Actividad #9 (Aproximación al cálculo del periodo del péndulo)

Instructor: Carlos Lizárraga Celaya *Student: Antonio Cota Rodríguez*

Introducción

La integración de la ecuación del movimiento, sin la aproximación de pequeas oscilaciones, es considerablemente más complicada e involucra integrales elípticas de primera especie, para el periodo de un pńdulo simple de amplitud arbitraria tenemos :

$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} d\theta$$

La integral diverge a medida que θ_0 tiende a la vertical.

La integral se puede escribir como una integral elíptica de primer tipo, obteniendo la expresión :

$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

así K es

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du$$

donde F es la integral elíptica completa de primera especie. La integral elíptica puede ser aproximada por una serie de potencias descrita por la expresin :

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + ... + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n} + ...\right]$$

La solución exacta del periodo del péndulo es :

$$T(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\theta_0}{2} + ...\right]$$

o en forma de suma :

$$T(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\right)^2 \sin^{2n}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]$$

donde θ, es la amplitud angular. As pues, el periodo es funcin de la amplitud de las oscilaciones.
En la presente actividad reproduciremos la gráfica que aparece en la práctica 9 en la cual se represental la inclusión de 2 hasta 10 términos de la serie de potencias.

Después se aplicará una serie de Maclaurin.

1 Programa

En ipython se utiliz el siguiente código para representar los 10 términos de la serie de potencias :

```
import numpy as np
from scipy import integrate
import matplotlib.pyplot as plt
import math

t=100
n=6
x=[]
TT0_0=[]
TT0=[]
x_0=np.linspace(0.001,np.pi + 0.001, t)

I = lambda x,a: 1/np.sqrt(np.cos(x) - np.cos(a))

for i in range(t):
#   la integral
    theta_0=x_0[i]
    T_0 , err= integrate.quad(I, 0, theta_0, args=(theta_0,))


#   Periodo
    TT0_0.append((4/np.sqrt(2)) * T_0)


#  Ciclos
for v in range(n):

#   Error
    err=[]

    for i in range(t):


        theta_0 = x_0[i]
        T0=1

#   SUMA
        for u in range(v):

            T0 += math.pow( math.factorial(2*(u+1)) / (math.pow( math.pow(2,(u+1)) * math.factorial(u+1) ,

#   Lista de errores
        err.append(100*(np.absolute(2 * np.pi * T0 - TT0_0[i])/TT0_0[i]))

#   GRFICA
    plt.plot(x_0 * 180 / np.pi, err, '-.', linewidth=2, label='$T %i $' % (2*v))




#   DESVIACIN
plt.title('Errores relativos de las series de potencias')
plt.xlabel(r'$ \theta _0 (deg)$')
plt.ylabel("Error Relativo (%)")
plt.xlim(0,120)
plt.ylim(0,1)
plt.xticks(np.arange(0,130,10))
plt.yticks(np.arange(0,1.1,0.1))
```

```
plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
plt.grid()
plt.show()


Err=[]
for i in range(t):
    theta_0 = x_0[i]
    T0=1
    for u in range(80):
        sen=0
# Maclaurin
        for k in range(80):
            sen += math.pow(-1,k)/math.factorial(2*k+1) * math.pow(theta_0/2, 2*k+1)

        T0 += math.pow( math.factorial(2*(u+1)) / (math.pow( math.pow(2,(u+1)) * math.factorial(u+1) , 2 )

    Err.append(100*(np.absolute(2 * np.pi * T0 - TT0_0[i])/TT0_0[i]))

plt.plot(x_0 * 180 / np.pi, Err, '-.',color='k', linewidth=2, label='$T %i $' % (2*v))
plt.title('Error usando serie de Maclaurin')
plt.xlabel(r'$ \theta _0 (deg)$')
plt.ylabel("Error Relativo (%)")
plt.xlim(0,180)
plt.ylim(0,1)
plt.xticks(np.arange(0,190,10))
plt.yticks(np.arange(0,1.1,0.1))
plt.legend(loc='center left', bbox_to_anchor=(1, 0.5))
plt.grid()
plt.show()
```

Las gráficas que nos imprimió el código fueron las siguientes.

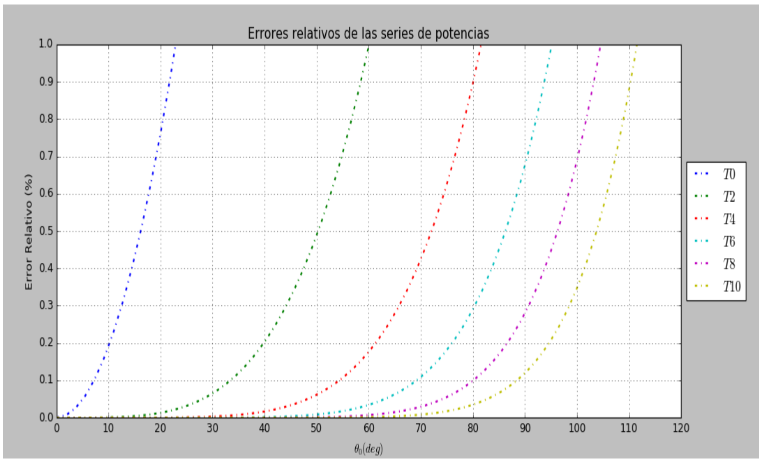

FIGURE 1 –

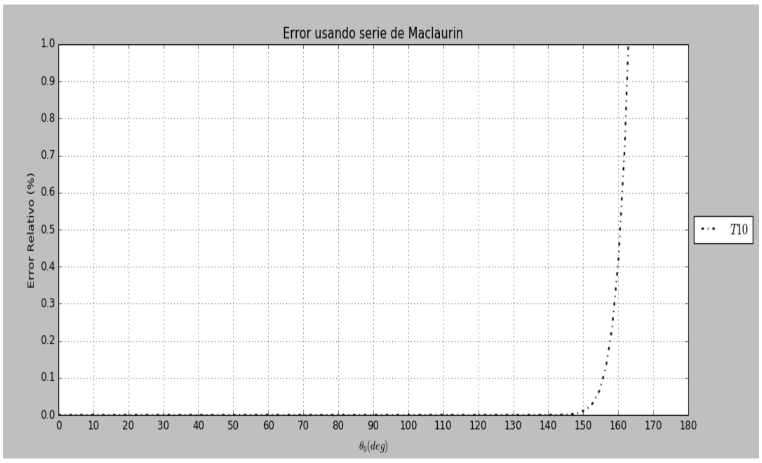

FIGURE 2 –

Conclusiones

En esta práctica aprendimos a utilizar mejor el comando *scipy.integrate* no presentó mucha dificultad, y si se obtuvieron las gráficas deseadas.