Correction

# Examen de bases de communications numériques
# M1 2021-2022
# Jeudi 09/12/2021

Nom et prénom :

................................

*Durée indicative : 2 heures. Document autorisé : une feuille A4 R/V manuscrite ou non. Autres documents, ordinateurs, téléphones... interdits.*
*Pas de nom indiqué : -2 points.*
*Communication entre vous lors de l'examen = note divisée par 2 pour les 2 personnes impliquées.*
*Cochez la case correspondant à la bonne réponse en noir de la façon suivante : ☒.*
*Bonne réponse = 1 point, mauvaise réponse = −0.25 point, pas de réponse ou réponse incohérente = 0 point.*
*Les questions portant le symbole ♣ sont à choix multiples, les autres à choix simples.*
*Pour les questions ouvertes, pas de points négatifs, le barème est indiqué dans la question.*
*Ce document compte 14 pages.*

*Rappels de Transformée de Fourier :*

| $y(t)$ | $Y(f)$ |
|---|---|
| $1$ | $\delta(f)$ |
| $\exp(j2\pi f_0 t)$ | $\delta(f-f_0)$ |
| $\cos(2\pi f_0 t)$ | $\frac{1}{2}\big(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\big)$ |
| $\sin(2\pi f_0 t)$ | $\frac{1}{2j}\big(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\big)$ |
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $\delta(t-t_0)$ | $\exp(-j2\pi f t_0)$ |
| $\Pi_T(t)$ | $T\,\mathrm{sinc}(\pi f T)$ |
| $\mathrm{sinc}(\pi t/T)$ | $T\Pi_{1/T}(f)$ |
| $\Lambda_T(t)$ | $T\,\mathrm{sinc}^2(\pi f T)$ |
| $x(at)$ | $\frac{1}{\lvert a\rvert}X(f/a)$ |
| $x^*(-t)$ | $X^*(f)$ |
| $ax(t)+by(t)$ | $aX(f)+bY(f)$ |
| $x(t-t_0)$ | $X(f)\exp(-j2\pi f t_0)$ |
| $x(t)\exp(j2\pi f_0 t)$ | $X(f-f_0)$ |
| $x(t)*y(t)$ | $X(f)Y(f)$ |
| $x(t)y(t)$ | $X(f)*Y(f)$ |
| $x(t)\in\mathbb{R}$ | $X(f)=X^*(-f)$ |

*Rappels de trigonométrie :*

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$
$$\cos^2(a)=\frac{1+\cos 2a}{2}$$
$$\sin^2(a)=\frac{1-\cos 2a}{2}$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\big(\cos(a-b)+\cos(a+b)\big)$$
$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$

## Codage NRZ à 4 états

On considère une modulation numérique en bande de base avec le mapping suivant :

| $d_k d_{k+1}$ | $a_n$ |
|---|---|
| 0 0 | -3 |
| 0 1 | -1 |
| 1 0 | 1 |
| 1 1 | 3 |

et la forme d'onde d'émission $h_T(t)$ définie de la façon suivante :

$$h_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $T = 200$ $\mu$s la durée d'un symbole de modulation. Les bits transmis $d_k$ sont supposés indépendants et de probabilité d'apparition identique, i.e. $P(d_k = 1) = P(d_k = 0) = \frac{1}{2}$.

**Question 1** Quelle est l'expression du signal $s(t)$ transmis ?

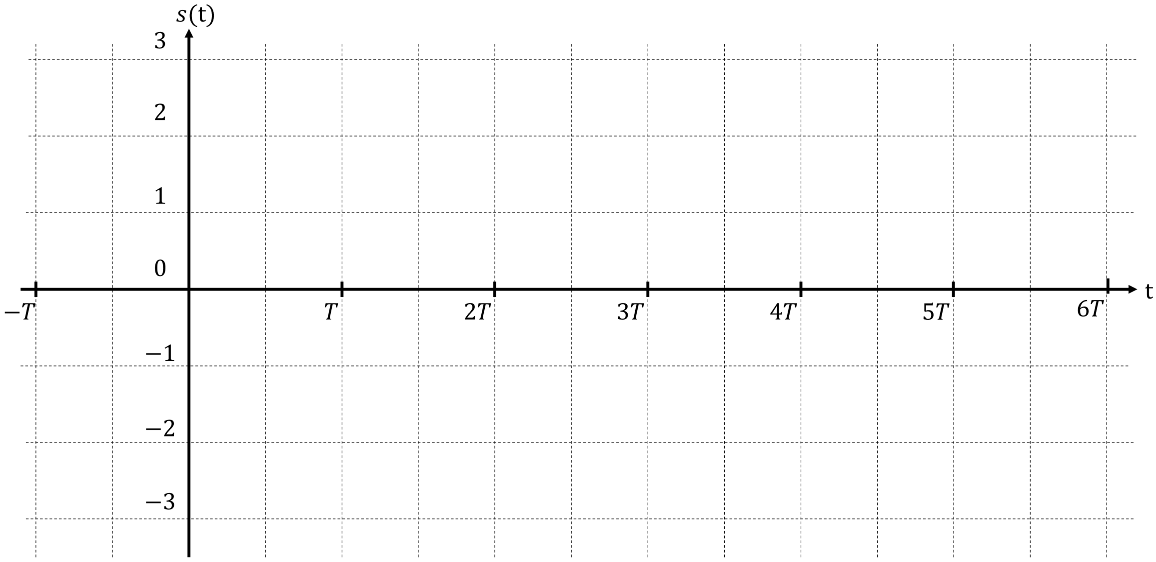
- ☐ $s(t) = \sum_n \exp\big(j\pi a_n/4\big) h_T(t - nT)$
- ☐ $s(t) = \sum_k d_k h_T(t - kT)$
- ☐ $s(t) = \sum_n a_n \operatorname{sinc}(t/T - n)$
- ■ $s(t) = \sum_n a_n h_T(t - nT)$

**Question 2** Que signifie le terme *transmission en bande de base* ?

- ☐ Une transmission dont le spectre s'annule autour de la fréquence nulle.
- ☐ Une transmission dont le signal transmis est un signal réel.
- ■ Une transmission dont le spectre du signal émis est centré autour de la fréquence nulle.
- ☐ Une transmission dont le spectre du signal émis est passe-bande et centré autour d'une fréquence porteuse largement supérieure à 0.

Correction

**Question 3** On suppose que les bits à transmettre sont 0010 1101 1001, on vous demande de tracer le signal émis $s(t)$ dans la figure ci-dessous.




On vous demande de justifier brièvement votre résultat dans l'encart ci-dessous : ☐ f ☐ p ■ v *Reservé*

***Explication :*** En suivant la table de mapping, il vient $a_0 = -3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = -1$, $a_4 = 1$ et $a_5 = -1$. Le signal transmis s'obtient en réalisant l'opération suivante :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{5} a_n \Pi_T(t - nT)$$

**Question 4** Combien vaut le débit de la transmission ?

☐ 5 kbits/s ☐ 100 Mbits/s ☐ 200 Mbits/s ■ 10 kbits/s

***Explication :***

$$D_b = \frac{m}{T} = \frac{2}{200 \times 10^{-6}} = 10 \quad \text{kbit/s}$$

**Question 5** Est-ce que le mapping utilisé suit un codage de Gray ?.

☐ Oui. ☐ Ca dépend. ■ Non.

***Explication :*** Deux symboles adjacents, $-1$ et $+1$ ont 2 bits de différences ce qui est contraire au principe de codage de Gray.

**Question 6** Combien vaut la moyenne des symboles que nous noterons $m_a = \mathbb{E}\{a_n\}$ ?.

☐ 2 ☐ $-1$ ■ 0 ☐ 1

***Explication :***

$$m_a = \mathbb{E}\{a_n\} = \sum_{\alpha \in [-3,-1,1,3]} \alpha P(a_n = \alpha) = \frac{-3}{4} + \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 0$$

**Question 7** Combien vaut la variance des symboles que nous noterons $\sigma_a^2 = \mathbb{E}\{a_n\} - m_a^2$ ?.

■ 5 ☐ 10 ☐ 1 ☐ 4

***Explication :***

$$\sigma_a^2 = \mathbb{E}\{a_n\} - m_a^2 = \sum_{\alpha \in [-3,-1,1,3]} |\alpha| 2P(a_n = \alpha) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = 5$$

**Question 8** Combien vaut la covariance centrée des symboles que nous noterons $C_{aa}[n] = \mathbb{E}\{a_k a_{k+n}^*\} - m_a^2$ ? pour $n \geq 1$.

- ■ $0, \forall n \geq 1$
- □ $-1/4$ pour $n = 1$ et $0$ pour $n > 1$
- □ $1, \forall n \geq 1$
- □ $1/4$ pour $n = 1$ et $0$ pour $n > 1$

***Explication :***

$$
\begin{aligned}
R_{aa} = \mathbb{E}\{a_k a_{k+n}^*\} &= \sum_{\alpha,\beta \in [-3,-1,1,3]} \alpha\beta^* P(a_n = \alpha) P(a_{k+n} = \beta) \\
&= \frac{-3 \times (-3 + -1 + 1 + 3)}{16} + \frac{-1 \times (-3 + -1 + 1 + 3)}{16} + \frac{1 \times (-3 + -1 + 1 + 3)}{16} + \frac{3 \times (-3 + -1 + 1 + 3)}{16} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ainsi $C_{aa}[n] = 0$ pour $n \geq 1$

**Question 9** On rappelle que la densité spectrale de puissance de signal transmis $s(t)$ s'écrit de la façon suivante :

$$S_{ss}(f) = |H_T(f)|^2 S_{xx}(f)$$

avec $S_{xx}(f)$ qui se calcule à partir de la formule de Bennett :

$$S_{xx}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty} C_{aa}[n]\cos(2\pi n f T) + \frac{m_a^2}{T^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\big(f - \frac{n}{T}\big)$$

A partir des questions précédentes, calculez $S_{ss}(f)$ pour la modulation considérée (1 points) :

☐f ☐p ■v *Reservé*

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

............................................................................................................

***Explication :*** On a $m_a = 0$, $\sigma_a^2 = 1$ et $C_{aa}[n] = 0$ pour $n \geq 1$, en appliquant la formule de Bennett il vient :$S_{xx}(f) = \frac{5}{T}$. Par ailleurs on a : $\Pi_T(t) \overset{\text{TF}}{\rightleftharpoons} T\,\text{sinc}\Big(\pi f T\Big)$ il vient finalement :

$$S_{ss}(f) = 5\frac{|H_T(f)|^2}{T} = 5T\,\text{sinc}^2(\pi f T)$$

CORRECTION

**Question 10** Combien vaut la puissance moyenne du signal $s(t)$ ? en déduire l'énergie d'un symbole $E_s$ puis l'énergie d'un bit (2 points).
On rappelle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(x)dx = \pi$$

☐ f ☐ p ■ v *Reservé*

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

.........................................................................................................................

***Explication :*** on a $P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ss}(f)df$. En posant $x = \pi f T$, il vient $dx = \pi T df$ puis $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(\pi f T)df = \frac{1}{T}$. Ainsi on obtient $P_s = \frac{5T}{T} = 5$ Watts puis $E_s = 5T = 1$ mJ et $E_b = \frac{P_s T}{2} = 0.5$ mJ.

## Critère de Nyquist

On considère toujours une modulation numérique en bande de base mais cette fois avec le mapping suivant :

Correction

| $d_n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 0 | +1 |
| 1 | -1 |

Le filtre de mise en forme d'onde est noté $h_T(t)$, le canal de propagation est modélisé par le filtre $h_c(\tau) = \delta(\tau)$ tandis que le filtre de réception est noté $h_R(t)$. En absence de bruit, le signal obtenu en sortie de filtre de réception s'écrit :

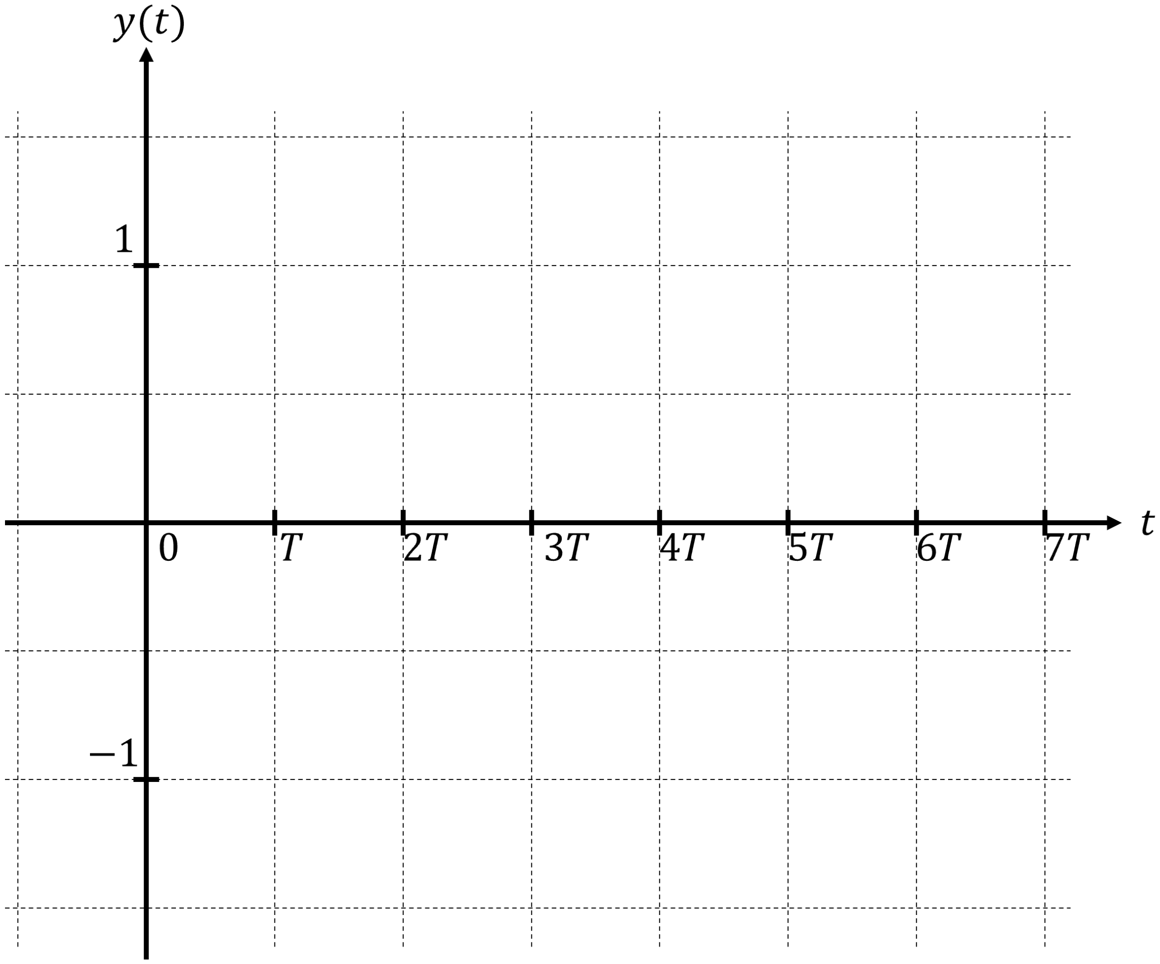
$$y(t) = \sum_n a_n g(t - nT)$$

où $g(t) = h_R(t) * h_c(t) * h_T(t)$. On suppose que $g(t)$ s'exprime de la façon suivante :

$$g(t) = \begin{cases} 1 - t/T_0 & \text{si } 0 \leq t < T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction

**Question 11** On suppose dans un premier temps que $T_0 = 2T$. Représentez sur la figure ci-dessous le signal $y(t)$ lorsque les bits $\{d_n\}$ sont égaux respectivement à $[0, 1, 0, 0, 1, 0]$ pour $0 \leq n \leq 5$. En déduire ensuite les valeurs de $y_k = y(kT)$ pour $0 \leq k \leq 5$.




On vous demande de justifier brièvement votre résultat dans l'encart ci-dessous :

f p v *Reservé*

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

.....................................................................................................

***Explication :*** on a $a_k = [+1, -1, +1, +1, -1, +1]$. Si $T_0 = 2T$ on a $g(0) = 1$, $g(T) = 0.5$ et $g(kT) = 0$ pour $k \neq \{0, 1\}$. Ainsi on montre que

$$y(kT) = g(0)a_k + \frac{1}{2}a_{k-1}$$

Cela donne $y_k = [+1, -0.5, +0.5, +1.5, -0.5, +0.5]$.

**Question 12** Avec les hypothèses précédentes, est-ce que la séquence $\{y_k\}$ contient de l'interférence entre symboles ?

- ☐ Oui, car $g(t)$ a une durée supérieure à $T$.
- ☐ Non, car le critère de Nyquist est respecté pour la fonction $g(t)$.
- ■ Oui, car le critère de Nyquist n'est pas respecté pour la fonction $g(t)$.
- ☐ Non, car il n'y a pas de bruit additif dans la transmission.

***Explication :*** Le critère de Nyquist n'est pas respecté donc la séquence $\{y_k\}$ contient de l'interférence entre symboles.

**Question 13** On suppose à présent que $T_0 = T$. Sans recalculer les valeurs de $\{y_k\}$, est-ce que la séquence $\{y_k\}$ contient de l'interférence entre symboles ? justifier votre réponse.

☐f ☐p ■v *Reservé*

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

***Explication :*** Le critère de Nyquist est a présent respecté donc la séquence $\{y_k\}$ ne contient pas d'interférence entre symboles.

---

## Modulation sur fréquence porteuse

On considère une transmission sur fréquence porteuse de type BPSK (Binary Phase Shift Keying) qui convertit

une suite de bits $\{d_n\}$ en un signal modulé $s(t)$ autour de la fréquence porteuse $f_0$. Le signal modulé s'écrit de la façon suivante :

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_T(t - nT)\cos(2\pi f_0 t + \phi_n)$$

avec $T = 1$ ms représentant la durée d'un symbole et $h_T(t)$ le filtre de mise en forme défini comme :

$$h_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction

Le mapping est le suivant :

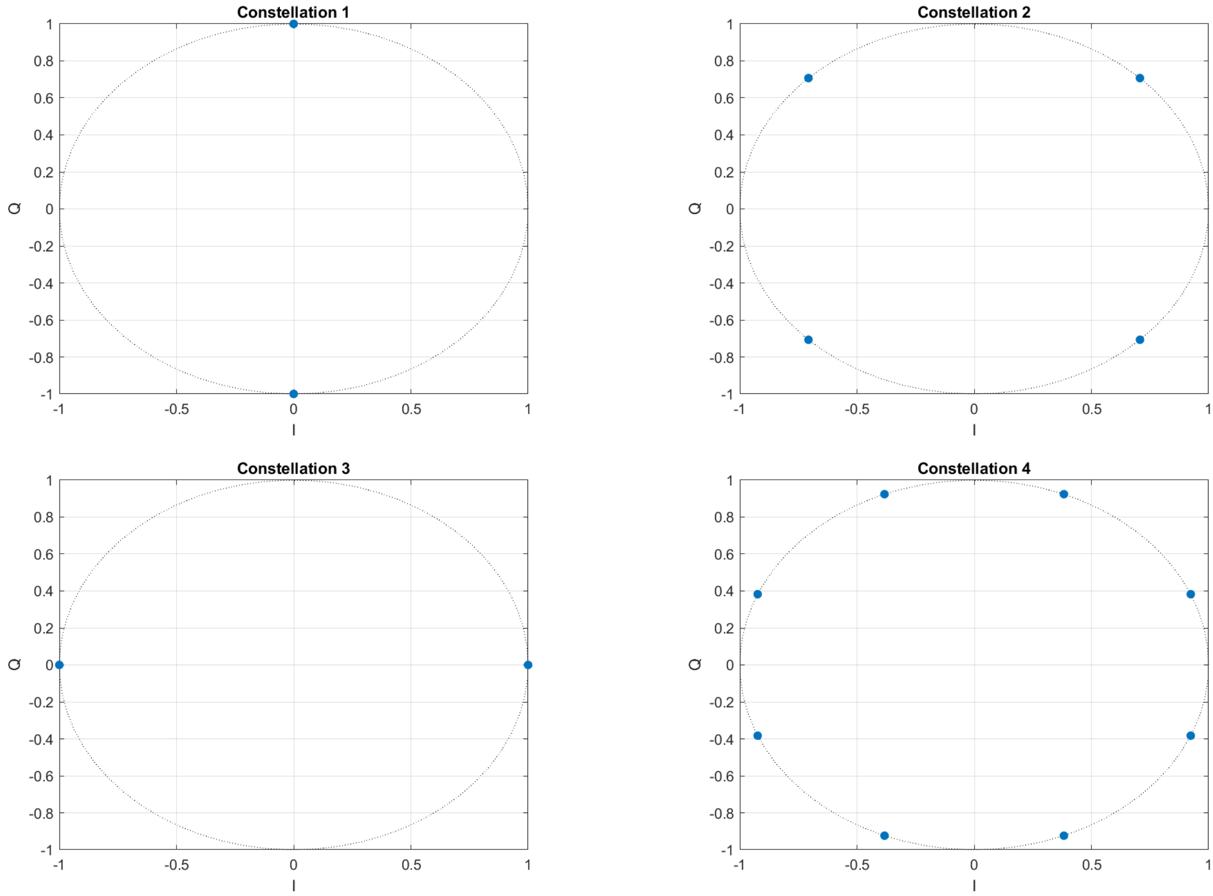
| $d_n$ | $\phi_n$ |
|---|---|
| 0 | $\pi$ |
| 1 | 0 |

**Question 14** Combien vaut l'enveloppe complexe du signal $s(t)$ que nous noterons $\tilde{s}(t)$ ?

- ☐ $\tilde{s}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_T(t-nT)\sin(\phi_n)$
- ■ $\tilde{s}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_T(t-nT)e^{j\phi_n}$
- ☐ $\tilde{s}(t) = e^{j\phi_n}$
- ☐ $\tilde{s}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_T(t-nT)\cos(\phi_n)$

***Explication :***

**Question 15** Soient les 4 constellations suivantes :

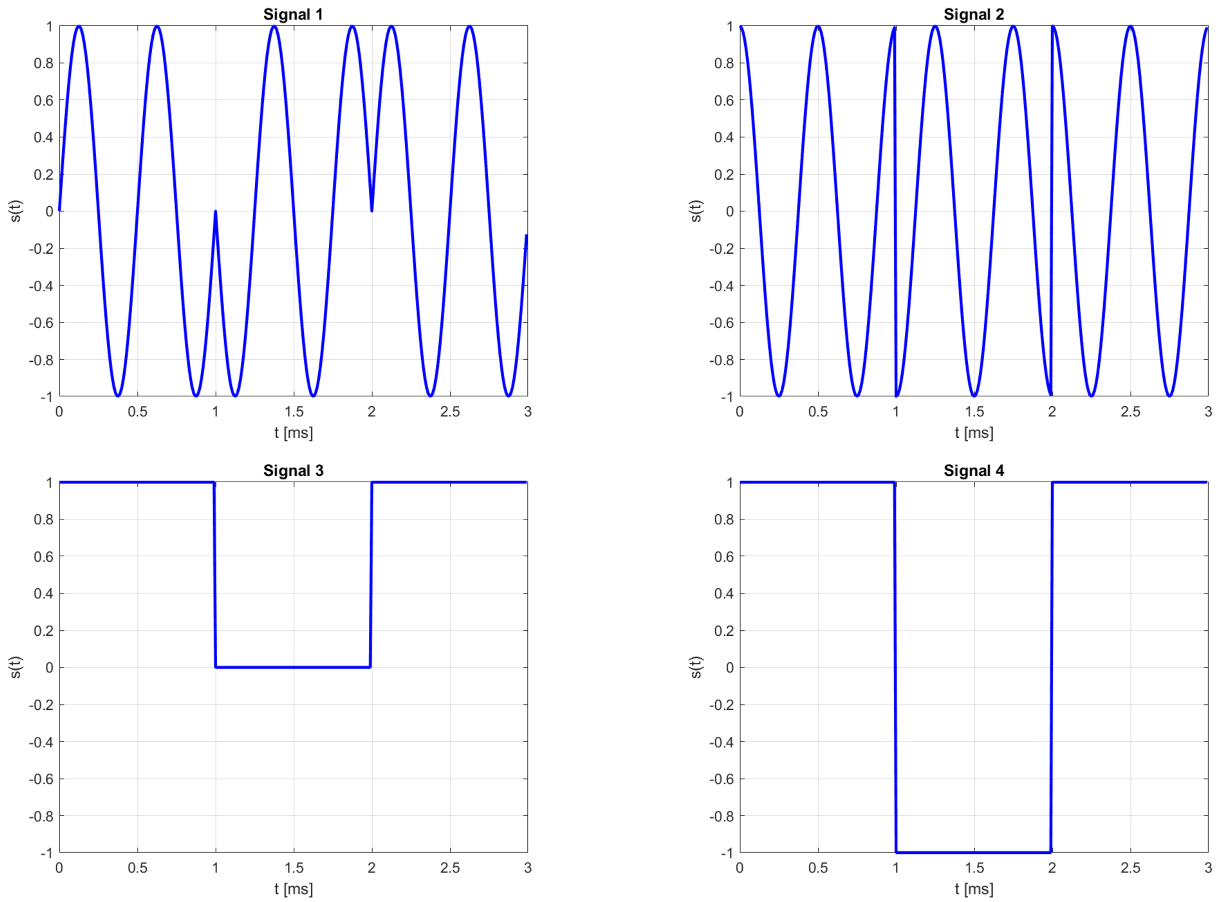



Laquelle correspond à la modulation numérique considérée ?

- [ ] Constellation 4.
- [ ] Aucune de ces constellations.
- [x] Constellation 3.
- [ ] Constellation 1.
- [ ] Constellation 2.

***Explication :*** il faut afficher chacun des symboles $a_n = i_n + jq_n$ dans le plan complexe, où la partie réelle correspond à la voie $I$ et la partie complexe à la voie Q.

**Question 16** En supposant $f_0 = 2/T$ et que la séquence de bits émise est $\{1, 0, 1\}$, parmi les 4 propositions suivantes laquelle correspond au signal $s(t)$ ?




- ■ Signal 2.
- □ Signal 1.
- □ Signal 3.
- □ Signal 4.
- □ Aucune de ces figures.

***Explication :*** La séquence de bit émise donne $\{\phi_n\} = [0, \pi, 0]$ c'est à dire $\{a_n\} = [1, -1, 1]$. Le signal émis s'écrit donc :

$$s(t) = \sum_n i_n h_T(t - nT) \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{avec } i_n = \Re\{a_n\}$$

Pour $0 \leq t \leq T$ on a ainsi $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, seul le signal 2 correspond.

Correction

**Question 17** On suppose que le signal émis traverse un canal qui a pour seul effet d'ajouter un bruit Gaussien. Soit $r(t)$ le signal obtenu en sortie de ce canal. Représentez le schéma du récepteur permettant de décoder le signal $r(t)$ et estimer les bits émis que nous noterons $\hat{d}_k$. Si vous utilisez un filtre de réception, expliquez quel filtre vous choisissez et justifiez votre choix. ? (2 points)

☐ f ☐ p ■ v *Reservé*

***Explication :*** Le schéma de réception doit comprendre d'abord une conversion en bande de base, une multiplication par $exp(-j2\pi f_0 t$ puis un filtrage passe bas. Si on souhaite que le filtrage soit optimal, il faut que le filtre de réception soit tel que $h_R(t) = h_T(-t)^*$. En sortie de filtrage il faut échantillonner tous les $kT$ avec $y_k = y(kT)$ puis prendre une décision telle que :

$$\hat{d}_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \Re(y_k) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$