

Controlo de Sistemas

Erro estacionário



Alexandra Moutinho

Dep. Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa,
(alexandra.moutinho@tecnico.ulisboa.pt)

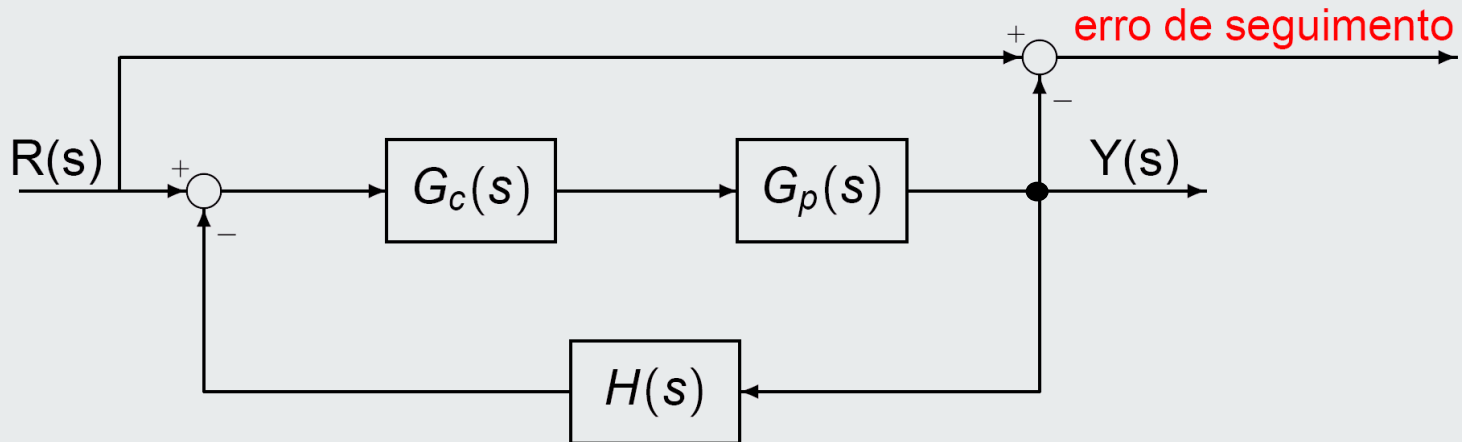
- Resposta em frequência
 - Diagrama de Nyquist
- Análise de estabilidade
 - Critério de Nyquist

- Erro estacionário

- Erros num sistema de controlo devem-se a vários fatores:
 - Variações da referência de entrada originam erros no período transiente e podem causar erros estacionários
 - Imperfeições (ex. atrito, folgas), envelhecimento e deterioração dos componentes do sistema causam erros estacionários
 - Tipo do sistema pode limitar o seguimento de certos tipos de referência, originando erros estacionários

Erro estacionário do anel fechado

- Erro estacionário do anel fechado:** diferença entre o valor da referência (*o que se pretende atingir*) e o valor da variável controlada (*saída do sistema*) em regime estacionário



- Objetivo:** erro estacionário de seguimento nulo

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow +\infty} [r(t) - y(t)] = 0$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s[R(s) - Y(s)] = 0$$

Teorema do valor final válido para sistemas estáveis!

Erro estacionário do anel fechado

- Exemplos de requisito de controlo de precisão (erro estacionário nulo):
 - Plataforma cirúrgica robotizada, RAVEN I, desenvolvida no laboratório de BioRobotics da University of Washington)



Erro estacionário do anel fechado

- Exemplos de requisito de controlo de precisão (erro estacionário nulo):
 - Aterragem autónoma de drones (exemplo de aterragem num veículo terrestre, trabalho desenvolvido pela University of Waterloo)



Exemplo: Antena de radiotelescópio

- Num sistema de controlo de posição de antena pode-se pretender seguir:
 - Um satélite geoestacionário
 - Um satélite com velocidade constante
 - Um míssil em aceleração

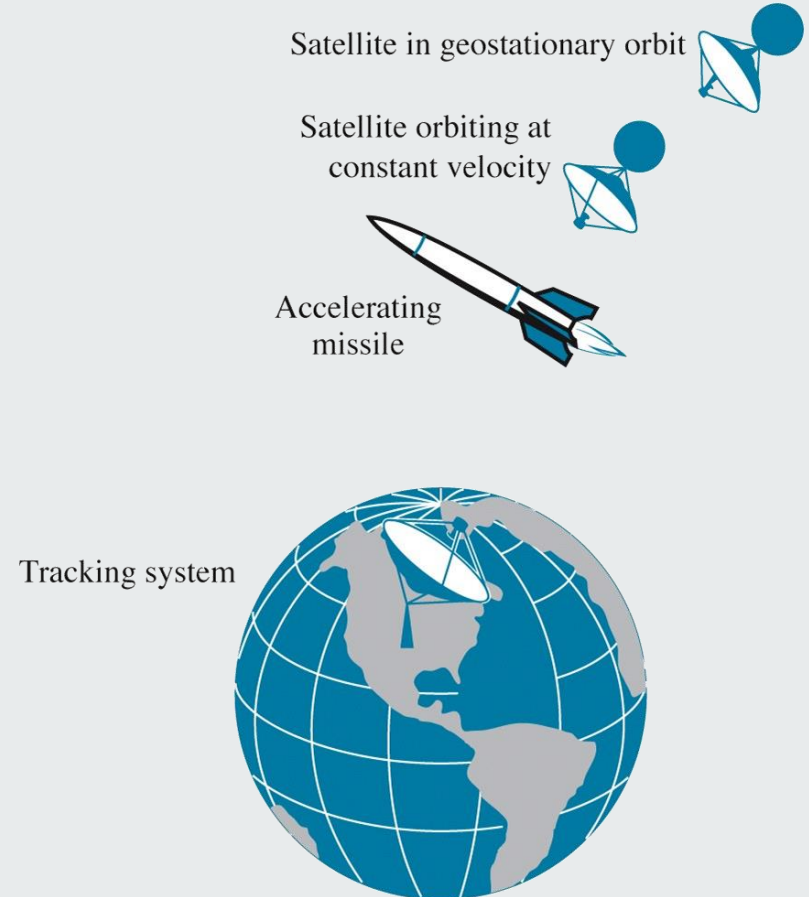


Figure 7.1
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Tipos de
entradas
utilizadas na
avaliação de
erros
estacionários

$(r(t) \equiv \text{posição})$

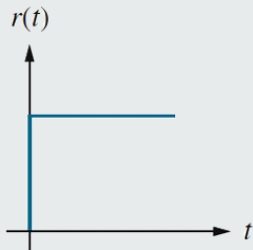
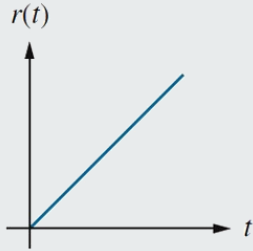
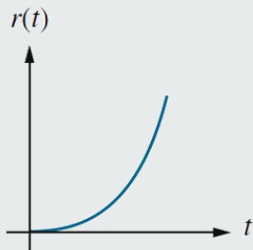
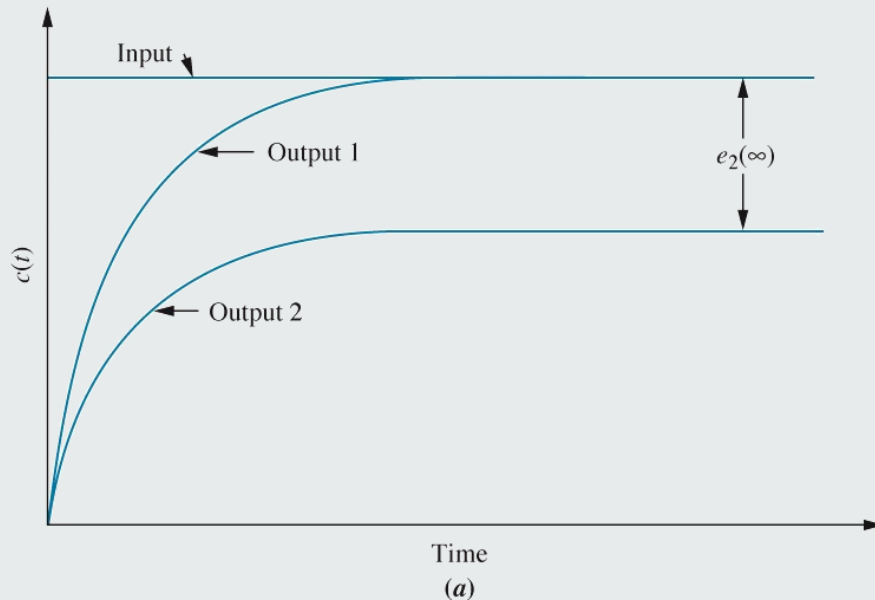
Waveform	Name	Physical interpretation	Time function	Laplace transform
	Step	Constant position	1	$\frac{1}{s}$
	Ramp	Constant velocity	t	$\frac{1}{s^2}$
	Parabola	Constant acceleration	$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$

Table 7.1

© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Erros estacionários



Entrada em rampa

- Output 1: sem erro estacionário
- Output 2: com erro estacionário finito
- Output 3: com erro estacionário infinito

Entrada em degrau

- Output 1: sem erro estacionário
- Output 2: com erro estacionário

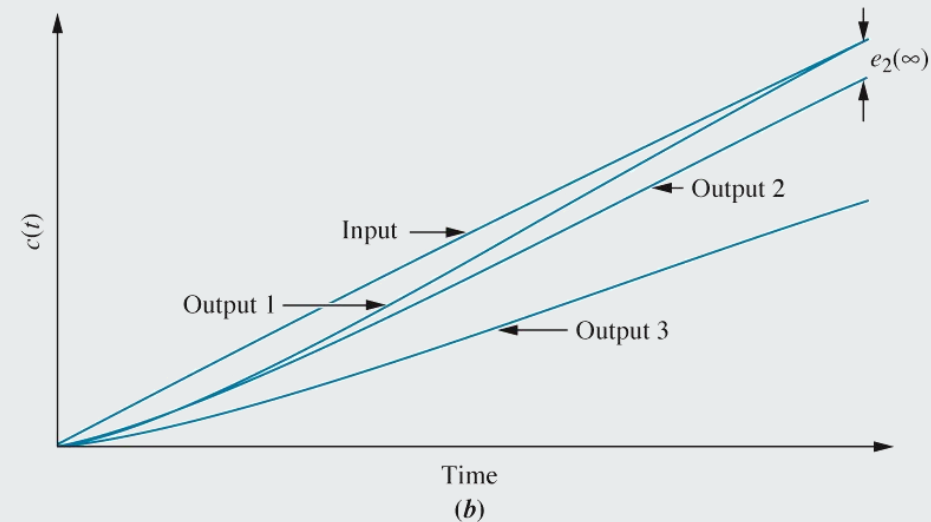
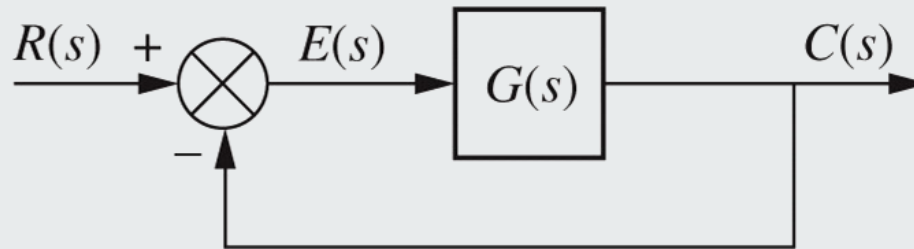


Figure 7.2
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Erros estacionários em sistemas de realimentação unitária

- Considere-se o sistema em anel fechado com realimentação unitária, com $G(s)$ a FT do anel direto

Figure 7.3
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.



$$\begin{cases} E(s) = R(s) - C(s) \\ C(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s) \end{cases} \quad E(s) = R(s) \left(1 - \frac{G(s)}{1 + G(s)} \right) = R(s) \frac{1}{1 + G(s)}$$

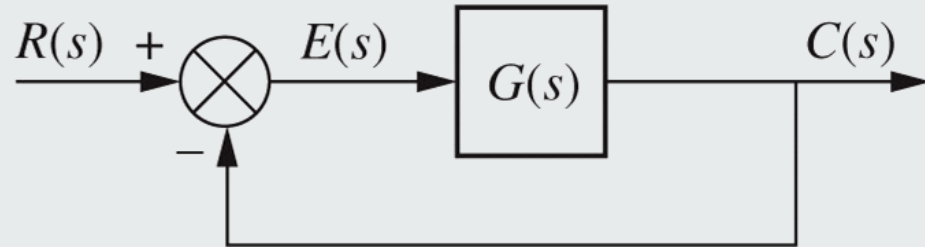
- Para um sistema em anel fechado estável (condição para a validade de aplicação do teorema do valor final):

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + G(s)}$$

Erros estacionários em sistemas de realimentação unitária

Figure 7.3

© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.



$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + G(s)}$$

- O erro estacionário e_{ss} depende:
 - Da referência do sistema de controlo, $R(s)$
 - Degrau, rampa, parábola
 - Da função de transferência do ramo direto, $G(s)$
 - $G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots}{s^t(s+p_1)(s+p_2)\dots}$, com $t = 0, 1, \dots$ o tipo do sistema $G(s)$

Erros estacionários em sistemas de realimentação unitária

- Entrada: degrau unitário, $r(t) = 1(t)$, $R(s) = 1/s$

$$e_{ss}^{\text{degrau}} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

- $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) = K_p$: ganho estático do anel direto, e
coeficiente de erro estático de posição

- $t = 0: K_p = \frac{(0+z_1)(0+z_2)\dots}{(0+p_1)(0+p_2)\dots} = K, e_{ss, t0}^{\text{degrau}} = \frac{1}{1+K}$
- $t = 1: K_p = \frac{(0+z_1)(0+z_2)\dots}{0^1(0+p_1)(0+p_2)\dots} = \infty, e_{ss, t1}^{\text{degrau}} = \frac{1}{1+\infty} = 0$
- $t = 2: K_p = \frac{(0+z_1)(0+z_2)\dots}{0^2(0+p_1)(0+p_2)\dots} = \infty, e_{ss, t2}^{\text{degrau}} = \frac{1}{1+\infty} = 0$

Erros estacionários em sistemas de realimentação unitária

- Entrada: rampa unitária, $r(t) = t * 1(t)$, $R(s) = 1/s^2$

$$e_{ss}^{\text{rampa}} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)}$$

- $\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K_v$: coeficiente de erro estático de velocidade

- $t = 0: K_v = 0 \frac{(0+z_1)(0+z_2)\dots}{(0+p_1)(0+p_2)\dots} = 0, e_{ss, t0}^{\text{rampa}} = \frac{1}{0} = \infty$

- $t = 1: K_v = \frac{(0+z_1)(0+z_2)\dots}{(0+p_1)(0+p_2)\dots} = K, e_{ss, t1}^{\text{rampa}} = \frac{1}{K}$

- $t = 2: K_v = \frac{(0+z_1)(0+z_2)\dots}{0(0+p_1)(0+p_2)\dots} = \infty, e_{ss, t2}^{\text{rampa}} = \frac{1}{\infty} = 0$

Erros estacionários em sistemas de realimentação unitária

- Entrada: parábola unitária, $r(t) = t^2/2 * 1(t)$, $R(s) = 1/s^3$

$$e_{ss}^{\text{parábola}} = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 + s^2 G(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)}$$

- $\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = K_a$: coeficiente de erro estático de aceleração

- $t = 0: K_a = 0^2 \frac{(0+z_1)(0+z_2)\dots}{(0+p_1)(0+p_2)\dots} = 0, e_{ss, t0}^{\text{parábola}} = \frac{1}{0} = \infty$

- $t = 1: K_a = 0 \frac{(0+z_1)(0+z_2)\dots}{(0+p_1)(0+p_2)\dots} = 0, e_{ss, t1}^{\text{parábola}} = \frac{1}{0} = \infty$

- $t = 2: K_a = \frac{(0+z_1)(0+z_2)\dots}{(0+p_1)(0+p_2)\dots} = K, e_{ss, t2}^{\text{parábola}} = \frac{1}{K}$

Erros estacionários em sistemas de realimentação unitária

O erro estacionário e_{ss} depende da referência do sistema de controlo, $R(s)$, e do tipo (número de polos na origem) da função de transferência do ramo direto, $G(s)$

$e_{ss, \text{tipo}}^{\text{entrada}}$	Degrau $R(s) = A/s$	Rampa $R(s) = A/s^2$	Parábola $R(s) = A/s^3$
$G(s)$ tipo 0	$\frac{A}{1 + K_p}$	∞	∞
$G(s)$ tipo 1	0	$\frac{A}{K_v}$	∞
$G(s)$ tipo 2	0	0	$\frac{A}{K_a}$



- Determine o erro estacionário do seguinte sistema, quando sujeito às entradas $5u(t)$, $5tu(t)$ e $5t^2u(t)$, com $u(t)$ a função degrau unitário

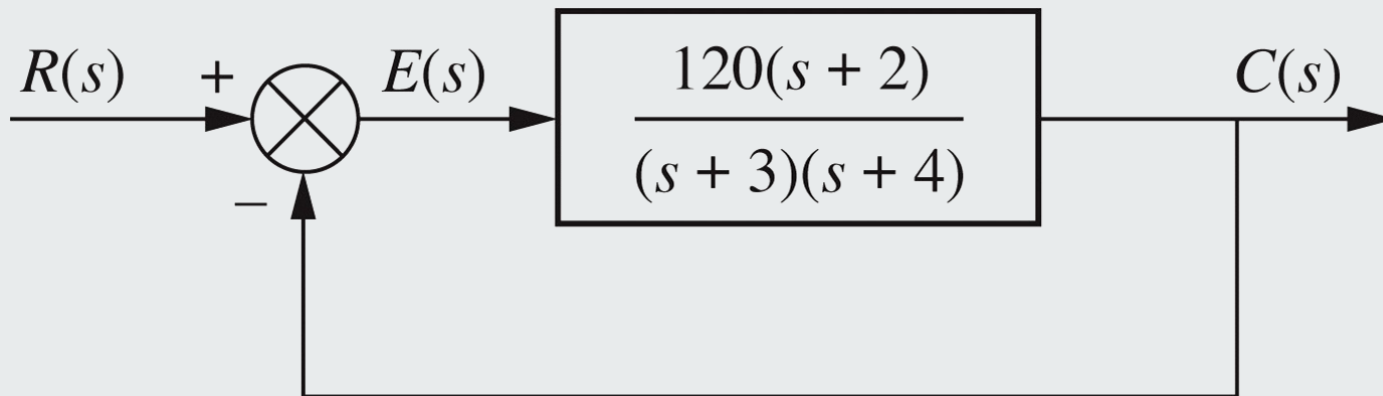


Figure 7.5
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

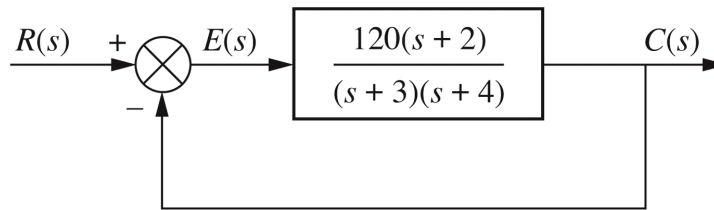


Figure 7.5
 © John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Exemplo

- Transformada de Laplace das entradas
 - $\mathcal{L}[5u(t)] = 5 \frac{1}{s} = \frac{5}{s}$
 - $\mathcal{L}[5tu(t)] = 5 \frac{1}{s^2} = \frac{5}{s^2}$
 - $\mathcal{L}[5t^2u(t)] = 5 \frac{2}{s^3} = \frac{10}{s^3}$
 - $\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

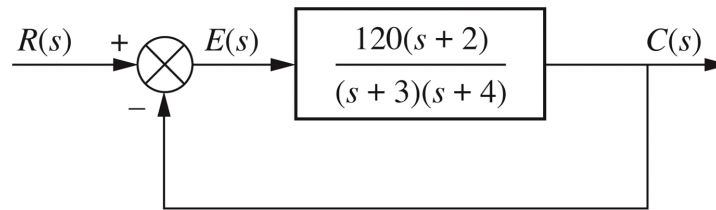


Figure 7.5
 © John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Exemplo

1. Verificar estabilidade do anel fechado

- Eq. característica do anel fechado:

$$1 + G(s) = 0, \quad s = -2, s = -125$$

2. Verificar tipo do anel direto

- Sistema sem polos na origem: tipo 0

3. Determinar e_{ss}^{entrada} de acordo com a [tabela](#)

- $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = 20, e_{ss}^{\text{degrau}} = \frac{5}{1+K_p} = \frac{5}{1+20} = \frac{5}{21}$
- $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0, e_{ss}^{\text{rampa}} = \frac{5}{K_v} = \frac{5}{0} = \infty$
- $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0, e_{ss}^{\text{parábola}} = \frac{10}{K_a} = \frac{10}{0} = \infty$

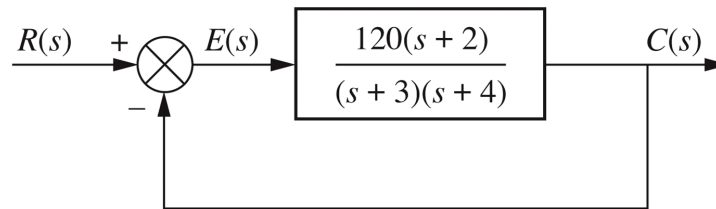
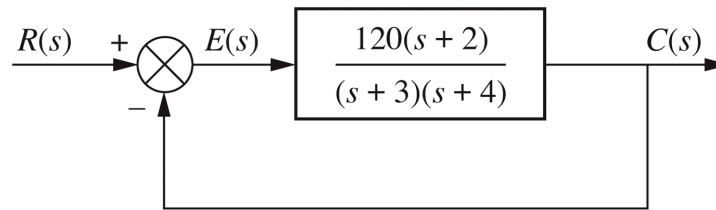


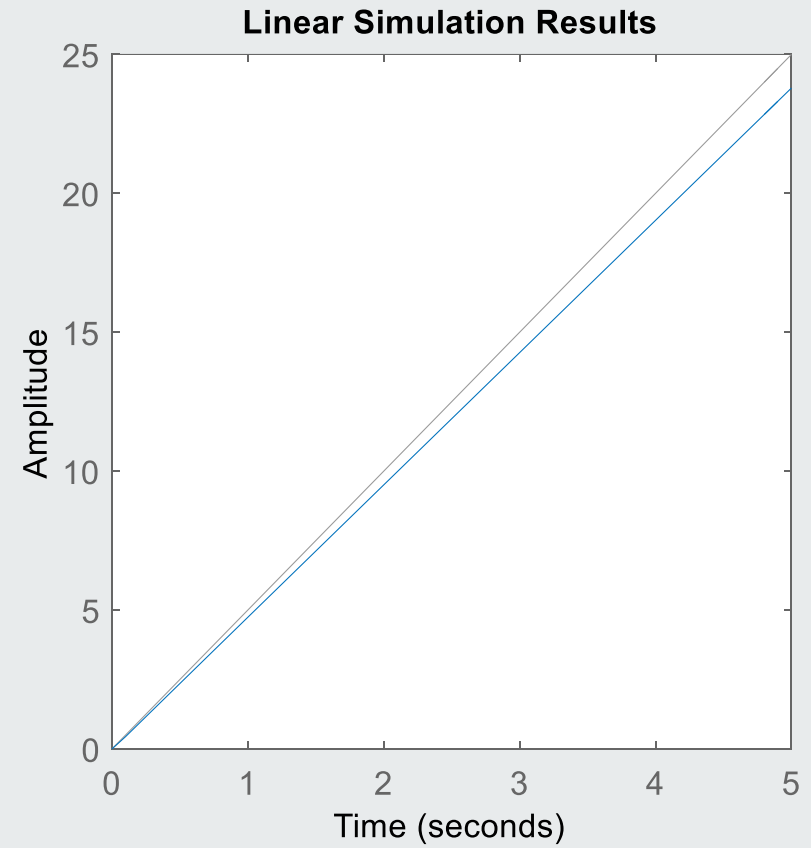
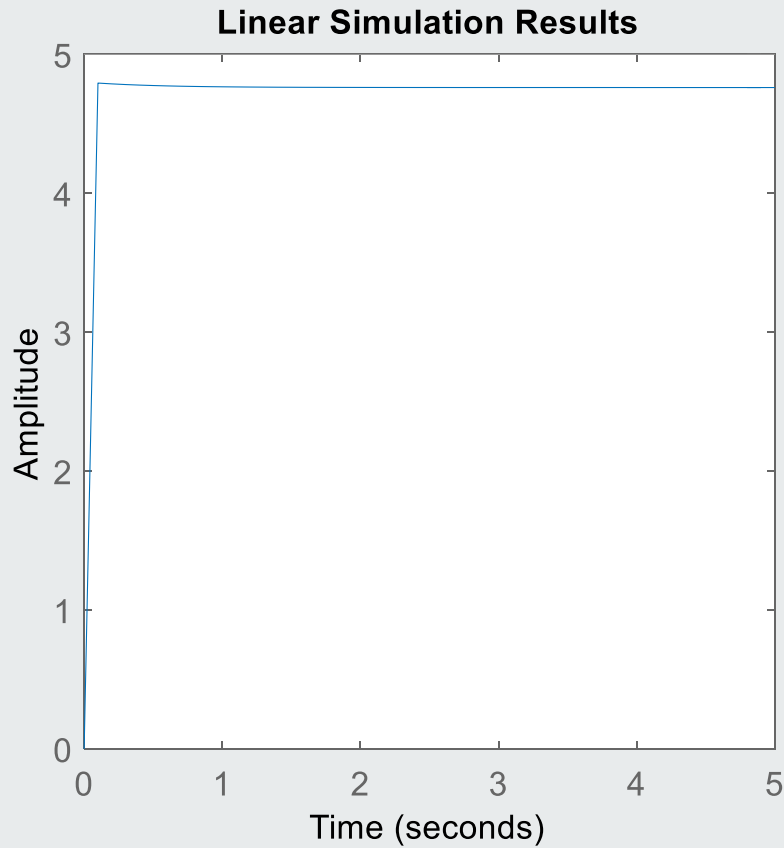
Figure 7.5
 © John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Exemplo

```
>> G=tf([120 240],conv([1 3],[1 4]));
>> Gaf=feedback(G,1);
>> roots(Gaf.den{1}) %verificar estabilidade AF
ans =
    -124.9837
     -2.0163
>> t=0:0.1:5; %vetor tempo
>> u1=5*ones(size(t)); %vetor entrada em degrau
>> u2=5*t; %vetor entrada em rampa
>> u3=5*t.^2; %vetor entrada em parábola
>> figure, lsim(Gaf,u1,t) %resposta no tempo
>> figure, lsim(Gaf,u2,t)
>> figure, lsim(Gaf,u3,t)
```



Exemplo



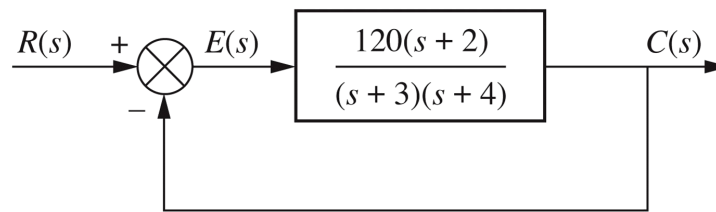
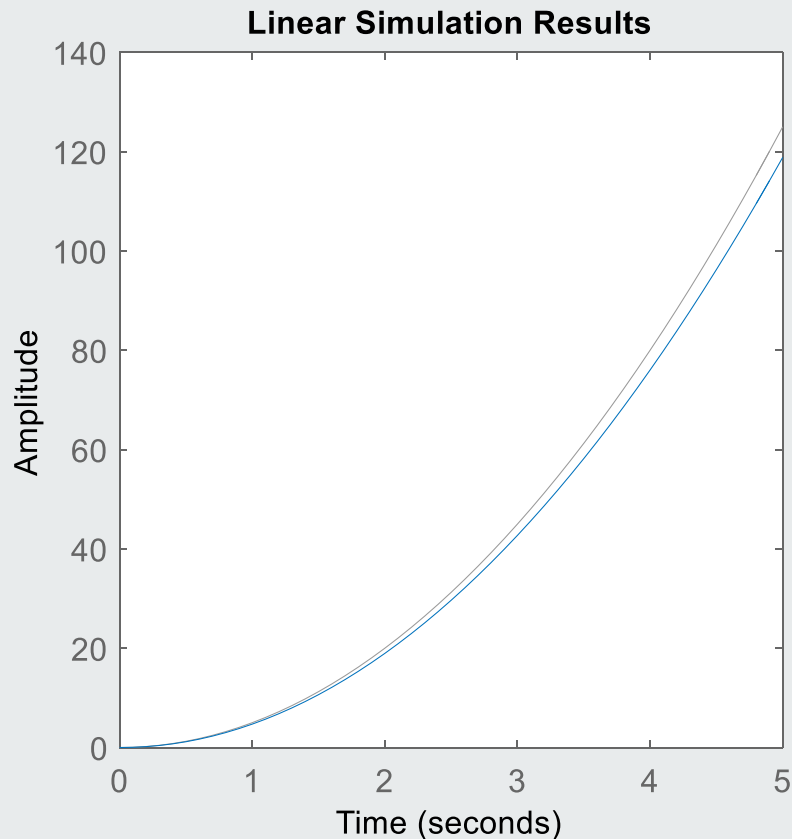


Figure 7.5
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Exemplo



- Repita os gráficos para um intervalo de tempo maior, para melhor ver a divergência da saída relativamente à entrada (erro estacionário infinito) nos casos de entrada em rampa e parábola

- Determine o erro estacionário do seguinte sistema, quando sujeito às entradas $5u(t)$, $5tu(t)$ e $5t^2u(t)$, com $u(t)$ a função degrau unitário

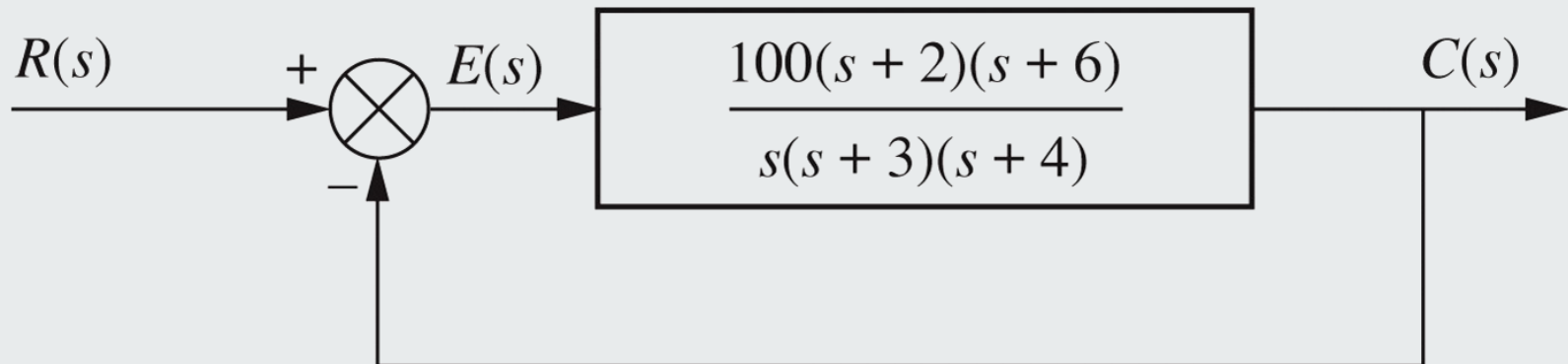


Figure 7.6
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

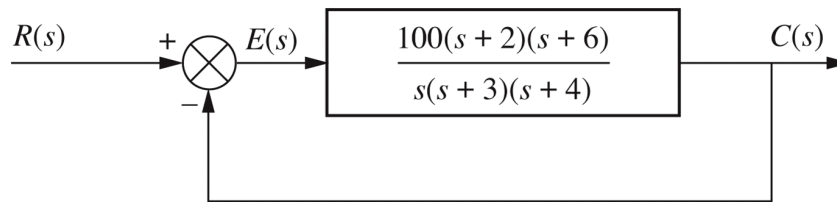


Figure 7.6
 © John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Exemplo

1. Verificar estabilidade do anel fechado

- Eq. característica do anel fechado:

$$1 + G(s) = 0, s = -1.9, s = -6.1, s = -98.9$$

2. Verificar tipo do anel direto

- Sistema com 1 polo na origem: tipo 1

3. Determinar e_{ss}^{entrada} de acordo com a [tabela](#)

- $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \infty, e_{ss}^{\text{degrau}} = \frac{5}{1+K_p} = \frac{5}{1+\infty} = 0$
- $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 100, e_{ss}^{\text{rampa}} = \frac{5}{K_v} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
- $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) = 0, e_{ss}^{\text{parábola}} = \frac{10}{K_a} = \frac{10}{0} = \infty$

- Um sistema em anel fechado com realimentação unitária tem a seguinte FT no anel direto:

$$G(s) = \frac{10(s + 20)(s + 30)}{s(s + 25)(s + 35)}$$

- a) Determine o erro estacionário para as seguintes entradas: $15u(t)$, $15tu(t)$ e $15t^2u(t)$, com $u(t)$ a função degrau unitário
- b) Repita para

$$G(s) = \frac{10(s + 20)(s + 30)}{s^2(s + 25)(s + 35)(s + 50)}$$

Especificações de erro estacionário

- Coeficiente de amortecimento ξ , tempo de estabelecimento t_s , tempo de pico t_p , e máximo sobreimpulso M_p são utilizados como especificações de desempenho da **resposta transiente** do sistema controlado
- Coeficiente de erro estático de posição K_p , coeficiente de erro estático de velocidade K_v , e coeficiente de erro estático de aceleração K_a , podem ser utilizados como especificações para o **erro estacionário** do sistema controlado

Especificações de erro estacionário

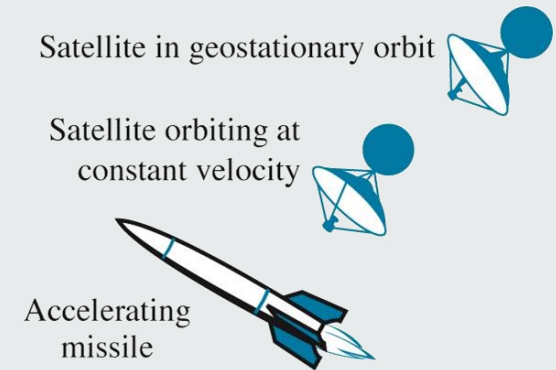
- Para um sistema controlado com especificação $K_v = 1000$, conclui-se que
 - O sistema tem de ser estável
 - A entrada de teste é a entrada em rampa
 - O sistema é tipo 1, uma vez que apenas estes sistemas têm K_v constante não nulo
 - O erro estacionário desejado entre a entrada em rampa e a saída é $\frac{1}{K_v}$ por unidade de declive

Para o sistema de controlo de posição da antena de radiotelescópio, com FT

$$G(s) = \frac{6.63}{s(s + 1.71)(s + 100)}$$

controlador $G_c(s) = K$ e realimentação unitária:

- Determine o erro estacionário em termos do ganho do controlador K , para entradas unitárias em degrau, rampa e parábola
- Determine o valor de K de modo a obter um erro de 10% em regime estacionário



Tracking system



Figure 7.1
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

a) Anel direto: $KG(s) = \frac{K6.63}{s(s+1.71)(s+100)}$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + KG(s)}$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} KG(s) = \infty, e_{ss}^{\text{degrau}} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKG(s) = 0.039K, e_{ss}^{\text{rampa}} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{0.039K} = \frac{25.79}{K}$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 KG(s) = 0, e_{ss}^{\text{parábola}} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{0} = \infty$$

b) *Determine o valor de K de modo a obter um erro de 10% em regime estacionário*

$$G(s) = \frac{6.63}{s(s + 1.71)(s + 100)}$$

Um sistema de tipo 1 apenas tem erro estacionário constante, não nulo, para entrada em rampa, dado por

$$e_{ss}^{\text{rampa}} = \frac{25.79}{K} = 0.1 \Leftrightarrow K = 257.9$$

Verificar que $K = 257.9$ está dentro dos valores de K que garantem a estabilidade do anel fechado!

Erros estacionários em sistemas com perturbação

- Sistemas de controlo com realimentação são utilizados para compensar o efeito de perturbações e entradas indesejadas

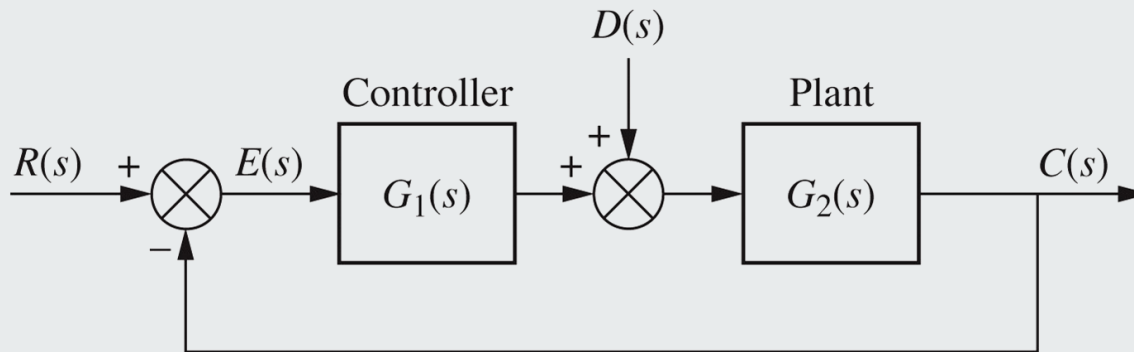


Figure 7.11
 © John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

$$C(s) = G_2(s)D(s) + G_2(s)G_1(s)E(s) = R(s) - E(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s)$$

Erros estacionários em sistemas com perturbação

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s) - \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s)$$

- Aplicando o teorema do valor final (válido se o sistema for estável)

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

$$= \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + G_1(s)G_2(s)} R(s)}_{e_{ss}^R \text{ devido a } R(s), \text{ analisado anteriormente}} - \underbrace{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)} D(s)}_{e_{ss}^D \text{ devido a } D(s)}$$

Erros estacionários em sistemas com perturbação

- Assuma-se $D(s) = \frac{1}{s}$:

$$\begin{aligned} e_{ss}^D &= - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)} D(s) \\ &= - \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)} \end{aligned}$$

- O erro estacionário produzido por uma perturbação em degrau unitário pode ser reduzido aumentando o ganho estático de $G_1(s)$ ou diminuindo o ganho estático de $G_2(s)$

Determine o erro estacionário devido a uma perturbação em degrau unitário para o sistema

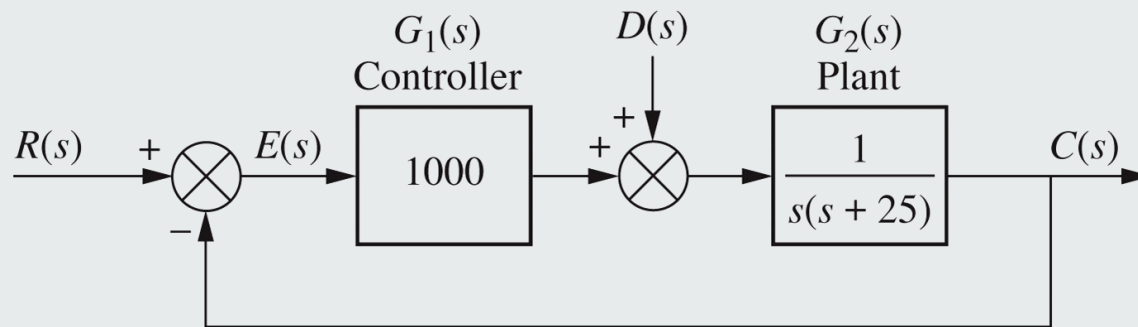
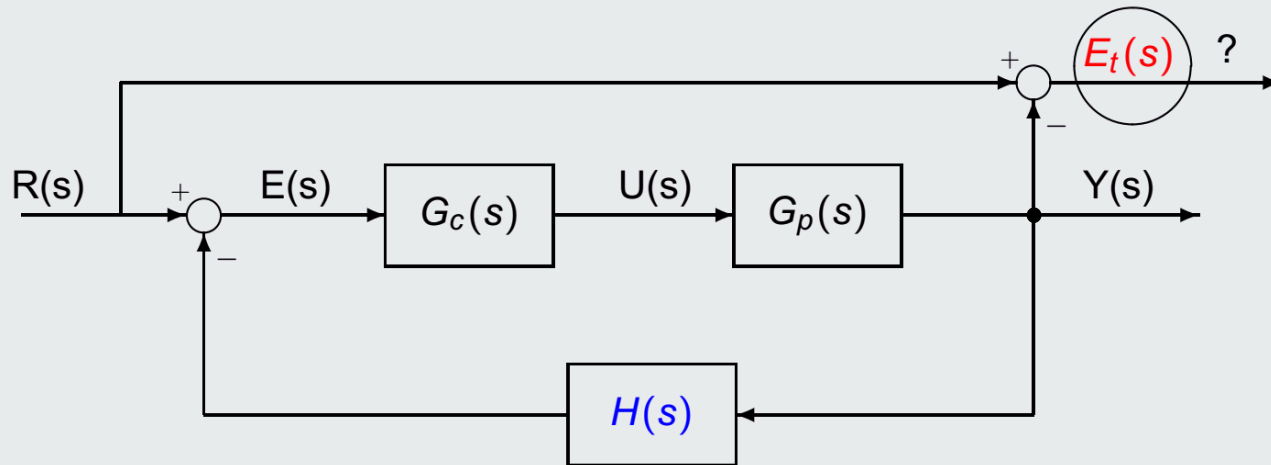


Figure 7.13
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

- Verificar estabilidade do anel fechado. Equação característica do anel fechado: $1 + G_1(s)G_2(s) = 0$, polos $s = -12.5 \pm 29.0j$
- $$e_{ss}^D = -\frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)} = -\frac{1}{0 + 1000} = -0.001$$

Erros estacionários em sistemas de realimentação genérica

- No caso genérico, $H(s) \neq 1$



$$\begin{cases} Y(s) = G_c(s)G_p(s)E(s) \\ E(s) = R(s) - H(s)Y(s) \\ E_t(s) = R(s) - Y(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - H(s)G_c(s)G_p(s)E(s) \\ E_t(s) = R(s) - G_c(s)G_p(s)E(s) \end{cases}$$

Erros estacionários em sistemas de realimentação genérica

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - H(s)G_c(s)G_p(s)E(s) \\ E_t(s) = R(s) - G_c(s)G_p(s)E(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(s) = \frac{1}{1 + H(s)G_c(s)G_p(s)} R(s) \\ E_t(s) = R(s) - \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_p(s)} R(s) \end{cases}$$

$$E_t(s) = \left(1 - \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_p(s)} \right) R(s)$$

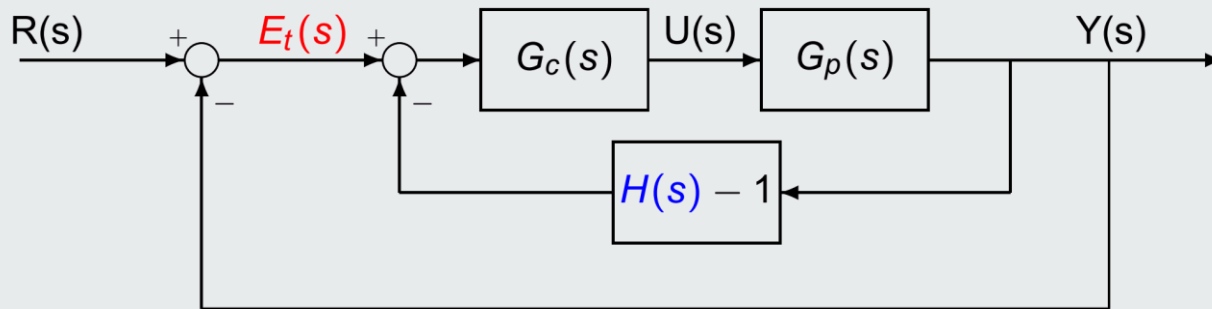
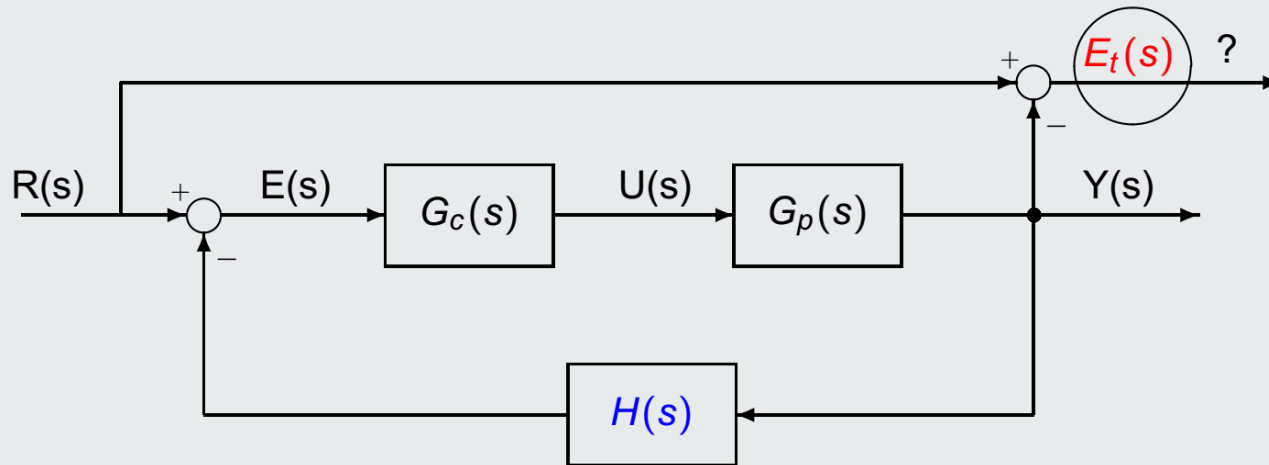
Erros estacionários em sistemas de realimentação genérica

- Para o sistema estável, o erro estacionário de seguimento, e_{ss} , é dado por

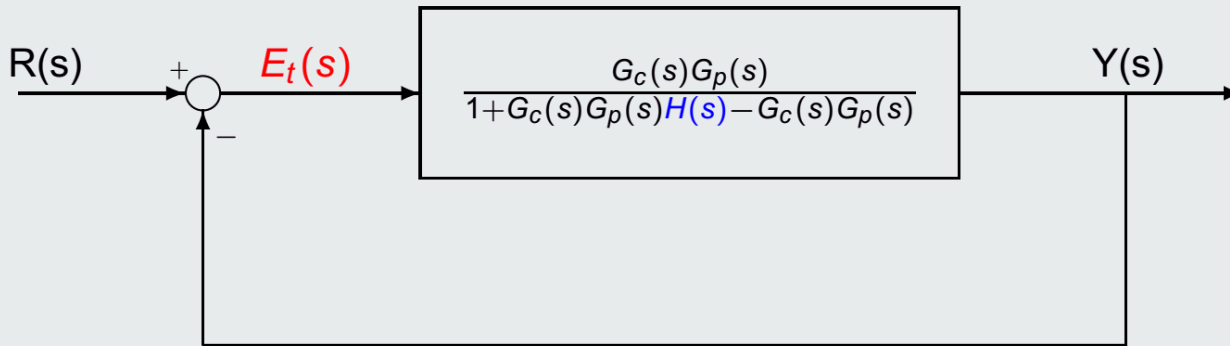
$$\begin{aligned} e_{t_{ss}} &= \lim_{s \rightarrow 0} s E_t(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(1 - \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_p(s)} \right) R(s) \end{aligned}$$

- É possível fazer uma análise mais simples do erro estacionário por manipulação do diagrama de blocos

Erros estacionários em sistemas de realimentação genérica



Erros estacionários em sistemas de realimentação genérica



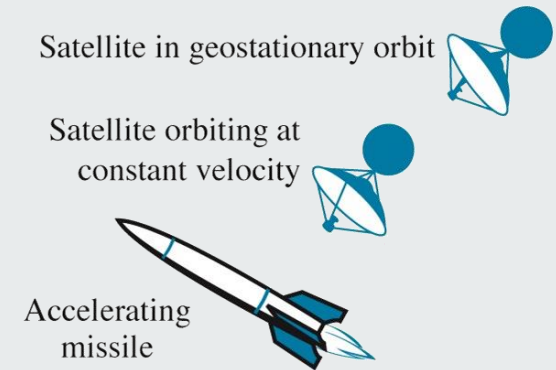
- O erro estacionário, $e_{t_{ss}}$, depende
 - Da referência
 - Degrau, rampa, parábola
 - Do tipo da FT do anel direto

$$\frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_p(s) - G_c(s)G_p(s)}$$

Para o sistema de controlo de posição da antena de radiotelescópio, com FT

$$G(s) = \frac{6.63}{s(s + 1.71)(s + 100)},$$

controlador $G_c(s) = K$ e sensor de posição $H(s) = 1.1$, determine o erro estacionário em termos do ganho do controlador K , para entradas unitárias em degrau, rampa e parábola



Tracking system



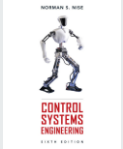
Figure 7.1
© John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.



<https://create.kahoot.it/details/at10-erros-estacionarios/3fbe92a3-22d6-4e8b-b431-b35ca1d7cec9>

- Caracterização das acções básicas de Controlo: P, I, D (frequência e tempo).
- O controlador PID.

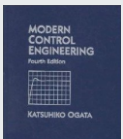
Referências/fontes usadas



- *Control Systems Engineering*, Norman Nise, John Wiley & Sons (6ª edição), 2011



- *Controlo de Sistemas*, Miguel Ayala Botto, AEIST Press, 2008



- *Modern Control Engineering*, K. Ogata, Prentice-Hall International (4ª edição), 2002



- *Feedback Control of Dynamic Systems*, Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini, Pearson (6ª edição), 2010