Actividad #5 (Movimiento Armónico Simple : Péndulo)

Instructor: Carlos Lizárraga Celaya *Student: Antonio Cota Rodríguez*

Introducción

Si una fuerza cambia en el tiempo, la velocidad y la aceleración del cuerpo también cambiarán en el tiempo. Un tipo de movimiento particular ocurre cuando sobre el cuerpo actúa una fuerza que es directamente proporcional al desplazamiento del cuerpo desde su posición de equilibrio. Si dicha fuerza siempre actúa en la dirección de la posición de equilibrio del cuerpo, se producirá un movimiento de ida y de vuelta respecto de esa posición, por eso a estas fuerzas se les da el nombre de fuerzas de restitución, porque tratan siempre de restituir o llevar al cuerpo a su posición original de equilibrio. El movimiento que se produce es un ejemplo de lo que se llama movimiento perió-dico u oscilatorio.

Un tipo particular es el **movimiento armónico simple**. En este tipo de movimiento, un cuerpo oscila indefinidamente entre dos posiciones espaciales sin perder energía mecánica. Pero en los sistemas mecánicos reales, siempre se encuentran presente fuerzas de rozamiento, que disminuyen la energía mecánica a medida que transcurre el tiempo, en este caso las oscilaciones se llaman amortiguadas. Si se agrega una fuerza externa impulsora de tal manera que la pérdida de energía se equilibre con la energía de entrada, el movimiento se llama oscilación forzada.

Péndulo simple

El péndulo simple es otro sistema mecánico que tiene un movimiento periódico oscilatorio, si se mueve en un medio sin fricción. Un péndulo es un sistema formado por una masa puntual m suspendida en el aire por una cuerda de longitud L, de masa muy pequea comparada con la masa m, por lo que se desprecia ; la parte superior de la cuerda se encuentra fija, como se muestra en la figura 1. El movimiento del péndulo producido por la fuerza de gravedad se realiza en un plano vertical, y es un movimiento armónico simple si el ángulo θ que forma la cuerda del péndulo con la vertical es pequeo, como se puede demostrar a continuación.

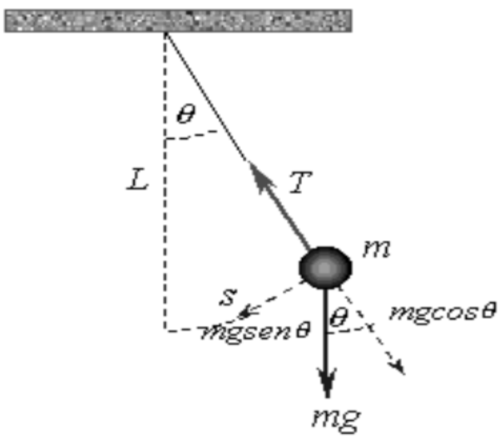

FIGURE 1 – Péndulo Simple

Las fuerzas que actúan sobre la masa m son la tensión T de la cuerda y el peso mg de la masa, se muestran en la figura 1. La componente tangencial del peso, $mg\sin\theta$, siempre apunta hacia $\theta = 0$, en dirección opuesta la desplazamiento. Esta es la fuerza de restitución, entonces puede escribirse la ecuación de movimiento en la dirección tangencial de la forma :

$$F_t = -mg\sin\theta \quad \rightarrow \quad m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

donde s es el desplazamiento medido a lo largo del arco de trayectoria y el signo menos indica que F_t actúa opuesta al movimiento. Como $s = L\theta$ y L es constante, la ecuación se transforma en :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Como el lado derecho es proporcional a $\sin\theta$, y no solo a θ, se concluye que el movimiento no es armónico simple. Esa es una ecuación diferencial difícil de resolver, por lo que se supone que el péndulo se mueve en pequeos desplazamientos, tal que θ es pequeo, en este caso se puede usar la aproximación $\sin theta \approx \theta$ y la ecuación diferencial del movimiento se reduce a :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

que tiene la misma forma que la ecuación que describe al movimiento armónico simple, por lo que solo en esas condiciones el movimiento del péndulo es un movimiento armónico simple. Su solución es entonces :

$$\theta = A\cos(\omega t + \delta)$$

donde A es la amplitud que corresponde al máximo desplazamiento angular y ω es la frecuencia angular, de valor :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

El período del movimiento es :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

El periodo y la frecuencia de un péndulo simple dependen solo de la longitud de la cuerda y la aceleración de gravedad, y son independiente de la masa m del péndulo. Esto significa que todos los péndulos simples de igual longitud en el mismo lugar, oscilarán con el mismo periodo.

Programa

En esta sección se mostrará un código para Python con el que podremos calcular la posición de la masa m de un péndulo simple así como su velocidad angular dada las condiciones iniciales, también se verá que para diferentes valores en los parámetros a y b se obtendrán diferentes movimientos armnicos (sobre-amortiguado, críticamiente amortiguado y sub-amortiguado).

El código que se utilizó fue el siguiente

```
import numpy as np
>>> def pend(y, t, b, c):
...     theta, omega = y
...     dydt = [omega, -b*omega - c*np.sin(theta)]
...     return dydt
...
#Tomamos los valores de las constantes como b=0.25 y c=5.0
>>> b = 0.25
>>> c = 5

#Condiciones iniciales
>>> y0 = [np.pi - 0.1, 0.0]
```

```
#Nuestra gama de tiempos es
>>> t = np.linspace(0, 25, 101)

#Odeint para generar la solucin
>>> from scipy.integrate import odeint
>>> sol = odeint(pend, y0, t, args=(b, c))

#La solucin es un vector de la forma (101, 2)
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> plt.plot(t, sol[:, 0], 'b', label='theta(t)')
>>> plt.plot(t, sol[:, 1], 'g', label='omega(t)')
>>> plt.legend(loc='best')
>>> plt.xlabel('t')
>>> plt.grid()
>>> plt.show()
```

En este primer ejemplo el coeficiente de amortiguamiento b fue de 0.25, y nos imprimió la gráfica característica a un movimiento oscilatorio sub-amortiguado :

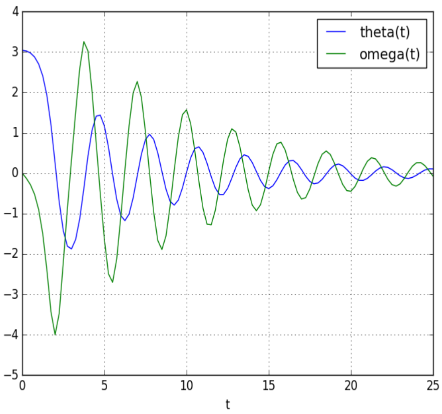

FIGURE 2 – Movimiento Sub-amortiguado b=0.25 c=5

En la siguiente modificación se logró que no hubiera fricción en el movimiento (b=0), así se obtuvo la siguiente gráfica :

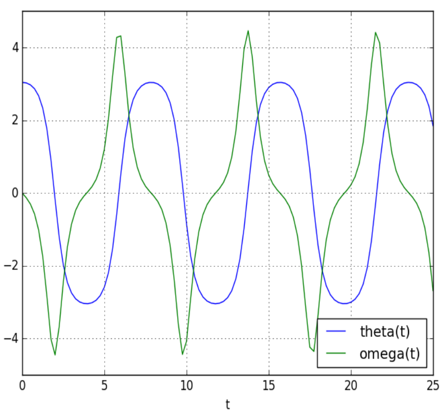

FIGURE 3 – Movimiento sin fricción b=0 c=5

Claramente podemos observar que debido a que no hay fricción la energía se conserva por ende el desplazamiento es el mismo en cada periodo transcurrido.

Ahora se modificó el código para tener un movimiento críticamente-amortiguado (b=10 y c=5) :

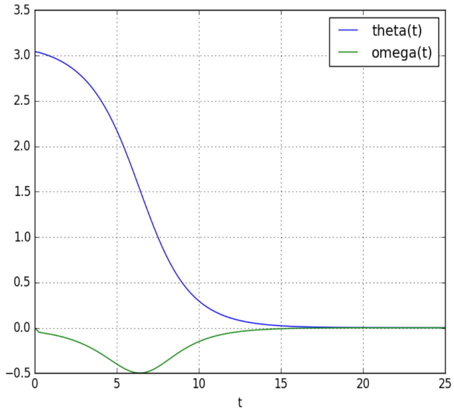

FIGURE 4 – Movimiento crítico-amortiguado b=10 c=5

y por último tenemos el movimiento sobre-amortiguado :

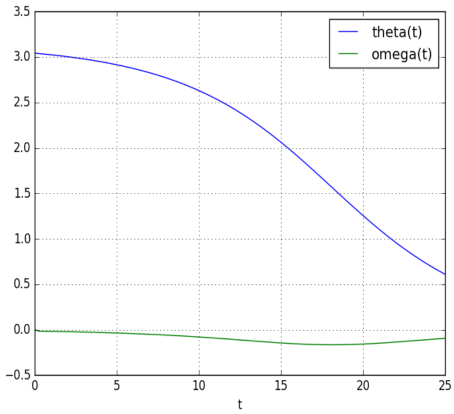

FIGURE 5 – Movimiento Sobre-amortiguado b=30 c=5

Conclusión

En esta práctica se aprendió más sobre el programa Python y logró manipular un modelo físico y jugar con sus parámetros para observar diferentes casos que se suelen presentar en la vida real.