname{im} l^{n+1}(X)_* \cong \ker(i_n)_*$. Par naturalité de l'homomorphisme d'Hurewicz, on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(\mathrm{K}(\pi_n(X),n)) \arrow[r, "(i_n)_\#", "\cong"'] \arrow[d, "\cong"', "h_n"] & \pi_n(X[n]) \arrow[d, "h_n"] & \pi_n(X) \arrow[l, "(\alpha_n)_\#"', "\cong"] \arrow[d, "h_n"] \\
\mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\pi_n(X),n)) \arrow[r, "(i_n)_*"] & \mathrm{H}_n(X[n]) & \mathrm{H}_n(X) \arrow[l, "(\alpha_n)_*"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

de sorte que $\ker(i_n)_* \cong \ker h_n$. □

8.1.2 Lemme. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$ un entier, $k^{n+1}(X)_\bullet$ la partie* Hom *du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X et $l^{n+1}(X)$ un $(n+1)$-ième invariant homotopique de X. On a*

$$\operatorname{im} l^{n+1}(X)_* \cong \operatorname{im} k^{n+1}(X)_\bullet,$$
$$\ker l^{n+1}(X)_* \cong \ker k^{n+1}(X)_\bullet,$$

avec $l^{n+1}(X)_* : \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \to \mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1))$.

Démonstration. Par naturalité du Théorème des coefficients universels, on a le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n(X),n+1);\pi_n(X)) \arrow[r, "\rho", "\simeq"'] \arrow[d, "l^{n+1}(X)^*"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n X,n+1)),\pi_n(X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(l^{n+1}(X)_*,\mathrm{id})"] \\
\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]),\pi_n(X)) \arrow[r] & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1];\pi_n(X)) \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]),\pi_n(X)).
\end{tikzcd}$$

Considérons ι^{n+1} la classe caractéristique de l'espace d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\pi_n(X), n+1)$ et h_{n+1}^{-1} l'inverse de l'isomorphisme d'Hurewicz dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(\mathrm{K}(\pi_n X, n+1)), \pi_n(X))$. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{im} k^{n+1}(X)_\bullet &= \operatorname{im} \rho \circ l^{n+1}(X)^*\,(\iota^{n+1}) && \text{par définition de } k^{n+1}(X)\\
&= \operatorname{im} \mathrm{Hom}(l^{n+1}(X)_*, \mathrm{id}) \circ \rho\,(\iota^{n+1}) && \text{par commutativité}\\
&= \operatorname{im} \mathrm{Hom}(l^{n+1}(X)_*, \mathrm{id})\,(h_{n+1}^{-1}) && \text{par définition de } \iota^{n+1}\\
&= \operatorname{im} h_{n+1}^{-1} \circ l^{n+1}(X)_* &&\\
&\cong \operatorname{im} l^{n+1}(X)_* && \text{puisque } h_{n+1}^{-1} \text{ est un isomorphisme,}
\end{aligned}$$

de même on a

$$\begin{aligned}
\ker k^{n+1}(X)_\bullet &= \ker \rho \circ l^{n+1}(X)^*\,(\iota^{n+1}) && \text{par définition de } k^{n+1}(X)\\
&= \ker \mathrm{Hom}(l^{n+1}(X)_*, \mathrm{id}) \circ \rho\,(\iota^{n+1}) && \text{par commutativité}\\
&= \ker \mathrm{Hom}(l^{n+1}(X)_*, \mathrm{id})\,(h_{n+1}^{-1}) && \text{par définition de } \iota^{n+1}\\
&= \ker h_{n+1}^{-1} \circ l^{n+1}(X)_* &&\\
&\cong \ker l^{n+1}(X)_* && \text{puisque } h_{n+1}^{-1} \text{ est un isomorphisme.}
\end{aligned}$$

□

8.1.3 Lemme. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 1$ un entier, α_n la n-ième section de Postnikov de X et $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n. La suite suivante est exacte,*

$$\pi_n(X) \xrightarrow{h_n} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_n(X[n-1]) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. La tour de Postnikov de X induit le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_n(X) \arrow[r, "(\alpha_n)_*", "\cong"'] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}_n(X[n]) \arrow[d, "(\gamma_{n-1})_*"] \\
\mathrm{H}_n(X) \arrow[r, "(\alpha_{n-1})_*"'] & \mathrm{H}_n(X[n-1]),
\end{tikzcd}$$

ainsi $\ker(\alpha_{n-1})_* \cong \ker(\gamma_{n-1})_*$. Mais d'après la suite spectrale de Serre, $\ker(\gamma_{n-1})_* \cong \mathrm{im}(i_n)_* : \mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\pi_n(X), n)) \to \mathrm{H}_n(X[n])$. On conclut que $\mathrm{im}(i_n)_* \cong \mathrm{im}\, h_n$ par commutativité du diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(\mathrm{K}(\pi_n(X), n)) \arrow[r, "(i_n)_\#", "\cong"'] \arrow[d, "h_n", "\cong"'] & \pi_n(X[n]) \arrow[d, "h_n"] & \pi_n(X) \arrow[l, "(\alpha_n)_\#"', "\cong"] \arrow[d, "h_n"] \\
\mathrm{H}_n(\mathrm{K}(\pi_n(X), n)) \arrow[r, "(i_n)_*"] & \mathrm{H}_n(X[n]) & \mathrm{H}_n(X). \arrow[l, "(\alpha_n)_*"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Finalement, $(\alpha_{n-1})_* : \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{H}_n(X[n-1])$ est surjectif puisque n-connexe (*cf.* Démonstration du Lemme 8.1.1). □

On peut résumer ces résultats par le Théorème suivant.

8.1.4 Théorème. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$ un entier, α_{n-1} la $(n-1)$-ième section de Postnikov de X, $k^{n+1}(X)_\bullet$ la partie* Hom *du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X et $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ l'homomorphisme d'Hurewicz. La suite suivante est exacte,*

$$\mathrm{H}_{n+1}(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \xrightarrow{k^{n+1}(X)_\bullet} \pi_n(X) \xrightarrow{h_n} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_n(X[n-1]) \longrightarrow 0.$$

En particulier, on a

$$\ker h_n \cong \mathrm{im}\, k^{n+1}(X)_\bullet,$$
$$\mathrm{im}(\alpha_{n-1})_* \cong \ker k^{n+1}(X)_\bullet.$$

□

8.1.5 Corollaire. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$ un entier, α_{n-1} la $(n-1)$-ième section de Postnikov de X, $k^{n+1}(X)_\bullet$ la partie* Hom *du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X et $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ l'homomorphisme d'Hurewicz. On a la suite exacte courte suivante,*

$$\mathrm{im}\, k^{n+1}(X)_\bullet \cong \ker h_n \rightarrowtail \pi_n(X) \xrightarrow{\widehat{h_n}} \mathrm{im}\, h_n,$$

où $\widehat{h_n}$ est induit par l'homomorphisme d'Hurewicz. □

8.2 Finitude de l'ordre de $k^{n+1}(X)_\bullet$

8.2.1 Lemme. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$, $\varrho \geqslant 1$ des entiers et $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ l'homomorphisme d'Hurewicz. Les assertions suivantes sont équivalentes,*

(i) $\varrho k^{n+1}(X)_\bullet = 0$,
(ii) $\varrho \ker h_n = 0$.

Démonstration. D'après le Théorème 8.1.4, on a $\varrho \ker h_n = 0$ si et seulement si $\varrho \operatorname{im} k^{n+1}(X)_\bullet = 0$ *i.e.* si et seulement si $\varrho k^{n+1}(X)_\bullet = 0$. □

Le Théorème 8.1.4 implique bien évidemment le résultat suivant (déjà vu au Théorème 7.3.2).

8.2.2 Corollaire. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes,*
(i) l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ est injectif,
(ii) la partie Hom *du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov, $k^{n+1}(X)_\bullet$, est triviale, i.e. $k^{n+1}(X)_\bullet = 0$.*

Démonstration. L'homomorphisme d'Hurewicz h_n est injectif si et seulement si $\ker h_n$ est trivial *i.e.* si et seulement si $k^{n+1}(X)_\bullet = 0$. □

8.2.3 Théorème. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$, $\varrho \geqslant 1$ des entiers. Les assertions suivantes sont équivalentes,*
(i) la partie Hom *du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X, $k^{n+1}(X)_\bullet$, est d'ordre fini ϱ dans* $\mathrm{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]), \pi_n(X))$*, i.e. $\varrho k^{n+1}(X)_\bullet = 0$,*
(ii) l'exposant du noyau de l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ divise ϱ, i.e. $\varrho \ker h_n = 0$,
(iii) il existe un homomorphisme $\varphi_n : \operatorname{im} h_n \to \mathrm{H}_n(X)$ tel que la composée

$$\pi_n(X) \xrightarrow{\widehat{h_n}} \operatorname{im} h_n \xrightarrow{\varphi_n} \pi_n(X),$$

avec $\widehat{h_n}$ induit par l'homomorphisme d'Hurewicz, soit la multiplication par ϱ.
En particulier, si l'homomorphisme d'Hurewicz est surjectif, alors $k^{n+1}(X)$ est d'ordre fini ϱ si et seulement si $k^{n+1}(X)_\bullet$ est d'ordre fini ϱ.

Démonstration. Le Lemme fournit l'équivalence de (i) et (ii), il reste à prouver l'équivalence de (i) et (iii). Le Corollaire 8.1.5 fournit la suite exacte courte suivante,

$$\operatorname{im} k^{n+1}(X)_\bullet \rightarrowtail^{i} \pi_n(X) \xrightarrow{\widehat{h_n}} \operatorname{im} h_n,$$

avec i la composée $\operatorname{im} k^{n+1}(X)_\bullet \cong \ker h_n \hookrightarrow \pi_n(X)$. On y applique le foncteur $\mathrm{Hom}(-, \pi_n(X))$ pour obtenir la suite exacte suivante,

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(\operatorname{im} h_n, \pi_n(X)) & \xrightarrow{(\widehat{h_n})^*} & \mathrm{Hom}(\pi_n(X), \pi_n(X)) & \xrightarrow{i^*} & \mathrm{Hom}(\operatorname{im} k^{n+1}(X)_\bullet, \pi_n(X)) \\ & & \varrho \cdot \mathrm{id} & \longmapsto & \varrho \cdot i. \end{array}$$

Supposons que $\varrho \cdot k^{n+1}(X)_\bullet = 0$, alors $\varrho \cdot i = 0$. En effet, soit $x \in \operatorname{im} k^{n+1}(X)_\bullet$, alors il existe $y \in \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1])$ tel que $k^{n+1}(X)_\bullet(y) = x$, ainsi $\varrho \cdot i\,(x) = \varrho \cdot i \circ k^{n+1}(X)_\bullet(y) = i \circ \varrho \cdot k^{n+1}(X)_\bullet(y) = 0$. Par exactitude il existe donc $\varphi_n : \operatorname{im} h_n \to \pi_n(X)$ tel que $(\widehat{h_n})^*(\varphi_n) = \varphi_n \circ h_n = \varrho \cdot \mathrm{id}$. Réciproquement, supposons qu'il existe un tel φ_n, alors par exactitude, $\varrho \cdot i = 0$, ce qui implique que $i \circ \varrho \cdot k^{n+1}(X)_\bullet = \varrho \cdot i \circ k^{n+1}(X)_\bullet = 0$, ainsi $\varrho \cdot k^{n+1}(X)_\bullet = 0$ puisque i est une injection. Finalement, si h_n est surjectif, alors $\operatorname{im} h_n = H_n(X)$ et on peut appliquer le Théorème 7.1.3. □

8.2.4 Corollaire. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Si le n-ième groupe d'homotopie de X, $\pi_n(X)$, est sans torsion et la partie* Hom *du $(n+1)$-invariant de Postnikov, $k^{n+1}(X)_\bullet$, est d'ordre fini, alors l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n, $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$, est injectif.*

Démonstration. Si $\varrho \cdot k^{n+1}(X)_\bullet = 0$ alors $k^{n+1}(X)_\bullet = 0$ puisque $\pi_n(X)$ est sans torsion, *i.e.* h_n est injectif. □

Remarque. La notion de **H-espace** n'a pas été abordée dans ce travail, néanmoins, moyennant un résultat de Milnor et Moore sur de tels espaces, les résultats démontrés jusqu'ici permettent de donner une preuve du Théorème d'Arkowitz et Curjel.

8.2.5 Théorème (de Milnor et Moore)**.** *Soit X un H-espace. L'homomorphisme d'Hurewicz est rationnellement injectif i.e. $h_n \otimes \mathrm{id}_\mathbb{Q}$ est injectif pour tout entier $n \geqslant 1$.*

Démonstration. *cf.* [**?**, Theorem, p.263]. □

8.2.6 Théorème (d'Arkowitz et Curjel)**.** *Soit X un H-espace connexe de type fini. Les invariants de Postnikov de X sont d'ordre fini.*

Démonstration. D'après le Théorème de Milnor et Moore, $\ker h_n$ est de torsion, et par le Théorème 8.1.4, $\mathrm{im}\, k^{n+1}(X)_\bullet$ est aussi de torsion *i.e.* $k^{n+1}(X)_\bullet$ est d'ordre fini, disons ϱ. Ainsi $\varrho \cdot k^{n+1}(X) \in \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \pi_n(X))$, mais $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \pi_n(X))$ est de torsion puisque X est de type fini. On conclut que $k^{n+1}(X)$ est d'ordre fini. □

8.3 Un exemple surprenant

Soit X un CW-complexe connexe simple qui est rationnellement un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane (*i.e.* dont les invariants de Postnikov de $X_\mathbb{Q}$ sont triviaux). On est tenté de croire que les invariants de Postnikov de X sont tous d'ordre fini. Mais il n'en est rien si on ne suppose pas l'espace X de type fini, comme le montre cet exemple tiré de [**?**, Remark 1.3, p.5].

Soit n un entier pair. On a $\mathrm{H}_{2n+1}(\mathrm{K}(\mathbb{Q}, n); \mathbb{Z}) \cong 0$ et $\mathrm{H}_{2n}(\mathrm{K}(\mathbb{Q}, n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}$. Ainsi, le Théorème des coefficients universels donne

$$\mathrm{H}^{2n+1}(\mathrm{K}(\mathbb{Q}, n); \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_{2n}(\mathrm{K}(\mathbb{Q}, n)), \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}.$$

Choisissons un élément non trivial $\alpha \in \mathrm{H}^{2n+1}(\mathrm{K}(\mathbb{Q}, n); \mathbb{Z})$ et notons X la fibre de l'application correspondante $\Phi^{-1}(\alpha) : \mathrm{K}(\mathbb{Q}, n) \to \mathrm{K}(\mathbb{Z}, 2n+1)$ (*cf.* Théorème de classification). Le CW-complexe X possède seulement deux groupes d'homotopie non triviaux, à savoir $\pi_n(X) \cong \mathbb{Q}$ et $\pi_{2n}(X) \cong \mathbb{Z}$, ainsi qu'un seul invariant de Postnikov, $k^{2n+1}(X) = \alpha \in \mathrm{H}^{2n+1}(\mathrm{K}(\mathbb{Q}, n); \mathbb{Z})$ qui est d'ordre infini. Ainsi la rationnalisation $X_\mathbb{Q}$ de l'espace X possède également deux groupes d'homotopie non triviaux, $\pi_n(X_\mathbb{Q}) \cong \pi_{2n}(X_\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ et un seul invariant de Postnikov, $k^{2n+1}(X_\mathbb{Q}) \in \mathrm{H}^{2n+1}(\mathrm{K}(\mathbb{Q}, n); \mathbb{Q}) \cong \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \cong 0$. Ainsi $X_\mathbb{Q}$ est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane,

$$X_\mathbb{Q} \simeq \mathrm{K}(\mathbb{Q}, n) \times \mathrm{K}(\mathbb{Q}, 2n).$$

9 Etude de la partie Ext des invariants de Postnikov

Il s'agit ici d'étudier les propriétés de la partie Ext des invariants de Postnikov d'un CW-complexe connexe simple.

9.1 Caractérisation de $k^{n+1}(X)_\dagger$

9.1.1 Définition. Soit Y un CW-complexe $(n-1)$-connexe avec $n \geqslant 1$ un entier. La *classe unitaire* u^n du groupe $\mathrm{H}^n(Y;\mathrm{H}_n(Y))$ est la classe dont l'image par l'isomorphisme des coefficients universels est l'idendité $\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_n(Y),\mathrm{H}_n(Y))$.

9.1.2 Lemme. *Soient X, Y des CW-complexes, $f : X \to Y$ une application et T_f le cône de f. Considérons la suite exacte homologique de Puppe suivante, avec $n \geqslant 1$ un entier,*

$$\mathrm{H}_{n+1}(X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{H}_{n+1}(Y) \xrightarrow{f_*^1} \mathrm{H}_{n+1}(T^f) \longrightarrow \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{f_*} \mathrm{H}_n(Y).$$

Soient encore $u^{n+1} \in \mathrm{H}^{n+1}(Y;\mathrm{H}_{n+1}(Y))$ la classe unitaire et $v^{n+1} = f^*(u^{n+1}) \in \mathrm{H}^{n+1}(X;\mathrm{H}_{n+1}(Y))$ avec $f^* : \mathrm{H}^{n+1}(Y;\mathrm{H}_{n+1}(Y)) \to \mathrm{H}^{n+1}(X;\mathrm{H}_{n+1}(Y))$. La classe d'extensions dans $\mathrm{Ext}(\ker f_* : \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{H}_n(Y), \mathrm{coker}\, f_* : \mathrm{H}_{n+1}(X) \to \mathrm{H}_{n+1}(Y))$ représentée par la suite exacte courte suivante,

$$\mathrm{coker}\, f_* \rightarrowtail \mathrm{H}_{n+1}(T_f) \twoheadrightarrow \ker f_*$$

est égale à

$$-j^*(v_\dagger^{n+1}),$$

avec $j^* : \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X), \mathrm{coker}\, f_*) \to \mathrm{Ext}(\ker f_*, \mathrm{coker}\, f_*)$ induite par l'inclusion $\ker f_* \to \mathrm{H}_n(X)$.

Démonstration. *cf.* [**?**, Corollary 4.13, p.569]. □

Remarque. Ce résultat permet de répondre à une question posée par P. J. Hilton et qu'on peut formuler de la manière suivante. Soient X un espace topologique avec $\mathrm{H}_{n+1}(X) = 0$, G un groupe abélien et une classe de cohomologie $\theta \in \mathrm{H}^{n+1}(X;G)$. Le Théorème de classification d'Eilenberg fournit une application $\widetilde{\theta} : X \to \mathrm{K}(G, n+1)$ qui correspond à la classe de cohomologie θ. On peut alors considérer la cofibration $X \longrightarrow \mathrm{K}(G, n+1) \longrightarrow T_{\widetilde{\theta}}$ et la suite exacte de la cofibration donne la suite exacte courte suivante,

$$G \rightarrowtail \mathrm{H}_{n+1}(T_{\widetilde{\theta}}) \twoheadrightarrow \mathrm{H}_n(X).$$

C'est un représentant d'une classe d'extension de $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X), G)$. Est-ce le représentant de la classe $\theta_\dagger$? Le Lemme fournit la réponse à cette question : non mais presque, c'est le représentant de la classe $-\theta_\dagger$. Ce résultat est intéressant puisqu'il fournit un algorithme de construction d'une classe d'extension opposée à $\theta_\dagger$.

9.1.3 Lemme. *Soit X un CW-complexe connexe simple. L'application $\gamma_{n-1} : X[n] \to X[n-1]$ de la tour de Postnikov de X induit le diagramme commutatif à homotopie près formé de lignes coexactes* *suivant,*

$$\begin{array}{ccccccccc}
X[n-1] & \xrightarrow{\gamma^1_{n-1}} & T_{\gamma_{n-1}} & \xrightarrow{\gamma^2_{n-1}} & T_{\gamma^1_{n-1}} & \xrightarrow{q_2\circ\gamma^3_{n-1}} & \Sigma X[n-1] & \xrightarrow{-\Sigma\gamma^1_{n-1}} & \Sigma T_{\gamma_{n-1}} \\
 & & \Vert & & q_1 \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow -\Sigma(\mathrm{id}) & & \\
X[n-1] & \xrightarrow[\gamma^1_{n-1}]{} & T_{\gamma_{n-1}} & \xrightarrow[q]{} & \Sigma X[n] & \xrightarrow[\Sigma\gamma_{n-1}]{} & \Sigma X[n-1] & \xrightarrow[\Sigma\gamma^1_{n-1}]{} & \Sigma T_{\gamma_{n-1}}.
\end{array}$$

avec γ^1_{n-1}*,* γ^2_{n-1}*,* γ^3_{n-1} *les inclusions dans les cônes et* q_1*,* q_2 *des équivalences d'homotopie (cf. Lemme 1.4.13).*

Démonstration. D'après le Lemme 1.4.13, on a le diagramme commutatif à homotopie près suivant,

$$\begin{array}{ccc}
T_{\gamma^1_{n-1}} & \xrightarrow{\gamma^3_{n-1}} & T_{\gamma^2_{n-1}} \\
q_1 \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow q_2 \\
\Sigma X[n] & \xrightarrow[-\Sigma\gamma_{n-1}]{} & \Sigma X[n-1],
\end{array}$$

de sorte que le diagramme suivant est aussi commutatif à homotopie près,

$$\begin{array}{ccc}
T_{\gamma^1_{n-1}} & \xrightarrow{q_2\circ\gamma^3_{n-1}} & \Sigma X[n-1] \\
q_1 \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow -\Sigma(\mathrm{id}) \\
\Sigma X[n] & \xrightarrow[\Sigma\gamma_{n-1}]{} & \Sigma X[n-1].
\end{array}$$

On vérifie immédiatement que les autres carrés commutent à homotopie près. Finalement, la ligne du haut est une partie de la suite anticoexacte de Puppe de l'application γ^1_{n-1} et la ligne du bas est une partie de la suite coexacte de Puppe de l'application γ_{n-1}, elles sont donc coexactes. □

9.1.4 Lemme. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $\gamma_{n-1} : X[n] \to X[n-1]$ l'application de la tour de Postnikov de X. Dans le groupe* $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \mathrm{coker}(\gamma^1_{n-1})_*)$*, on a la relation suivante,*

$$-\{H_n(X)\} = \{\mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma^1_{n-1}})\},$$

avec $\{H_n(X)\}$ la classe d'extension du groupe $H_n(X)$ et γ^1_{n-1} l'inclusion de $X[n-1]$ dans le cône $T_{\gamma_{n-1}}$.

Démonstration. Commençons par remarquer que $\mathrm{H}_n(T_{\gamma_{n-1}}) = 0$, en effet, d'après le Théorème d'Hurewicz relatif, $\mathrm{H}_n(X[n-1], X[n]) = 0$ puisque $(X[n-1], X[n])$ est une paire n-connexe, or $\mathrm{H}_n(X[n-1], X[n]) \cong \mathrm{H}_n(T_{\gamma_{n-1}})$ en vertu de la Proposition 3.5.3. En vertu de la suite (anti)coexacte de Puppe en homologie, en appliquant le foncteur $\mathrm{H}_{n+1}(-)$ au diagramme du Lemme 9.1.3, on obtient le diagramme commutatif au lignes exactes suivant,

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) & \xrightarrow{(\gamma^1_{n-1})_*} & \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma^1_{n-1}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_n(X[n-1]) & \xrightarrow{-(\gamma^1_{n-1})_*} & 0 \\
 & & \Vert & & \downarrow \cong & & -1 \downarrow \cong & & \\
\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) & \xrightarrow[(\gamma^1_{n-1})_*]{} & \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}_n(X) & \xrightarrow[(\alpha_{n-1})_*]{} & \mathrm{H}_n(X[n-1]) & \xrightarrow[(\gamma^1_{n-1})_*]{} & 0,
\end{array}$$

qui induit le diagramme commutatif au lignes exactes courtes suivant,

$$\begin{tikzcd} \operatorname{coker}(\gamma_{n-1}^1)_* \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}^1}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{H}_n(X[n-1]) \arrow[d, "-1"', "\cong"] \\ \operatorname{coker}(\gamma_{n-1}^1)_* \arrow[r, tail] & \mathrm{H}_n(X) \arrow[r, two heads, "(\alpha_{n-1})_*"'] & \mathrm{H}_n(X[n-1]). \end{tikzcd}$$

□

9.1.5 Lemme. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $X[n]$ et $X[n-1]$ les sections de Postnikov de X, $j : X[n-1] \to (X[n-1], X[n])$ l'inclusion, , $\gamma_{n-1} : X[n] \to X[n-1]$ l'application de la tour de Postnikov et $\gamma_{n-1}^1 : X[n-1] \to T_{\gamma_{n-1}}$ l'inclusion dans le cône, $\kappa^{n+1} : \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]) \to \pi_n(X)$ comme dans la Proposition 6.2.2 et $\omega : (X[n-1], X[n]) \to T_{\gamma_{n-1}}$ comme dans la Proposition 3.5.3. Le diagramme suivant commute,*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^{n+1}(T_{\gamma_{n-1}}; \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}})) \arrow[r, "\mathrm{H}^{n+1}(\omega;\kappa^{n+1}\circ\omega_*^{-1})", "\Phi"'] \arrow[d, "(\gamma_{n-1}^1)^*"'] & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n(X)) \arrow[d, "j^*"] \\ \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}})) \arrow[r, "\Psi", "\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{id};\kappa^{n+1}\circ\omega_*^{-1})"'] & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X)). \end{tikzcd}$$

Soient encore u^{n+1} la classe unitaire de $\mathrm{H}^{n+1}(T_{\gamma_{n-1}}; \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}}))$ et $k^{n+1}(X)$ le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X, on a les relations suivantes,

$$\Phi(u^{n+1}) = \rho^{-1}(\kappa^{n+1}),$$

avec ρ l'isomorphisme des coefficients universels et

$$(\Psi \circ (\gamma_{n-1}^1)^* (u^{n+1}))_\dagger = \operatorname{Ext}(H_n(X[n-1]), \widetilde{\kappa^{n+1}} \circ \widetilde{\omega_*^{-1}}) ((\gamma_{n-1}^1)^* (u^{n+1}))_\dagger,$$

avec $\widetilde{\kappa^{n+1}} : \operatorname{coker} j_* \to \operatorname{coker} k_*^{n+1}$ induit par κ^{n+1} et $\widetilde{\omega_*^{-1}} : \operatorname{coker}(\gamma_{n-1}^1)_* \to \operatorname{coker} j_*$ induit par ω_*^{-1}.

Démonstration. Le diagramme commute puisque d'après la Proposition 3.5.3 on a $\omega \circ j = p \circ i \circ j = \gamma_{n-1}^1$, où $i : (X[n-1], X[n]) \to (I_{\gamma_{n-1}}, X[n])$ l'inclusion dans le cylindre et $p : (I_{\gamma_{n-1}}, X[n]) \to T_{\gamma_{n-1}}$ la projection. Par naturalité du Théorème des coefficients universels en cohomologie, le diagramme suivant commute,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^{n+1}(T_{\gamma_{n-1}}; \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}})) \arrow[r, "\rho", "\cong"'] \arrow[d, "\Phi"'] & \operatorname{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}}), \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}})) \arrow[d, "\operatorname{Hom}(\omega_*,\kappa^{n+1}\circ\omega_*^{-1})"] \\ \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], X[n]; \pi_n(X)) \arrow[r, "\cong", "\rho"'] & \operatorname{Hom}(\mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]), \pi_n(X)). \end{tikzcd}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Phi(u^{n+1}) &= \rho^{-1} \circ \operatorname{Hom}(\omega_*, \kappa^{n+1} \circ \omega_*^{-1}) \circ \rho\,(u^{n+1}) && \text{par commutativité,} \\ &= \rho^{-1} \circ \operatorname{Hom}(\omega_*, \kappa^{n+1} \circ \omega_*^{-1})\,(\mathrm{id}) && \text{par définition de } u^{n+1}, \\ &= \rho^{-1}(\kappa^{n+1}), \end{aligned}$$

d'où la première relation. Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}}) \arrow[r, "\omega_*^{-1}"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]) \arrow[r, "\kappa^{n+1}"] \arrow[d, "\eta'"'] & \pi_n(X) \arrow[d, "\eta''"'] \\
\operatorname{coker}(\gamma^1_{n-1})_* \arrow[r, "\widetilde{\omega_*^{-1}}"'] & \operatorname{coker} j_* \arrow[r, "\widetilde{\kappa^{n+1}}"'] & \operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet.
\end{tikzcd}$$

Posant $\widetilde{\Psi} = \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], \widetilde{\kappa^{n+1}} \circ \widetilde{\omega_*^{-1}})$, cela implique que $\mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], \eta'') \circ \Psi = \widetilde{\Psi} \circ \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], \eta)$. Ainsi, posant $v^{n+1} = (\gamma^1_{n-1})^* (u^{n+1})$ et considérant μ l'injection des coefficients universels, on a,

$$\begin{aligned}
\Psi(v^{n+1})_\dagger &= \mu^{-1} \circ \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], \eta'') \circ \Psi\,(v^{n+1}) \\
&\quad \text{par définition de la partie Ext,} \\
&= \mu^{-1} \circ \widetilde{\Psi} \circ \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], \eta)\,(v^{n+1}) \\
&\quad \text{par ce qui précède,} \\
&= \mu^{-1} \circ \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], \widetilde{\kappa^{n+1}} \circ \widetilde{\omega_*^{-1}}) \circ \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], \eta)\,(v^{n+1}) \\
&\quad \text{par définition de } \widetilde{\Psi}, \\
&= \mathrm{Ext}(H_n(X[n-1]), \widetilde{\kappa^{n+1}} \circ \widetilde{\omega_*^{-1}}) \circ \mu^{-1} \circ \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1], \eta)\,(v^{n+1}) \\
&\quad \text{par naturalité des coeff. univ.,} \\
&= \mathrm{Ext}(H_n(X[n-1]), \widetilde{\kappa^{n+1}} \circ \widetilde{\omega_*^{-1}})\,(v^{n+1})_\dagger \\
&\quad \text{par définition de la partie Ext,}
\end{aligned}$$

d'où la seconde relation. □

Remarque. Le Théorème 8.1.4 fournit la suite exacte suivante,

$$\mathrm{H}_{n+1}(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \xrightarrow{k^{n+1}(X)_\bullet} \pi_n(X) \xrightarrow{h_n} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_n(X[n-1]) \longrightarrow 0,$$

qui induit la suite exacte courte,

$$\operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet \rightarrowtail^{\widetilde{h_n}} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_n(X[n-1]),$$

avec $\widetilde{h_n}$ induit par l'homomorphisme d'Hurewicz h_n. Le Théorème suivant affirme que cette suite exacte courte est un représentant de la classe d'extension $k^{n+1}(X)_\dagger$ dans $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet)$.

9.1.6 Théorème. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $\alpha_{n-1} : X \to X[n-1]$ la $(n-1)$-ième section de Postnikov de X et $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n. Le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X, $k^{n+1}(X)$, se décompose en la paire* Hom-Ext *$(k^{n+1}(X)_\bullet, k^{n+1}(X)_\dagger)$ qui induit la suite exacte suivante,*

$$\mathrm{H}_{n+1}(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \xrightarrow{k^{n+1}(X)_\bullet} \pi_n(X) \xrightarrow{h_n} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_n(X[n-1]) \longrightarrow 0,$$

avec comme représentant de l'extension $k^{n+1}(X)_\dagger$ dans $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet)$ la suite exacte courte suivante,

$$\operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet \rightarrowtail^{\widetilde{h_n}} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_n(X[n-1]),$$

avec $\widetilde{h_n}$ induite par l'homomorphisme d'Hurewicz h_n.

Ce Théorème est le résultat principal sur la paire Hom-Ext associée à un invariant de Postnikov d'un CW-complexe connexe simple.

Démonstration. Considérons l'application $\gamma_{n-1} : X[n] \to X[n-1]$ de la tour de Postnikov de X, ainsi que l'injection $\gamma_{n-1}^1 : X[n-1] \to T_{\gamma_{n-1}}$. Considérons encore u^{n+1} la classe unitaire de $\mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}}; \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}}))$, l'isomorphisme $\omega_* : \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]) \to \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}})$ (*cf.* Proposition 3.5.3) et l'isomorphisme $\kappa^{n+1} : \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]) \to \pi_n(X)$ (*cf.* Proposition 6.2.2).

En appliquant le Lemme 9.1.2 à l'application γ_{n-1}^1 et à la classe unitaire u^{n+1}, on obtient la relation suivante dans le groupe $\mathrm{Ext}(\ker(\gamma_{n-1}^1)_* : \mathrm{H}_n(X[n-1]) \to \mathrm{H}_n(T_{\gamma_{n-1}}), \mathrm{coker}(\gamma_{n-1}^1)_* : \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1]) \to \mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}}))$,

$$-j^*((\gamma_{n-1}^1)^* (u^{n+1}))_\dagger = \{\mathrm{H}_{n+1}(T_{\gamma_{n-1}^1})\},$$

avec $j^* : \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \pi_n(X)) \to \mathrm{Ext}(\ker(\gamma_{n-1}^1)_*, \pi_n(X))$ induit par l'inclusion $j : \ker(\gamma_{n-1}^1)_* \to \mathrm{H}_n(X[n-1])$. D'après le Lemme 9.1.4, j est l'identité et on a la relation suivante,

$$-((\gamma_{n-1}^1)^* (u^{n+1}))_\dagger = -\{\mathrm{H}_n(X)\},$$

ainsi,

$$((\gamma_{n-1}^1)^* (u^{n+1}))_\dagger = \{\mathrm{H}_n(X)\},$$

dans le groupe $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \mathrm{coker}(\gamma_{n-1}^1)_*)$.

Finalement on a, avec $j^* : \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1], X[n]) \to \mathrm{H}_{n+1}(X[n-1])$ induit par l'inclusion $j : X[n-1] \to (X[n-1], X[n])$ et les homomorphismes Φ et Ψ du Lemme 9.1.5,

$$\begin{aligned}
k^{n+1}(X)_\dagger &= (j^* \circ \rho^{-1} (\kappa^{n+1}))_\dagger && \text{par définition,}\\
&= (j^* \circ \Phi (u^{n+1}))_\dagger && \text{par le Lemme 9.1.5,}\\
&= (\Psi \circ (\gamma_{n-1}^1)^* (u^{n+1}))_\dagger && \text{par commutativité dans 9.1.5,}\\
&= \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \widetilde{\kappa^{n+1}} \circ \widetilde{\omega_*^{-1}}) ((\gamma_{n-1}^1)^* (u^{n+1}))_\dagger && \text{par le Lemme 9.1.5,}\\
&= \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \widetilde{\kappa^{n+1}} \circ \widetilde{\omega_*^{-1}}) \{\mathrm{H}_n(X)\} && \text{par ce qui précède,}
\end{aligned}$$

avec $\{\mathrm{H}_n(X)\} \in \mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \mathrm{coker}(\gamma_{n-1}^1)_*)$, de sorte que $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \widetilde{\kappa^{n+1}} \circ \widetilde{\omega_*^{-1}}) \{\mathrm{H}_n(X)\}$ est une classe d'extension dans $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_\bullet)$, qu'on note également $\{\mathrm{H}_n(X)\}$. La suite exacte courte suivante en est un représentant,

$$\mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_\bullet \xrightarrow{\widetilde{h_n}} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_n(X[n-1]).$$

□

9.1.7 Corollaire. *Soit X un CW-complexe connexe simple et $k^{n+1}(X)$ le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X. Si l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n, $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$, est injectif, i.e. $k^{n+1}(X)_\bullet$ est trivial, alors on a la suite exacte courte suivante,*

$$\pi_n(X) \xrightarrow{h_n} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{(\alpha_{n-1})_*} \mathrm{H}_n(X[n-1]),$$

qui est un représentant de la classe d'extension $k^{n+1}(X)_\dagger = k^{n+1}(X)_\ddagger$ dans le groupe $\mathrm{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \pi_n(X))$. □

Remarque. On peut montrer que la manière d'associer la suite exacte à cinq termes du Théorème 9.1.6 à un invariant de Postnikov est fonctorielle, et fidèle pour des CW-complexes ayant même type d'homotopie (faible). C'est l'algorithme inverse, qui se réduit à reconstruire une classe de cohomologie à partir de sa décomposition Hom-Ext, qui pose problème. En effet, il n'est en général pas possible de remonter la partie Ext dans le groupe de cohomologie. Ceci signifie qu'on a perdu de l'information en passant de l'invariant de Postnikov à sa paire Hom-Ext. Néanmoins, nous allons montrer que si les parties Hom et Ext d'un invariant de Postnikov sont d'ordre fini alors l'invariant lui-même est d'ordre fini.

9.1.8 Proposition. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$ un entier, $k^{n+1}(X)$ le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X et $(k^{n+1}(X)_\bullet, k^{n+1}(X)_\dagger)$ sa décomposition* Hom-Ext*. Si $\varrho_1 k^{n+1}(X)_\bullet = 0$ et $\varrho_2 k^{n+1}(X)_\dagger = 0$, pour $\varrho_1,\ \varrho_2 \geqslant 1$ des entiers, alors $\varrho_1\varrho_2 k^{n+1}(X) = 0$.*

Démonstration. D'après le Théorème 8.2.3 il existe un homomorphisme $\varphi_n : \operatorname{im} h_n \to \pi_n(X)$ tel que $\varphi_n \circ h_n = (\varrho_1 \cdot)$. Or, par le Théorème 8.1.4 et le premier Théorème d'isomorphisme, il existe un isomorphisme $\Phi : \operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet = \pi_n(X)/\operatorname{im} k^{n+1}(X)_\bullet \cong \pi_n(X)/\ker h_n \cong \operatorname{im} h_n$. Il existe donc un homomorphisme $\varphi : \operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet \to \pi_n(X)$ tel que le diagramme suivant commute,

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X) \arrow[r, "\widehat{h_n}"] \arrow[dr, "(\varrho_1\cdot)"'] & \operatorname{im} h_n \arrow[d, "\varphi_n"] & \operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet \arrow[l, "\Phi"', "\cong"] \arrow[dl, dotted, "\varphi"] \\
 & \pi_n(X). &
\end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme provenant du Théorème des coefficients universels suivant,

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \pi_n(X)) \arrow[r, tail, "\mu"] \arrow[d, bend right, "\eta_\#"'] & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \pi_n(X)) \arrow[d, bend left, "\eta_*"] \\
\operatorname{Ext}(\mathrm{H}_n(X[n-1]), \operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet) \arrow[r, tail, "\mu"'] \arrow[u, bend right, "\varphi_\#"'] & \mathrm{H}^{n+1}(X[n-1]; \operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet), \arrow[u, bend left, "\varphi_*"]
\end{tikzcd}$$

avec $\eta : \pi_n(X) \to \operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet = \pi_n(X)/\operatorname{im} k^{n+1}(X)_\bullet$ la surjection canonique, $\eta_\#$ et η_* (resp. $\varphi_\#$ et φ_*) induites par η (resp. φ). Il est commutatif par naturalité des coefficients universels. De plus, on vérifie facilement que $\varphi \circ \eta = (\varrho \cdot) : \pi_n(X) \to \pi_n(X)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mu \circ \varphi_\# \left(k^{n+1}(X)_\dagger\right) &= \mu \circ \varphi_\# \circ \mu^{-1} \circ \eta_* \left(k^{n+1}(X)\right) && \text{par définition,} \\
&= \varphi_* \circ \mu \circ \mu^{-1} \circ \eta_* \left(k^{n+1}(X)\right) && \text{par ce qui précède,} \\
&= (\varphi \circ \eta)_* \left(k^{n+1}(X)\right) && \\
&= \varrho_1 k^{n+1}(X) && \text{par ce qui précède.}
\end{aligned}$$

Finalement, $\varrho_2\varrho_1 k^{n+1}(X) = (\varrho_2 \cdot) \circ \mu \circ \varphi_\# \left(k^{n+1}(X)_\dagger\right) = \mu \circ \varphi_\# \left(\varrho_2 k^{n+1}(X)_\dagger\right) = 0.$ □

9.2 Finitude de l'ordre de $k^{n+1}(X)_\dagger$

9.2.1 Théorème. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$, $\varrho \geqslant 1$ des entiers. Les assertions suivantes sont équivalentes,* *(i) la partie* Ext *du* $(n+1)$*-ième invariant de Postnikov de* X*,* $k^{n+1}(X)_{\dagger}$*, est d'ordre fini* ϱ *dans* $\mathrm{Ext}(H_n(X[n-1]); \mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet})$*, i.e.* $\varrho k^{n+1}(X)_{\dagger} = \{H_n(X[n-1]) \oplus \mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet}\}$*,*

(ii) il existe un homomorphisme $\psi_n : \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet}$ *tel que la composée*

$$\mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet} \xrightarrow{\widetilde{h_n}} \mathrm{H}_n(X) \xrightarrow{\psi_n} \mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet},$$

avec $\widetilde{h_n}$ *l'application induite par l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension* n*, soit la multiplication par* ϱ*.*

En particulier, si l'homomorphisme d'Hurewicz est injectif, alors $k^{n+1}(X)$ *est d'ordre fini* ϱ *si et seulement si* $k^{n+1}(X)_{\dagger}$ *est d'ordre fini* ϱ*.*

Démonstration. Supposons que $\varrho k^{n+1}(X)_{\dagger} = 0$ *i.e.* $\varrho\{H_n(X)\} = 0$ par le Théorème 9.1.6. La multiplication par ϱ et la classe d'extension $\{H_n(X)\}$ induisent le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet} \arrow[r, tail, "\widetilde{h_n}"] \arrow[d, "(\varrho\cdot)"'] & \mathrm{H}_n(X) \arrow[r, two heads, "(\alpha_{n-1})_*"] \arrow[d, dotted, "\widetilde{\psi}"] & \mathrm{H}_n(X[n-1]) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet} \arrow[r, tail, dotted] & E \arrow[r, two heads, dotted] & \mathrm{H}_n(X[n-1]),
\end{tikzcd}$$

avec un pushout pour carré de gauche (*cf.* [**?**, p.87-88]). Mais la ligne exacte du bas est équivalente à l'extension triviale, on a donc le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet} \arrow[r, tail, "\widetilde{h_n}"] \arrow[d, "(\varrho\cdot)"'] & \mathrm{H}_n(X) \arrow[r, two heads, "(\alpha_{n-1})_*"] \arrow[d, "\widetilde{\psi}"] & \mathrm{H}_n(X[n-1]) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet} \arrow[r, tail, "\mu"'] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\epsilon"] & \mathrm{H}_n(X[n-1]) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet} \arrow[r, tail, "i_1"'] & \mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet} \oplus \mathrm{H}_n(X[n-1]) \arrow[r, two heads, "p_2"'] & \mathrm{H}_n(X[n-1]),
\end{tikzcd}$$

avec i_1 l'inclusion dans le premier facteur et p_2 la projection sur le deuxième facteur. Il suffit alors de poser $\psi = p_1 \circ \epsilon \circ \widetilde{\psi} : \mathrm{H}_n(X) \to \mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet}$, avec $p_1 : \mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet} \oplus \mathrm{H}_n(X[n-1]) \to \mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet}$ la projection sur le premier facteur, pour avoir $(\varrho\cdot) = \psi \circ \widetilde{h_n}$. En effet, on a bien $\psi \circ \widetilde{h_n} = p_1 \circ \epsilon \circ \widetilde{\psi} \circ \widetilde{h_n} = p_1 \circ \epsilon \circ \mu \circ (\varrho\cdot) = p_1 \circ i_1 \circ (\varrho\cdot) = (\varrho\cdot)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un homomorphisme ψ qui fait commuter le diagramme suivant,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet} \arrow[r, tail, "\widetilde{h_n}"] \arrow[d, "(\varrho\cdot)"'] & \mathrm{H}_n(X) \arrow[r, two heads, "(\alpha_{n-1})_*"] \arrow[d] \arrow[dl, "\psi"'] & \mathrm{H}_n(X[n-1]) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet} \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads] & \mathrm{H}_n(X[n-1]).
\end{tikzcd}$$

Alors, d'après [?, p.93], $\{E\} = 0$.

Finalement, si h_n est injectif, alors $k^{n+1}(X)_\bullet = 0$ et $\operatorname{coker} k^{n+1}(X)_\bullet = \pi_n(X)$, et on peut appliquer le Théorème 7.1.3. □

9.2.2 Corollaire. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Si l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n, $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$, est injectif, alors les assertions suivantes sont équivalentes,*
(i) le monomorphisme d'Hurewicz est scindé,
(ii) la partie Ext *du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X, $k^{n+1}(X)_\dagger$, est triviale,*
(iii) le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X, $k^{n+1}(X)$, est trivial.

Démonstration. Comme h_n est injectif, $k^{n+1}(X)_\bullet = 0$. Supposons h_n scindé, alors il existe un homomorphisme $\psi_n : \mathrm{H}_n(X) \to \pi_n(X)$ tel que $\psi_n \circ h_n = \mathrm{id}$ et $k^{n+1}(X) = k^{n+1}(X)_\dagger = 0$ en vertu du Théorème. □

Ainsi, dans le cas injectif de l'homomorphisme d'Hurewicz, la section est caractérisée par la partie Ext de l'invariant de Postnikov. Il est donc évident que l'on obtienne à nouveau le résultat du Théorème 7.1.1.

9.2.3 Corollaire. *Soient X un CW-complexe connexe simple et $n \geqslant 2$ un entier. Les assertions suivantes sont équivalentes,*
(i) le $(n+1)$-ième invariant de Postnikov, $k^{n+1}(X)$, est trivial,
(ii) l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n, $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$, est une injection scindée i.e. possède un inverse à gauche.

□

Démonstration. Supposons $k^{n+1}(X)$ trivial, alors $k^{n+1}(X)_\bullet$ est trivial *i.e.* l'homomorphisme d'Hurewicz h_n est injectif par le Théorème 7.3.2, ainsi le Corollaire 9.2.2 affirme que h_n est une injection scindée. □

9.3 Liens avec la suite exacte de Whitehead

Il existe un lien entre la suite exacte du Théorème 9.1.6 et la suite exacte longue de Whitehead dans laquelle figurent les groupes Γ (*cf.* [?, pp.34-35]). Cela a été étudié par H.-J. Baues qui a prouvé le résultat suivant.

9.3.1 Théorème (H.-J. Baues)**.** *Soient X un CW-complexe connexe simple et $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ l'homomorphisme d'Hurewicz en dimension n, $n \geqslant 2$ un entier. Le $(n+1)$-invariant de Postnikov de X, $k^{n+1}(X)$, se décompose en la paire* Hom-Ext *$(k^{n+1}(X)_\bullet, k^{n+1}(X)_\dagger)$ qui possède les propriétés suivantes,*
(i) $k^{n+1}(X)_\bullet = i_n(X) \in \mathrm{Hom}(\Gamma_n(X), \pi_n(X))$,
(ii) $k^{n+1}(X)_\dagger = \{H_n(X)\} \in \mathrm{Ext}(\ker i_{n-1}(X), \operatorname{coker} i_n(X))$,

avec i_{n-1}, i_n *et* $\Gamma_n(X)$ *pris dans la suite exacte de Whitehead,*

$$\Gamma_n(X) \xrightarrow{i_n(X)} \pi_n(X) \xrightarrow{h_n} \mathrm{H}_n(X) \longrightarrow \Gamma_{n-1}(X) \xrightarrow{i_{n-1}(X)} \pi_{n-1}(X).$$

Démonstration. cf. [**?**, Theorem 2.5.10, pp.58-62]. □

Remarque. On remarque que $\mathrm{im}\, i_n(X) \cong \ker h_n$ et $\ker i_{n-1}(X) \cong \mathrm{coker}\, h_n \cong H_n(X[n-1])$, par exactitude de la suite de Whitehead et par le Lemme 8.1.3, et que $\mathrm{coker}\, i_n(X) \cong \mathrm{coker}\, k^{n+1}(X)_{\bullet}$ par le Théorème 9.1.6. Le Théorème de Baues est donc équivalent au Théorème 9.1.6. A noter que H.-J. Baues, dans [**?**, Remark, p.59], affirme n'avoir trouvé d'équivalent à son Théorème nulle part dans la littérature.

10 Une conjecture en guise de conclusion

On sait que les groupes d'homologie entière d'un groupe fini G sont d'exposant fini divisant l'ordre de G. On a en fait $|G| \cdot \mathrm{H}_n(G) \cong |G| \cdot \mathrm{H}_n(BG) = 0$ où BG est l'espace classifiant du groupe G (*cf.* [**?**, Définition 5.1.16, p.258]). Considérons maintenant un groupe fini parfait G. On peut construire son espace classifiant BG et lui appliquer la construction "plus" de Quillen (*cf.* [**?**, pp.265-279]), on obtient l'espace BG^+. Il existe un conjecture dûe à F. Cohen sur l'exposant des groupes d'homotopie de tels espaces.

10.1 Conjecture (F. Cohen)**.** *Soit G un groupe fini parfait. On a $|G|^2 \cdot \pi_n(BG^+) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 2$.*

Considérons le résultat suivant.

10.2 Théorème. *Soient X un CW-complexe connexe simple, $n \geqslant 2$ un entier, $k^{n+1}(X)_\bullet$ la partie* Hom *du $(n+1)$-ième invariant de Postnikov de X et $h_n : \pi_n(X) \to \mathrm{H}_n(X)$ l'homomorphisme d'Hurewicz. S'il existe deux entiers ϱ_1, $\varrho_2 \geqslant 1$ tels que $\varrho_1 k^{n+1}(X)_\bullet = 0$ et $\varrho_2 \cdot \mathrm{im}\, h_n = 0$, alors $\varrho_1\varrho_2 \cdot \pi_n(X) = 0$.*

Démonstration. D'après le Théorème 8.2.3 l'homomorphisme $(\varrho_1 \cdot) : \pi_n(X) \to \pi_n(X)$ se factorise via $\widetilde{h_n} : \pi_n(X) \to \mathrm{im}\, h_n$. Soit $x \in \pi_n(X)$. Comme $\varrho_2 \cdot \mathrm{im}\, h_n = 0$ on a $\varrho_2 \widetilde{h_n}(x) = \widetilde{h_n}(\varrho_2 x) = 0$. Ainsi $\varrho_2 x \in \ker \widetilde{h_n} \subset \ker(\varrho_1 \cdot)$ et $\varrho_1\varrho_2 x = 0$. D'où le résultat. $\square$

Considérons l'homomorphisme d'Hurewicz $h_n : \pi_n(BG^+) \to \mathrm{H}_n(BG^+)$. On sait que $|G| \cdot \mathrm{H}_n(BG^+) = 0$, ainsi $|G| \cdot \mathrm{im}\, h_n = 0$. Il suffirait donc que $|G| k^{n+1}(BG^+)_\bullet = 0$ pour que le Théorème fournisse une démonstration de la Conjecture de F. Cohen. Il paraît donc raisonnable de conjecturer le résultat suivant.

10.3 Conjecture. *Soit G un groupe fini parfait. On a $|G| k^{n+1}(BG^+)_\bullet = 0$ pour tout entier $n \geqslant 2$.*

Notations

$\mathfrak{Top}$ catégorie des espaces topologiques
$\mathfrak{Top}_*$ catégorie des espaces topologiques pointés
$\mathfrak{Top}^2$ catégorie des paires d'espaces topologiques
$\mathfrak{Top}^2_*$ catégorie des paires pointées d'espaces topologiques
$\mathbf{h}\mathfrak{Top}$ catégorie homotopique des espaces topologiques
$\mathbf{h}\mathfrak{Top}_*$ catégorie homotopique des espaces topologiques pointés
$\mathbf{h}\mathfrak{Top}^2$ catégorie homotopique des paires d'espaces topologiques
$\mathbf{h}\mathfrak{Top}^2_*$ catégorie homotopique des paires pointées d'espaces topologiques
$\mathfrak{Groups}$ catégorie des groupes
$\mathfrak{Sets}$ catégorie des ensembles
S^n n-sphère
D^n n-disque
π_n foncteur d'homotopie
H_n foncteur d'homologie à coefficients entiers
$\widetilde{\mathrm{H}}_n$ foncteur d'homologie réduite à coefficients entiers
H^n foncteur de cohomologie
$\widetilde{\mathrm{H}}^n$ foncteur de cohomologie réduite
I^f produit fibré
T^f fibre homotopique
I_f cylindre
T_f cône
PX espace des chemins
ΩX espace des lacets
$X[n]$ section de Postnikov
$k^{n+1}(X)$ invariant de Postnikov *ou* k-invariant
$k^{n+1}(X)_\bullet$ partie Hom de l'invariant de Postnikov
$k^{n+1}(X)_\dagger$ partie Ext de l'invariant de Postnikov
F groupe libre
FA groupe libre-abélien ($\mathbb{Z}$-module libre)
$\omega_0 \equiv x_0$ application constante en x_0

Références