Actividad 1

Antonio Cota, *Universidad de Sonora*

El análisis matemático de los péndulos en general es un poco complicado. Algunas suposiciones pueden ser hechas para simplificar, en el caso del péndulo simple permite que las ecuaciones de movimiento puedan ser resueltas analíticamente para oscilaciones pequeñas.

Péndulo simple

EL llamado "péndulo simple" a una idealización del "péndulo real" pero en un sistema aislado se hacen las siguientes suposiciones:

- La barra o el cable en el cual la bola oscila es de masa despreciable, inextensible y siempre permanecerá tensa.
- La bola es una masa puntual;
- El movimiento ocurre solo en dos dimensiones, i.e. la bola puede no trazar una elipse pero si un arco.
- El movimiento no pierde energía debido a la fricción o resistencia del aire.
- El campo gravitacional es uniforme.
- El soporte no es móvil.

La ecuación diferencial que representa el movimiento de un péndulo simple es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

La siguiente imagen es un ejemplo típico de un péndulo simple

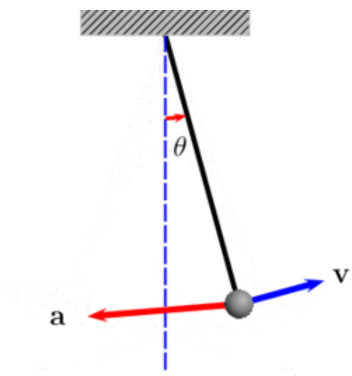

Figura 1: *Imagen de un péndulo simple mostrando los vectores velocidad y aceleración.*

Derivación de la ecuación (1) a partir del concepto "Fuerza"

Considérese la Figura 2, en cual se muestra las fuerzas que actúan en un péndulo simple. Tenga en cuenta que la ruta del péndulo barre un arco de un círculo. El ángulo θ es medido en radianes, y esto es crucial para la ecuación (1). La flecha azul es la fuerza gravitacional que actúa en la bola, y la flecha violeta es la misma fuerza pero resuelta en su componente vertical y perpendicular al movimiento instantáneo de la bola.

La dirección de la velocidad instantánea perteneciente a la bola siempre apunta a lo largo del eje rojo, el cual es considerado el eje tangencial porque su dirección es siempre tangente al círculo.

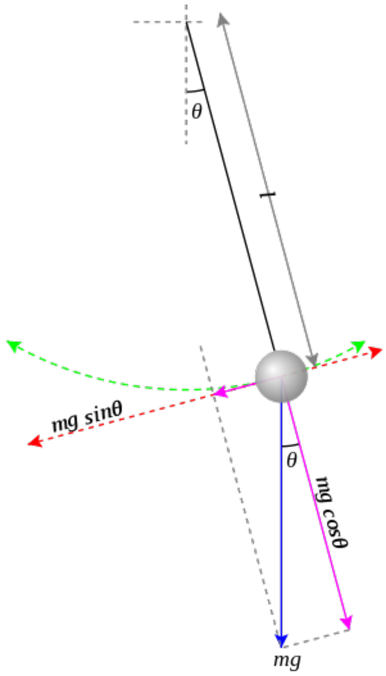

Figura 2: *Diagrama de fuerzas para un péndulo simple.*

Considére la segunda ley de Newton,

$$F = ma$$

donde F es la suma de todas las fuerzas sobre el objeto, m es masa, y a es la aceleración. Debido a que sólo estamos tomando en cuenta los cambios en la velocidad, y ya que la bola esta forzada a moverse en un camino circular, aplicaremos la ecuación de Newton únicamente al eje tanqgencial. La pequeña flecha violeta representa la componente de la fuerza gravitacional que esta sobre el eje tangencial, podemos utilizar trigonometría para determinar su magnitud. Entonces,

$$F = -mg \sin\theta = ma$$
$$a = -g \sin\theta$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie de la tierra. El signo negativo que esta a lado derecho implica que θ y a siempre apuntan en direcciones opuestas. Esto tiene sentido porque cuando el péndulo oscila hacia la izquierda, nosotros esperamos que se acelere hacia la derecha.

La aceleración lineal a a lo largo del eje rojo puede ser relacionada con el cambio del ángulo θ con la fórmula de longitud de arco; s es la longitud de arco

$$s = l\theta$$
$$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$$
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

así:

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Derivación de la ecuación (1) a partir del concepto "Torque"

La ecuación (1) puede ser obtenida usando las dos definiciones para el torque.

$$\tau = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$$

Empezaremos con la definición de torque para una bola en un péndulo usando la fuerza debida a la gravedad.

$$\tau = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{F_g}$$

donde $\boldsymbol{l}$ es vector longitud del péndulo y $\boldsymbol{F_g}$ es la fuerza debida a la gravedad.

Por ahora solo consideremos la magnitud del torque sobre el péndulo.

$$|\tau| = -mgl\sin\theta$$

donde m es la masa del péndulo, g es la aceleración debida a la gravedad, l es la longitud del péndulo y θ es el ángulo entre el vector de longitud y la fuerza gravitacional.

Ahora reescribiremos el momento angular.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times (\omega \times \boldsymbol{r})$$

Nuevamente solo consideremos la magnitud del momento angular.

$$|\boldsymbol{L}| = mr^2\omega = ml^2\frac{d\theta}{dt}$$

De acuerdo con $\tau = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$, podemos obtenerla comparando sus magnitudes

$$-mgl\sin\theta = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

entonces:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

este es el mismo resultado que se obtuvo en el análisis de fuerzas.

Derivación de la ecuación (1) a partir del concepto “Energía”

También puede ser obtenida mediante el principio de la conservación de la energía mecánica: cualquier objeto que cae desde una distancia vertical h adquiriría energía cinética igual a la que perdería en la caída. En otras palabras, la energía potencial gravitacional es convertida a energía cinética. El cambio en la energía potencial esta dada por

$$\Delta U = mgh$$

el cambio en la energía cinética (el cuerpo empieza del reposo) esta dada por

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2$$

Dado que no se pierde energía, la ganancia en una debe ser igual a la perdida en la otra.

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

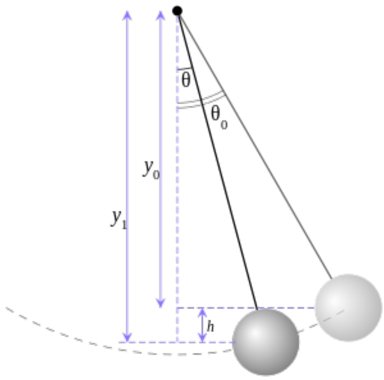

Figura 3: *Trigonometría de un péndulo simple.*

El cambio en la velocidad en términos de la altura puede ser expresada como

$$v = \sqrt{2gh}$$

Usando la fórmula para la longitud de arco de arriba, esta ecuación puede reescribirse en términos de $\frac{d\theta}{dt}$

$$v = l\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2gh}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{l}\sqrt{2gh}$$

h es la distancia vertical desde donde el péndulo cae. Observar la Figura 3, representa la trigonometría de un simple péndulo. Si el péndulo empieza a oscilar desde algún ángulo inicial θ_0, luego y_0, la distancia vertical desde el soporte, está dada por

$$y_0 = l\cos\theta_0$$

similarmente, para y_1, tenemos

$$y_1 = l\cos\theta$$

así h es la diferencia de esas dos últimas ecuaciones

$$h = l(\cos\theta - \cos\theta_0$$

en términos de $\frac{d\theta}{dt}$ nos da

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

Esta ecuación es conocida como la *primera integral de movimiento*, nos da la velocidad en terminos de la ubicación e incluye la constante de integración relacionada con el desplazamiento inicial (θ_0). Podemos derivarla aplcando la regla de la cadena, con respecto al tiempo para obtener la aceleración

$$\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{-(2g/l)\sin\theta}{\sqrt{(2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\frac{d\theta}{dt} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{-(2g/l)\sin\theta}{\sqrt{(2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_0)}}\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$= -\frac{g}{l}\sin\theta$$

mismo resultado al de análisis de fuerzas.

Aproximaciones a oscilaciones pequeñas

La ecuación diferencial (1) no se puede resolver fácilmente, no hay solución que se puede escribir en términos de funciones elementales. Aún así podemos añadir una restricción al tamaño de la amplitud de oscilación y así nos da una solución que puede ser resuelta fácilmente. Si asumimos que el ángulo es mucho menor que 1 radián, o

$$\theta \ll 1$$

entonces sustituimos para $\sin\theta$ en la ecuación (1) usando aproximaciones para ángulos pequeños,

$$\sin\theta \approx \theta$$

nos genera la ecuación de un oscilador armónico

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

El error debido a la aproximación es del orden de θ^3 (de la serie de Maclaurin para $\sin\theta$

Dadas las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$ y $d\theta/dt(0) = 0$, la solución resulta,

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \qquad \theta_0 \ll 1}$$

El movimiento es un simple movimiento armónico donde θ_0 es la semi-amplitud de la oscilación (eso es, el ángulo máximo entre la barra y la vertical). El período de movimiento, el tiempo para una oscilación completa es

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \theta_0 \ll 1}$$

la cual es conocida como la ley de Christiaan Huygen's para el período. Notar que para oscilaciones pequeñas, el período es independiente de la amplitud θ_0; esa es la propiedad de isocronismo que Galileo descubrió.

Regla de oro para la longitud del péndulo

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

puede ser expresada como

$$l = \frac{g}{\pi^2} \times \frac{T_0^2}{4}$$

Si son utilizadas las unidades del SI (i.e. mediciones en metros y segundos), y asumiendo que las mediciones toman lugar en la superficie de la tierra, entonces $g \approx 9.81 \quad m/s^2$ y $g/\pi^2 \approx 1$ (0.994 es la aproximación para 3 decimales).

Por lo tanto, una aproximación relativa razonable para la longitud y el período son,

$$l \approx \frac{T_0^2}{4}$$

$$T_0 \approx 2\sqrt{l}$$

donde T_0 son los segundos entre dos pulsos (un pulso por cada lado de la oscilación), y l es medido en metros.

Período para amplitudes aribitarias

Para amplitudes más allá de la aproximación para ángulos pequeños, se puede computar el período exacto si primero se invierte la ecuación paa la velocidad angular obtenida desde el método de la energía,

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

después integrando sobre un ciclo completo

$$T = t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0 \to 0 \to \theta_0)$$

o dos veces un medio ciclo

$$T = 2t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0)$$

o 4 veces un cuarto de ciclo

$$T = 4t(\theta_0 \to 0)$$

lo que nos da

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}d\theta$$

.

Notar que esta integral diverge como θ_0 se aproxima a la vertical

$$\lim_{\theta_0 \to \pi} T = \infty$$

de manera que un péndulo aún con la energía suficiente nunca llegará a la vertical. (a la inversa, un péndulo cerca del máximo le tomará un largo tiempo para que descienda.)

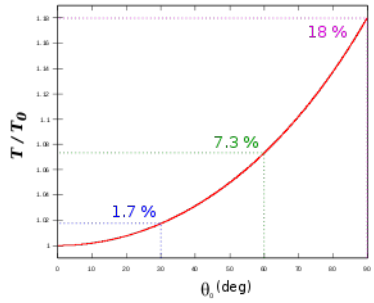

Figura 4: *La desviación de un período "verdadero" para un péndulo desde una aproximación de oscilaciones pequeñas.*

La integral puede ser reescrita en términos de integrales elípticas como

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}F(\frac{\theta_0}{2}, \csc\frac{\theta_0}{2})\csc\frac{\theta_0}{2}$$

donde F es la integral elíptica incompleta de primer tipo definida como

$$F(\phi, k) = \int_0^{\phi}\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}du$$

o más concisa con la sustitución de $\sin u = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}$ expresando θ en términos de u,

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K(\sin^2\frac{\theta_0}{2}) \qquad (2)$$

donde K es la integral elíptica completa de primer tipo definida como

$$K(k) = F(\frac{\pi}{2}, k)$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}du$$

Para una comparación a la aproximación de la solución completa, consideremos el período de un péndulo de longitud 1 m en la tierra ($g = 9.80665 \quad m/s^2$) un ángulo inicial de 10 grados es $4\sqrt{\frac{1m}{g}}K(\sin^2(\frac{10°}{2}) \approx 2.0102s$.

La aproximación lineal nos da $2\pi\sqrt{\frac{1m}{g}} \approx 2.0064s$.

La diferencia entre estos dos valores, es menor que el 0.2 % es mucho menor que la causada por la variación de g .

Desde aquí hay muchas maneras de calcular la integral elíptica:

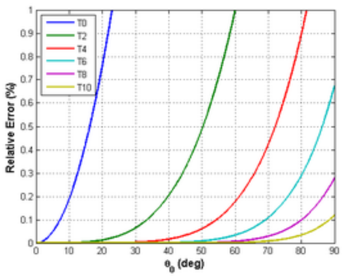

Figura 5: *Errores relativos utilizando la serie de potencias.*

Polinomios de Legendre para la solución de la integral elíptica

Con la ecuación (2) y los polinomios de Legendre para la solución de la integral elíptica tenemos:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\{1 + (\frac{1}{2})^2 k^2 + (\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2 k^4 + \ldots + $$
$$+ [\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2 k^{2n} + \ldots\}$$

donde $n!!$ denota el doble factorial, una solución exacta para el período del péndulo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + (\frac{1}{2})^2 \sin^2\frac{\theta_0}{2} + (\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^2 \sin^4\frac{\theta_0}{2} + $$
$$+ (\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})^2 \sin^6\frac{\theta_0}{2} + \ldots)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [(\frac{(2n)!}{(2^n\cdot n!)^2})^2 \cdot \sin^{2n}(\frac{\theta_0}{2})]$$

La Figura 5 muestra los errores relativos usando las series de potencias. T_0 es la aproximación lineal, y T_2 hasta T_{10} incluye los términos respectivos para las potencias desde la segunda hasta la décima potencia.

Soluciones en series de potencias para la integral elíptica

Otra formulación para la solución de arriba puede ser obtenida usando las series de Maclaurin:

$$\sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2}\theta_0 - \frac{1}{48}\theta_0^3 + \frac{1}{3840}\theta_0^5 - \frac{1}{645120}\theta_0^7 + \ldots$$

es usada en la solución de arriba en términos de polinomios de Legendre. La serie de potencia resultante es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \frac{173}{737280}\theta_0^6 + $$
$$+ \frac{22931}{1321205760}\theta_0^8 + \frac{1319183}{951268147200}\theta_0^{10} + \ldots)$$

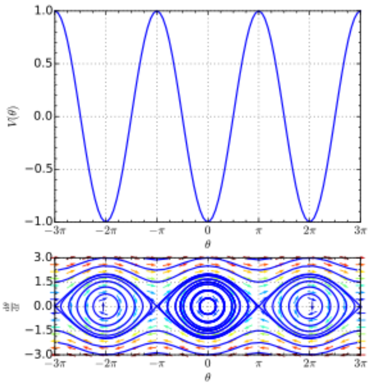

Figura 6: *Energía potencial y retrato de fase de un péndulo simple. Tenga en cuenta que el eje x, siendo el ángulo, se envuelve sobre sí mismo después de cada 2π radianes*

Media aritmética-geométrica de la solución para la integral elíptica

De la ecuación (2) y la media aritmética-geométric para la integral elíptica:

$$K(k) = \frac{\pi/2}{M(1-k, 1+k)}$$

donde $M(x, y)$ es la media aritmética-geométrica para x y y. Esto nos da una fórmula alternativa que converge rápidamente al período:

$$T = \frac{2\pi}{M(1, \cos\frac{\theta_0}{2})}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Referencias

[Nelson, Robert; M. G. Olsson] "The pendulum — Rich physics from a simple system". American Journal of Physics 54 (2): pp. 112–121. doi:10.1119/1.14703. Retrieved 2012-04-30.

[Carvalhaes, Claudio G.; Suppes, Patrick] .Approximations for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean". Am. J. Phys. 76 (12): 1150–1154, doi:10.1119/1.2968864, ISSN 0002-9505, retrieved 2013-12-14

[Adlaj, Semjon] .An eloquent formula for the perimeter of an ellipse". Notices of the AMS 76 (8): 1094–99, doi:10.1090/noti879, ISSN 1088-9477

[Van Baak, Tom] .A New and Wonderful Pendulum Period Equation". Horological Science Newsletter 2013 (5): 22–30.