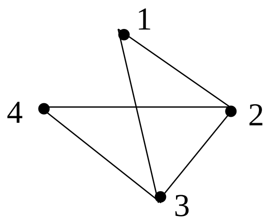
Kapitel 3 Graphentheorie

Inhalt:

3.1.1 Definitionen und Grundlagen

Ein *Graph* **G** = (**E**, **K**) besteht aus einer Menge **E** von *Ecken* und einer Menge **K** von *Kanten*, wobei **K** eine Teilmenge aller zwei-elementigen Teilmengen von **E** ist.

Beispiel



E = {1, 2, 3, 4}
K = {{1,2}, {1,3},{2,3},{2,4}, {3,4}}

Dr. Heike Neumann

3.1.2 Schlingen und Mehrfachkanten

Lässt man für die Menge **K** auch einelementige Teilmengen von **E** zu, so sagt man, dass der Graph an dieser Ecke eine *Schlinge* besitzt.

Gehört eine Teilmenge $\{u, v\}$ mehrmals zu **K**, so sagt man, dass der Graph eine *Mehrfachkante* besitzt. Ein Graph ohne Mehrfachkanten heißt *einfach*.

Graphen mit Schlingen oder Mehrfachkanten heißen *Multigraphen*.

Schlinge

Mehrfachkante

Wir werden grundsätzlich von Graphen ohne Schlingen und Mehrfachkanten ausgehen.

Bemerkung: Die Literatur ist in diesem Punkt nicht einheitlich!

3.1.3 Inzidenzmatrix

Ist $u \in$ **E** und $k \in$ **K**, so heißen u und k *inzident*, wenn u eine *Endecke* von k ist.

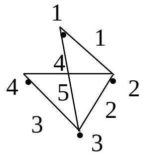
Zwei Kanten k und l heißen *inzident*, falls sie eine gemeinsame Ecke haben.

Hat man einen endlichen Graphen mit **E** $= \{e_1, e_2,..., e_n\}$ und **K** $= \{k_1, k_2,.., k_m\}$, so kann man den Graphen durch eine $n \times m$-*Inzidenzmatrix* **A** $= (a_{ij})$ darstellen:

$a_{ij} := 1$, falls e_i und k_j inzident sind;

$a_{ij} := 0$, falls e_i und k_j nicht inzident sind.

Beispiel

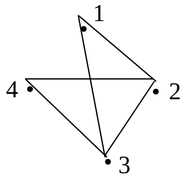


	1	2	3	4	5
1	1	0	0	1	0
2	1	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	0	0	1	0	1

3.1.4 Adjazenzmatrix

Ist $\{u, v\} \in \mathbf{K}$, so heißen u und v *benachbart* oder *adjazent*.
Darstellung von Graphen mittels *Adjazenzmatrizen*:
a_{ij} :=1, falls e_i und e_j adjazent sind;
a_{ij} := 0, falls e_i und e_j nicht adjazent sind;
a_{ij} := *, falls $i = j$.

Beispiel



	1	2	3	4
1	*	1	1	0
2	1	*	1	1
3	1	1	*	1
4	0	1	1	*

3.1.5 Anwendungen

Städteverbindungen: Ecken = Städte, Kanten = Straßen.
Typische (und schwere) Frage: Wie kann man eine Rundreise kürzester Länge finden? ("Travelling Salesman Problem").

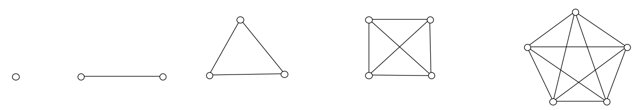
Chemische Moleküle: Ecken = Atome, Kanten = Verbindungen.
Wichtige Frage (die zur Entwicklung der Graphentheorie entscheidend beigetragen hat): Gegeben eine Summenformel (z.B. $C_nH_{2n+1}OH$), wie viele verschiedene Strukturformeln gibt es dazu?

Soziogramme: Ecken = Personen einer Gruppe, Kanten = Beziehungen zwischen den Menschen (z.B. „bekannt sein mit“).

3.1.6 Vollständige Graphen

Ein Graph heißt vollständig, wenn *jede Ecke mit jeder anderen durch genau eine Kante verbunden* ist.
Das heißt, bei einem vollständigen Graphen sind je zwei Ecken verbunden, aber nur durch eine Kante.
Der vollständige Graph mit n Ecken wird mit K_n bezeichnet.

Beispiele:

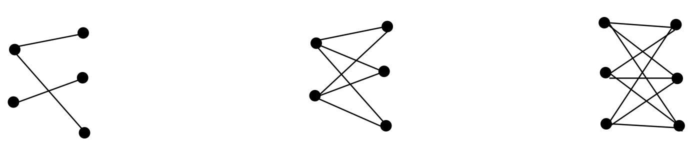


K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Dr. Heike Neumann

3.1.7 Bipartite Graphen

Ein Graph **G** heißt *bipartit*, falls **E** aus zwei disjunkten Mengen **S** und **T** besteht und jede Kante eine Ecke in **S** und eine in **T** hat.
Sind alle Kanten zwischen **S** und **T** vorhanden, so heißt der Graph *vollständig bipartit*.
Beispiele



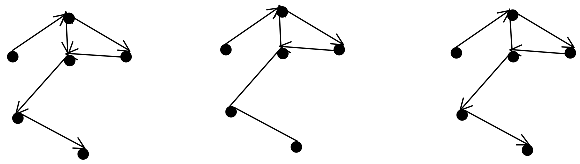
$K_{2,3}$ $K_{3,3}$

Dr. Heike Neumann

3.1.8 Kantenzüge

Ein *Kantenzug* von e_0 nach e_n ist eine Folge $(e_0,k_0,e_1,k_1,....k_{n-1}, e_n)$, wenn k_i die Kante zwischen e_i und e_{i+1} ist. n ist die Länge des Kantenzuges.
Ein Kantenzug heißt ein *Weg* in einem Graphen, falls der Kantenzug nur verschiedene Kanten durchläuft.
Ein Kantenzug heißt *Pfad* oder *einfacher Weg*, falls alle durchlaufenen Ecken verschieden sind.

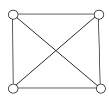
Beispiele



Kantenzug Weg Pfad

3.1.8 Kreise

Ein *Kreis* **C** in einem Graphen ist eine Folge $e_1, e_2, ..., e_n$ von verschiedenen Ecken mit $\{e_i, e_{i+1}\} \in \mathbf{K}$ für alle $i = 1,.., n$-1 und $\{e_1, e_n\} \in \mathbf{K}$. Die Länge des Kreises ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten oder Ecken.



Kreis

3.1.9 Zusammenhangskomponenten

Zwei Punkte *u* und *v* in einem Graphen **G** heißen *verbindbar*, falls es einen Kantenzug zwischen *u* und *v* gibt.

„Verbindbar“ liefert eine Äquivalenzrelation auf der Eckenmenge eines Graphen.

Reflexivität: Kantenzug der Länge 0.

Symmetrie: Umkehrung des Kantenzuges

Transitivität: Aneinanderhängen der Kantenzüge.

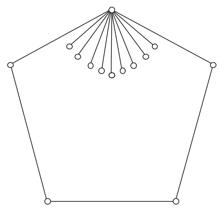
Die Äquivalenzklassen heißen *Zusammenhangskomponenten*.

Eine Zusammenhangskomponente, die nur einen Punkt enthält, heißt *isolierter Punkt*.

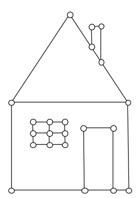
3.1.10 Zusammenhängende Graphen

Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn er nur eine Zusammenhangs-komponente besitzt, das heißt wenn man von jeder Ecke zu jeder anderen über eine Folge von Kanten kommen kann.

Beispiel**:**



zusammenhängend



nicht zusammenhängend

3.1.11 Grad einer Ecke

Von jetzt an beschäftigen wir uns nur noch mit endlichen Graphen.

Der *Grad einer Ecke* ist die Anzahl der adjazenten Ecken. Der Grad einer Ecke u wird bezeichnet mit $d(u)$.

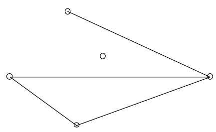
Beispiele:

a) Der Grad einer Ecke ist gleich 0, falls von ihr keine Kante ausgeht.

b) In dem vollständigen Graphen K_n hat jede Ecke den Grad $n-1$, da sie mit jeder der $n-1$ anderen durch genau eine Kante verbunden ist.

Im allgemeinen haben die Ecken eines Graphen verschiedene Grade.

Beispiel:



3.1.12 Sätze über Eckengrade

Sei **G** = (**E**, **K**) ein Graph. Dann gilt:

$$\sum_{u \in \mathbf{E}} d(u) = 2\,|\mathbf{K}|$$

Beweis

Wir zählen die Paare von inzidenten Ecken und Kanten auf zweifache Weise ab:

- Jede Ecke besitzt $d(u)$ inzidenten Kanten: $\sum_{u \in \mathbf{E}} d(u)$
- Jede Kante besitzt genau zwei inzidente Ecken: $2|\mathbf{K}|$

Daraus folgt die Behauptung.

3.1.13 Folgerung

Korollar

Die Anzahl der Ecken eines endlichen Graphen mit ungeradem Grad ist gerade.

Beweis

Seien $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{E}_1$ die Mengen von Ecken mit geradem bzw. ungeradem Grad. Nach 3.1.12 gilt:

$$2|\mathbf{K}| = \sum_{u \in \mathbf{E}_0} d(u) + \sum_{u \in \mathbf{E}_1} d(u)$$

Da die linke Seite und die erste Summe gerade sind, muss auch die zweite Summe gerade sein. Damit muss es eine gerade Anzahl von Ecken mit ungeradem Grad geben.

Dr. Heike Neumann

3.1.14 Kreise in endlichen Graphen

Sei **G** ein endlicher Graph. Hat jede Ecke mindestens den Grad 2, dann enthält **G** einen Kreis.

Beweis

Wähle eine beliebige Ecke e_0 und eine davon ausgehende Kante k_0. Sei e_1 der andere Endpunkt von k_0.

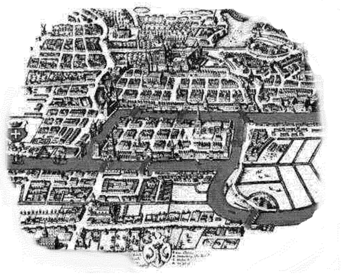
Wegen $d(e_1) > 1$ gibt es eine von k_0 verschiedene Kante k_1 durch e_1. Sei e_2 die andere Endecke. Setze dieses Verfahren induktiv fort.

Da **G** nur endlich viele Punkte hat, muss es zwei Indizes i und j geben mit $e_i = e_j$. Damit ist der gesuchte Kreis gefunden!

Dr. Heike Neumann

3.2 Das Königsberger Brückenproblem

Dem Mathematiker Leonhard Euler wurde 1736 folgendes Problem gestellt, das ihn zur Entwicklung der Graphentheorie geführt hat.



Durch Königsberg fließt die Pregel, die sich teilt und zwei Inseln umfließt. Diese sind untereinander und mit den Ufern wie abgebildet durch Brücken verbunden.

Schwierige Frage:: Gibt es einen Spaziergang, der jede Brücke genau einmal überquert und bei dem man zum Ausgangspunkt zurückkehrt?

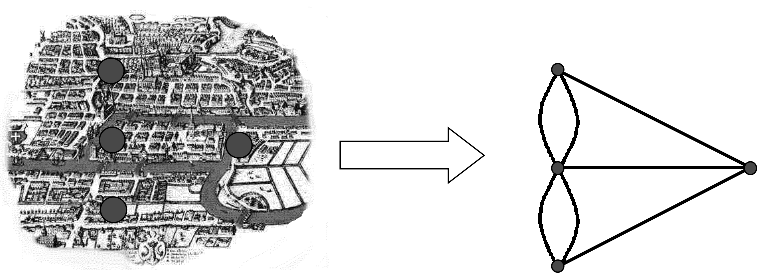
Dr. Heike Neumann

3.2.1 Übersetzung der Karte in einen Graphen

Jedem Landteil wird eine Ecke zugeordnet: ●

Jede Brücke wird mit einer Kante identifiziert: ———

Aus der Landkarte erhält man so den folgenden Graphen:



Dr. Heike Neumann

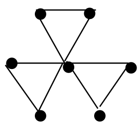
3.2.2 Eulersche Kreise

Ein Kantenzug heißt ein Eulerscher Kreis von G, wenn

– jede Kante von G genau einmal unter den $k_1, k_2, \ldots, k_s$ auftaucht

– und $e_s = e_0$ ist.

Beispiel



Bemerkung: Ecken können mehrfach durchlaufen werden.

Für den Graphen können wir das Problem also folgendermaßen formulieren:

Gibt es im Königsberger Graphen einen Eulerschen Kreis?

Dr. Heike Neumann

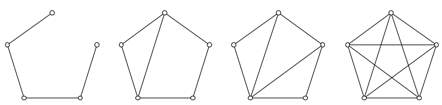
3.2.3 Eulersche Graphen

Ein Eulerscher Graph ist ein Graph, der einen Eulerschen Kreis enthält.

Mit anderen Worten: Ein Graph ist Eulersch, wenn man

- seine Kanten in einem Zug zeichnen kann und
- am Ende wieder am Ausgangspunkt anlangt.

Beispiel: K_5 ist eulersch:



Dr. Heike Neumann

3.2.4 Lösung des Königsberger Brückenproblems

Satz von Euler (1736)

Wenn ein Graph **G** Eulersch ist, dann hat jede Ecke von **G** geraden Grad.

Damit gelang Euler die Lösung des Königsberger Brückenproblems:
Der Graph des Problems hat Ecken vom Grad 3, 3, 3, 5. Also ist er nicht Eulersch. Ein solcher Spaziergang ist nicht möglich!

Dr. Heike Neumann

3.2.4 Beweis des Satzes von Euler

Sei e eine beliebige Ecke von **G**. Der Eulersche Kreis durchquert die Ecke e ein paar Mal, sagen wir a mal.
Behauptung: Der Grad der Ecke e ist gleich $2a$, also eine gerade Zahl.
Denn: Bei jedem Durchgang durch e verbraucht der Eulersche Kreis zwei Kanten; in a Durchgängen werden also $2a$ Kanten erfasst. Da keine Kante zweimal benutzt werden darf, ist der Grad von e also mindestens gleich $2a$. Der Grad kann aber auch nicht größer sein, da jede Kante (also auch jede Kante, die an e angrenzt) in dem Eulerschen Kreis mindestens einmal vorkommen muss.
Damit ist der Grad von e wirklich gleich $2a$, und der Satz ist bewiesen.

Dr. Heike Neumann

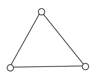
3.2.5 Umkehrung des Satzes von Euler

Es gilt auch die Umkehrung des Satzes von Euler:

Wenn in einem endlichen zusammenenhängenden Graphen **G** jede Ecke geraden Grad hat, dann ist **G** Eulersch.

Beweis mit Induktion nach der Anzahl der Ecken *n*.

Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen, für $n = 2$ gibt es keinen zusammenhängenden Graphen, dessen Eckengrad stets gerade ist. Für $n = 3$ gibt es nur den $\mathbf{K}_3$. Für $\mathbf{K}_3$ ist die Aussage offensichtlich richtig.



Dr. Heike Neumann

3.2.5 Induktionsschritt

Sei $n > 3$.

Es kann keine Ecke vom Grad 0 geben, denn **G** ist zusammenhängend.

Also hat jede Ecke mindestens den Grad 2. Daraus folgt: **G** enthält einen Kreis **C** (3.1.14). Wir können annehmen, dass **C** ein geschlossener Weg maximaler Länge.

Zu zeigen: **C** = **G**. Dann ist **C** ein Eulerscher Kreis. Wir nehmen also an, dass **C** nicht gleich **G** ist.

Entferne alle Kanten von **C** aus **G**. Man erhält einen neuen Graphen **H**, der mindestens eine Kante hat. Da **G** zusammenhängend ist, gibt es in **H** mindestens eine Kante, die mit **C** eine gemeinsame Ecke hat.

Dr. Heike Neumann

3.2.5 Beweisabschluss

In **H** hat jede Ecke geraden Grad, allerdings ist **H** nicht zusammenhängend.

Betrachte die Zusammenhangskomponente **H**‘ der Ecke von **H**, die eine gemeinsame Kante mit **C** hat.

Weil **H**‘ weniger Kanten hat als **G**, gilt die Induktionsvoraussetzung, also ist **H**‘ ein Eulerscher Graph.

Weil **C** und **H**‘ eine gemeinsame Ecke haben, können wir **C** und **H**‘ zu einem geschlossenen Weg zusammenfassen, dessen Länge größer ist als die von **C**. Das widerspricht unserer Annahme, dass **C** maximale Länge hat.

Also ist **G** Eulersch.

Bemerkung: Lassen wir Graphen mit Mehrfachkanten zu, so müssen wir lediglich die Induktionsvoraussetzung ändern und den Fall n=2 zusätzlich betrachten!

3.2.6 Eulersche Kreise in vollständigen Graphen

Folgerung

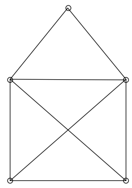
Jeder vollständige Graph K_n mit ungeradem n (also K_3, K_5, K_7, ...) ist Eulersch.

Denn: Jede Ecke von K_n hat den Grad n–1; und wenn n ungerade ist, ist n–1 gerade.

3.2.7 Eulersche Wege

Ein *offener Eulerscher Weg* ist ein Kantenzug,

- der jede Kante genau einmal durchquert,
- wobei die Anfangsecke verschieden von der Endecke ist.



Also kann ein Graph genau dann "in einem Zug" gezeichnet werden, wenn er einen eulerschen Kreis oder einen Eulerschen Weg besitzt.

Bemerkung: Ein geschlossener Eulerscher Weg ist ein Eulerscher Kreis.

Satz

Ein nichtleerer zusammenhängender, endlicher Graph besitzt genau dann einen offenen Eulerschen Weg, wenn er genau 2 Ecken ungeraden Grades besitzt. Wenn dies der Fall ist, so beginnt der offene Eulersche Weg an der einen Ecke ungeraden Grades und endet an der anderen.

3.2.7 Beweis der Hinrichtung

„$\Rightarrow$" Wenn **G** einen offenen Eulerschen Weg hat, dann gibt es genau 2 Ecken mit ungeradem Grad.

G habe einen offenen Eulerschen Weg mit Anfangsecke a und Endecke e.

Trick: Wir denken uns eine zusätzliche Kante k^* zwischen a und e. Dann wird aus dem offenen Eulerschen Weg ein Eulerscher Kreis. Nach dem Satz von Euler hat dann also jede Ecke geraden Grad.

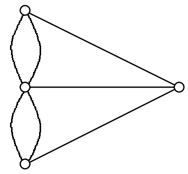
Nun vergessen wir k^* wieder. Jede Ecke verschieden von a und e hat dann immer noch geraden Grad, während sich der Grad von a und e jeweils um 1 erniedrigt hat, also jetzt ungerade ist. Also sind a und e die einzigen Ecken ungeraden Grades.

3.2.7 Beweis der Rückrichtung

„⇒“ Wenn **G** genau 2 Ecken mit ungeradem Grad hat, dann gibt es einen offenen Eulerschen Weg .
Sei **G** ein zusammenhängender Graph, der genau zwei Ecken *a* und *e* ungeraden Grades besitzt.
Trick: Wir denken uns eine zusätzliche Kante *k** zwischen *a* und *e*. Diese hat den Effekt, dass jetzt jede Ecke geraden Grad hat. Nach der Umkehrung des Satzes von Euler hat der Graph mit der Kante *k** einen Eulersche Kreis.
Wenn wir *k** wieder vergessen, wird aus dem Eulerschen Kreis ein offener Eulerscher Weg mit der Anfangsecke *a* und der Endecke *e*. Also hat **G** einen offenen Eulerschen Weg.

3.2.8 Gibt es „offene Spaziergänge“ durch Königsberg?

Der Graph des Königsberger Brückenproblems hat vier Ecken ungeraden Grades.



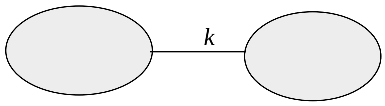
Also enthält er auch keine offene Linie.
Es gibt also keinen Spaziergang durch Königsberg, der jede Brücke genau einmal überquert – selbst wenn der Startpunkt verschieden vom Endpunkt sein darf.

3.2.9 Wie findet man Eulersche Kreise?

Um einen Algorithmus zur Konstruktion von Eulerschen Kreisen angeben zu können, benötigen wir zunächst eine

Definiton

Eine Kante eines nichtleeren endlichen Graphen heißt eine *Brücke*, falls das Entfernen dieser Kante zu einer Erhöhung der Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Graphen führt.



3.2.9 Algorithmus für Eulersche Kreise

(1) Beginne bei einer beliebigen Ecke e_0

(2) Angenommen wir haben bereits e_0, e_1, e_2, ... e_i mit den Kanten k_j zwischen e_j und e_{j+1}, $j = 0, ..., i-1$, konstruiert. $\mathbf{G}_i := \mathbf{G}(\mathbf{E}, \mathbf{K}\backslash\{k_0, ..., k_{i-1}\}$ sei der Restgraph.

1. Fall. Ist $\mathbf{K}\backslash\{k_0, ..., k_{i-1}\} = \emptyset$, so beende den Algorithmus.

2.Fall. $\mathbf{K}\backslash\{k_0, ..., k_{i-1}\}$ ist nicht leer. Dann wähle unter den zu e_i inzidenten Kanten eine Kante k_i, die keine Brücke in $\mathbf{G}_\mathrm{i}$ ist, solange dies möglich ist.

Iteriere (2)

Bemerkung: Ob eine Kante eine Brücke ist oder nicht, lässt sich effizient feststellen. Mittels des Breadth-first oder Depth-first Algorithmus (vgl. § 3.4.).

3.2.10 Korrektheit des Algorithmus

- Der Algorithmus habe e_0, ...,e_m mit den Kanten k_0, ..., k_{m-1} konstruiert.
- Es gilt: $e_0 = e_m$. Denn andernfalls wäre bei e_m noch eine inzidente Kante übrig, schließlich hat e_m geraden Grad.
- e_0 hat in $\mathbf{G}_m$ den Grad 0, sonst könnte man weitergehen.
- Zu zeigen ist: $\mathbf{K}(\mathbf{G}_m) = \varnothing$.
- Angenommen, $\mathbf{K}(\mathbf{G}_m)$ ist nicht leer. Dann gibt es eine Ecke e in $\mathbf{G}_m$ mit $d(e) > 0$.
- Definiere: $\mathbf{S}$, $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{K}(\mathbf{G}_m)$; $\mathbf{S}: = \{e \in \mathbf{E} \mid d_{\mathbf{G}m}(e) > 0\}$; $\mathbf{T} := \{e \in \mathbf{E} \mid d_{\mathbf{G}m}(e) = 0\}$. Beide Mengen sind nicht leer.

Dr. Heike Neumann

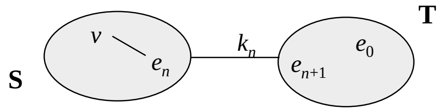
3.2.10 Korrektheit des Algorithmus II

Es sei n der größte Index mit folgender Eigenschaft:

$e_n \in \mathbf{S}$ und $e_{n+1} \in \mathbf{T}$.

Es ist: $0 < n < m$. Den Index n muss es geben, denn andernfalls würde der Kantenzug alle Kanten in **T** benutzen, ohne **S** zu betreten. Keine der Ecken in **T** hätte noch eine inzidierende Kante. Also wäre G nicht zusammenhängend.

Da nach e_{n+1} die Menge **T** nicht mehr verlassen wird und in **T** keine Kante übrig bleibt, muss k_n eine Brücke zwischen **S** und **T** in $\mathbf{G}_n$ sein.



Dr. Heike Neumann

3.2.10 Korrektheit des Algorithmus III

Der Grad von e_n ist gerade, also muss es eine weitere Kante geben, die mit e_n inzidiert.

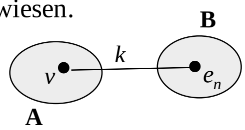
Nach Regel (2) muss diese Kante ebenfalls eine Brücke in $\mathbf{G}_n$ sein (sonst hätte k_n nicht benutzt werden dürfen).

k ist sogar eine Brücke in $\mathbf{G}_m$, denn $\mathbf{G}_n$ und $\mathbf{G}_m$ sind auf **S** identisch!

Dann muesste das Entfernen von k also zwei Zusammenhangskomponenten in $\mathbf{G}_m$ hinterlassen:

In $\mathbf{G}_m$ haben alle Ecken geraden Grad. Nach Entfernen von k hat genau eine Ecke in **B** einen ungeraden Grad! Das ist eine Widerspruch zu 3.1.13.

Also war unsere Annahme falsch und die Korrektheit ist bewiesen.



Dr. Heike Neumann

3.3.1 Hamiltonsche Kreise

Definition

Ein Kreis in einem Graphen heißt *Hamiltonsch*, falls er jede Ecke des Graphen enthält. In diesem Fall heißt auch der Graph *Hamiltonsch*.

Wir betrachten hier ausschließlich einfache Graphen (also Graphen ohne Mehrfachkanten).

Beispiel

a) $\mathbf{K}_n$ ist für alle $n > 0$ Hamiltonsch.

b) Der Dodekaedergraph ist Hamiltonsch.

Dr. Heike Neumann

3.3.2 Satz von Dirac

Bemerkung: Im Gegensatz zu den Eulerschen Kreisen gibt es bei Hamiltonschen keine äquivalente Bedingung, die man angeben kann. Man kennt aber eine hinreichende Bedingung:

Satz von Dirac

Sei **G** ein einfacher Graph mit n Ecken, $n > 0$. Ist $d(e) \geq n/2$ für alle Ecken e von **G**, so ist **G** Hamiltonsch.

Beweis mit Induktion

Beobachtung: Weil **G** einfach ist, ist die Anzahl m der Kanten beschränkt durch

$$m \leq \binom{n}{2}$$

Dr. Heike Neumann

3.3.2 Beweis des Satzes von Dirac

Die Induktion wird durchgeführt nach der Anzahl z der f ehlenden Kanten, d.h.

$$z := \binom{n}{2} - m$$

Ist $z = 0$, so ist der Graph vollständig und damit Hamiltonsch.

Sei $z > 0$. Also ist **G** nicht vollständig, das heißt es gibt zwei Ecken u und v, die nicht benachbart sind.

G* bezeichnet den Graphen, der entsteht, wenn man zu **G** die Kante $e^* := \{u,v\}$ hinzufügt. Offensichtlich gilt für alle Ecken von **G***: $d(e) \geq n/2$. Dann besitzt **G*** nach Induktionsannahme einen Hamiltonschen Kreis **C**.

Dr. Heike Neumann

3.3.2 Beweis des Satzes von Dirac: Induktionsschritt

1. Fall e^* ist nicht in **C** enthalten. Dann ist **C** auch ein Hamiltonscher Kreis in **G**.

2. Fall e^* ist in **C** enthalten. Wir nummerieren die vom Kreis durchlaufenen Ecken folgendermaßen durch: $v = v_1, v_2, v_3, \dots v_n = u$.

Betrachte folgende Mengen:

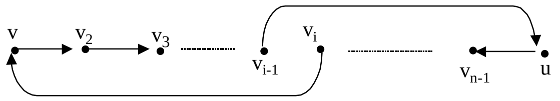
S := $\{v_i | \, u$ und v_{i-1} sind benachbart$\}$

T := $\{v_i | \, v$ und v_i sind benachbart$\}$

Gesucht ist eine Ecke v_i, die in **S** und **T** enthalten ist.

Dann haben wir nämlich einen Hamiltonschen Kreis:

- Beginne bei v und gehe zu v_{i-1}
- Gehe von v_{i-1} nach u
- Gehe zurück bis v_i
- Gehe von v_i nach v



3.3.2 Beweisabschluss

Zu zeigen bleibt: $\mathbf{S} \cap \mathbf{T} \neq \emptyset$

Es ist

$|\mathbf{S}| = d(u) \geq n/2$ und $|\mathbf{T}| = d(v) \geq n/2$.

Wäre der Schnitt leer, so würde die Vereinigung von **S** und **T** alle Ecken des Graphen enthalten. Es gibt aber eine Ecke, die weder in **S** noch in **T** liegt: v.

Also ist der Schnitt nicht leer und die Behauptung bewiesen.

3.3.3 Das Travelling Salesman Problem

Beispiel

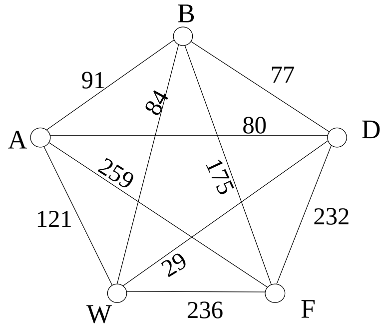
	A	B	D	F	W
Aachen	-	91	80	259	121
Bonn	91	-	77	175	84
Düsseldorf	80	77	-	232	29
Frankfurt	259	175	232	-	236
Wuppertal	121	84	29	236	-

Gesucht ist die kürzeste Route durch alle fünf Städte.

Dr. Heike Neumann

3.3.3 Travelling Salesman

Allgemein: Gegeben ist ein *gewichteter* Graph, das heißt die Kanten besitzen eine „Länge". Gesucht ist ein Hamiltonscher Kreis kürzester Länge.



Dr. Heike Neumann

3.3.4 Äquivalenz von Problemen

Das Problem, in einem Graphen einen Hamiltonschen Kreis zu finden, ist genauso schwer wie das Travelling Salesman Problem zu lösen.

- Angenommen, man kann alle Hamiltonschen Kreise eines Graphen effizient bestimmen. Dann kann man auch in einem gewichteten Graphen den kürzesten Hamiltonkreis bestimmen.
- Angenommen, man kann das Travelling Salesman Problem stets lösen. Kann man dann auch für jeden Graphen bestimmen, ob er Hamiltonsch ist?
  Ja, denn vervollständige die ursprünglichen Graphen zu einem vollständigen Graphen und gewichte die Kanten folgendermaßen:
  1, falls die Kante auch im Graphen selbst vorhanden war;
  2, falls sie hinzugefügt werden musste.
  Bestimme, ob es eine Tour gibt, die gerade die Länge der Eckenanzahl des Graphen hat.

Dr. Heike Neumann

3.3.5 Der Next-Neighbour-Algorithmus

Wir nehmen an, der Graph ist vollständig. Damit ist er in jedem Fall Hamiltonsch.

- Beginne bei einer beliebigen Ecke.
- Gehe stets zu einem der nächsten Nachbarn, der noch nicht durchlaufen worden ist.

Klar ist: Der Algorithmus liefert eine Tour. Die kürzeste?

Dr. Heike Neumann

3.3.6 Bemerkungen zum Travelling Salesman

Das Problem ist für beliebige Graphen *NP-vollständig*.

Das Problem wird nur unwesentlich leichter, wenn man Zusatzforderungen an den Graphen stellt. Normalerweise ist die Annahme realistisch, dass die Dreiecksungleichung in einem Graphen gilt. Dennoch kennt man keinen Algorithmus, der das Problem effizient lösen kann.

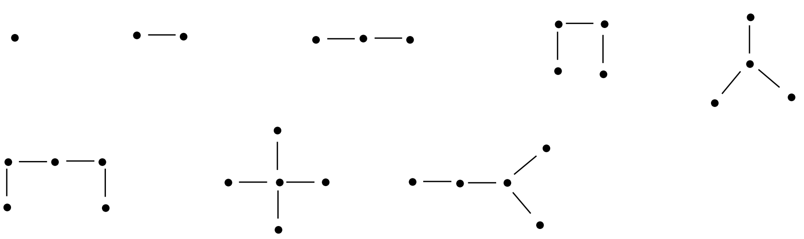
Das beste, was man hat, sind effizienteApproximationen. Gilt in einem Graphen die Dreicksungleichung, so gibt es effiziente Approximationen , die im schlechtesten Fall eine Tour liefern, die „nur“ 1,5 mal so lang ist wie die eigentliche Lösung!

Dr. Heike Neumann

3.4 Bäume

Ein *Baum* ist ein Graph, der zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält.

Beispiel: Alle Bäume mit höchstens fünf Ecken:



Bemerkung: Wir betrachten nur Bäume mit endlich vielen Ecken.

Dr. Heike Neumann

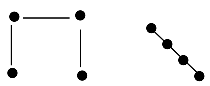
3.4. Isomorphie von Graphen

Definition

Zwei Graphen **G**(**E**, **K**) und **G**‘(**E**‘, **K**‘) heißen *isomorph*,
wenn es eine Bijektion φ: **E** $\rightarrow$ **E**‘ gibt, so dass folgendes gilt:

$$\{u, v\} \in \mathbf{K} \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in \mathbf{K}'$$

Beispiel



isomorph

nicht isomorph

3.4.1 Hilfssatz über Endecken

Eine *Endecke* eines Baums ist eine Ecke vom Grad 1.

Hilfssatz. Jeder Baum (bis auf den Baum, der nur aus einer Ecke besteht) hat mindestens zwei Endecken.

Beweis

Sei **T** ein Baum. Betrachte einen Weg maximaler Länge in **T**. Dann haben die beiden Endecken des Weges jeweils Grad 1, denn sonst könnte der Weg verlängert werden.

3.4.2 Satz über die Anzahl von Ecken und Kanten

Satz: Es sei **G** ein endlicher, nichtleerer, zusammenhängender Graph mit n Ecken und m Kanten. Dann ist $m \geq n - 1$ und es gilt: $m = n - 1 \Leftrightarrow$ **G** ist ein Baum.

Beweis durch Induktion nach der Anzahl m der Kanten:
Induktionsverankerung: Im Fall $m = 1$ besteht **G** nur aus zwei Ecken und einer Kante; also ist $m = 1$, und somit $n = m+1$.

Sei also $m > 1$ und die Annahme gilt für $m - 1$.
Induktionsschritt:

1.Fall Es gibt einen Kreis in **G**. Entferne eine Kante des Kreises. Der neue Graph **G*** ist zusammenhängend und hat eine Kante weniger, also gilt m-1 ≥ n-1, also ist auch $m \geq n$ -1.

2.Fall Es gibt keinen Kreis in **G**. Dann ist **G** ist Baum. Also gibt es eine Ecke vom Grad 1. Entferne diese Ecke und die inzidente Kante. Der neue Graph **G*** hat eine Kante und eine Ecke weniger und ist zusammenhängend. Nach IV ist $m^* = n^*-1$ und damit auch $m = n$-1.

3.4.3 Aufspannende Untergraphen

Definition

Gegeben sei ein Graph **G**=(**E**, **K**). Es heißt

- **H** = (**E***, **K***) ein *Untergraph* von **G**, wenn **E***⊆ **E** und **K*** ⊆ **K** ist.
- **H** ein *aufspannender Untergraph* von **G**, falls **E***=**E** ist.
- **H** ein *aufspannender Baum* von **G**, wenn **H** ein aufspanndender Untergraph von **G** ist und keinen Kreis enthält.

Frage: Besitzt jeder zusammenhängende Graph einen aufspannenden Baum?

3.4.4 Wege in Bäumen

Lemma

In einem Baum **T** sind je zwei Ecken durch genau einen Weg verbunden.

Beweis

Sei **T** ein Baum. Da **T** zusammenhängend ist, sind je zwei Ecken verbindbar.

Angenommen es gibt zwischen zwei Ecken *u* und *v* mehr als einen Weg. Dann können zwei Wege zu einem geschlossenen Kantenzug, also einem Kreis zusammengefasst werden. Also würde der Baum einen Kreis enthalten.

Wid. zur Definition

3.4.5 Minimal aufspannende Bäume

Definition Es sei **G** ein zusammenhängender Graph. Ein aufspannender Untergraph **H** von **G** heißt *minimal zusammenhängend,* falls durch das Entfernen einer Kante von **H** ein nichtzusammenhängender Graph entsteht.

Satz

Es sei **G** ein zusammenhängender Graph. Dann sind die minimal zusammenhängenden aufspannenden Untergraph von **G** genau die aufspannenden Bäume von **G**.

Beweis

1. Klar ist: Aufspannende Bäume sind minimal zusammenhängend, vgl. 3.4.4 .

2. Sei **H** ein aufspannender Untergraph von **G**, der minimal zusammenhängend ist. Falls **H** einen Kreis enthielte, so könnten wir eine Kante dieses Kreises entfernen, ohne den Zusammenhang von **H** zu zerstören. Also enthält **H** keinen Kreis. Damit ist **H** ein aufspannender Baum von **G**.

3.4.6 Existenz aufspannender Bäume

Satz

Jeder nichtleere, endliche, zusammenhängende Graph hat einen aufspannenden Baum.

Beweis

Sei **G** nichtleer, endlich, zusammenhängend. Falls alle Kanten von **G** Brücken sind, so ist **G** minimal zusammenhängend und damit ein aufspannender Baum, vgl. 3.4.5.

Andernfalls gibt es eine Kante *k*, so dass $\mathbf{G}_1 := \mathbf{G}(\mathbf{E}, \mathbf{K}\setminus\{k\})$ zusammenhängend ist.

Wir fahren induktiv fort und erhalten nach einer endlichen Anzahl von Schritten einen minimal zusammenhängenden Untergraphen $\mathbf{G}_n$ von **G** und damit auch einen aufspannenden Baum.

3.4.7 Wie findet man aufspannende Bäume?

Breadth-First Suche

Gegeben sei ein Graph mit *n* Ecken.

(1) Wähle eine beliebige Ecke e_0. Sie erhält die Nummer 1, sie ist die aktuelle Ecke.

(2) Die aktuelle Ecke habe die Nummer *i*, konstruiert seien die Punkte 1,2, ... *r*.

1. Fall $r = n$. Beende den Algorithmus.

2. Fall $r < n$. Betrachte alle Nachbarn von der aktuellen Ecke *i* und nummeriere die bisher unnummerierten durch: $r+1$, $r+2$, ... Füge die jeweiligen Kanten zum aufspannenden Baum hinzu.

Anschließend gehe zu Ecke $i+1$.

Fall a) Die Nummer $i+1$ ist vergeben, dann iteriere (2).

Fall b) Es gibt keine Ecke $i+1$. Dann ist **G** nicht zusammenhängend.

3.4.8 Anwendungsbeispiele

Betrachte die beiden folgenden Graphen:

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	*	1	0	1	0	0	0	1
b	1	*	1	1	1	0	0	0
c	0	1	*	1	0	0	1	0
d	1	1	1	*	0	0	0	0
e	0	1	0	0	*	0	0	0
f	0	0	0	0	0	*	1	0
g	0	0	1	0	0	1	*	1
h	1	0	0	0	0	0	1	*

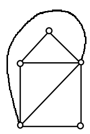
	a	b	c	d	e	f	g	h
a	*	0	0	1	0	0	1	0
b	0	*	0	0	0	1	0	1
c	0	0	*	1	0	0	1	0
d	1	0	1	*	0	0	1	0
e	0	0	0	0	*	0	1	0
f	0	1	0	0	0	*	0	1
g	1	0	1	1	1	0	*	0
h	0	1	0	0	0	1	0	*

3.5 Planare Graphen

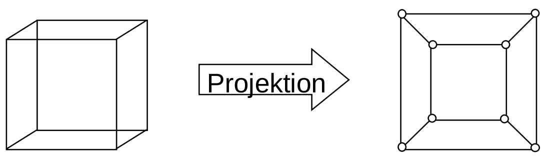
Ein Graph heißt *planar*, falls er “ohne Überschneidungen” in der Ebene gezeichnet ist. (Planar = eben.)

Beispiele:

(a)



(b) Projektionen konvexer Polyeder, z.B. eines Würfels:

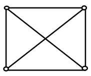


3.5.1 Plättbare Graphen

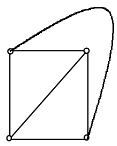
Ein Graph ist *plättbar*, wenn er überschneidungsfrei in die Ebene gezeichnet werden kann.

Beispiel:

Der Graph



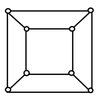
ist plättbar, denn er kann wie folgt überschneidungsfrei gezeichnet werden:



3.5.2 Die Eulersche Polyederformel

Jeder planare Graph zerlegt die Ebene in *Gebiete*.
Wir bezeichnen die Anzahl der Gebiete mit f.
Es gibt stets mindestens ein Gebiet, das äußere Gebiet. D.h.: $f \geq 1$.

Beispiele:

(a) Der Graph  hat $f = 6$. (b) Bäume haben $f = 1$.

Eulersche Polyederformel. Sei **G** ein zusammenhängender planarer Graph mit n Ecken, m Kanten und f Gebieten. Dann gilt:

$$\boxed{n - m + f = 2.}$$

3.5.2 Beweis der Eulerschen Polyederformel

Beweis durch Induktion nach der Anzahl f der Gebiete.

Induktionsverankerung: Sei zunächst $f = 1$. Dann hat **G** keine Kreise, ist also ein Baum. Daher gilt nach 3.4.2
$n = m+1$, das heißt $n - m + f = (m+1) - m + 1 = 2$.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Aussage gilt für ein $f \geq 1$.
Zu zeigen: sie gilt auch für $f+1$.

Induktionsschritt: **G** habe $f+1$ Gebiete. Da $f+1 > 1$ ist, ist **G** kein Baum, enthält daher einen Kreis. Wir entfernen eine Kante k^* dieses Kreises. Da k^* an zwei Gebiete von **G** angrenzt, hat der neue Graph **G*** nur noch $f^* = f$ Gebiete. Also können wir auf **G*** die Induktionsvoraussetzung anwenden (**G*** hat $m-1$ Kanten und n Ecken):
$2 = n - (m-1) + f = n - m + (f+1)$. Also gilt die Aussage für $f+1$.

3.5.3 Satz über planare Graphen

Satz: Sei **G** ein zusammenhängender einfacher planarer Graph mit $n \geq 3$ Ecken und m Kanten. Dann gilt: $m \leq 3n - 6$.
(D.h.: Ein planarer Graph hat relativ wenige Kanten.)

Beweis (durch trickreiche Abzählungen):
Für ein Gebiet **L** sei m(**L**) die Anzahl der Kanten dieses Gebietes. Da jedes Gebiet mindestens drei Kanten hat, gilt: $\sum_{\mathbf{L}\ \textit{Gebiet}} m(\mathbf{L}) \geq 3f$.

Nun zählen wir die Paare $(k, \mathbf{L})$, wobei die Kante k ein Teil der Grenze des Gebiets **L** ist: $\sum_{\mathbf{L}\ \textit{Gebiet}} m(\mathbf{L}) \leq 2m$.

Zusammen folgt: $2m \geq 3f$, d.h. $f \leq 2m/3$. Einsetzen in die Eulersche Polyederformel: $n - m + 2m/3 \geq n - m + f = 2$, also $m \leq 3n - 6$.

3.5.4 Folgerungen

Folgerung: Der vollständige Graph $\mathbf{K}_5$ ist nicht plättbar.

Beweis: Wäre $\mathbf{K}_5$ plättbar, so könnte nach 3.5.3 seine Anzahl von Kanten höchstens $3n–6 = 9$ sein. $\mathbf{K}_5$ hat jedoch 10 Kanten.

Satz: Sei **G** ein zusammenhängender einfacher planarer Graph. Dann gibt es mindestens eine Ecke, die einen Grad ≤ 5 hat.

Beweis: Sei n die Anzahl der Ecken und m die Anzahl der Kanten von **G**.Die Behauptung ist klar für $n = 1$ und $n = 2$. Sei nun $n \geq 3$: Wenn jede Ecke mindestens den Grad 6 hätte, folgte aus 3.5. 3:

$$6 \cdot n \leq \sum_{e \text{ Ecke}} d(e) \underset{3.1.12}{=} 2m \leq 6n - 12,$$

Das ist ein Widerspruch.

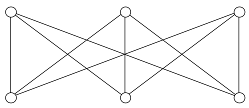
Dr. Heike Neumann

3.5.5 Anwendungsaufgabe

Aufgabe:

Drei Häuser A, B, C sollen jeweils durch eine Leitung mit dem Gaswerk (G), Elektrizitätswerk (E) und dem Wasserwerk (W) verbunden werden. Kann man dies so machen, dass sich die Leitungen nicht überkreuzen?

Graphentheoretische Formulierung: Ist der folgende Graph ($\mathbf{K}_{3,3}$) plättbar?



Dr. Heike Neumann

3.5.5 Lösung der Aufgabe

Es ist nicht möglich!
Denn: Angenommen, wir könnten diesen Graphen als planaren Graphen zeichnen. Dann hätte dieser $n = 6$ Ecken, $m = 9$ Kanten, und nach der Eulerschen Polyederformel könnten wir die Anzahl der Gebiete ausrechnen:
$2 = n - m + g = 6 - 9 + g$, also $g = 5$.

Jedes Gebiet des Graphen muss eine gerade Anzahl von Ecken haben, denn Häuser und Versorgungswerke wechseln sich ab. Daher hat jedes Gebiet mindestens 4 Ecken und also auch mindestens 4 Kanten.
Daher gilt $\sum_{\mathbf{L}\,Gebiet} m(\mathbf{L}) \geq 4g,$

und daher $2m \geq 4g$. In unserem Fall bedeutet dies $18 = 2m \geq 4g = 20$. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\mathbf{K}_{3,3}$ nicht plättbar ist.

Dr. Heike Neumann

3.6 Färbungen

Ursprung: Mitte des letzten Jahrhunderts kam die Frage auf:

> Wie viele Farben braucht man mindestens, um eine beliebige Landkarte so zu färben, daß je zwei benachbarte Länder verschiedene Farben haben?

Vierfarbenvermutung:
Vier Farben genügen!

Dr. Heike Neumann

3.6.1 Vierfarbenvermutung - Die Anfänge

1852: Mathematikstudent F. Guthrie färbt Karte von England mit Grafschaften und äußert zum ersten Mal die Vierfarbenvermutung.

Sein Bruder erzählte es seinem Professor A. de Morgan, der seinem Kollegen W. R. Hamilton in einem Brief davon berichtet.

Hamilton interessierte sich jedoch nicht sehr dafür.

Dr. Heike Neumann

3.6.2 Vierfarbenvermutung - Beweisversuche

1878: "On the colouring of maps" von A. Cayley.
1879: "On the geographical problem of the four colors" von A. B. Kempe: erster „Beweis" des Vierfarbensatzes.
1890: P. J. Heawood entdeckt einen Fehler in Kempes Beweis. Heawood kann den Fünffarbensatz zeigen („5 Farben reichen auf jeden Fall").

H. Heesch (1906-1995): Entwickelt von Kempes Methoden jahrzehntelang subtil weiter und kommt zu dem Schluss, dass das Problem mit Hilfe eines Rechners lösbar sein müßte. Sein Antrag an die DFG wird aber abgelehnt!

1976: K. Apel und W. Haken (University of Illinois at Urbana) bauen auf den Arbeiten von Heesch auf, haben Geld für einen Computer und können das Problem lösen.

Der Beweis hat viel Aufsehen erregt: Zum ersten Mal beim Beweis eines Satzes wurde der Computer essentiell eingesetzt.

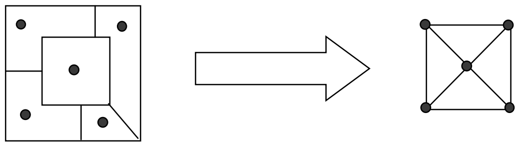
Dr. Heike Neumann

3.6.3 Übersetzung der Landkarte in einen Graphen

Wir zeichnen in jedem Land einen Punkt (die "Hauptstadt") aus; das sind die Ecken des Graphen.
Wir verbinden zwei Ecken durch eine Kante, wenn die entsprechenden Länder ein Stück Grenze gemeinsam haben.

Auf diese Weise erhält man einen planaren Graphen.

Beispiel:



3.6.4 Die chromatische Zahl $\chi(\mathbf{G})$

Definition

Eine Eckenfärbung eines Graphen $\mathbf{G}(\mathbf{E}, \mathbf{K})$ ist eine Abbildung f: $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$, das heißt der Ecken auf eine Menge von "Farben", so dass keine zwei durch eine Kante verbundenen Ecken die gleiche Farbe haben.

Die *chromatische Zahl* $\chi(\mathbf{G})$ eines Graphen $\mathbf{G}$ ist die kleinste natürliche Zahl n, so dass $\mathbf{G}$ mit n Farben gefärbt werden kann.
(χ ist der griech. Buchstabe "chi", der Anfangsbuchstabe des Wortes "chroma" „χρομα“ = Farbe.)

Beispiele:
(a) Kreise gerader Länge haben $\chi = 2$, Kreise ungerader Länge $\chi = 3$.
(b) $\chi(\mathbf{K}_n) = n$.

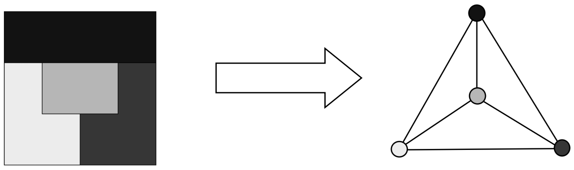
Dr. Heike Neumann

3.6.5 Übersetzung des Färbungsproblems in Graphentheorie

Übersetzung des Problems: Die Ecken des Graphen sollen so gefärbt werden, dass je zwei durch eine Kante verbundene Ecken verschiedene Farben haben. Wieviele Farben benötigt eine solche Färbung?

Die Vierfarbenvermutung lautet nun: Wenn **G** ein planarer Graph ist, so ist $\chi(\mathbf{G}) \le 4$.

Folgendes Beispiel zeigt, dass nur 3 Farben nicht genügen:



3.6.6 Greedy Algorithmus

Definition

$\Delta(\mathbf{G}) := \max\limits_{e \in \mathbf{E}} d(e)$ heißt der *maximale Grad* von **G**.

Satz: Für jeden Graphen **G** (nicht nur für planare) gilt $\chi(\mathbf{G}) \le \Delta(\mathbf{G}) + 1$.

Beweis: Mit folgendem Verfahren („Greedy Algorithmus“) kann man einen beliebigen Graphen **G** mit höchstens $\Delta(\mathbf{G}) + 1$ Farben färben:

Die Farben seien die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... Die Ecken seien nummeriert: e_1, e_2, ... Wir färben e_1 mit der Farbe 1. Wenn wir zu irgendeiner Ecke e_i kommen, färben wir sie mit der kleinsten Farbe, die nicht verboten ist. Wieviel Farben sind für e_i verboten? Schlimmstenfalls ist e_i eine Ecke mit maximalem Grad $\Delta = \Delta(\mathbf{G})$ und alle Δ Nachbarecken von e_i sind bereits verschieden gefärbt. In diesem Fall sind Δ Farben verboten. Dann gibt es aber immer noch eine, die wir wählen können.

3.6.7 Der Vierfarbensatz und der Fünffarbensatz

Für planare Graphen gilt etwas viel besseres:

Vierfarbensatz: Jeder planare Graph kann mit vier Farben gefärbt werden. D.h.: Für jeden planaren Graphen **G** gilt: $\chi(\mathbf{G}) \leq 4$.

Das bedeutet: In jeder ebenen Landkarte können die Länder so mit vier Farben gefärbt werden, dass je zwei Länder, die ein Stück gemeinsame Grenze haben, verschieden gefärbt sind.

Der Beweis (Apel und Haken, 1976) ist zu schwierig für eine Vorlesung.

Wir beweisen den Fünffarbensatz (Heawood, 1890):
Jeder planare Graph kann mit fünf Farben gefärbt werden.

3.6.8 Beweis des Fünffarbensatzes (I)

Beweis: Induktion nach der Eckenzahl n
Für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ist die Aussage trivial: Jeder Graph mit höchstens 5 Ecken kann natürlich mit 5 Farben gefärbt werden.

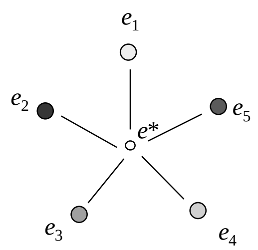
Sei $n \geq 5$, und sei die Aussage richtig für n. Das bedeutet: Jeder planare Graph mit n Ecken kann mit 5 Farben gefärbt werden.
Sei **G** ein planarer Graph mit $n+1$ Ecken. Wir müssen zeigen, dass auch **G** mit 5 Farben gefärbt werden kann.
Wir wissen nach 3.5.4, dass **G** eine Ecke e^* vom Grad ≤ 5 enthält. Wir entfernen e^* und alle zu e^* inzidenten Kanten. So erhalten wir einen planaren Graphen **G*** mit nur n Ecken. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt **G*** eine Färbung mit 5 Farben.

3.6.8 Beweis des Fünffarbensatzes (II)

Ziel: Mit dieser Färbung von **G*** eine Färbung von **G** erstellen!

1. Fall: Wenn die (≤ 5) zu e^* benachbarten Ecken insgesamt mit höchstens 4 Farben gefärbt sind, dann kann e^* mit der verbleibenden 5. Farbe gefärbt werden.
2. Fall: e^* hat 5 Nachbarecken e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, die mit den Farben 1, 2, 3, 4, 5 gefärbt sind. Die Ecken $e_1, ..., e_5$ seien gegen den Uhrzeigersinn angeordnet. Wir betrachten zunächst nur die Menge aller Ecken der Farben 1 oder 3, die von e_1 aus erreichbar sind.

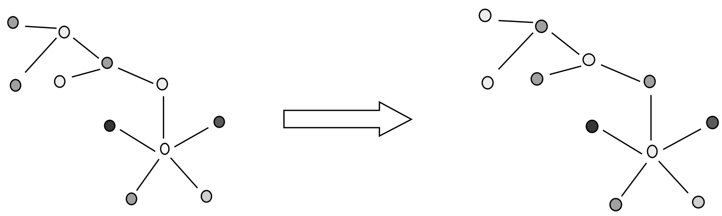
   Wir unterscheiden zwei (Unter-) Fälle.



Dr. Heike Neumann

3.6.8 Beweis des Fünffarbensatzes (III)

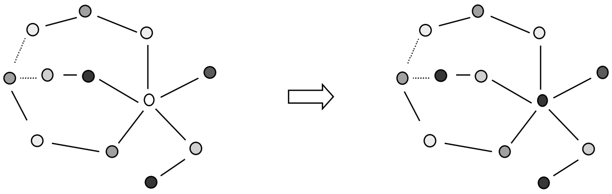
Fall a) Wenn man von e_1 ausgeht und nur Ecken der Farben 1 oder 3 benützt, kommt man nie zu e_3. Dann kann man die Ecken der Farben 1 oder 3, die man von e_1 aus erreichen kann, umfärben (aus 1 wird 3, aus 3 wird 1). Diese neue Färbung von **G*** hat die Eigenschaft, dass bei den Ecken $e_1, ..., e_5$ nur die Farben 2, 3, 4, 5 vorkommen. Also kann e^* mit der Farbe 1 gefärbt werden.



Dr. Heike Neumann

3.6.8 Beweis des Fünffarbensatzes (IV)

Fall b) Es gibt einen Weg von e_1 nach e_3, der nur Ecken der Farben 1 und 3 benutzt. Nun betrachten wir die Ecken e_2 und e_4. Wegen der Planarität von **G** können diese Ecken nicht durch einen Weg verbunden sein, der nur Ecken der Farben 2 und 4 benutzt. Also kann man alle Ecken der Farben 2 oder 4, die von e_2 aus erreichbar sind, umfärben (2 ↔ 4 vertauschen). Damit erhält man eine Färbung von **G***, bei der *e*2 die Farbe 4 erhält. Nun kann man *e** mit der Farbe 2 färben.



3.6.9 Kantenfärbungen

Man kann eine analoge Frage nach Kantenfärbungen stellen.

Definition

Eine *Kantenfärbung* von **G**(**E**, **K**) ist eine Abbildung *f*: **K** → **F**, so dass je zwei inzidente Kanten verschiedene Farben haben.

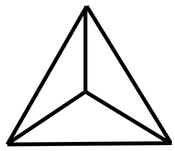
Der *chromatische Index* χ'(**G**) eines Graphen **G** ist die kleinste natürliche Zahl *n*, so dass **G** mit *n* Farben (Kanten-)gefärbt werden kann.

Beispiele:

a) Für einen geraden Kreis gilt χ'(**G**) =2.

b) Für einen ungeraden Kreis gilt χ'(**G**)=3.

c) $\chi'(\mathbf{K}_4) = 3$.



3.6.10 Sätze über Kantenfärbungen

Offensichtlich ist $\chi'(\mathbf{G}) \geq \Delta(\mathbf{G})$.

Satz (Vizing, 1964)
Es sei **G** ein einfacher Graph. Dann ist

$$\chi'(\mathbf{G}) = \Delta(\mathbf{G}) \text{ oder } \chi'(\mathbf{G}) = \Delta(\mathbf{G})+1$$

Satz (König, 1916)
Es sei **G** ein bipartiter Graph. Dann ist $\chi'(\mathbf{G}) = \Delta(\mathbf{G})$.