Universidad de las Fuerzas Armadas

ESPE

Nombre: Camilo Acosta

Transformada de Fourier de una señal discreta

1. Considere un sistema discreto LTI que es caracterizado por la siguiente relación entrada-salida.

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2X[n]$$

Determine la respuesta impulsiva del sistema
El sistema es causal? (justifique su respuesta)

$$Y(\omega) - \frac{3}{4} e^{-j\omega} Y(\omega) + \frac{1}{8} e^{-2j\omega} Y(\omega) = 2X(\omega)$$

$$Y(\omega)\left[1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-2j\omega}\right] = 2X(\omega)$$

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\omega} + \frac{1}{8} e^{-2j\omega}}$$

$$H(\omega) = \frac{2}{e^{-2j\omega}\left(e^{2j\omega} - \frac{3}{4} e^{j\omega} + \frac{1}{8}\right)}$$

Sea:

$$e^{j\omega} = \frac{\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - 4 \cdot \frac{1}{8}}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}}{2}$$

$$H(\omega) = \frac{2}{e^{-2j\omega}\left(e^{j\omega} - \frac{1}{2}\right)\left(e^{j\omega} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)} = \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}$$

$$A = \frac{2 \cdot \cancel{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)}}{\cancel{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)}\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}\Bigg|_{e^{-j\omega} = 2} = 4$$

$$B = \frac{2 \cancel{\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}\right)\cancel{\left(1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)}}\Bigg|_{e^{-j\omega} = 4} = -2$$

$$H(\omega) = \frac{4}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})} - \frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

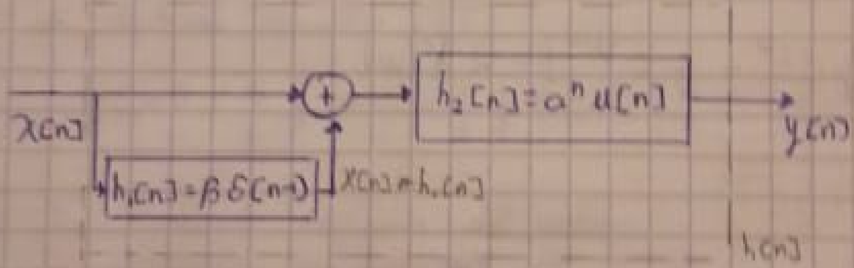
$$h[n] = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$h[n] = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\cdot\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$$

¿El sistema es causal?

Si es causal porque $h[n]$ para valores menores que cero vale cero por el $u[n]$ que se multiplica en su interior.

2) Considere el sistema de la figura



Encuentre la respuesta impulsiva $h[n]$

Encuentre la respuesta en frecuencia del sistema total

¿El Sistema es causal?

Bajo que condiciones el sistema es estable.

$$y[n] = (x[n] + x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

$$Y(\omega) = (X(\omega) + X(\omega)\cdot H_1(\omega))\cdot H_2(\omega)$$

$$Y(\omega) = X(\omega)\cdot H_2(\omega)\,(1 + H_1(\omega))$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H_2(\omega)\,(1 + H_1(\omega))$$

$$H_1(\omega) = \beta e^{-j\omega} \;;\; H_2(\omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} ; \quad |\alpha| < 1$$

$$H(\omega) = \frac{1 + B e^{-j\omega}}{1 - a e^{-j\omega}}$$; Respuesta en frecuencia del sistema total

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}} + B e^{-j\omega} \cdot \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

$h[n] = a^n u[n] + B\, a^{(n-1)} u[n-1]$; $|a| < 1$, Respuesta Impulsiva

- ¿El sistema es causal?

Si porque $h[n]$ toma valores de cero para valores menores que cero gracias al $u[n]$ y $u[n-1]$.

- ¿Bajo qué condiciones el sistema es estable?

Si $|a| < 1$ el sistema tendrá transformada de Fourier y si tiene T. Fourier el sistema es estable.

3) Considere el sistema discreto LTI

$$y[n] - \frac{5}{6} y[n-1] + \frac{1}{6} y[n-2] = \frac{1}{3} x[n-1]$$

- Encuentre la respuesta impulsiva del sistema.
- Encuentre la respuesta en frecuencia del sistema.
- ¿Cuál es la respuesta del sistema si la entrada $x[n] = \mu[n]$

$$Y(\omega) - \frac{5}{6} e^{-j\omega} Y(\omega) + \frac{1}{6} e^{-2j\omega} Y(\omega) = \frac{1}{3} e^{-j\omega} X(\omega)$$

$$Y(\omega)\left[1 - \frac{5}{6} e^{-j\omega} + \frac{1}{6} e^{-2j\omega}\right] = \frac{1}{3} e^{-j\omega} X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{e^{-j\omega}}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6} e^{-j\omega} + \frac{1}{6} e^{-2j\omega}\right)} = \frac{e^{-j\omega}}{3} \cdot \frac{1}{e^{-2j\omega}\left(e^{2j\omega} - \frac{5}{6} e^{j\omega} + \frac{1}{6}\right)}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{3} \frac{e^{-j\omega}}{e^{-2j\omega}\left(e^{j\omega} - \frac{1}{3}\right)\left(e^{j\omega} - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{3} e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{3} e^{j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{2} e^{j\omega}\right)} = \frac{1}{3} e^{-j\omega}\left[\frac{A}{\left(1 - \frac{1}{3} e^{j\omega}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{j\omega}\right)}\right]$$

$$A = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{j\omega}\right)}\Bigg|_{e^{j\omega} = 3} = -2 \quad ; \quad B = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3} e^{j\omega}\right)}\Bigg|_{e^{j\omega} = 2} = 3$$

$H(\omega) = \frac{1}{3} e^{-j\omega} \left[\frac{3}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} \right]$; Respuesta impulsiva del sistema

$h[n] = \frac{1}{3}\left(3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]\right)$

$h[n] = \frac{1}{3}\left(3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} u[n-1] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} u[n-1]\right)$

$h[n] = 2\, u[n-1] \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$

- $y[n] = h[n] * x[n]$

$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$

$x[n] = u[n]$

$X(\omega) = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}$

$Y(\omega) = \frac{\frac{1}{3} e^{-j\omega}}{(1+\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})} \cdot \left(\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{1-e^{-j\omega}}\right)$

$Y(\omega) = \underbrace{\frac{\frac{1}{3} e^{-j\omega}\, \pi\,\delta(\omega)}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}}_{Z(\omega)} + \frac{\frac{1}{3} e^{-j\omega}}{(1-e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})} = Z(\omega) e^{-j\omega} \pi\, \delta\omega + \frac{\frac{1}{3} e^{-j\omega}}{(1-e^{-j\omega})(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{2}\ldots}$

$\Downarrow$

F. Parciales

$j\omega$

$Z(\omega) = \frac{1/3}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})} \Rightarrow Z(\omega=0) = 1$

$Y(\omega) = e^{-j\omega}\left(\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{(1-e^{-j\omega})}\right) + \frac{e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\omega})} - \frac{2e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})}$

$y[n] = u[n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$