Actividad #8 (Cómputo Simbólico con Maxima)

Instructor: Carlos Lizárraga Celaya *Student: Antonio Cota Rodríguez*

Introducción

wxMaxima

El sistema de álgebra computacional Maxima es un motor de cálculo simbólico escrito en lenguaje Lisp publicado bajo licencia GNU GPL.

Cuenta con un amplio conjunto de funciones para hacer manipulación simbólica de polinomios, matrices, funciones racionales, integración, derivación, manejo de gráficos en 2D y 3D, manejo de números de coma flotante muy grandes, expansión en series de potencias y de Fourier, entre otras funcionalidades. Además tiene un depurador a nivel de fuente para el código de Maxima.

Maxima está basado en el sistema original de Macsyma desarrollado por MIT en los aos 70. Es bastante fiable, tiene un buen recolector de basura, por lo que no desperdicia memoria. Viene con cientos de auto pruebas (test-suite).

Actividad

Durante toda la actividad se mostrarán imágenes para evidenciar el trabajo hecho, cada imagen cuenta con su respectiva descripción de lo que se realizó paso por paso. La dinámica es la siguiente ; se mostrará la imagen y si el resultado dio una gráfica se presentará abajo del código.

Capítulo 2

2.1 Vectores y Álgebra lineal

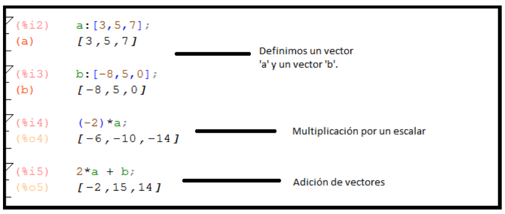


FIGURE 1 – Suma y producto por un escalar

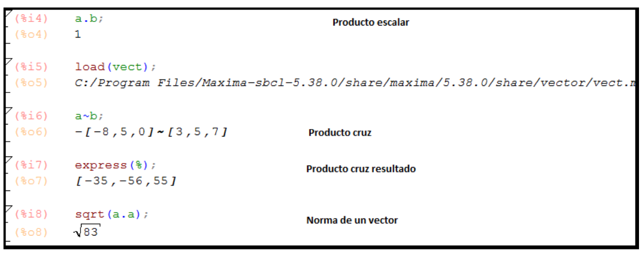


FIGURE 2 – Producto cruz, punto y norma de un vector

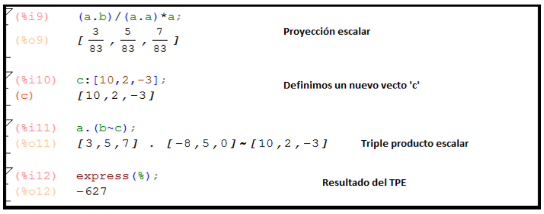


FIGURE 3 – Proyección escalar y triple producto escalar

2.2 Lineas, planos y superficies cuádricas

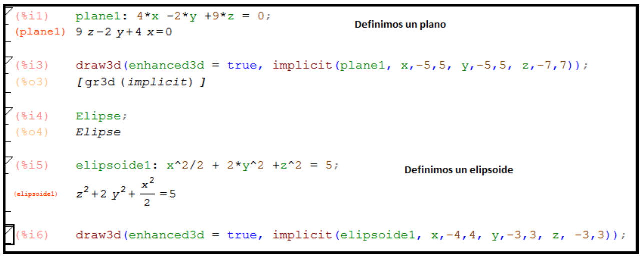


FIGURE 4 – Ecuación de un plano y una elipsoide

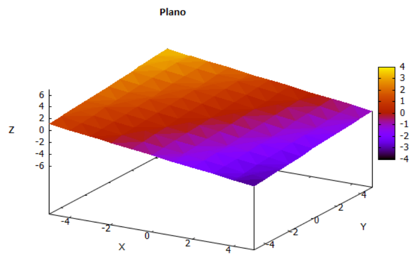


FIGURE 5 – Gráfica del plano

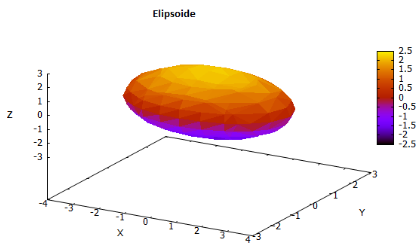


FIGURE 6 – Gráfica de la elipsoide

```
(%i8)    a: [2,3,4];                    Definimos un vector 'a'
(a)      [2,3,4]

(%i9)    b: [-3,3,5];                   Vector 'b'
(b)      [-3,3,5]

(%i10)   c: [1,1,1];                    Vector 'c'
(c)      [1,1,1]

(%i11)   ab: b - a;                     Distancia de entre 'a' y 'b'
(ab)     [-5,0,1]

(%i12)   ac: c - a;                     Distancia entre 'a' y 'c'
(ac)     [-1,-2,-3]

(%i13)   n: express(ab ~ ac);           Vector normal al plano
(n)      [2,-16,10]

(%i14)   r: [x,y,z];                    Vector 'r'
(r)      [x,y,z]

(%i15)   r0: a;                         Punto inicial
(r0)     [2,3,4]

-->      plane: n.r = n.r0;             Ecuación del plano
(plane)  10 z-16 y+2 x=-4

(%i17)   draw3d(enhanced3d = true,implicit(plane,x,-4,4,y,-4,4,z,-4,4));
```

FIGURE 7 – Ecuación de un plano a partir de tres puntos

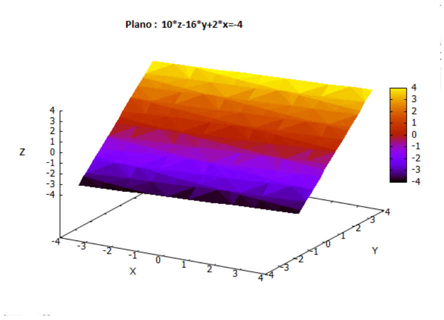


FIGURE 8 – Plano dado 3 puntos

```
(%i19)   Cono: x^2 + y^2 = 3*z^2;       Definimos un cono y lo graficamos
(Cono)   y^2+x^2=3 z^2

(%i20)   draw3d(enhanced3d = true, implicit(Cono, x,-1,1, y,-1,1, z,-0.5,0.5));
```

FIGURE 9 – Cono en Maxima

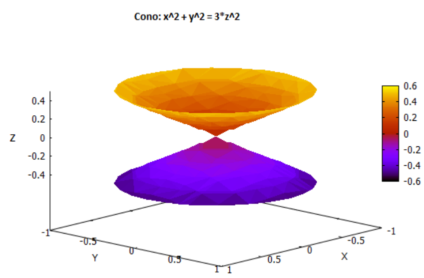


FIGURE 10 – Gráfica del cono

2.3 Funciones vectoriales

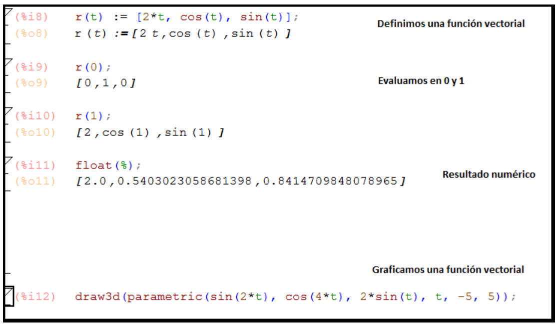


FIGURE 11 – Función vectorial evaluada

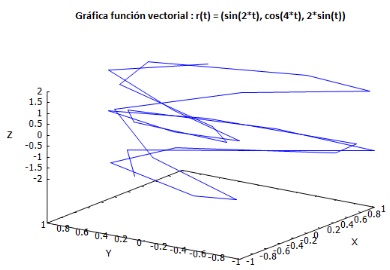


FIGURE 12 – Gráfica de la función vectorial

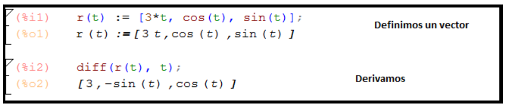


FIGURE 13 – Derivada de la función vectorial

(%i3) `load(eigen);` **Cargamos paquete eigen**

(%o3) `C:/Program Files/Maxima-sbcl-5.38.0/share/maxima/5.38.0/share/matrix/eig`

(%i4) `uvect(r(t));` **Lo hacemos unitario**

(%o4)
$$\left[\frac{3\,t}{\sqrt{\sin(t)^2+\cos(t)^2+9\,t^2}},\ \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)^2+\cos(t)^2+9\,t^2}},\ \frac{\sin(t)}{\sqrt{\sin(t)^2+\cos(t)^2+9\,t^2}}\right]$$

(%i5) `trigsimp(%);` **Simplificamos**

(%o5)
$$\left[\frac{3\,t}{\sqrt{9\,t^2+1}},\ \frac{\cos(t)}{\sqrt{9\,t^2+1}},\ \frac{\sin(t)}{\sqrt{9\,t^2+1}}\right]$$

(%i6) `define(T(t), %);`

(%o6)
$$T(t) := \left[\frac{3\,t}{\sqrt{9\,t^2+1}},\ \frac{\cos(t)}{\sqrt{9\,t^2+1}},\ \frac{\sin(t)}{\sqrt{9\,t^2+1}}\right]$$

(%i7) `define(Tp(t), diff(T(t), t));` **Definimos el vector tangente unitario**

(%o7)
$$Tp(t) := \left[\frac{3}{\sqrt{9\,t^2+1}}-\frac{27\,t^2}{(9\,t^2+1)^{3/2}},\ -\frac{\sin(t)}{\sqrt{9\,t^2+1}}-\frac{9\,t\cos(t)}{(9\,t^2+1)^{3/2}},\ \frac{\cos(t)}{\sqrt{9\,t^2+1}}-\frac{9\,t\sin(t)}{(9\,t^2+1)^{3/2}}\right]$$

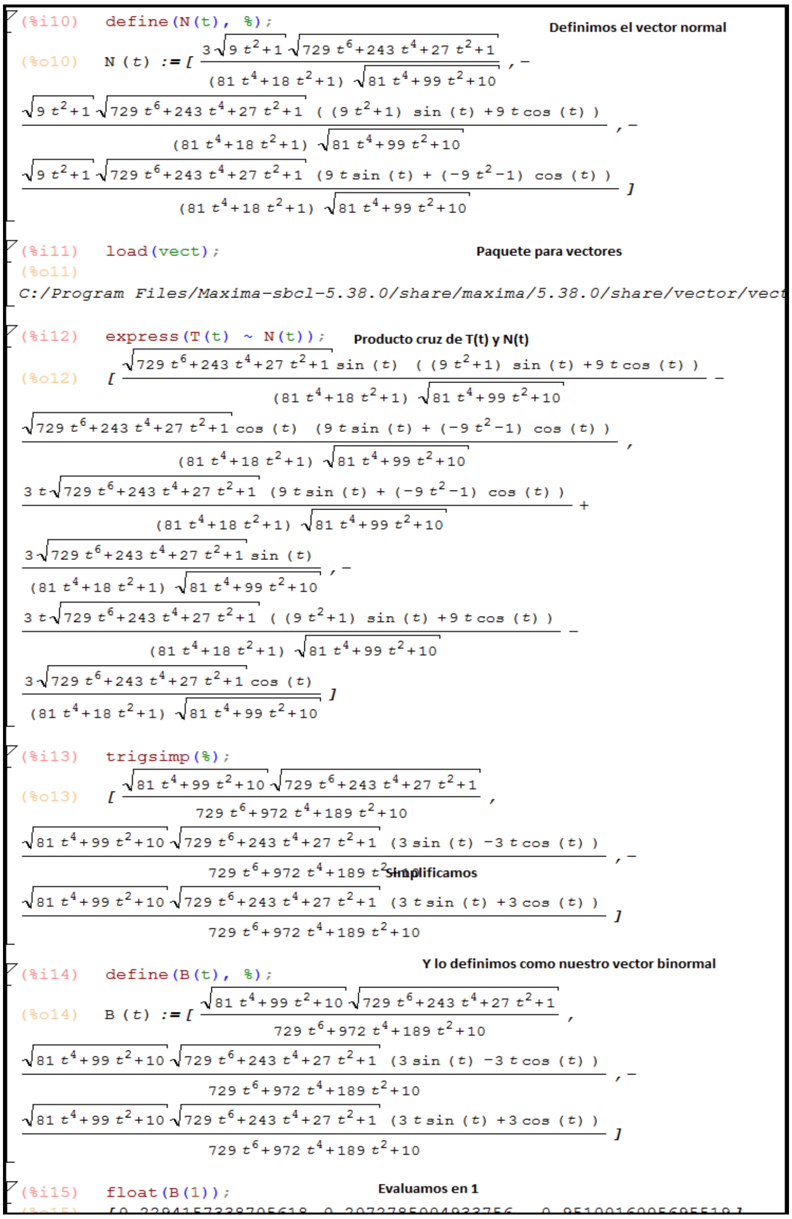
(%i8) `uvect(Tp(t));` **Normalizamos**

(%o8)
$$\left[\frac{\sqrt{729\,t^6+243\,t^4+27\,t^2+1}\left(\frac{3}{\sqrt{9\,t^2+1}}-\frac{27\,t^2}{(9\,t^2+1)^{3/2}}\right)}{\sqrt{(81\,t^4+99\,t^2+1)\sin(t)^2+(81\,t^4+99\,t^2+1)\cos(t)^2+9}},\right.$$
$$\frac{\sqrt{729\,t^6+243\,t^4+27\,t^2+1}\left(-\frac{\sin(t)}{\sqrt{9\,t^2+1}}-\frac{9\,t\cos(t)}{(9\,t^2+1)^{3/2}}\right)}{\sqrt{(81\,t^4+99\,t^2+1)\sin(t)^2+(81\,t^4+99\,t^2+1)\cos(t)^2+9}},$$
$$\left.\frac{\sqrt{729\,t^6+243\,t^4+27\,t^2+1}\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{9\,t^2+1}}-\frac{9\,t\sin(t)}{(9\,t^2+1)^{3/2}}\right)}{\sqrt{(81\,t^4+99\,t^2+1)\sin(t)^2+(81\,t^4+99\,t^2+1)\cos(t)^2+9}}\right]$$

(%i9) `trigsimp(%);` **Simplificamos**

(%o9)
$$\left[\frac{3\sqrt{9\,t^2+1}\sqrt{729\,t^6+243\,t^4+27\,t^2+1}}{(81\,t^4+18\,t^2+1)\sqrt{81\,t^4+99\,t^2+10}},\ -\right.$$
$$\frac{\sqrt{9\,t^2+1}\sqrt{729\,t^6+243\,t^4+27\,t^2+1}\,((9\,t^2+1)\sin(t)+9\,t\cos(t))}{(81\,t^4+18\,t^2+1)\sqrt{81\,t^4+99\,t^2+10}},\ -$$
$$\left.\frac{\sqrt{9\,t^2+1}\sqrt{729\,t^6+243\,t^4+27\,t^2+1}\,(9\,t\sin(t)+(-9\,t^2-1)\cos(t))}{(81\,t^4+18\,t^2+1)\sqrt{81\,t^4+99\,t^2+10}}\right]$$

FIGURE 14 – Vector tangente unitario



(%i10) define(N(t), %); Definimos el vector normal

(%o10) $N(t) := \left[\frac{3\sqrt{9t^2+1}\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}}{(81t^4+18t^2+1)\sqrt{81t^4+99t^2+10}}, -\frac{\sqrt{9t^2+1}\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\,((9t^2+1)\sin(t)+9t\cos(t))}{(81t^4+18t^2+1)\sqrt{81t^4+99t^2+10}}, -\frac{\sqrt{9t^2+1}\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\,(9t\sin(t)+(-9t^2-1)\cos(t))}{(81t^4+18t^2+1)\sqrt{81t^4+99t^2+10}}\right]$

(%i11) load(vect); Paquete para vectores

(%o11) C:/Program Files/Maxima-sbcl-5.38.0/share/maxima/5.38.0/share/vector/vect

(%i12) express(T(t) ~ N(t)); Producto cruz de T(t) y N(t)

(%o12) $\left[\frac{\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\sin(t)\,((9t^2+1)\sin(t)+9t\cos(t))}{(81t^4+18t^2+1)\sqrt{81t^4+99t^2+10}} - \frac{\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\cos(t)\,(9t\sin(t)+(-9t^2-1)\cos(t))}{(81t^4+18t^2+1)\sqrt{81t^4+99t^2+10}}, \frac{3t\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\,(9t\sin(t)+(-9t^2-1)\cos(t))}{(81t^4+18t^2+1)\sqrt{81t^4+99t^2+10}} + \frac{3\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\sin(t)}{(81t^4+18t^2+1)\sqrt{81t^4+99t^2+10}}, -\frac{3t\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\,((9t^2+1)\sin(t)+9t\cos(t))}{(81t^4+18t^2+1)\sqrt{81t^4+99t^2+10}} - \frac{3\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\cos(t)}{(81t^4+18t^2+1)\sqrt{81t^4+99t^2+10}}\right]$

(%i13) trigsimp(%);

(%o13) $\left[\frac{\sqrt{81t^4+99t^2+10}\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}}{729t^6+972t^4+189t^2+10}, -\frac{\sqrt{81t^4+99t^2+10}\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\,(3\sin(t)-3t\cos(t))}{729t^6+972t^4+189t^2+10}, -\frac{\sqrt{81t^4+99t^2+10}\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\,(3t\sin(t)+3\cos(t))}{729t^6+972t^4+189t^2+10}\right]$ Simplificamos

(%i14) define(B(t), %); Y lo definimos como nuestro vector binormal

(%o14) $B(t) := \left[\frac{\sqrt{81t^4+99t^2+10}\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}}{729t^6+972t^4+189t^2+10}, -\frac{\sqrt{81t^4+99t^2+10}\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\,(3\sin(t)-3t\cos(t))}{729t^6+972t^4+189t^2+10}, -\frac{\sqrt{81t^4+99t^2+10}\sqrt{729t^6+243t^4+27t^2+1}\,(3t\sin(t)+3\cos(t))}{729t^6+972t^4+189t^2+10}\right]$

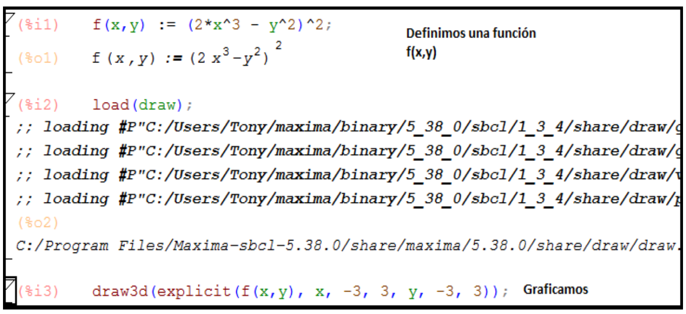
(%i15) float(B(1)); Evaluamos en 1

(%o15) [0.2294157338705618, 0.2072785004933756, 0.9510016005695519]

FIGURE 15 – Vector binormal

Capítulo 3

3.1 Funciones de varias variables



(%i1) f(x,y) := (2*x^3 - y^2)^2; Definimos una función f(x,y)

(%o1) $f(x,y) := (2x^3-y^2)^2$

(%i2) load(draw);

;; loading #P"C:/Users/Tony/maxima/binary/5_38_0/sbcl/1_3_4/share/draw/g

;; loading #P"C:/Users/Tony/maxima/binary/5_38_0/sbcl/1_3_4/share/draw/g

;; loading #P"C:/Users/Tony/maxima/binary/5_38_0/sbcl/1_3_4/share/draw/v

;; loading #P"C:/Users/Tony/maxima/binary/5_38_0/sbcl/1_3_4/share/draw/p

(%o2) C:/Program Files/Maxima-sbcl-5.38.0/share/maxima/5.38.0/share/draw/draw.

(%i3) draw3d(explicit(f(x,y), x, -3, 3, y, -3, 3)); Graficamos

FIGURE 16 – Función de varias variables

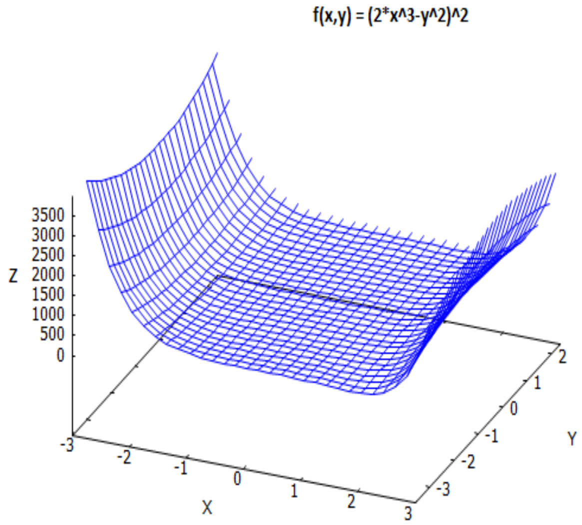


FIGURE 17 – Gráfica de la función

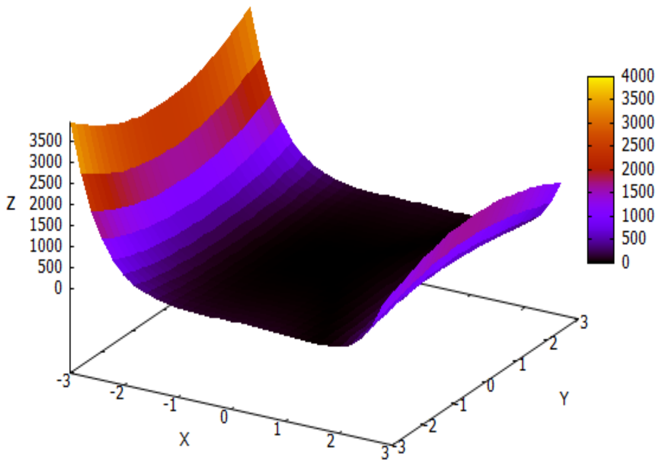


FIGURE 18 – Gráfica de la función 'enhanced'

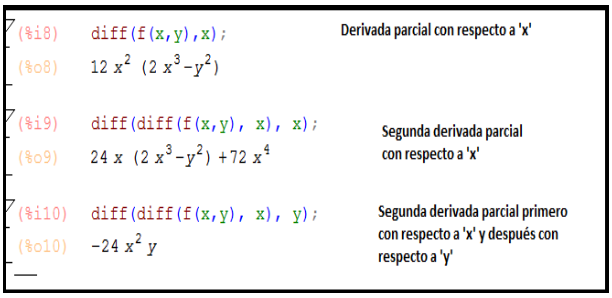


FIGURE 19 – Derivadas parciales de una función de varias variables

3.2 Aproximaciones lineales y diferenciales

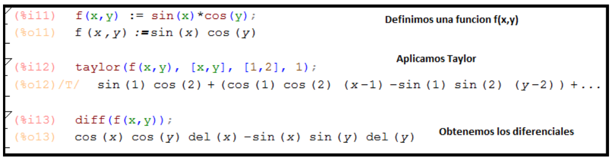


FIGURE 20 – Aproximación lineal y diferenciales de una función de varias variables

3.3 Regla de la cadena y Derivación implícita

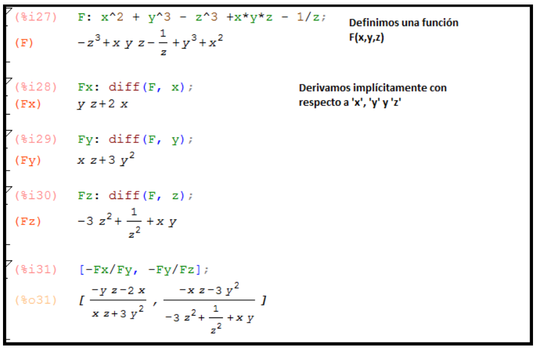


FIGURE 21 – Aplicación de la regla de la cadena a una función

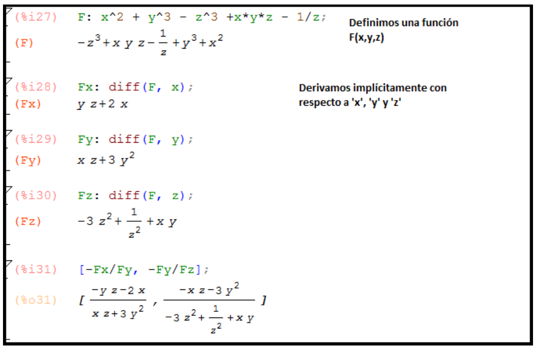
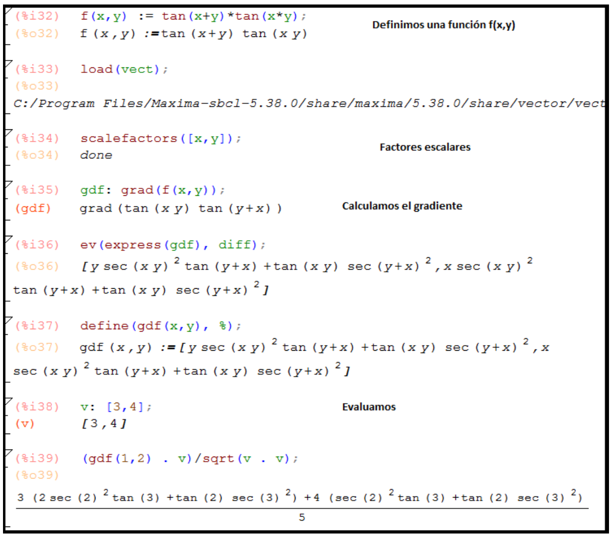


FIGURE 22 – Derivadas implícitas de una función

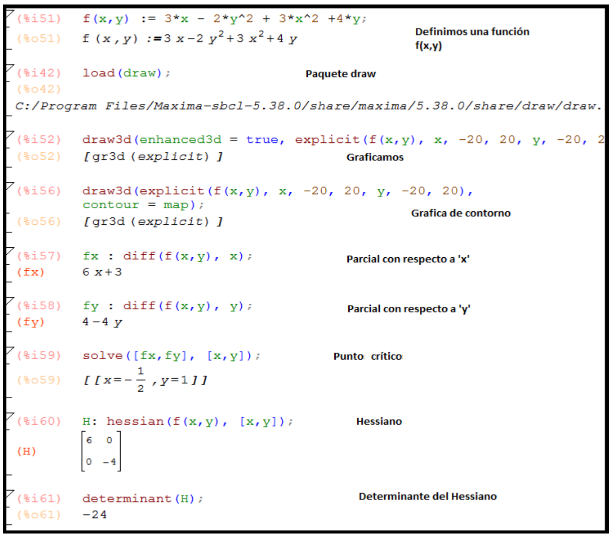
3.4 Derivadas direccionales y Gradiente



```
(%i32) f(x,y) := tan(x+y)*tan(x*y);
(%o32) f(x,y) :=tan(x+y) tan(x y)
(%i33) load(vect);
(%o33)
C:/Program Files/Maxima-sbcl-5.38.0/share/maxima/5.38.0/share/vector/vect
(%i34) scalefactors([x,y]);
(%o34) done
(%i35) gdf: grad(f(x,y));
(gdf) grad(tan(x y) tan(y+x))
(%i36) ev(express(gdf), diff);
(%o36) [y sec(x y)^2 tan(y+x)+tan(x y) sec(y+x)^2,x sec(x y)^2
tan(y+x)+tan(x y) sec(y+x)^2]
(%i37) define(gdf(x,y), %);
(%o37) gdf(x,y):=[y sec(x y)^2 tan(y+x)+tan(x y) sec(y+x)^2,x
sec(x y)^2 tan(y+x)+tan(x y) sec(y+x)^2]
(%i38) v: [3,4];
(v) [3,4]
(%i39) (gdf(1,2) . v)/sqrt(v . v);
(%o39)
3 (2 sec(2)^2 tan(3)+tan(2) sec(3)^2)+4 (sec(2)^2 tan(3)+tan(2) sec(3)^2)
-------------------------------------------------------------------------
                                    5
```


FIGURE 23 – Gradiente y Derivada direccional

3.5 Optimización y extremos locales



```
(%i51) f(x,y) := 3*x - 2*y^2 + 3*x^2 +4*y;
(%o51) f(x,y) :=3 x-2 y^2+3 x^2+4 y
(%i42) load(draw);
(%o42)
C:/Program Files/Maxima-sbcl-5.38.0/share/maxima/5.38.0/share/draw/draw.
(%i52) draw3d(enhanced3d = true, explicit(f(x,y), x, -20, 20, y, -20, 2
(%o52) [gr3d(explicit)]
(%i56) draw3d(explicit(f(x,y), x, -20, 20, y, -20, 20),
       contour = map);
(%o56) [gr3d(explicit)]
(%i57) fx : diff(f(x,y), x);
(fx) 6 x+3
(%i58) fy : diff(f(x,y), y);
(fy) 4-4 y
(%i59) solve([fx,fy], [x,y]);
(%o59) [[x=-1/2,y=1]]
(%i60) H: hessian(f(x,y), [x,y]);
(H) [6  0]
    [0 -4]
(%i61) determinant(H);
(%o61) -24
```


FIGURE 24 – Optimizacion de una funcion

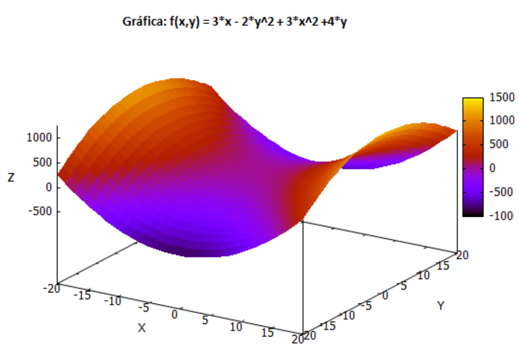


FIGURE 25 – Grafica de la funcion

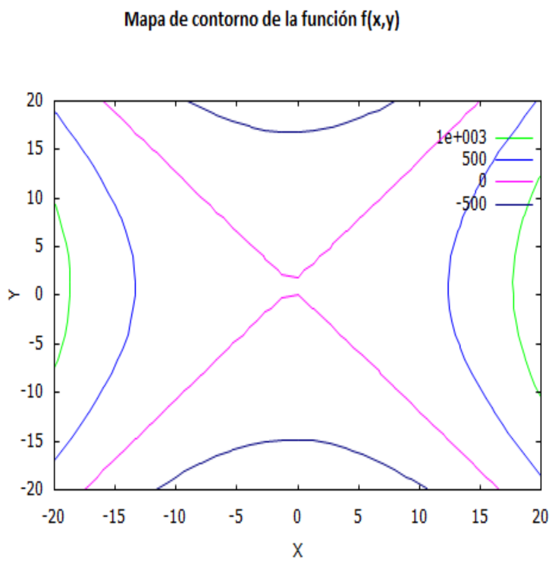


FIGURE 26 – Mapa contorno

Capítulo 4

4.1 Integrales Dobles

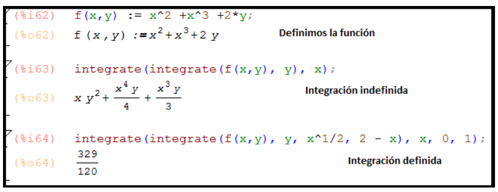


FIGURE 27 – Integración Doble en Maxima

4.2 Integración en coordenadas polares

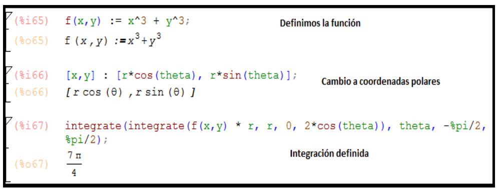


FIGURE 28 – Integración en coordenadas polares

4.3 Integrales Triples

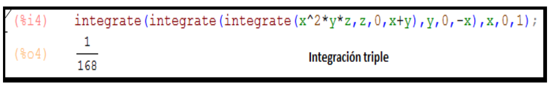


FIGURE 29 – Integración triple

4.4 Integrales en coordenadas cilíndricas y esféricas

```
(%i5)  f(x,y,z) := x*y*z;                                    Definimos una función f(x,y,z)
(%o5)  f (x ,y ,z) :=x y z

(%i6)  [x,y,z] : [r*cos(theta), r*sin(theta), z];           Realizamos un cambio de coordenadas (de
(%o6)  [r cos (θ) ,r sin (θ) ,z]                             cartesianas a cilíndricas)

(%i7)  integrate(integrate(integrate(f(x,y,z)*r, z,0,3), r,0,2), theta,0,%pi);
(%o7)  0                                                     Integración definida

(%i8)  kill(f,x,y,z);                                        Eliminamos las variables
(%o8)  done

(%i9)  f(x,y,z) := x*y*z;              Definimos nuevamente la función
(%o9)  f (x ,y ,z) :=x y z
                                       Cambio de coordenadas a esféricas
(%i10) [x,y,z] : [rho*sin(phi)*cos(theta), rho*sin(phi)*sin(theta), rho*cos(theta)];
(%o10) [sin (φ) ρ cos (θ) ,sin (φ) ρ sin (θ) ,ρ cos (θ) ]

(%i11) integrate(integrate(integrate(f(x,y,z)*rho^2*sin(phi),rho,0,1),theta,0,%pi),
       phi,0,%pi/2);                                         Integración definida
        2
(%o11) --
       27
```

FIGURE 30 – Integración en coordendas cilíndricas y esféricas

4.5 Cambio de variables

```
(%i13) f(x,y) := x^2 + y^2;                      Definimos una función f(x,y)
(%o13) f (x ,y) :=x^2+y^2

(%i14) [x,y]: [u^2 - v^3, 5 * u*u*u * v];        Realizamos un cambio de
(%o14) [u^2-v^3,5 u^3 v]                          variable cualquiera

(%i15) J: jacobian([x,y], [u,v]);                Obtenemos el jacobiano de la
       [  2 u      -3 v^2 ]                       transformación
(J)    [                  ]
       [ 15 u^2 v   5 u^3 ]

(%i16) J: determinant(J);                        Calculamos el determinante del
(J)    45 u^2 v^3+10 u^4                          jacobiano

(%i17) integrate(integrate(f(x,y) * J, u,1,2), v,3,4);
       127020766415
(%o17) ------------                              Integramos con el cambio de coordenadas
           2772
```

FIGURE 31 – Jacobiano de la transformación

Capítulo 5

5.1 Campos vectoriales

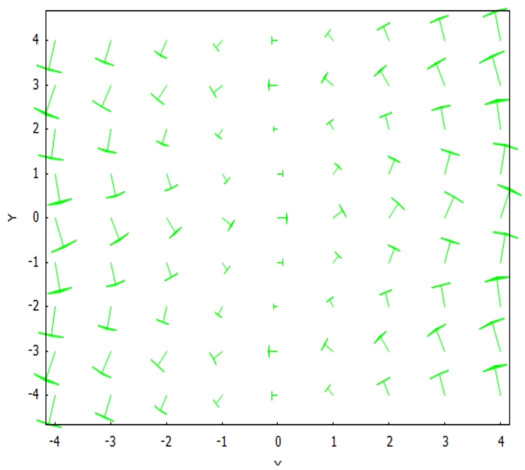


FIGURE 32 – Campo vectorial en 2 dimiensiones

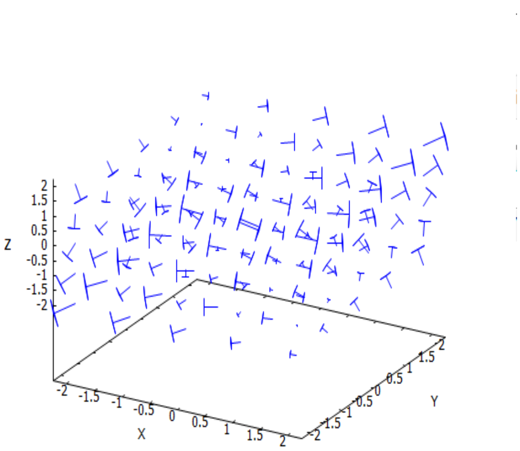


FIGURE 33 – Campo vectorial en 3 dimensiones

5.2 Integrales de Linea

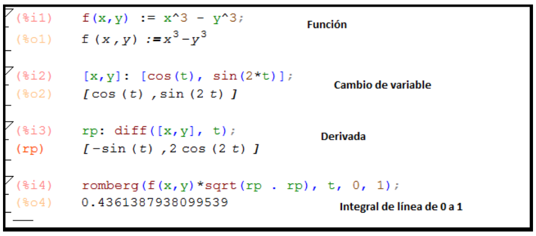


FIGURE 34 – Integral de Linea

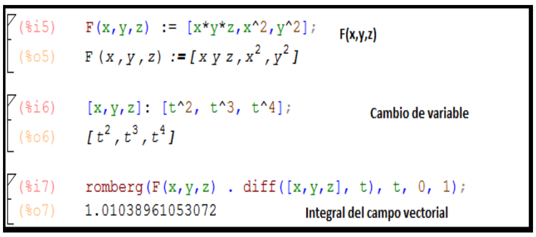


FIGURE 35 – Integral de Linea más general

5.3 Campos vectoriales conservativos

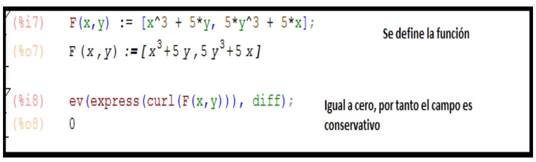


FIGURE 36 – Campo vectorial conservativo

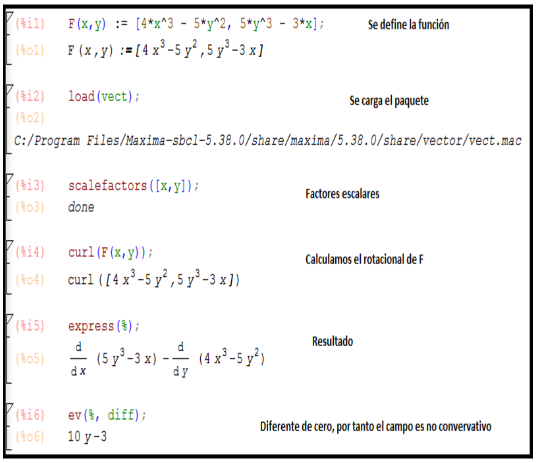


Figure 37 – Campo Vectorial No conservativo