ISEL	ESTRUTURAS DE DADOS E ALGORITMOS	LEE Engenharia de Sistemas
Sumário: Ficha prática 3		**Duração**: 1 Aula

PARTE 1

Pretende-se aumentar a definição da classe Matrix iniciada na ficha anterior com os seguintes novos métodos:

```
class Matrix
{
 . . .
public:
. . .
       float GetDeterminant( ); // Devolve 0 em caso de não ser uma matriz quadrada
       Matrix GetInverse();     // Se não for possível calcular a inversa devolve uma
                                // matriz vazia


};
```

Sabe-se que uma das condições necessárias e suficientes duma matriz quadrada ter matriz inversa é que o valor do respetivo determinante seja diferente de zero. Uma das formas possiveis de calcular o determinante duma matriz quadrada é utilizar a fatorização $A = LU$, sabendo que,

$$\det(A) = (-1)^k \det(U),$$

Em que k é o número de trocas de linhas que existiu para calcular U (como no algoritmo da ficha anterior não existe qualquer troca de linhas, fica-se com a seguinte expressão,

$$\det(A) = \det(U)$$

$$\det(U) = \prod_{i=0}^{n-1} a_{ii}$$

Exemplos:

1. Calcular o determinante da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

Relembrando que esta matriz pode ser fatorizada do seguinte modo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 15/8 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} = [L] \times [U]$$

Logo o det(A) é igual a,

$$\det(A) = \det(U) = 1 \times -8 \times -12 = 96$$

2.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [L] \times [U]$$

$$\det(B) = 4 \times 3 \times 0 = 0$$

PARTE 2

Pretende-se desenvolver um método da classe Matrix que calcule a respetiva matriz inversa. Uma das formas de calcular a matriz inversa é através da decomposição LU da matriz. Sabe-se que se a matriz inversa existir, ela é única e tem-se a seguinte expressão:

$$[A][B] = [I]$$

Sendo a matriz $[B]$ a matriz inversa que se pretende calcular. Se atendermos à expressão anterior pode-se retirar as seguintes equações:

$$[A] \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[A] \times \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$[A] \times \begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Equações estas que podem ser resolvidas através do método de decomposição LU.

Veja-se o caso da primeira equação:

$$[L][U] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo $[U][B_i] = [Y_i]$, fica-se com,

$$[L][Y_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Expandindo fica-se com o seguinte conjunto de equações para a primeira coluna,

$$\begin{aligned} y_{11} &= 1 \\ y_{21} &= -l_{21}y_{11} \\ y_{31} &= -(l_{31}y_{11} + l_{32}y_{21}) \\ &\vdots \\ y_{n1} &= -\left(l_{n1}y_{11} + l_{n2}y_{21} + \cdots + l_{n,n-1}y_{n-1,1}\right) \end{aligned}$$

Que se pode escrever de uma forma compacta,

$$y_{i1} = \begin{cases} 1 - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_{k1}, & i = 1 \\ 0 - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_{k1}, & i \neq 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

Para a 2ª coluna tem-se o seguinte conjunto de equações,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_{12} &= 0 \\ y_{22} &= 1 - l_{21}y_{12} = 1 \\ y_{32} &= -(l_{31}y_{12} + l_{32}y_{22}) \\ &\vdots \\ y_{n2} &= -\left(l_{n1}y_{12} + l_{n2}y_{22} + \cdots + l_{n,n-1}y_{n-1,2}\right) \end{aligned}$$

Que de forma compacta também tem uma expressão idêntica,

$$y_{i2} = \begin{cases} 1 - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_{k2}, & i = 2 \\ 0 - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_{k2}, & i \neq 2 \end{cases} \tag{3.2}$$

Que se pode generalizar da seguinte forma para a *n-ésima* coluna,

$$y_{in} = \begin{cases} 1 - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_{kn}, & i = n \\ 0 - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_{kn}, & i \neq n \end{cases} \tag{3.3}$$

A seguir faz-se a substituição em $[U][B_i] = [Y_i]$ para as várias colunas que fazem parte a matriz $[B]$. Assim para a 1ª coluna de $[B]$, tem-se a expressão,

$$b_{i1} = \frac{1}{u_{ii}}\left(y_{i1} - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}b_{k1}\right) \tag{4.1}$$

Para a 2ª coluna,

$$b_{i2} = \frac{1}{u_{ii}}\left(y_{i2} - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}b_{k2}\right) \tag{4.2}$$

Generalizando para a última coluna,

$$b_{in} = \frac{1}{u_{ii}}\left(y_{in} - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}b_{kn}\right) \tag{4.3}$$

Após este cálculo fica encontrada a matriz inversa que se pretendia.

Exemplo:

Pretente-se calcular a matriz inversa de

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Primeiramente calcula-se as matrizes LU,

$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $[U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

A seguir vai-se calcular a matriz Y coluna por coluna, a partir das equações (3.1)(3.2) e (3.3)

$[L][Y_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[L][Y_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $[L][Y_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$[Y_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$, $[Y_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $[Y_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Agora substituindo cada vetor coluna $[Y_i]$ na expressão $[U][B_i] = [Y_i]$, encontra-se a matriz B, a matriz inversa da matriz $[A]$, para tal utiliza-se o conjunto de equações 4.x,

$[B_1] = \begin{bmatrix} -11 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $[B_2] = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $[B_3] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, ou,

$$[B] = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [A]^{-1}$$