第3章

1，若微波腔和激光光学谐振腔腔长均为 L=1m 的腔，腔镜反射面的横向直径 d=0.01m，假设一微波中心波长 λ_1=0.50m，光波中心波长 $\lambda_2=5.0\times10^{-7}$ m，试求单位频宽内微波腔和激光光学谐振腔各自分布的模式数，并据此说明微波谐振腔和光学谐振腔的差异，及光学谐振腔必须开放的缘故。

解：单位频宽内光波模式数为 $g=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}V=\frac{8\pi}{c\lambda^2}V$

若腔长 L=1m，腔镜反射面的横向直径 d=0.01m。

则单位频宽的模式数为 $g=6.5797*\frac{10^{-12}}{\lambda^2}$

微波腔：$g=6.5797*\frac{10^{-12}}{(0.5)^2}=2.63\times10^{-11}$

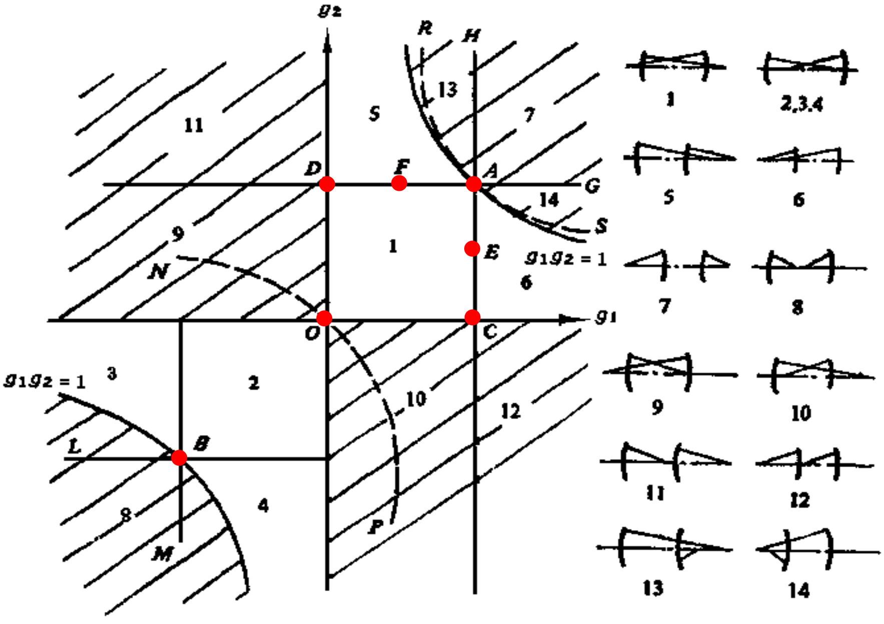
光波腔：$g=6.5797*\frac{10^{-12}}{(5\times10^{-7})^2}=2.63\times10^{1}$

由上可知：相同体积的激光谐振腔内单位频宽的模式数远远大于微波腔内单位频宽的模式数。

光学谐振腔必须开放的原因：要想形成激光，就必须使受激辐射远远超过自发辐射，也即提高光子简并度 δ。而 $\delta=\frac{\phi}{n_\nu}$ 因此在光子数密度 ϕ 一定情况下，必须大大减少光学谐振腔内的模式数密度 n_ν。因此须采用开放式谐振腔，使偏离光轴方向传播的光波模式损耗掉，谐振腔内只保留少数沿光轴方向传播的模式，从而大大减少谐振腔内的模式数，使得轴向光波模式获得极高的光子简并度。

3，根据谐振腔稳定性条件画出 g 因子图，并标出共焦腔、共心腔、平行平面腔、半共焦腔、半共心腔的位置。

答：



对称共焦腔 O 点（0,0）;

共焦腔：NOP 曲线

半共焦腔 E 点（1,0.5）、 F 点（0.5,1）

平行平面腔 A 点（1,1）

共心腔 第一第三象限 g1g2=1 的曲线。

半共心腔 C 点(1,0）、D 点(0,1)。

以 g_1 为横轴，g_2 为纵轴建立直角坐标系，画出 $g_1g_2=1$ 的两条双曲线。由 g_1、g_2 轴和 $g_1g_2=1$ 的两条双曲线可以区分出稳定条件所限定的区域，如图所示。图中没有斜线的部分是谐振腔的稳定工作区，其中包括坐标原点。图中画有斜线的阴影区为不稳定区，在稳定区和非稳区的边界上是临界区。对工作在临界区的腔，只有某些特定的光线才能在腔内往返而不逸出腔外。

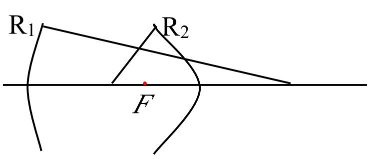
1．稳定腔

(1)双凹稳定腔 由两个凹面镜组成。其中，$R_1>L$，$R_2>L$ 的腔对应图中 1 区；$R_1<L$，$R_2<L$，及 $R_1+R_2>L$ 的腔对应图中 2、3 和 4 区。

(2)平凹稳定腔 由一个平面镜和一个凹面镜组成。其中，凹面镜 $R>L$，它对应图中 AC、AD 段。

(3)凹凸稳定腔 由一个凹面镜和一个凸面镜组成。满足条件 $R_1>0$，$R_2<0$，$R_1>|R_2|$，$R_1>L>R_1-|R_2|$；或 $|R_2|>R_1>L$ 的腔对应图中 5 区。$R_1<0$，$R_2>0$，$R_2>|R_1|$，$R_2>L>R_2-|R_1|$；或 $|R_1|>R_2>L$ 的腔对应图中 6 区。

(4)共焦腔 顾名思义，就是两腔镜的焦点重合的谐振腔；如下图所示，



共焦腔 如图所示这种实共焦腔结构，$g1=1-L/R1>0$, $g2=1-L/R2<0$，故而 g1g2 曲线在第二、第四象限。

对称共焦腔在此基础上两腔镜的曲率半径也相同，都等于谐振腔的腔长，$R_1=R_2=L$，因而 $g_1=0$，$g_2=0$，因此对称共焦腔的焦平面位于谐振腔的中心处，它对应图中的坐标原点。因为任意傍轴光线均可在共焦腔内无限往返而不逸出腔外，所以它是一种稳定腔。但从稳区图上看，原点邻近有非稳区，所以说它是一种很特殊的稳定腔。

(5)半共焦腔　由一个平面镜和一个 $R=2L$ 的凹面镜组成的腔。它对应图中 E 和 F 点。

2．临界腔

(1)平行平面腔　因 $g_1=g_2=1$，它对应图中的 A 点。只有与腔轴平行的光线才能在腔内往返而不逸出腔外。

(2)共心腔　满足条件 $R_2+R_2=L$ 的腔称为共心腔，即两个反射镜的曲率中心重合的谐振腔。如果 $R_1>0$，$R_2>0$，且 $R_1+R_2=L$，公共中心在腔内，称为实共心腔。这时，$g_1<0$，$g_2<0$，$g_1g_2=1$，它对应图中第三象限的 $g_1g_2=1$ 的双曲线。特别，在 $R_1=R_2=R=L/2$，$g_1=g_2=-1$ 时，为对称共心腔，它对应图中 B 点。如果 R_1 和 R_2 异号，且 $R_2+R_2=L$，公共中心在腔外，称为虚共心腔。由于 $g_1>0$，$g_2>0$，$g_1g_2=1$，它对应图中第一象限的 $g_1g_2=1$ 的双曲线。

(3)半共心腔　由一个平面镜和一个凹面镜组成。凹面镜半径 $R=L$，因而，$g_1=1$，$g_2=0$，它对应图中 C 点和 D 点。

实共心腔内有一个光束会聚点，会引起工作物质的破坏；半共心腔的光束会聚点在平面镜上，会引起反射镜的破坏。因此，有实际价值的临界腔只有平行平面腔和虚共心腔。

3．非稳腔

对应图中阴影部分的光学谐振腔都是非稳腔。

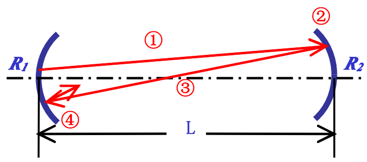
7，试按两种不同往返次序，推导旁轴光线的往返矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，证明在两种情况下**(A+D)/2** 相同。

证明： 各个光学元件对应的变换矩阵为：

自由空间传输 L 距离传输矩阵：$M(L)=\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，

球面反射镜 M_1 所对应的传输矩阵：$M(R_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix}$，

球面反射镜 M_2 所对应的传输矩阵：$M(R_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix}$，



首先求解按次序 1 往返，对应的传输矩阵。

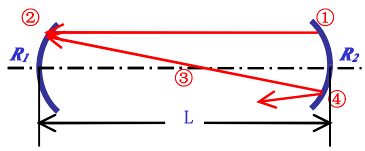
$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=M(R_1)M(L)M(R_2)M(L)$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对应的矩阵元系数为：

$A=1-\frac{2L}{R_2}$， $B=2L\left(1-\frac{L}{R_2}\right)$ ， $C=-\left(\frac{2}{R_1}+\frac{2}{R_2}-\frac{4L}{R_1R_2}\right)$， $D=-\left[\frac{2L}{R_1}-\left(1-\frac{2L}{R_2}\right)\left(1-\frac{2L}{R_2}\right)\right]$

进一步计算可得：

$$(A+D)/2=\left\{1-\frac{2L}{R_2}-\left[\frac{2L}{R_1}-\left(1-\frac{2L}{R_2}\right)\left(1-\frac{2L}{R_2}\right)\right]\right\}/2$$
$$=\frac{2L^2+R_1R_2-2L(R_1+R_2)}{R_1R_2}$$



按次序 2 往返，对应的传输矩阵。

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=M(R_2)M(L)M(R_1)M(L)$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R_1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

对应的矩阵元系数为：

$A=1-\frac{2L}{R_1}$，$B=2L\left(1-\frac{L}{R_1}\right)$ ，$C=-\left(\frac{2}{R_1}+\frac{2}{R_2}-\frac{4L}{R_1R_2}\right)$，$D=-\left[\frac{2L}{R_2}-\left(1-\frac{2L}{R_2}\right)\left(1-\frac{2L}{R_2}\right)\right]$

进一步计算可得：

$$(A+D)/2=\left\{1-\frac{2L}{R_1}-\left[\frac{2L}{R_2}-\left(1-\frac{2L}{R_2}\right)\left(1-\frac{2L}{R_2}\right)\right]\right\}/2$$
$$=\frac{2L^2+R_1R_2-2L(R_1+R_2)}{R_1R_2}$$

即证明。其说明稳定性判据具有普适性。

矩阵的求迹运算性质：$\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$，即可得到***(A+D)/2*** 相同。

8，利用谐振腔的稳定条件说明下列谐振腔的 R_1, R_2 如何选取时为稳定腔。

⑴ 双凹腔　　⑵ 凹凸腔　　⑶ 平凹腔

解：设两镜面相距 L，光学谐振腔的稳定条件为 $0 < g_1 g_2 < 1$ 即

$$0 < (1-\frac{L}{R_1})(1-\frac{L}{R_2}) < 1$$

⑴ 双凹腔：$R_1, R_2 > 0$

由 $(1-\frac{L}{R_1})(1-\frac{L}{R_2}) > 0$ 可得 $R_1 < L, R_2 < L$ 或 $R_1 > L, R_2 > L$

由 $(1-\frac{L}{R_1})(1-\frac{L}{R_2}) < 1$ 可得 $R_1 + R_2 > L$

综上可知当 $R_1 < L, R_2 < L$ 且 $R_1 + R_2 > L$ 时，或 $R_1 > L, R_2 > L$ 时为稳定腔。

⑵ 凹凸腔：$R_1 > 0, R_2 < 0$

由 $(1-\frac{L}{R_1})(1-\frac{L}{R_2}) > 0$ 可得 $R_1 > L$

由 $(1-\frac{L}{R_1})(1-\frac{L}{R_2}) < 1$ 可得 $R_1 + R_2 < L$

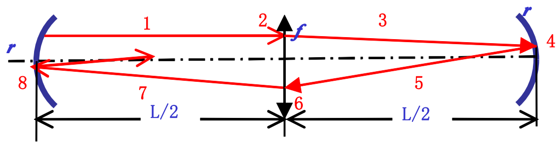
综上可知当 $L < R_1 < L - R_2$ 时为稳定腔。

⑶ 平凹腔：$R_1 = \infty, R_2 > 0$

$(1-\frac{L}{R_1})(1-\frac{L}{R_2}) = 1-\frac{L}{R_2}$ 所以 $0 < 1-\frac{L}{R_2} < 1$

即 $R_2 > L$ 时为稳定腔。

10，若两个曲率半径均为 r，间隔为 L 的球面镜正中间放一个焦距为 f 的薄透镜，请推导该谐振腔的几何稳定性条件。



解：各个光学元件对应的变换矩阵为：

自由空间传输 L/2 距离传输矩阵：$M(L/2)=\begin{pmatrix}1 & L/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，

球面反射镜所对应的传输矩阵：$M(r)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{r} & 1\end{pmatrix}$，

透镜所对应的传输矩阵：$M(f)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f} & 1\end{pmatrix}$，

往返一次所对应的传输矩阵为

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=M(r)M(L/2)M(f)M(L/2)M(r)M(L/2)M(f)M(L/2)$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{r} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & L/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & L/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{r} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & L/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{f} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & L/2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

对应的矩阵元系数为：

$$A=-\frac{8f^2L-6fL^2+L^3-4f^2r+8fLr-2L^2r}{4f^2r},$$

$$B=-\frac{(4f-L)L(-L(L-2r)+4f(L-r))}{8f^2r},$$

$$C=\frac{8f^2(L-r)-2f(3L^2-6Lr+2r^2)+L(L^2-3Lr+2r^2)}{2f^2r^2},$$

$$D=\frac{4f^2(4L^2-6Lr+r^2)+L^2(L^2-3Lr+2r^2)-2fL(4L^2-9Lr+4r^2)}{4f^2r^2}$$

进一步计算可得：

$$\left(A+D\right)/2=\frac{L^2(L-2r)^2+8f^2(2L^2-4Lr+r^2)-8fL(L^2-3Lr+2r^2)}{8f^2r^2}$$

判据为：

$-1<\left(A+D\right)/2<1$，即

$$-1 < \frac{L^2(L-2r)^2 + 8f^2(2L^2 - 4Lr + r^2) - 8fL(L^2 - 3Lr + 2r^2)}{8f^2r^2} < 1$$

$$0 < \frac{(-4fL + L^2 + 4fr - 2Lr)^2}{8f^2r^2} < 2$$