Universidade Federal de Minas Gerais
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia Elétrica
ELE077 Otimização Não-Linear

Trabalho Computacional I

Aplicação de Métodos Determinísticos Irrestritos

Questão 1. Seja um sistema massa-mola de três graus de liberdade como o mostrado na Fig. 1. Uma informação importante sobre esse sistema é sua frequência natural de vibração (ω [rad/s]). Existem métodos para determinar essa frequência e, um dos tradicionais, é o quociente de Rayleigh. O quociente de Rayleigh é expresso por:

$$R(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{X}^T[K]\mathbf{X}}{\mathbf{X}^T[M]\mathbf{X}} \tag{1}$$

onde

$$[K] = k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

O método estabelece que o valor mínimo de $R(\mathbf{X})$ é igual ao quadrado da

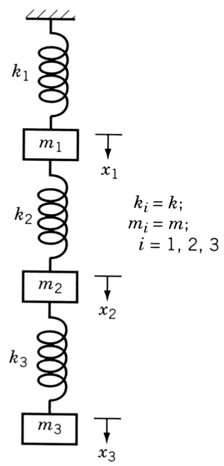

Figura 1: Sistema massa-mola de três graus.

frequência natural do sistema, i.e., $\min R(\mathbf{X}) = \omega^2$. Suponha que $k = 1$.

(a) Reescreva a equação (1) realizando as multiplicações de matrizes de modo que $R(\mathbf{X})$ seja escrito em termos de uma divisão de polinômios.

(b) Determine a frequência natural (em [rad/s]) do sistema através da minimização de $R(\mathbf{X})$. Utilize uma das seguintes opções de algoritmo: Método do Gradiente, Método de Newton Modificado, BFGS ou Gradiente-Conjugado. Utilize como ponto inicial $x_0 = (1, 1, 1)$. Informe qual critério de parada foi utilizado, quantas iterações e avaliações foram necessárias.

(c) Note que, se você executar o algoritmo considerando outros pontos iniciais, como $x_0 = (5, 5, 5)$ ou $x_0 = (10, 10, 10)$, o ponto de ótimo irá mudar, mas o valor mínimo de $R(\mathbf{X})$ não. Isto porque, se você reparar bem na equação (1), $R(\mathbf{X}) = R(n\mathbf{X})$ para qualquer constante real n. Logo, o que podemos dizer sobre a quantidade de mínimos locais dessa função?

Questão 2. Considere a aleta unidimensional mostrada na Fig. 2. As variáveis x_1 e x_2 são as temperaturas em graus Celsius dos pontos 1 e 2, respectivamente. Em regime permanente, as temperaturas x_1 e x_2 são tais que minimizam a seguinte função:

$$f(x_1, x_2) = 0.6382x_1^2 + 0.3191x_2^2 - 0.2809x_1x_2 - 67.906x_1 - 14.29x_2 \quad (3)$$

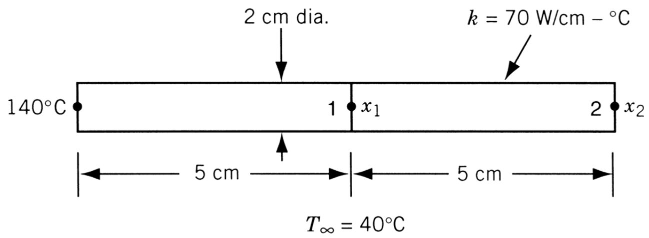

Figura 2: Aleta unidimensional.

(a) Plote o gráfico de curva de nível dessa função considerando $-200 \leq x_1, x_2 \leq 200$. Essa função é convexa, quasi-convexa ou não-convexa? Unimodal ou multimodal? Quais algoritmos seriam adequados para determinar o mínimo desta função?

(b) Determine as temperaturas de regime permanente (x_1, x_2) minimizando a função da equação (3). Assuma como ponto inicial $x_0 = (150, 150)$. Informe o critério de parada utilizado, quantas iterações e/ou avaliações foram necessárias.

Questão 3. Considere o seguinte problema de otimização irrestrito:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 \quad (4)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (5)$$

(a) Plote o gráfico de curva de nível dessa função objetivo considerando o intervalo $-2 \leq x_1, x_2 \leq 2$.

(b) Determine a solução ótima para o problema utilizando o Método do Gradiente e o Método BFGS. Assumir ponto inicial $\mathbf{x}_0 = (-1, 1.5)$. Informe o critério de parada, o número de iterações e o número de avaliações da função objetivo. Salve a trajetória do algoritmos, i.e., a história de pontos ao longos das iterações. Plote as trajetórias no gráfico de curva de nível.

(c) Comente as diferenças entre os métodos que você observou nos resultados.

Questão 4. Considere o seguinte problema de otimização irrestrito:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = |x_1| + |x_2| \tag{6}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \tag{7}$$

(a) Plote o gráfico de curva de nível dessa função objetivo considerando o intervalo $-10 \leq x_1, x_2 \leq 10$. Esta função é diferenciável ou não? Baseado nessa resposta, que tipo de algoritmo seria mais adequado para este problema?

(b) Determine a solução ótima para o problema utilizando o Método do Gradiente ou o Método BFGS. Aplique também algum método sem-derivada (Nelder-Mead Simplex, Hooke-Jeeves, amostragens aleatórias ou direções aleatórias). Em ambos os casos, assumir como ponto inicial $\mathbf{x}_0 = (200, 1000)$. Informe o critério de parada, o número de iterações e o número de avaliações da função objetivo. Comente os resultados.

(c) Aplique os dois algoritmos partindo agora do ponto $\mathbf{x}_0 = (2, 10)$. Plote no gráfico de curva o caminho de cada algoritmo, i.e., a sequência de pontos determinados ao longo das iterações. Comente o caminho dos dois algoritmos.

Observações:

- O relatório com a discussão dos experimentos e conclusões, bem como os códigos fonte dos métodos implementados, deverão ser enviados ao professor via Moodle (trabalhos enviados por e-mail não serão considerados). Templates para a escrita do relatório estão disponíveis na página da disciplina, mas não são obrigatórios.

- Espera-se um relatório discutindo as abordagens estudadas e sua aplicação a problemas de otimização. Relatórios contendo apenas códigos e/ou figuras não serão avaliados.

- Vocês podem utilizar a linguagem de programação que preferir. Minha sugestão: Python ou MATLAB (preferencialmente Python).

- Se vocês optarem pelo Python, vocês podem utilizar a biblioteca *scipy.optimize* que já conta com as implementações dos métodos BFGS, CG, Nelder-Mead entre outros.

- Se vocês optarem pelo MATLAB, vocês podem utilizar a *Optimization toolbox*.