



U N I V E R S I D A D
COMPLUTENSE
M A D R I D

Tema 1: Análisis de la eficiencia de los algoritmos

Slides adaptadas a partir del original de Enrique Martín
Estructuras de Datos y Algoritmos (EDA)
Grado en Desarrollo de Videojuegos
Facultad de Informática

Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Medidas asintóticas de la eficiencia
- 3 Análisis de eficiencia en algoritmos iterativos
- 4 Análisis de eficiencia en algoritmos recursivos
- 5 Conclusiones
- 6 Bibliografía

Introducción

- Análisis de eficiencia
 - ① **Análisis de eficiencia de los algoritmos**
- Algoritmos
 - ② Divide y vencerás (DV), o *Divide-and-Conquer*
 - ③ Vuelta atrás (VA), o *backtracking*
- Estructuras de datos
 - ④ Especificación e implementación de TADs
 - ⑤ Tipos de datos lineales
 - ⑥ Tipos de datos arborescentes
 - ⑦ Diccionarios
 - ⑧ Aplicación de TADs

- Aproximadamente cada año y medio se duplica el número de instr/seg que son capaces de ejecutar los computadores.
- ¿Basta esperar unos años para que problemas que hoy necesitan horas de cálculo puedan resolverse en segundos?
- **No!** Para un algoritmo ineficiente ningún avance en la velocidad de las máquinas podría conseguir tiempos aceptables.
- Habitualmente, el factor que determina lo que es soluble en un tiempo razonable es precisamente el **algoritmo** elegido.

- En este capítulo estudiamos:
 - Cómo medir la **eficiencia** de los algoritmos, y,
 - Cómo comparar la eficiencia de distintos algoritmos para un mismo problema.
- Después de la **corrección**, conseguir eficiencia debe ser el principal objetivo del programador.
- Mediremos la eficiencia en **tiempo de ejecución**.
 - Los mismos conceptos son aplicables a la medición de otros recursos
⇒ memoria, energía, etc.

Ejemplo del cálculo de eficiencia

Consideremos la siguiente función *genérica* para buscar si un valor x aparece en un vector v .

```
1 template <class T>
2 bool search(vector<T> const& v, T const& x) {
3     int i = 0;
4     while (i < v.size() && v[i] != x) {
5         ++i;
6     }
7     return i < v.size();
8 }
```

- Si el valor aparece en la primera posición del vector, consumirá muy poco tiempo → *caso mejor*.
- Si el valor no aparece en el vector deberá recorrer todo el vector y consumirá mucho tiempo → *caso peor*.

Ejemplo del cálculo de eficiencia

- Una manera de medir los recursos utilizados por un algoritmo es contar **cuántas instrucciones de cada tipo** se ejecutan y multiplicar por el **consumo de recursos que necesita cada instrucción**:
 - t_a : tiempo de una asignación
 - t_c : tiempo de una comparación
 - t_i : tiempo de un incremento/decremento
 - t_v : tiempo de un acceso a vector
- El coste del algoritmo `search` será una función que, dado el tamaño n del vector v , devuelve la cantidad de recursos consumidos durante la ejecución de `search`.
- El **tamaño n** del vector será el **número de elementos que contiene**.

Ejemplo del cálculo de eficiencia

Podemos calcular la función de coste para el algoritmo anterior en dos contextos (*ignoramos el coste de $v.size()$*):

- **Caso mejor:** *el elemento está en la primera posición*

$$T_{min}(n) = \underbrace{t_a}_{L3} + \underbrace{3t_c + t_v}_{L4} + \underbrace{t_c}_{L7} = t_a + 4t_c + t_v \in \mathcal{O}(1)$$

- **Caso peor:** *el elemento no aparece en el vector*

$$\begin{aligned} T_{max}(n) &= \underbrace{t_a}_{L3} + \underbrace{n(3t_c + t_v)}_{L4} + \underbrace{t_c}_{L4} + \underbrace{nt_i}_{L5} + \underbrace{t_c}_{L7} \\ &= n(3t_c + t_v + t_i) + 2t_c + t_a \in \mathcal{O}(n) \end{aligned}$$

- Se observan claramente los tres factores de los que en general depende el tiempo de ejecución de un algoritmo:
 - 1 El **tamaño** de los datos de entrada, simbolizado aquí por la longitud n del vector.
 - 2 El **contenido** de los datos de entrada, que en el ejemplo hace que el tiempo para diferentes vectores del mismo tamaño esté comprendido entre los valores T_{min} y T_{max} .
 - 3 El código generado por el **compilador** y el **computador** concreto utilizados, que afectan a los tiempos elementales (t_a , t_c , t_i y t_v).

- Para poder comparar algoritmos independientemente del valor de los datos de entrada, el segundo factor debemos eliminarlo:
 - O bien midiendo solo el **caso peor**, es decir la ejecución que tarde más tiempo de todos los ejemplares de tamaño n .
 - O bien midiendo todos los casos de tamaño n y calculando el tiempo del **caso promedio** (exige conocer la probabilidad de cada caso).
- Nos concentraremos en el caso peor por dos razones:
 - 1 El caso peor establece una cota superior fiable para **todos** los casos del mismo tamaño.
 - 2 El caso peor es más fácil de calcular.

- El caso promedio es más difícil de calcular pero puede ser más informativo.
 - Exige conocer la probabilidad de cada caso.
- Raramente puede ser útil conocer el **caso mejor** de un algoritmo para un tamaño n dado \Rightarrow *cota inferior*.
- El tercer factor impide comparar algoritmos escritos en diferentes lenguajes, traducidos por diferentes compiladores, o ejecutados en diferentes máquinas \Rightarrow **Lo ignoramos**.
- Mediremos la eficiencia de un algoritmo en función del **tamaño** de los datos de entrada \Rightarrow **medida asintótica**.

- El **criterio asintótico** para medir la eficiencia de los algoritmos tiene como objetivo comparar algoritmos **independientemente** de los lenguajes en que están escritos, de las máquinas en que se ejecutan y del valor concreto de los datos que reciben como entrada.
- Tan solo considera importante el **tamaño** de dichos datos.
- Para cada problema habrá que definir qué se entiende por tamaño del mismo.

- Se basa en tres principios:

- ① El coste o eficiencia es una función que solo depende del tamaño de la entrada, e.g. $f(n) = n^2$.
- ② Las constantes multiplicativas o aditivas no se tienen en cuenta, e.g. $f(n) = n^2$ y $g(n) = 3n^2 + 27$ se consideran costes equivalentes.
- ③ La comparación entre funciones de coste se hará para valores de n **suficientemente grandes**, es decir los costes para tamaños pequeños se consideran irrelevantes.

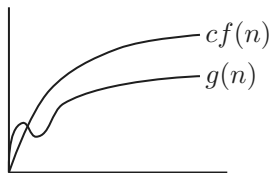
El orden \mathcal{O} : Conjuntos de funciones acotadas superiormente

Sea una función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$. El conjunto de las funciones *del orden de* $f(n)$, llamado $\mathcal{O}(f(n))$, se define como:

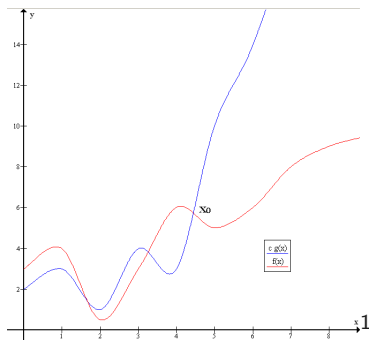
$$\mathcal{O}(f(n)) = \{g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}. \forall n \geq n_0. g(n) \leq cf(n)\}$$

En otras palabras, es el conjunto de todas las funciones $g(n)$ tales que a partir de un n *suficientemente grande* son inferiores a $f(n)$.

Si $g \in \mathcal{O}(f(n))$ diremos que g **es del orden de** $f(n)$.



Medidas asintóticas de la eficiencia. Ejemplos



$f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ ya que existe $c \in \mathbb{R}^+$ y $n_0 = 5 \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(n) \leq cg(n) \text{ para todo } n \geq n_0$$

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation#/media/File:Big-O-notation.png

Medidas asintóticas de la eficiencia. Ejemplos

$$f(n) = 5$$

- $f(n) \in \mathcal{O}(1) \ [\forall n \in \mathbb{N}, c = 5]$
- $f(n) \in \mathcal{O}(n) \ [n_0 \geq 5, c = 1]$
- $f(n) \in \mathcal{O}(n^2) \ [n_0 \geq 3, c = 1]$
- $f(n) \in \mathcal{O}(5^n) \ [n_0 \geq 1, c = 1]$

$$g(n) = 10n + 5$$

- $g(n) \notin \mathcal{O}(1)$
- $g(n) \in \mathcal{O}(n) \ [n_0 \geq 1, c = 20]$
- $g(n) \in \mathcal{O}(n^2) \ [n_0 \geq 11, c = 1]$
- $g(n) \in \mathcal{O}(5^n) \ [n_0 \geq 2, c = 1]$

Como se puede ver, una función tiene varias cotas superiores. Estamos interesados en aquella **cota superior más ajustada**: $f(n) \in \mathcal{O}(1)$, $g(n) \in \mathcal{O}(n)$.

- Si el tiempo de ejecución $g(n)$ de una implementación concreta de un algoritmo es del orden de $f(n)$, entonces el tiempo $g'(n)$ de cualquier otra implementación del mismo que difiera de la anterior en el lenguaje, el compilador, o/y la máquina empleada, también será del orden de $f(n)$.
- Por tanto, el coste $\mathcal{O}(f(n))$ expresa la eficiencia del algoritmo *per se*, no el de una implementación concreta del mismo.

Órdenes de complejidad

A cada familia $\mathcal{O}(f(n))$ se le denomina **clase de complejidad** u **orden de complejidad**. Dado que por definición las constantes multiplicativas o aditivas no afectan, se elige como representante del orden $\mathcal{O}(f(n))$ a la función más sencilla posible:

- $\mathcal{O}(1)$: constante
- $\mathcal{O}(\log n)$: logarítmico
- $\mathcal{O}(n)$: lineal
- $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$: cuasi-lineal
- $\mathcal{O}(n^2)$: cuadrático
- $\mathcal{O}(n^k)$: polinomial
- $\mathcal{O}(2^n)$: exponencial
- $\mathcal{O}(n!)$: factorial

Jerarquía de órdenes de complejidad

Los distintos órdenes de complejidad se pueden ordenar por inclusión, es decir, «de mejor a peor»:

$$\underbrace{\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(\log n) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n \cdot \log n) \subset \mathcal{O}(n^2) \subset \mathcal{O}(n^k) \dots}_{\text{razonables en la práctica}} \subset \underbrace{\mathcal{O}(2^n) \subset \mathcal{O}(3^n) \dots \subset \mathcal{O}(n!)}_{\text{intratables}}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{tratables}}$

Importancia del orden de complejidad

- Es importante entender las implicaciones prácticas de que el coste de un algoritmo pertenezca a una u otra clase de complejidad.
- La siguiente figura muestra el crecimiento de algunas de estas funciones, suponiendo que expresan un tiempo en milisegundos (ms = milisegundos, s = segundos, m = minutos, h = horas, etc.).

Importancia del orden de complejidad

n	$\log_{10} n$	n	$n \log_{10} n$	n^2	n^3	2^n
10	1 <i>ms</i>	10 <i>ms</i>	10 <i>ms</i>	0,1 <i>s</i>	1 <i>s</i>	1,02 <i>s</i>
10^2	2 <i>ms</i>	0,1 <i>s</i>	0,2 <i>s</i>	10 <i>s</i>	16,67 <i>m</i>	$4,02 * 10^{20}$ <i>sig</i>
10^3	3 <i>ms</i>	1 <i>s</i>	3 <i>s</i>	16,67 <i>m</i>	11,57 <i>d</i>	$3,4 * 10^{291}$ <i>sig</i>
10^4	4 <i>ms</i>	10 <i>s</i>	40 <i>s</i>	1,16 <i>d</i>	31,71 <i>a</i>	$6,3 * 10^{3000}$ <i>sig</i>
10^5	5 <i>ms</i>	1,67 <i>m</i>	8,33 <i>m</i>	115,74 <i>d</i>	317,1 <i>sig</i>	$3,16 * 10^{30093}$ <i>sig</i>
10^6	6 <i>ms</i>	16,67 <i>m</i>	1,67 <i>h</i>	31,71 <i>a</i>	317 097,9 <i>sig</i>	$3,1 * 10^{301020}$ <i>sig</i>

Figura: Crecimiento de distintas funciones de complejidad

- Obsérvese la **extraordinaria eficiencia** de los algoritmos de coste $\mathcal{O}(\log n)$: pasar de un tamaño de $n = 10$ a $n = 1\,000\,000$ solo hace que el tiempo crezca de 1 ms a 6.
 - La búsqueda binaria en un vector ordenado, y la búsqueda en ciertas estructuras de datos de este curso, tienen este coste en el caso peor.
- Por otro lado, los algoritmos de coste $\mathcal{O}(2^n)$ son **prácticamente inútiles**: mientras que un problema de tamaño $n = 10$ se resuelve en aprox. un segundo, la edad del universo conocido ($1,4 \times 10^8$ siglos) sería totalmente insuficiente para resolver uno de tamaño $n = 100$.
 - Algunos algoritmos de *vuelta atrás* que veremos en este curso tienen ese coste en el caso peor.

- Esta tabla confirma la afirmación hecha al comienzo de este tema de que para ciertos algoritmos es inútil esperar a que los computadores sean más rápidos.
- Es más productivo invertir esfuerzo en diseñar **mejores algoritmos** para ese problema.

Importancia del orden de complejidad

- Hagamos el siguiente experimento: supongamos seis algoritmos con los costes anteriores, tales que tardan todos ellos 1 hora en resolver un problema de tamaño $n = 100$.
 - ¿Qué ocurre si duplicamos la velocidad del computador? O lo que es lo mismo, ¿qué ocurre si duplicamos el tiempo disponible?

\mathcal{O}	$t = 1h.$	$t = 2h.$
$\mathcal{O}(\log n)$	$n = 100$	$n = 10\,000$
$\mathcal{O}(n)$	$n = 100$	$n = 200$
$\mathcal{O}(n \log n)$	$n = 100$	$n = 178$
$\mathcal{O}(n^2)$	$n = 100$	$n = 141$
$\mathcal{O}(n^3)$	$n = 100$	$n = 126$
$\mathcal{O}(2^n)$	$n = 100$	$n = 101$

Importancia del orden de complejidad

- El de coste logarítmico es capaz de resolver problemas 100 veces más grandes
- El de coste exponencial resuelve un tamaño prácticamente igual al anterior!
- Los de coste $\mathcal{O}(n)$ y $\mathcal{O}(n \log n)$ se comportan de acuerdo a la intuición de un usuario no informático: al duplicar la velocidad del computador (o el tiempo disponible), se duplica aprox. el tamaño del problema resuelto.
- En los de coste $\mathcal{O}(n^k)$, al duplicar la velocidad, el tamaño se multiplica por un factor $\sqrt[k]{2}$.

- El orden \mathcal{O} se puede aplicar tanto a un análisis en el caso peor, como a un análisis en el caso promedio.
 - Hay algoritmos cuyo coste está en $\mathcal{O}(n^2)$ en el caso peor y en $\mathcal{O}(n \log n)$ en el caso promedio.
- Las unidades en que se mide el coste en tiempo (segundos, milisegundos, etc.), o en memoria (bytes, palabras, etc.) **no son relevantes** en la complejidad asintótica:
 - Dos unidades distintas se diferencian en una constante multiplicativa (e.g. 120 n^2 segundos son 2 n^2 minutos, ambos en $\mathcal{O}(n^2)$).

Orden de complejidad de un algoritmo

En los siguientes apartados veremos cómo calcular directamente el orden de complejidad de la función de coste de algoritmos iterativos y recursivos.

- Como regla general nos centraremos en el análisis para el **caso peor**. En ocasiones puede interesar el análisis para el caso promedio.
- Diremos que un algoritmo **está en** $\mathcal{O}(f(n))$ si su función de coste $T(n) \in \mathcal{O}(f(n))$. Es decir, para valores suficientemente grandes de su parámetro de entrada n el tiempo consumido por el algoritmo está acotado superiormente por $f(n)$.
- De manera menos formal usaremos el nombre del orden de complejidad: algoritmo constante, algoritmo lineal, algoritmo cuadrático, ...

Además de $\mathcal{O}(f(n))$, en el análisis de eficiencia se pueden utilizar otras medidas asintóticas:

- $\Omega(f(n))$ es el conjunto de funciones para las cuales $f(n)$ es una cota inferior para valores suficientemente grandes de n
- Si una función $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ y además $f(n) \in \Omega(g(n))$, diremos que $f(n)$ está en el **orden exacto** de $g(n)$: $f(n) \in \Theta(g(n))$

Siempre que sea posible su obtención, el orden exacto del coste de un algoritmo es preferible puesto que es más informativo que únicamente una cota inferior o superior.

Consideremos la siguiente función:

```
1  int fact_par(int n) {  
2      int ret = 1;  
3      if (n % 2 == 0) { // 'n' es par  
4          for (int i = 2; i <= n; i++) {  
5              ret = ret * i;  
6          }  
7      }  
8      return ret;  
9  }
```

- Si n es par, el coste es lineal
- Si n es impar, el coste es constante
- Por lo tanto: $T_{\text{fact_par}}(n) \in \mathcal{O}(n)$, $T_{\text{fact_par}}(n) \notin \mathcal{O}(1)$
 $T_{\text{fact_par}}(n) \in \Omega(1)$, $T_{\text{fact_par}}(n) \notin \Omega(n)$
 $T_{\text{fact_par}}(n) \notin \Theta(1)$, $T_{\text{fact_par}}(n) \notin \Theta(n)$

¡Atención!

Es común equiparar el análisis en el caso mejor con el orden $\mathcal{O}(f(n))$, y el análisis en el caso peor con $\Omega(f(n))$, pero son cosas distintas:

- El análisis en el caso mejor/peor considera que **dado un tamaño n** del argumento de entrada, el **contenido de dicho argumento es lo más beneficioso/perjudicial** para el coste.
- Una vez tomada esa suposición sobre el contenido del argumento, podemos encontrar tanto cotas superiores $\mathcal{O}(f(n))$ a su crecimiento como cotas inferiores $\Omega(f(n))$.

Resumen

- **Análisis en el caso peor $\neq \mathcal{O}(f(n))$**
- **Análisis en el caso mejor $\neq \Omega(f(n))$**

Análisis de eficiencia en algoritmos iterativos

- En el primer ejemplo realizamos un cálculo exacto del tiempo por cada instrucción (t_a , t_c , $t_i \dots$)
- Si estamos interesados únicamente en el **orden** $\mathcal{O}(f(n))$ del coste en el caso peor, podemos simplificar el proceso y centrarnos únicamente en lo que nos importará, ignorando diferencias tecnológicas.
- Para obtener el orden $\mathcal{O}(f(n))$ del coste de un algoritmo iterativo utilizaremos una serie de **reglas** que aplicaremos **instrucción a instrucción**.

- ❶ Las **instrucciones básicas** (asignación, entrada/salida, acceso a vectores, operaciones aritméticas, etc.) tendrán un coste en $\mathcal{O}(1)$.
(*) Si la instrucción requiere la evaluación de expresiones complejas (p.ej. una llamada a función) el coste estará en el máximo orden de dichas evaluaciones.

Ejemplos:

- $x = 4; \in \mathcal{O}(1)$
- $x > 4; \in \mathcal{O}(1)$
- $x+1 > 4; \in \mathcal{O}(1)$
- $a = \text{fact_par}(x); \in \mathcal{O}(x)$

- ❷ Las **llamadas a función** tienen un coste del orden de la función aplicado a los argumentos concretos. **Ejemplos:**

- $\text{fact_par}(x); \in \mathcal{O}(x)$
- $\text{fact_par}(6); \in \mathcal{O}(1)$
- $\text{search}(v, 6); \in \mathcal{O}(n)$, siendo n la longitud del vector v

- 8 Una **secuencia de instrucciones** $S_1; S_2$ tiene coste en $\mathcal{O}(\max(f_1(n), f_2(n)))$, donde el coste de S_1 está en $\mathcal{O}(f_1(n))$ y el coste de S_2 está en $\mathcal{O}(f_2(n))$

Ejemplos:

- $x = 4; x > 4; \in \mathcal{O}(1)$
- $x > 4; a = \text{fact_par}(x); \in \mathcal{O}(x)$
- $\text{fact_par}(n); \text{fact_par}(m); \in \mathcal{O}(\max(n, m)) = \mathcal{O}(n + m)$

Apunte

$\mathcal{O}(\max(f_1(n), f_2(n))) = \mathcal{O}(f_1(n) + f_2(n))$, así que podéis usar *max* o *+* para indicar los costes que no se puedan simplificar

- 4 Una **instrucción condicional** **if** (B) $\{S_1\}$ **else** $\{S_2\}$ tiene un coste en $\mathcal{O}(\max(f_B(n), f_1(n), f_2(n)))$, donde el coste de B está en $\mathcal{O}(f_B(n))$, el de S_1 en $\mathcal{O}(f_1(n))$ y el de S_2 en $\mathcal{O}(f_2(n))$.

Ejemplos:

- **if** ($x > 4$) $\{a = 5;\}$ **else** $\{a = 0;\}$ $\in \mathcal{O}(1)$
- **if** ($x > 4$) $\{a = \text{fact_par}(x);\}$ **else** $\{a = 0;\}$ $\in \mathcal{O}(x)$
- **if** ($\text{fact_par}(x) > 56$) $\{b = \text{true};\}$ $\in \mathcal{O}(x)$

- 5 Consideremos un **bucle while** (B) $\{S\}$ donde el coste de B ; S está en $\mathcal{O}(f_{B;S}(n))$ y el número de iteraciones del bucle es $iter(n)$. El coste del bucle será el **sumatorio** del coste de cada iteración para cada valor desde 1 hasta $iter(n)$.

Ejemplo:

```
int i = 0;
while (i < n) {
    a = a + fact_par(i);
    i++;
}
```

- Una iteración ($i < n$; $a = a + \text{fact_par}(i)$; $i++$;) $\in \mathcal{O}(i)$
- Número de iteraciones: n , desde $i = 0$ hasta $i = n - 1$
- Coste de todas las iteraciones:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2} \in \mathcal{O}(n^2)$$

Reglas para el cálculo de la eficiencia

- El caso de bucles **for** es igual considerando que
for ($\langle \text{init} \rangle$; $\langle \text{cond} \rangle$; $\langle \text{incr} \rangle$) { S } \equiv $\langle \text{init} \rangle$; **while** ($\langle \text{cond} \rangle$) { S; $\langle \text{incr} \rangle$ }
- Si en un bucle el coste de cada iteración es constante, resolver el sumatorio se simplifica. **Ejemplo:**

```
int i = 0;  
while (i < n) {  
    a = a + fact_par(n);  
    i++;  
}
```

- Una iteración: $(i < n; a = a + \text{fact_par}(n); i++;) \in \mathcal{O}(n)$
- Número de iteraciones: n , desde $i = 0$ hasta $i = n - 1$
- Coste de todas las iteraciones:

$$\sum_{i=0}^{n-1} n = n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n \cdot n \in \mathcal{O}(n^2)$$

- «Constantes fuera»:



$$\sum_{i=a}^n k \cdot s_i = k \cdot \sum_{i=a}^n s_i$$

- Serie aritmética:

$$\sum_{i=a}^n i = \frac{\overbrace{(a+n)}^{\text{suma_extremos}} \overbrace{(n-a+1)}^{\text{num_elementos}}}{2}$$

- Serie geométrica:

$$\sum_{i=0}^n k^i = \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k}$$

²Si durante el cálculo de eficiencia de un algoritmo os encontráis con otros sumatorios que no sabéis manejar, buscad más propiedades sobre los sumatorios. ¡Hay muchas!  

Ejemplo completo de eficiencia asintótica

```
1 template <class T>
2 bool search (vector<T> const& v, T const& x) {
3     int i = 0;
4     while (i < v.size() && v[i] != x) {
5         ++i;
6     }
7     return i < v.size();
8 }
```

Sabiendo que el coste de `v.size()` $\in \mathcal{O}(1)$ tendríamos que:

- Instrucción en L3 $\in \mathcal{O}(1)$
- Bucle en L4–L6:
 - Comparación en L4 $\in \mathcal{O}(1)$
 - Instrucción en L5 $\in \mathcal{O}(1)$
 - Secuencia L4;L5 $\in \mathcal{O}(\max(1, 1)) = \mathcal{O}(1)$
 - **Total bucle:** $\sum_{i=0}^{n-1} 1 \in \mathcal{O}(n)$ [*n es la longitud de v*]
- Instrucción en L7 $\in \mathcal{O}(1)$

Coste de **toda la función** L3–L7 $\in \mathcal{O}(\max(1, n, 1)) = \mathcal{O}(n)$

Análisis de eficiencia en algoritmos recursivos

- Al calcular el coste de algoritmos recursivos nos encontraremos con **funciones de coste recursivas** y con distinción de casos, p.ej.

$$T(n) = \begin{cases} 5 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + 8 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- Estas ecuaciones se denominan *relaciones recurrentes* o **recurrencias**.
- Lo que queremos es encontrar el orden de complejidad de la recurrencia $T(n)$. Posibilidades:
 - Obtener una expresión no recursiva de $T(n)$ mediante la expansión de la recurrencia.
 - Encajar $T(n)$ con una **plantilla** y obtener directamente el orden de complejidad.

Obtención de recurrencias

El primer paso será analizar el código de la función y crear la recurrencia. Nos centramos en el número de **instrucciones elementales ejecutadas** e ignoramos el coste de **return**.

```
1 int fact(const int n) {  
2     int s;  
3     if (n == 0) {  
4         s = 1;  
5     } else {  
6         s = n * fact(n-1);  
7     }  
8     return s;  
9 }
```

Este es el código clásico para el cálculo del factorial de manera recursiva. Vemos que tenemos dos casos: cuando $n = 0$ y cuando $n > 0$.

```
1 int fact(const int n) {  
2     int s;  
3     if (n == 0) {  
4         s = 1;  
5     } else {  
6         s = n * fact(n-1);  
7     }  
8     return s;  
9 }
```

- $n = 0$) Ejecutamos 2 instrucciones: 1 comparación y 1 asignación.
- $n > 0$) Ejecutamos 4 instrucciones (1 comparación, 1 multiplicación, 1 resta y 1 asignación) **más el coste de invocar a** $\text{fact}(n-1)$

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + 4 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Para obtener una expresión no recursiva a partir de una recurrencia usaremos la técnica de **expansión**.

- ➊ Vamos expandiendo la recurrencia para detectar patrones en la expresión.
- ➋ Generamos la expresión expandida k veces.
- ➌ Detectamos cuánto debe de valer k para llegar al caso base.
- ➍ Usamos ese valor de k para *evaluar* la expresión.
- ➎ Finalmente, demostraremos por inducción que la expresión obtenida es correcta para la recurrencia. **Este paso es imprescindible, porque la generalización realizada en los pasos 1-2 la hemos hecho «a ojo»**

Consideremos la recurrencia de la función fact

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + 4 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Para expandirla iríamos aplicando el caso recursivo repetidas veces:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + 4 & k &= 1 \\ &= T(n-2) + 4 + 4 & k &= 2 \\ &= T(n-3) + 4 + 4 + 4 & k &= 3 \\ &= T(n-4) + 4 + 4 + 4 + 4 & k &= 4 \\ &\vdots \\ &= \mathbf{T(n - k) + 4k} \end{aligned}$$

Ahora tenemos la expresión *general* de la recurrencia expandida k veces, que hemos inferido detectando patrones:

$$T(n - k) + 4k$$

Sabemos que el caso base ocurre cuando el argumento es 0, ¿cuántas veces deberíamos expandir la recurrencia (k) para llegar a dicho caso base?

$$n - k = 0 \iff k = n$$

Si sustituimos ese valor de k en la expresión general tendremos que

$$T(n - n) + 4 \cdot n = T(0) + 4n = 2 + 4n \in \mathcal{O}(n)$$

Demostración

Ahora deberíamos demostrar por inducción que $\forall n \geq 0. T(n) = T_{exp}$ donde el coste obtenido mediante expansiones es $T_{exp}(n) = 4n + 2$ y

$$T(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ T(n-1) + 4 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- **Caso base, $n = 0$**

$$T(0) \stackrel{def}{=} 2 = 4 \cdot 0 + 2 \stackrel{def}{=} T_{exp}(0)$$

- **Paso Inductivo, $n > 0$**

$$\begin{aligned} T(n) &\stackrel{def}{=} T(n-1) + 4 \\ &\stackrel{HI}{=} 4(n-1) + 2 + 4 \\ &= 4n + 2 \stackrel{def}{=} T_{exp}(n) \end{aligned}$$

Expansión

Lamentablemente las recurrencias no suelen expandirse y evaluarse tan fácilmente... Por ejemplo:

$$T(n) = \begin{cases} 8 & \text{si } n = 0 \\ 3T(n-1) + 5 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Se expandiría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n-1) + 5 & k=1 \\ &= 3[3T(n-2) + 5] + 5 & k=2 \\ &= 3 \cdot 3T(n-2) + 3 \cdot 5 + 5 \\ &= 3 \cdot 3[3T(n-3) + 5] + 3 \cdot 5 + 5 & k=3 \\ &= 3 \cdot 3 \cdot 3T(n-3) + 3 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 5 \\ &\vdots \\ &= 3^k T(n-k) + \sum_{i=0}^{k-1} 5 \cdot 3^i \end{aligned}$$

Sabemos que el caso base ocurre cuando el argumento es 0, luego

$$n - k = 0 \iff k = n$$

Si sustituimos en la expresión general tendremos que:

$$\begin{aligned} & 3^n T(n - n) + \sum_{i=0}^{n-1} 5 \cdot 3^i \\ = & 3^n T(0) + 5 \sum_{i=0}^{n-1} 3^i \\ = & 3^n \cdot 8 + 5 \frac{1-3^n}{-2} \\ = & 3^n \cdot 8 + \frac{5}{2} 3^n - \frac{5}{2} \\ = & (8 + \frac{5}{2}) 3^n - \frac{5}{2} \\ = & \frac{21}{2} 3^n - \frac{5}{2} \in \mathcal{O}(3^n) \end{aligned}$$

Demostración

Sabiendo $T_{exp}(n) = \frac{21}{2}3^n - \frac{5}{2}$ demostramos por inducción que $\forall n \geq 0$. $T(n) = T_{exp}(n)$, donde $T(n)$ estaba definida como

$$T(n) = \begin{cases} 8 & \text{si } n = 0 \\ 3T(n-1) + 5 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

- **Caso base, $n = 0$**

$$T(0) \stackrel{def}{=} 8 = \frac{16}{2} = \frac{21}{2} - \frac{5}{2} = \frac{21}{2}3^0 - \frac{5}{2} \stackrel{def}{=} T_{exp}(0)$$

- **Paso Inductivo, $n > 0$**

$$\begin{aligned} T(n) &\stackrel{def}{=} 3T(n-1) + 5 \\ &\stackrel{HI}{=} 3\left[\frac{21}{2}3^{n-1} - \frac{5}{2}\right] + 5 \\ &= \frac{21}{2}3^n - \frac{15}{2} + 5 \\ &= \frac{21}{2}3^n - \frac{15}{2} + \frac{10}{2} = \frac{21}{2}3^n - \frac{5}{2} \stackrel{def}{=} T_{exp}(n) \end{aligned}$$

Expansión

Otro ejemplo más:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \vee n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + n^2 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Se expandiría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\frac{n}{2}) + n^2 & k=1 \\ &= 2[2T(\frac{n}{4}) + (\frac{n}{2})^2] + n^2 & k=2 \\ &= 4T(\frac{n}{4}) + 2\frac{n^2}{2^2} + n^2 \\ &= 4T(\frac{n}{4}) + \frac{1}{2}n^2 + n^2 \\ &= 4[2T(\frac{n}{8}) + (\frac{n}{4})^2] + \frac{1}{2}n^2 + n^2 & k=3 \\ &= 8T(\frac{n}{8}) + 4(\frac{n^2}{4^2}) + \frac{1}{2}n^2 + n^2 \\ &= 8T(\frac{n}{8}) + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n^2 + n^2 \\ &\vdots \\ &= 2^k T(\frac{n}{2^k}) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} n^2 \end{aligned}$$

Para evitar *sutilezas* con la división entera, supondremos un n que es potencia de 2. El caso base ocurrirá cuando $k = 1$, por lo tanto:

$$\frac{n}{2^k} = 1 \iff n = 2^k \iff k = \log_2 n$$

Si sustituimos la k en la expresión general tendremos que:

$$\begin{aligned} & 2^{(\log_2 n)} T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + \sum_{i=0}^{(\log_2 n)-1} \frac{1}{2^i} n^2 \\ = & nT(1) + n^2 \sum_{i=0}^{(\log_2 n)-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ = & n + n^2 \sum_{i=0}^{(\log_2 n)-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ = & n + n^2 \left(\frac{1 - \frac{1}{2}^{(\log_2 n)}}{1 - \frac{1}{2}} \right) \\ = & n + n^2 \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \dots = n + n^2 \left(\frac{2n-2}{n} \right) \\ = & n - 2n + 2n^2 = 2n^2 - n \in \mathcal{O}(n^2) \end{aligned}$$

Demostración

La expresión no funciona para $n = 0$, pero no es problema ya que queremos que la igualdad se cumpla para *valores de n suficientemente grandes*, concretamente $n \geq 1$. Por lo tanto demostramos por inducción que $\forall n \geq 1$, n potencia de 2. $T(n) = T_{\text{exp}}(n)$, donde $T_{\text{exp}} = 2n^2 - n$ y $T(n)$ se definía como

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \vee n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + n^2 & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- **Caso base, $n = 1$)**

$$T(1) \stackrel{\text{def}}{=} 1 = 2 \cdot 1^2 - 1 \stackrel{\text{def}}{=} T_{\text{exp}}(1)$$

- **Paso Inductivo, $n > 1$)**

$$\begin{aligned} T(n) &\stackrel{\text{def}}{=} 2T(\frac{n}{2}) + n^2 \stackrel{HI}{=} 2[2(\frac{n}{2})^2 - \frac{n}{2}] + n^2 \\ &= 4\frac{n^2}{2^2} - n + n^2 = n^2 - n + n^2 \\ &= 2n^2 - n \stackrel{\text{def}}{=} T_{\text{exp}}(n) \end{aligned}$$

Plantillas para obtener el coste

- Una vez hemos calculado la recurrencia, podemos utilizar *plantillas* de coste. Si la recurrencia encaja con alguna de las dos plantillas, únicamente tendremos que detectar en qué caso concreto estamos y directamente obtendremos el coste.
- El método de las plantillas también se llama *master method* en [Corment *et al.*, 2009]
- Las plantillas se obtienen aplicando el método del expansión-evaluación de manera *simbólica* y luego realizando distinción de casos sobre la expresión resultante. En [Peña, 03] podéis ver el desarrollo completo.

Reducción del problema mediante sustracción

Consideremos una recurrencia con el siguiente aspecto:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } 0 \leq n < b \\ \mathbf{a}T(n - \mathbf{b}) + c_2n^k & \text{si } n \geq b \end{cases}$$

El orden de esta recurrencia estará en:

$$\begin{aligned} \text{si } a = 1 & \longrightarrow T(n) \in \Theta(n^{k+1}) \\ \text{si } a > 1 & \longrightarrow T(n) \in \Theta(a^{n \text{ div } b}) \end{aligned}$$

Reducción del problema mediante división

Consideremos una recurrencia con el siguiente aspecto:

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{si } 0 \leq n < b \\ aT(n/b) + c_2n^k & \text{si } n \geq b \end{cases}$$

El orden de esta recurrencia estará en:

$$\begin{aligned} \text{si } a < b^k &\longrightarrow T(n) \in \Theta(n^k) \\ \text{si } a = b^k &\longrightarrow T(n) \in \Theta(n^k \log n) \\ \text{si } a > b^k &\longrightarrow T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) \end{aligned}$$

Conclusiones

- El análisis asintótico de coste y los órdenes de complejidad nos proporciona una manera sencilla de comparar la eficiencia de dos algoritmos. Sin embargo hay que tener en cuenta 2 aspectos:
 - Se centran en tamaños *suficientemente grandes*.
 - Ignoran las constantes multiplicativas y aditivas.
- Así que a la hora de comparar algoritmos utilizando sus costes asintóticos hay que tener cuidado y entender bien la información que proporcionan.

Comparación de algoritmos

- Tengo dos algoritmos A y B con $T_A(n) \in \mathcal{O}(n)$ y $T_B(n) \in \mathcal{O}(n^2)$.
¿Cuál es mejor?
- Para valores suficientemente grandes de n el mejor es A sin ningún tipo de duda.
- ¿Y para valores pequeños? Es muy posible que B sea más rápido para datos pequeños. (*Piensa que quizá A tiene una «constante oculta» más elevada que B*).
 - Si estos algoritmos únicamente se aplicarán a datos pequeños, puede ser *mejor* usar B . **¿Y qué significa pequeño?**
 - Puedes detectar a partir de qué valor n_0 empieza a ser mejor A , y llamar a un algoritmo u otro.
 - La determinación de este valor n_0 se puede realizar de manera empírica o realizando un análisis de coste preciso y luego comparando ambas expresiones de coste.

Bibliografía

- Ricardo Peña Marí. *Diseño de Programas: Formalismo y Abstracción (Tercera edición)*. Pearson/Prentice Hall, 2005. **Capítulo 1**.
http://cisne.sim.ucm.es/record=b2175612~S6*sp1
- Mario Rodríguez Artalejo, Pedro Antonio González Calero, Marco Antonio Gómez Martín. *Estructuras de datos: un enfoque moderno*. Editorial Complutense, 2011. **Capítulos 1.4 y 2.4**.
http://cisne.sim.ucm.es/record=b3643210~S6*sp1
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronarld L. Rivest, Clifford Stein. *Introduction to Algorithms (Third Edition)*. MIT Press, 2009. **Capítulos 3 y 4**.
<https://ucm.on.worldcat.org/oclc/1025499183>