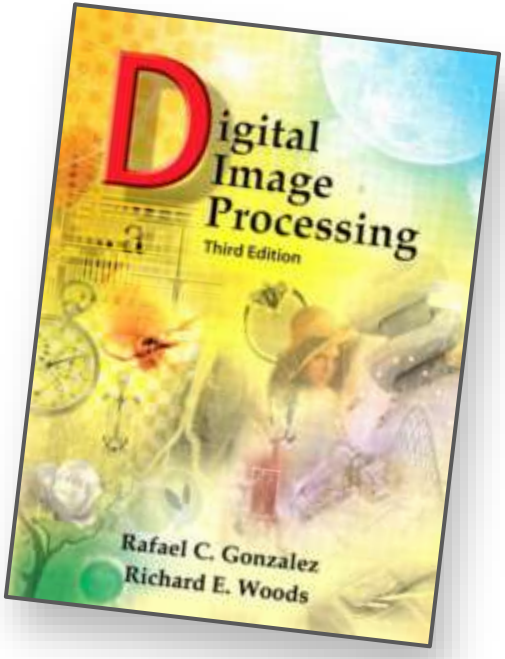
Morfología Matemática

Agenda

- Introducción
- Historia
- Aplicaciones
- Teoría de conjuntos
- Traslación
- Reflexión
- Complemento
- Adición y Sustracción de Minkowski
- Dilatación y Erosión

Nota

- Esta sesión está basada en el libro "Digital Image Processing" 3ra edición de Rafael C. González y Richard E. Woods. En especial el capítulo **09**

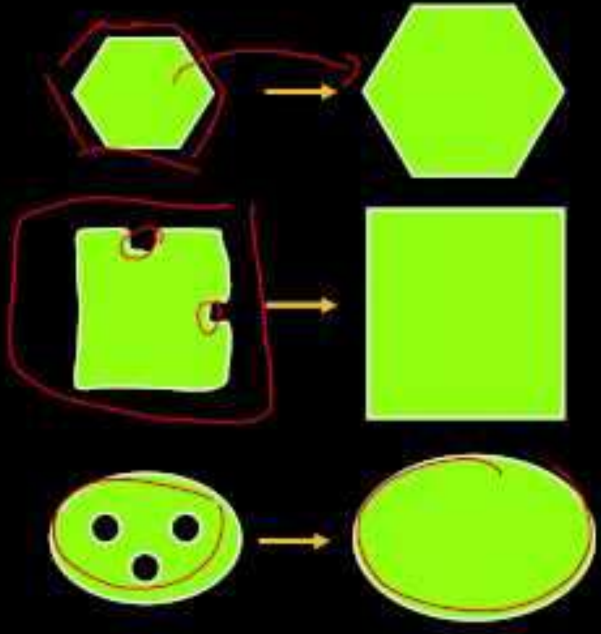


Dilation

Dilation expands the connected sets of 1s of a binary image.

It can be used for:

- Growing features
- Filling holes and gaps



Dilation

Input: Binary image B, structuring element S

- Move S over B, placing origin at each pixel
- Considering only the 1-pixel locations in S, compute the binary *OR* of corresponding elements in B

Introducción

- La palabra morfología denota una rama de la biología que se encarga de la forma y estructura de los animales y plantas
- La morfología matemática es una herramienta para extraer componentes de imágenes que son útiles para representación y descripción de forma de las regiones como
  - bordes
  - esqueletos
  - convex hull

Historia

- La teoría fue desarrollada en los años 60 por Georges Matheron, Jean Serra y sus colaboradores en la Escuela Superior Nacional de Minas de París (Francia)
- Originalmente desarrollada para manipular imágenes binarias, pero fue extendida para tratar imágenes en escala de grises

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Aplicaciones

- Extracción de componentes conexos
- Búsqueda de patrones específicos en la imagen
- Delimitación del convex-hull
- Extracción de bordes
- Afinamiento de bordes

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Dominios de aplicación

- Medicina
- Biología
- Metalurgia
- Síntesis y análisis de textura
- Microscopía
- Automatización industrial

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Teoría de conjuntos

- El lenguaje de la morfología matemática es la teoría de conjuntos
- Los conjuntos en la morfología matemática representan objetos en una imagen

¿Qué conjunto representa a la siguiente imágen?

	0	1	2	3	4	5	x
0	0	1	0	1	0	0	
1	1	0	1	0	0	0	
2	0	1	0	0	1	0	
3	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	1	
y							

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

A) {(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 2), (5, 4)}

B) {(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 2), (5, 4)}

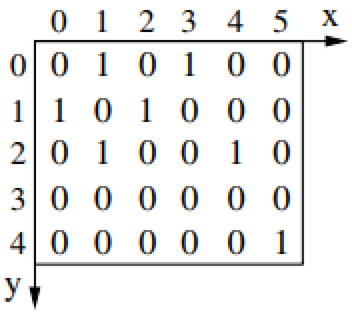
C) {(0, 1), (1, 0), (1, 3), (2, 1), (3, 0), (4, 2), (5, 4)}

D) {(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 2), (3, 0), (4, 2), (5, 4)}

Teoría de conjuntos

- El lenguaje de la morfología matemática es la teoría de conjuntos
- Los conjuntos en la morfología matemática representan objetos en una imagen

¿Qué conjunto representa a la siguiente imágen?



https://www.ic.unicamp.br/~helio/

A) {(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 2), (5, 4)}

B) {(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 0), (4, 2), (5, 4)}

C) {(0, 1), (1, 0), (1, 3), (2, 1), (3, 0), (4, 2), (5, 4)}

D) {(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 2), (3, 0), (4, 2), (5, 4)}

Fundamentos Matemáticos

- Sean A y B dos imágenes binarias representadas por conjuntos
- La unión de A y B denotada con A U B se expresa como

$$A \cup B = \{c | c \in A \text{ o } c \in B\}$$

- … y la intersección como

$$A \cap B = \{c | c \in A \text{ y } c \in B\}$$

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Traslación

- La traslación de A por el elemento p, denotado por A + p, es definida como

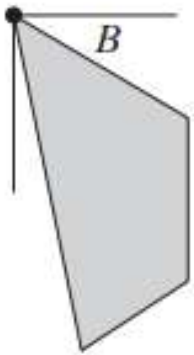
$$A + p = \{a + p \mid a \in A\}$$

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

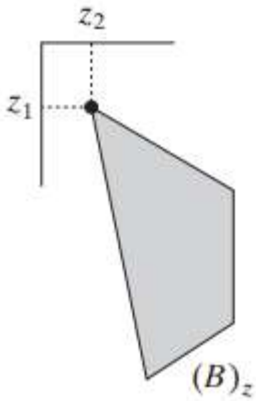
Traslación

- La traslación de A por el elemento p, denotado por A + p, es definida como

$$A + p = \{a + p \mid a \in A\}$$



+ (z_1, z_2) =



https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Reflexión

- La reflexión de A es definida como

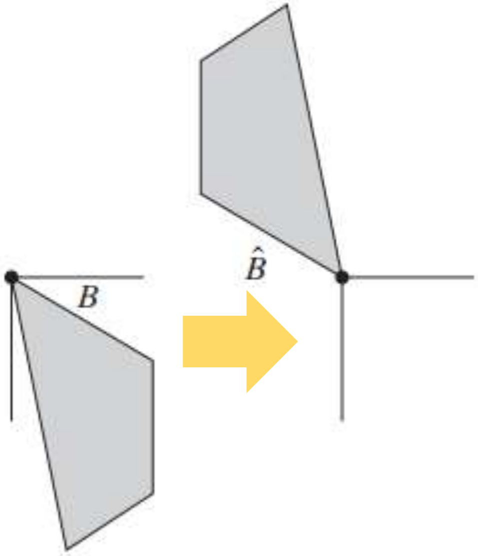
$$\hat{A} = \{-a \mid a \in A\}$$

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Reflexión

- La reflexión de A es definida como

$$\hat{A} = \{-a \mid a \in A\}$$



https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Reflexión de un elemento estructurante simétrico

(a) B_1 (b) $\hat{B}_1$ (c) B_2 (d) $\hat{B}_2$

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Complemento

- El complemento de A es denotado por A^c, el conjunto de los pixeles que no pertenecen a A

$$A^c = \{p \mid p \notin A\}$$

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Complemento

- El complemento de A es denotado por A^c, el conjunto de los pixeles que no pertenecen a A

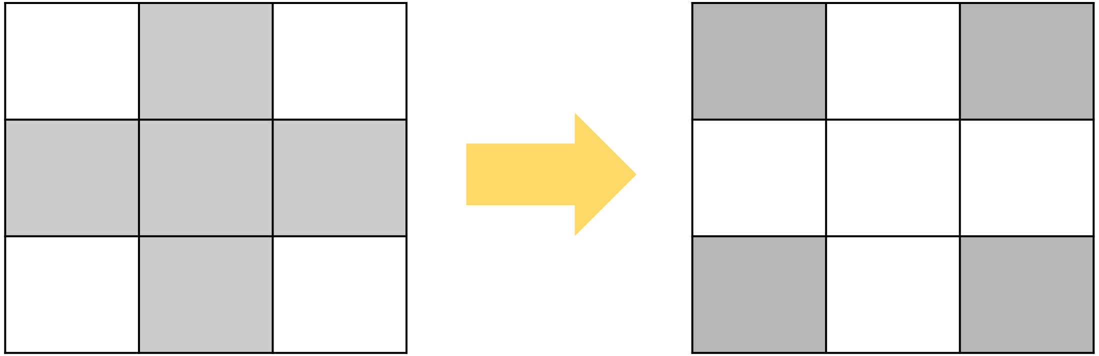
$$A^c = \{p \mid p \notin A\}$$

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Complemento

- El complemento de A es denotado por A^c, el conjunto de los pixeles que no pertenecen a A

$$A^c = \{p \mid p \notin A\}$$



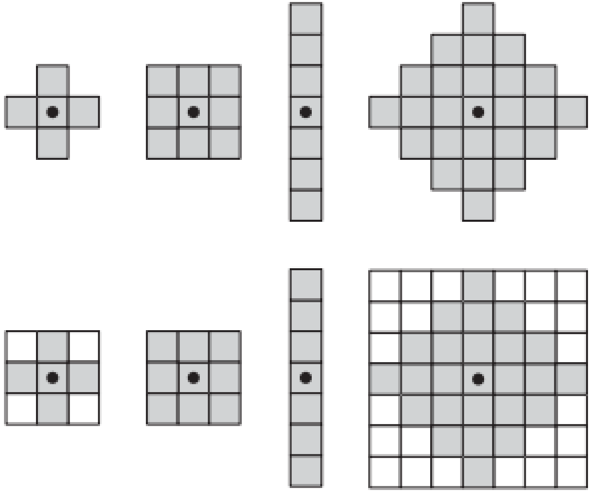
https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Elementos estructurantes

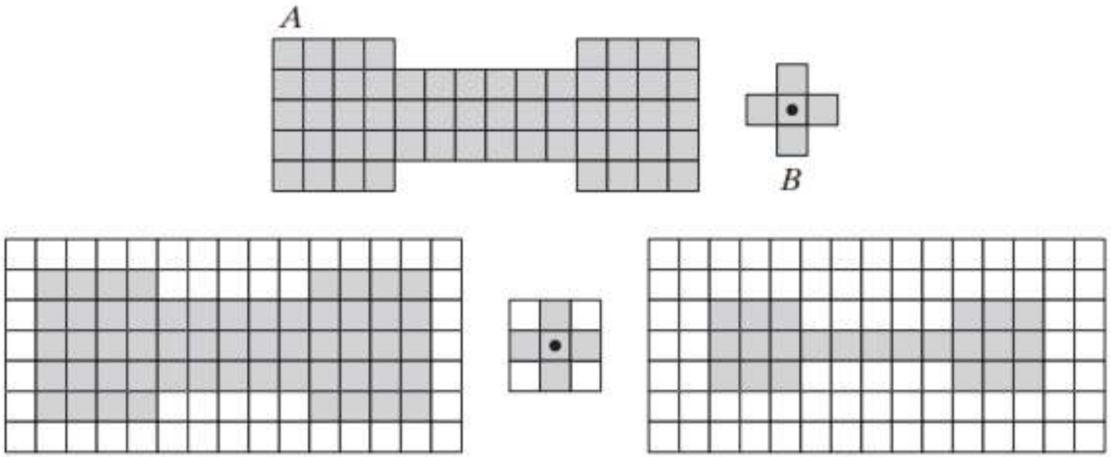
- La **reflexión** y **traslación** son empleadas extensivamente en la morfología para formular las operaciones basadas en los **elementos estructurantes**
- Cuando no importa si una posición en un elemento estructurante sea parte o no del conjunto, esa posición será marcada con una **X**
- El origen de un elemento estructurante también debería ser especificado usualmente con un ▪

Elementos estructurantes

- La **reflexión** y **traslación** son empleadas extensivamente en la morfología para formular las operaciones basadas en los **elementos estructurantes**
- Cuando no importa si una posición en un elemento estructurante sea parte o no del conjunto, esa posición será marcada con una **X**
- El origen de un elemento estructurante también debería ser especificado usualmente con un ▪



Elementos estructurantes



a b
c d e

FIGURE 9.3 (a) A set (each shaded square is a member of the set). (b) A structuring element. (c) The set padded with background elements to form a rectangular array and provide a background border. (d) Structuring element as a rectangular array. (e) Set processed by the structuring element.

Adición de Minkowski

- Dado un conjunto A y un conjunto B, la adición de Minkowski A $\oplus$ B está dada por la unión de todas las traslaciones de A con respecto a cada elemento de B

Si A = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)} y B = {(0, 0), (1, 0)} **calcule A $\oplus$ B**

A) {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

B) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)}

C) {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)}

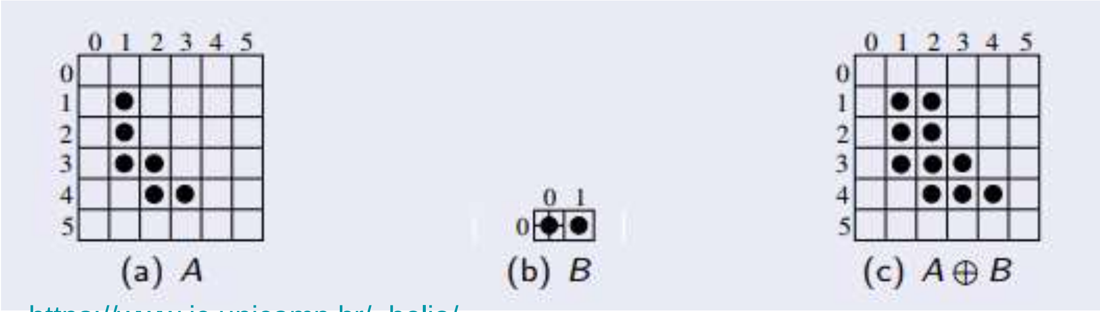
D) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Adición de Minkowski

- Dado un conjunto A y un conjunto B, la adición de Minkowski A ⊕ B está dada por la unión de todas las traslaciones de A con respecto a cada elemento de B

Si A = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)} y B = {(0, 0), (1, 0)} **calcule A ⊕ B**



https://www.ic.unicamp.br/~helio/

A) {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

B) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)}

C) {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)}

D) {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}

Sustracción de Minkowski

- Dado un conjunto A y un conjunto B, la sustracción de Minkowski $A \ominus B$ está dada por la intersección de todas las traslaciones de A por todos los elementos de la reflexión de B

Si A = {(1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4)} y B = {(0, 0), (1, 0)} **calcule $A \ominus B$**

A) {(1, 4), (2, 2), (2, 4)}

B) {(1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4)}

C) {(0, 0), (1, 0)}

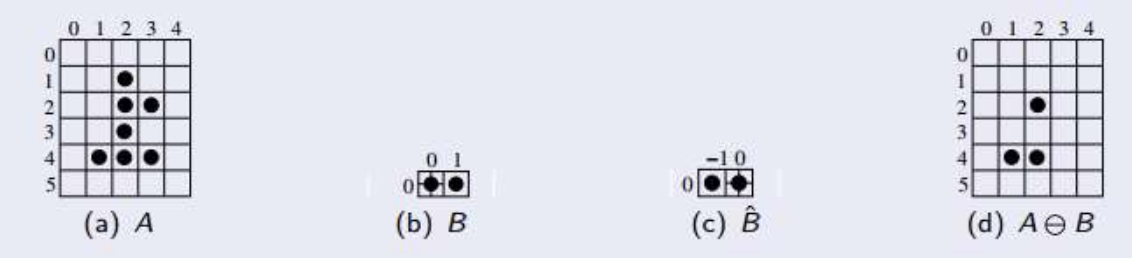
D) {(1, 4), (2, 1), (1, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4)}

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Sustracción de Minkowski

- Dado un conjunto A y un conjunto B, la sustracción de Minkowski A ⊖ B está dada por la intersección de todas las traslaciones de A por todos los elementos de la reflexión de B

Si A = {(1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4)} y B = {(0, 0), (1, 0)} **calcule A ⊖ B**



https://www.ic.unicamp.br/~helio/

A) {(1, 4), (2, 2), (2, 4)}

B) {(1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4)}

C) {(0, 0), (1, 0)}

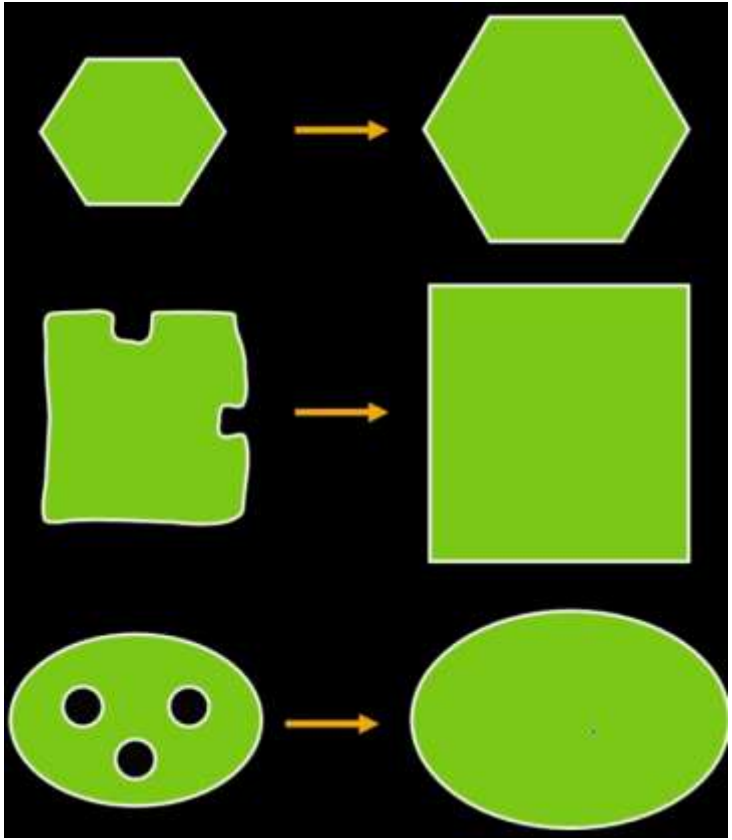
D) {(1, 4), (2, 1), (1, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4)}

Dilatación

- Expande el conjunto de 1’s conectados

Aplicaciones:

- Crecimiento
- Llenar huecos y vacíos



https://classroom.udacity.com/courses/ud810/lessons/3630698740/concepts/36242187440923

Dilatación

- La operación de dilatación entre un conjunto A y el elemento estructurante B está definida como la adición de Minkowski, sin embargo tiene otras definiciones alternativas

$$\mathcal{D}(A, B) = A \oplus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid p = a + b, \exists a \in A \text{ e } \exists b \in B\}$$
$$\mathcal{D}(A, B) = A \oplus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid ((B + p) \cap A) \neq \emptyset\}$$

- De acuerdo a la última ecuación, el proceso de dilatación entre A y B corresponde al conjunto de todas las traslaciones de B con puntos en la imagen en las que hay por lo menos un elemento no nulo en común con el conjunto A
- La traslación del elemento estructurante en la dilación es similar a la convolución!

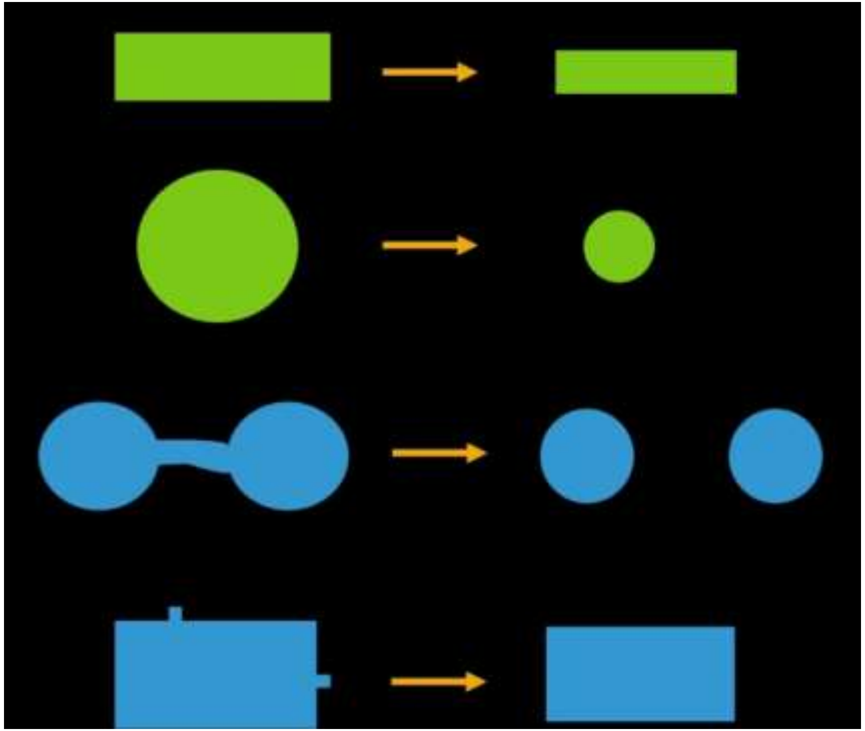
https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Erosión

- Reduce el conjunto de 1’s conectados

Aplicaciones:

- Encoger características
- Remover puentes, ramas y protuberancias



https://classroom.udacity.com/courses/ud810/lessons/3630698740/concepts/36242187440923

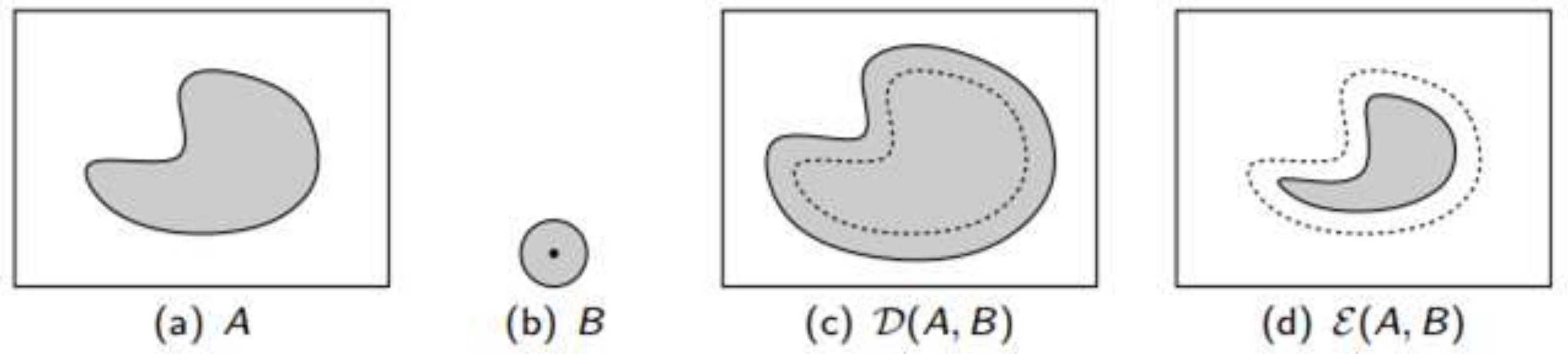
Erosión

- La operación de erosión entre un conjunto A y el elemento estructurante B está definida como la sustracción de Minkowski, sin embargo tiene otras definiciones alternativas

$$\mathcal{D}(A, B) = A \oplus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid p = a - b, \forall b \in B, \exists a \in A\}$$
$$\mathcal{E}(A, B) = A \ominus B = \{p \in \mathbb{Z}^2 \mid B + p \subseteq A\}$$

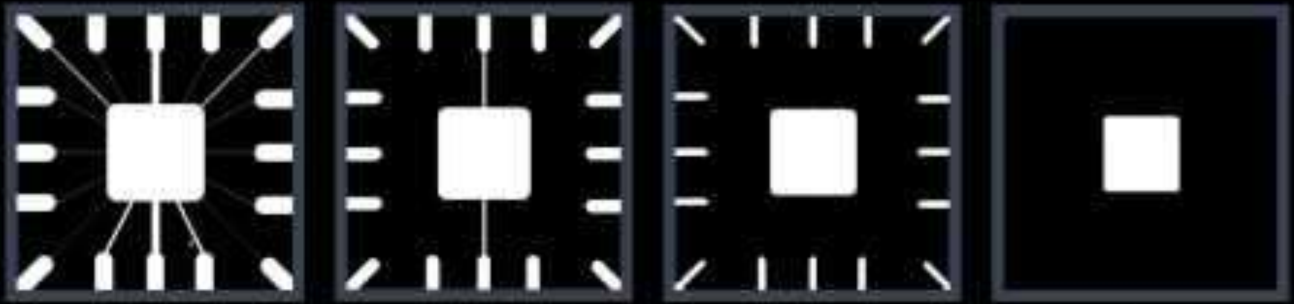
- De acuerdo a la última ecuación, el proceso de erosión entre A y B corresponde al conjunto de todos los elementos de B trasladados por p que están contenidos en A

Erosión y dilatación: una interpretación



https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Effect of disk size on erosion



Original image | Erosion with a disk of radius 5 | Radius 10 | Radius 20

Slide: Ioannis Ivrissimtzis

Notebook

Morfología Matemática

Apertura

- La abertura de A por B, denotada por $A \circ B$, está definida por

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

- Otra formulación es “la unión de todas las traslaciones de B que están contenidas en la imagen A”

$$A \circ B = \bigcup \{(B + p) \mid B + p \subseteq A\}$$

Es decir, la erosión de a por B seguida de una dilación por B

https://www.ic.unicamp.br/~helio/

Cierre

- El cierre de A por B, denotado $A \bullet B$, está definido como

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B$$

que puede ser interpretado geométricamente como la unión de todas las traslaciones de B que no están contenidas en A

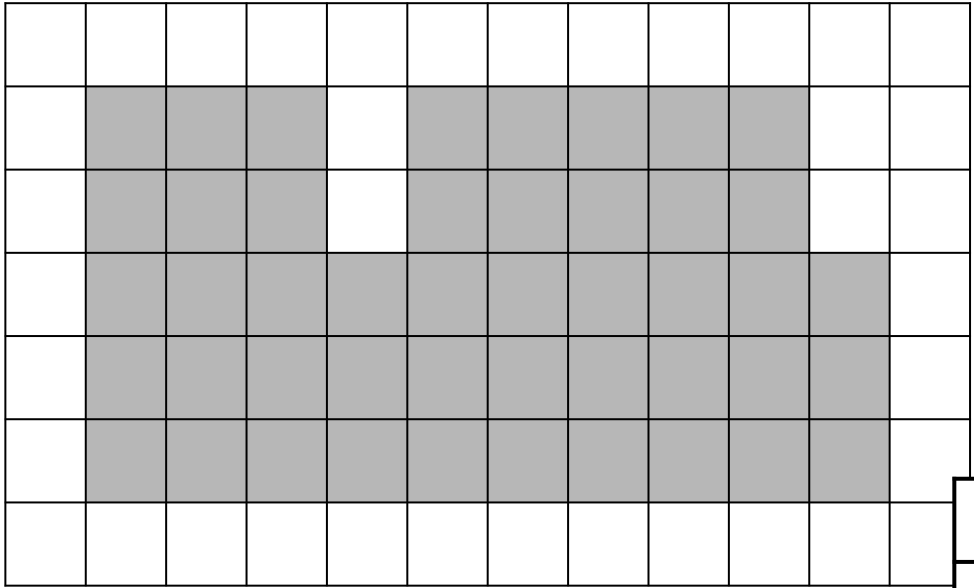
Es decir, es la dilatación de A por B seguida de una erosión del resultado por B

Detección de Bordes

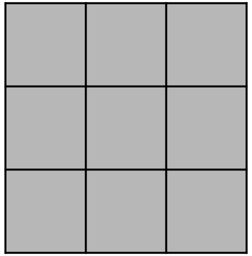
- Se puede usar una combinación de operadores morfológicos para resaltar los bordes, por ejemplo considere

$$A - (A \ominus B)$$

donde, A es una región y B es un elemento estructurante



A

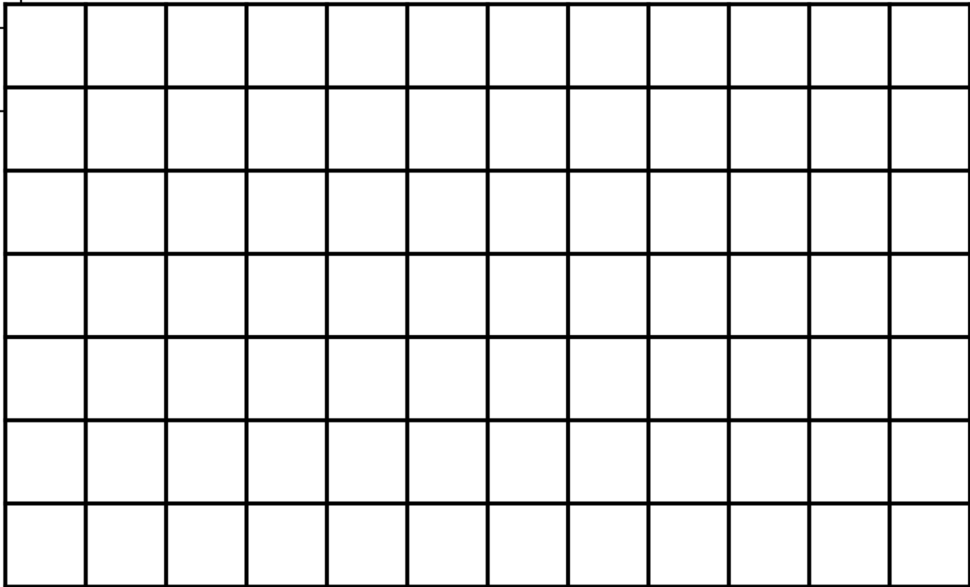


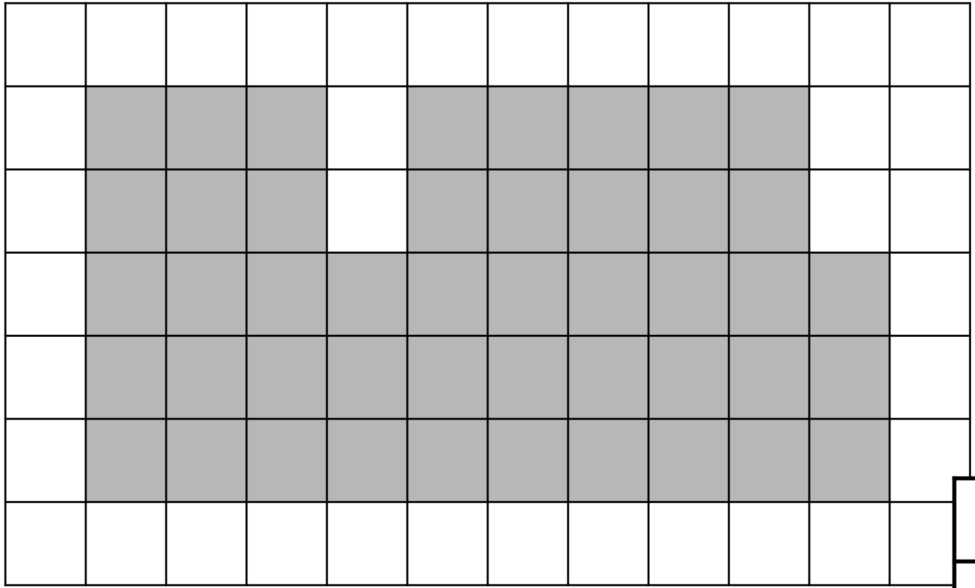
B

Pregunta

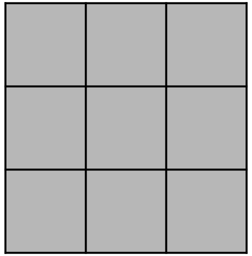
¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$A - (A \ominus B)$



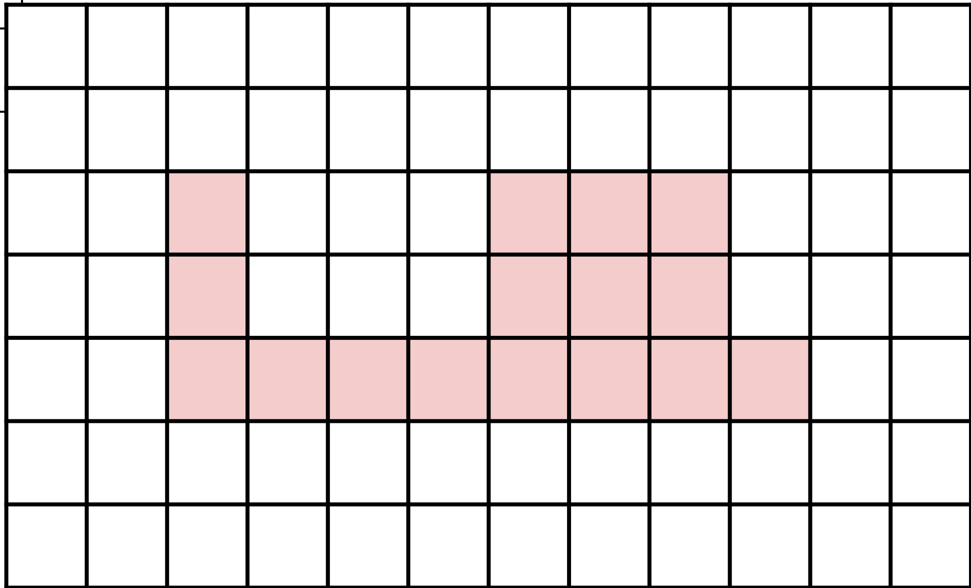


A



B

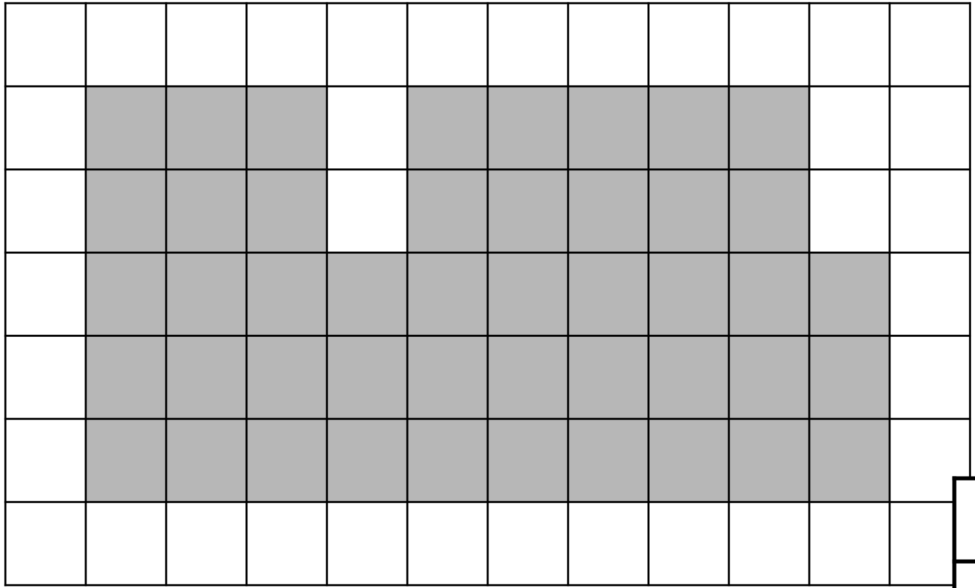
(A ⊖ B)



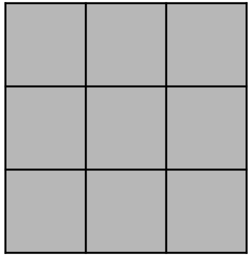
Pregunta

¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

A - (A ⊖ B)

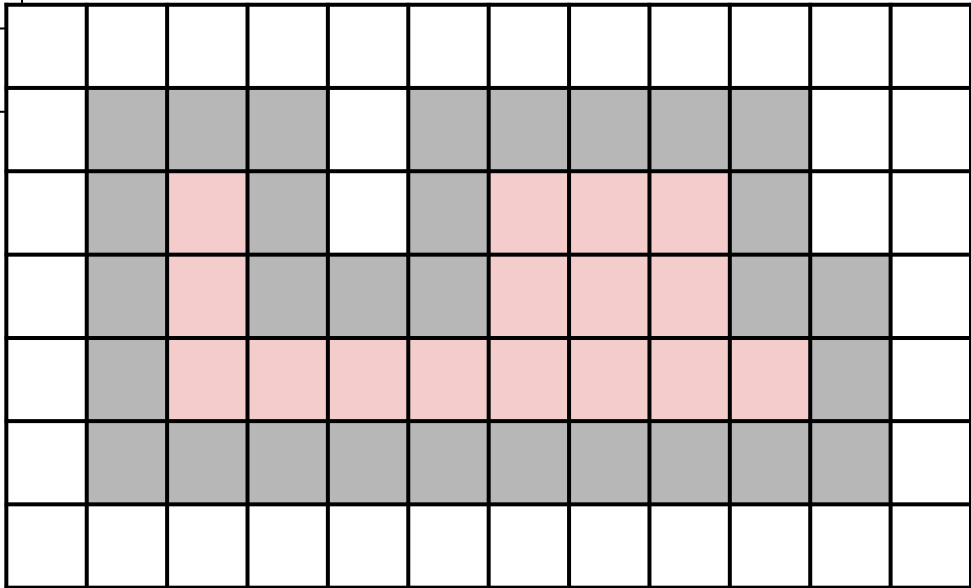


A



B

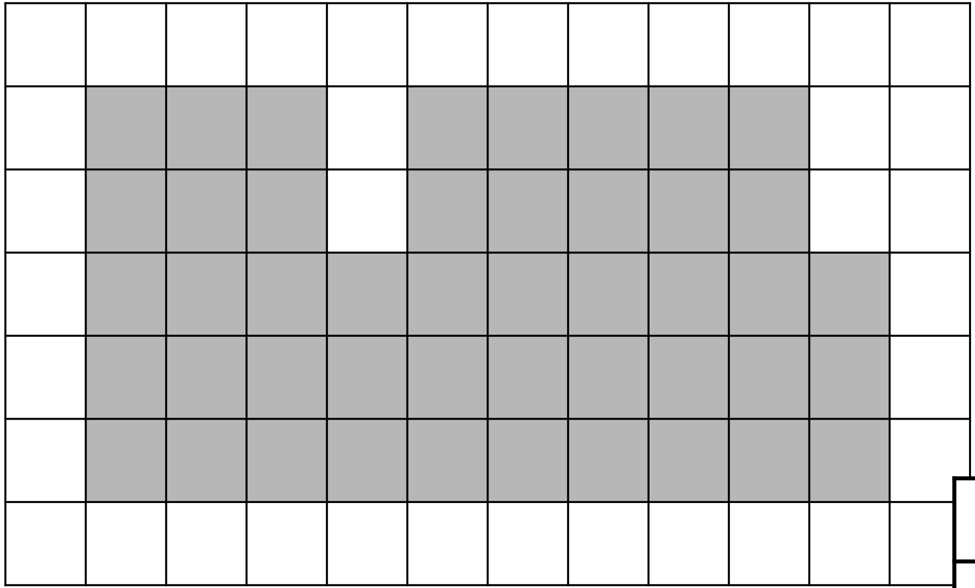
A y (A ⊖ B)



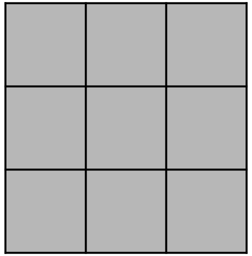
Pregunta

¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

A - (A ⊖ B)



A



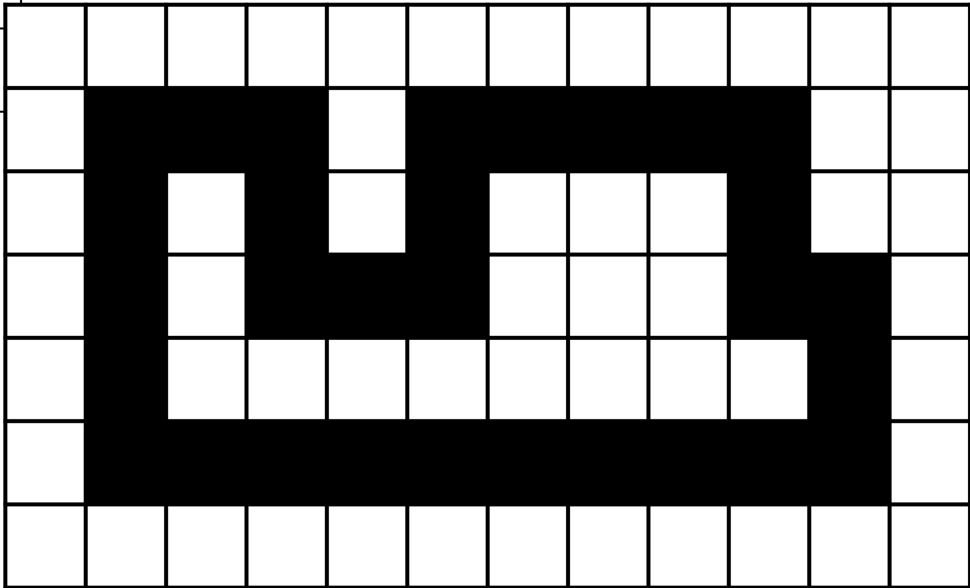
B

Pregunta

¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$A - (A \ominus B)$

$A - (A \ominus B)$



Hit or Miss

0	0	0
No importa	1	No importa
1	1	1

- El elemento estructurante tiene pixeles con 3 valores posibles
  - 0: el valor debe ser 0
  - 1: el valor debe ser 1
  - no importa el valor que sea

https://robotacademy.net.au/lesson/hit-and-miss-transform/

Hit or Miss

¿Cuál es el valor de la transformada Hit-or-Miss para el siguiente caso?

0	0	0
1	1	0
1	1	1

Imagen de entrada

0	0	0
No import a	1	No import a
1	1	1

Elemento Estructurante

A) True

B) False

https://robotacademy.net.au/lesson/hit-and-miss-transform/

Hit or Miss

¿Cuál es el valor de la transformada Hit-or-Miss para el siguiente caso?

0	0	0
1	1	0
1	1	1

Imagen de entrada

0	0	0
No importa	1	No importa
1	1	1

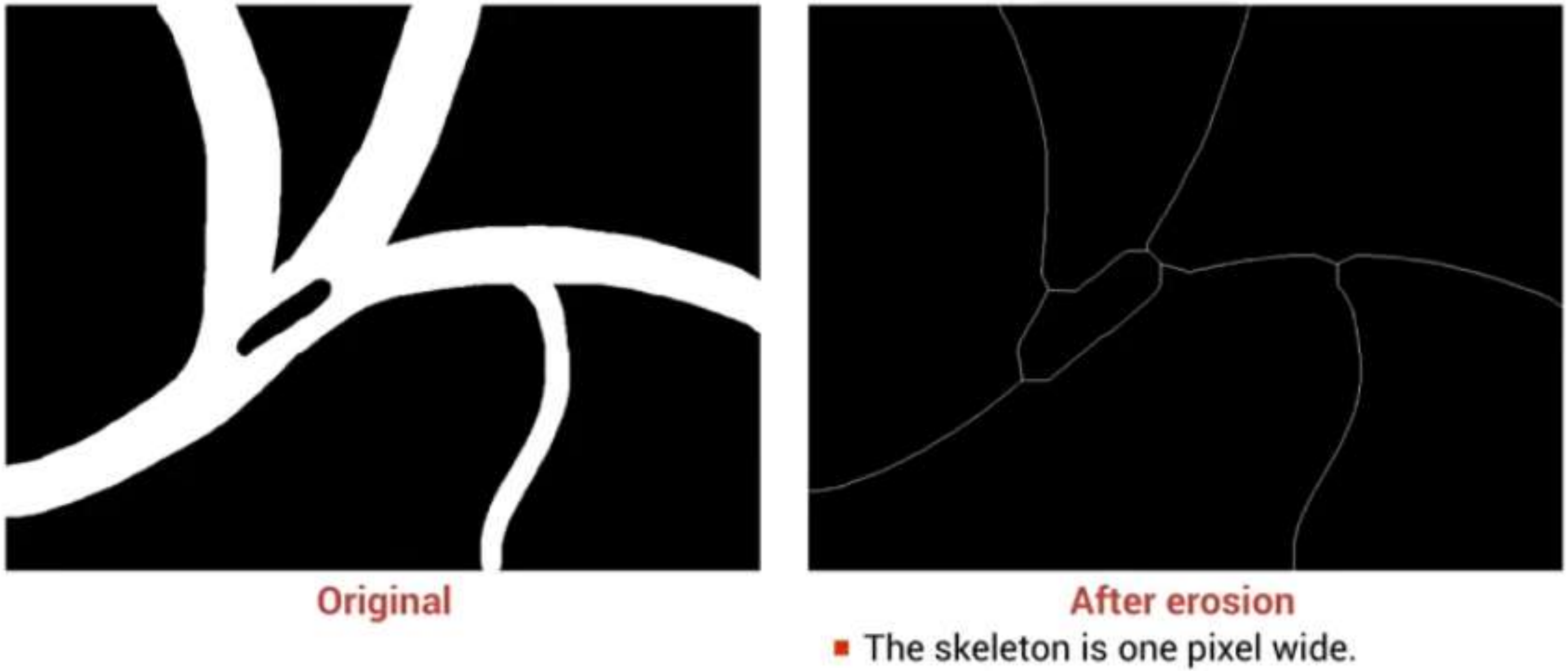
Elemento Estructurante

A) True

B) False

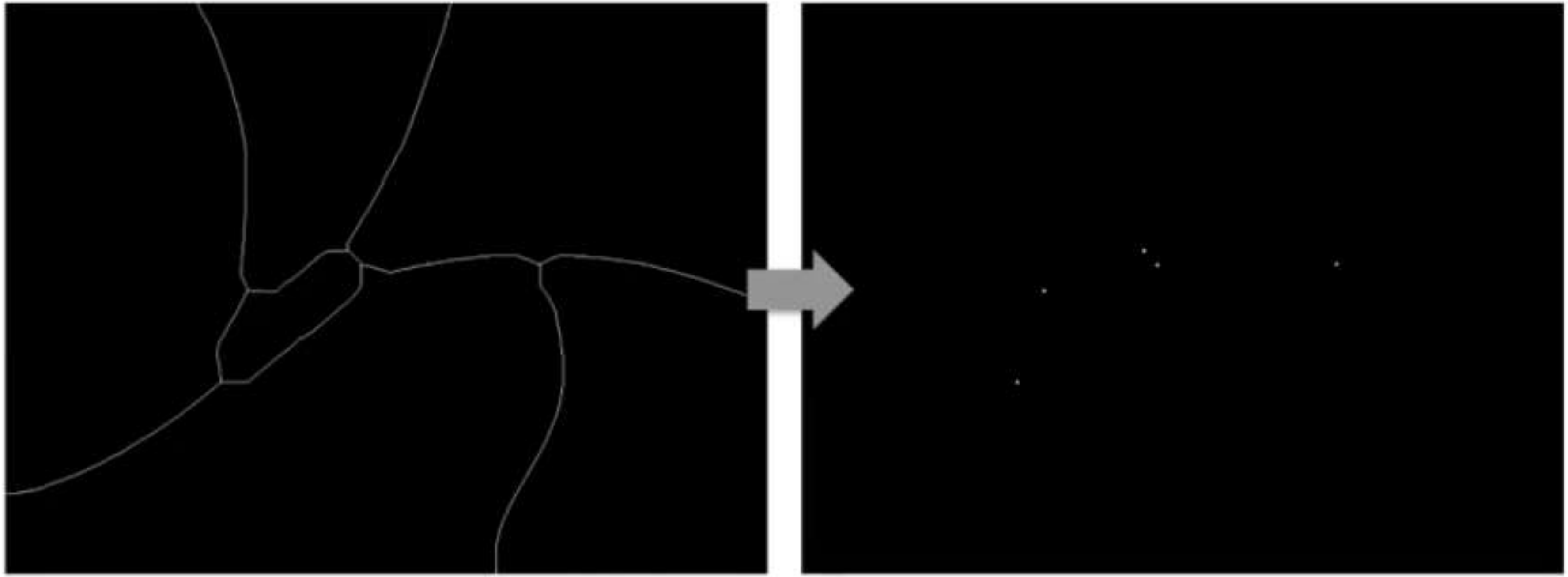
https://robotacademy.net.au/lesson/hit-and-miss-transform/

Aplicaciones de la transformada Hit-or-miss



https://robotacademy.net.au/lesson/hit-and-miss-transform/

Aplicaciones de la transformada Hit-or-miss



https://robotacademy.net.au/lesson/hit-and-miss-transform/

Notebook

Morfología Matemática II

Notebook

Morfología Matemática III