Die Jordansche Normalform

Cornelius Schwarz

22. Januar 2004

1 Aufgabenstellung von Normalformen

Um zu entscheiden, ob zwei Matrixen zueinander ähnlich sind, also den selben Endomorphismus f repräsentieren, transformiert man sie ein eine geeignete Normalform und vergleicht diese. Die Transitivität der Ähnlichkeitsrelation bedeutet ja gerade: $A \sim N, N \sim B \Leftrightarrow A \sim B$.
Diese Aufgabe erfüllen alle Normalformen. Folgendes Beispiel soll motivieren, warum es von Vorteil sein kann, eine Normalform von besonders einfacher Gestalt zu haben.

1.1 Beispiel

Es soll die Potenz von A^k berechnet werden, dabei sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}, k \in \mathbb{N}$. An Stelle A^k direkt zu berechnen, was mit einem nativen Algorithmus k Matrixmultiplikationen mit $O(n^3)$ Operationen bedeuten würde, kann man auch A in eine Normalform N transformieren und dann N^k berechnen. Es sei $A = P^{-1}nP$, dann gilt:

$$A^k = (P^{-1}NP)^k = P^{-1}NPP^{-1}NP \dots P^{-1}NP = P^{-1}N^kP$$

Die Anzahl der Operationen, um P zu berechnen hängt nur von der Dimension der Matrix ab, ist also unabhängig von k. Wenn $k >> n$ ist und N einfache Gestalt, z.B. Diagonalmatrix, hat, lohnt sich die Transformation.

2 Elementarteiler, die rationale Normalform

Um einen Endomorphismus in einer Normalform anzugeben, brauchen wir Merkmale, die nicht von der gewählten Basis abhängen. Ein Beispiel dafür ist das charakteristische Polynom. Allerdings bestimmt dieses den Endomorphismus nicht eindeutig. Die folgenden beiden Matrix haben das gleiche charakteristische Polynom $(X-1)^5$, sind aber nicht zueinander ähnlich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ein Vergleich der beiden Matrixen liefert, daß die erste Matrix als Minimalpolynom $(X-1)$ und die zweite $(X-1)^3$ hat.

Allerdings reicht die Vorraussetzung "Gleiches Minimalpolynom" auch nicht aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erweitern also noch einmal und kommen zu dem Beriff des

2.1 Satz + Definition: Elementarteiler

Sei M ein endlich erzeugter R-Modul über einem euklidischen Ring R mit $Ann(M) \neq (0)$, dann gibt es $m_1, \ldots, m_s \in M$ mit

$$M = \bigoplus_{j=1}^{s} Rm_i$$

und die Erzeugenden k_j der Ordnungsideale $Ord(m_j) \neq (0)$ genügen den Teilbarkeitsbedingungen $k_{j+1}|k_j, j = 1, \ldots, s-1$. Diese k_i sind bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmt und heißen die *Elementarteiler* von M und bestimmen M bis auf R-Isomorphie. (vgl. Satz 3.9.4 [**?**])

Das sieht auf den ersten Blick ziemlich abstrakt aus. Wir betrachten allerdings nur den Fall $R = \mathbb{K}[X]$: Hier ist $M = V_f$. $Ann(M)$ wird erzeugt von dem Minimalpolynom m_1. Zu dem Minimalpolynom gibt es eine Vektor v der dieses als Ordnunspolynom hat(vgl. [**?**]). Wir betrachten nun den Unterraum $\mathbb{K}[X]v$. Eine $\mathbb{K}$ Basis dieses Unterraums U_1 von V bekommt man, indem man mittels Gaußalgorithmus sukzessiv $v, f(v), f^2(v), \ldots$ zur Basis dazunimmt, bis diese linear abhängig werden(vgl. [**?**]).
Dann betrachten wir V/U_1. $Ann(V/U_1)$ in $\mathbb{K}[X]$ wird ebenfalls von einem eindeutigen normierten Polynom m_2 erzeugt zu dem es wieder einen Vektor v_2 gibt, der dieses als Ordnungspolynom hat. Eine $\mathbb{K}$ Basis von U_2 erhält man analog zu oben. Es gilt: $Ann(V) \subset Ann(V/U_1)$, da mit $p * v = 0$ auch $p * v + U = (p * v) + U = 0 + U = 0$ ist $\Leftrightarrow m_2|m_1$. Wir betrachten nun $(V/U_1)/U_2$, also $V/ < U_1 + U_2 >$ und iterieren das Verfahren bis $V/ < U_1 + \ldots + U_{s+1} >= \{0\}$ ist. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes **??** haben wir damit die Elementarteiler berechnet.

3 Primärkomponente, die jordansche Normalform

3.1 Satz + Definition: Primärkomponente

Sei R ein euklidischer Ring, M ein Torsionsmodul, also $Ord(m) \neq 0 \, \forall \, m \in M$,$P$ ein maximales Ideal, da R HIR, $\exists p \in \ R \ prim : P = (p)$. Sei Φ die Menge der maximalen Ideale von R

$$M_P := \{m | m \in M, \exists i \in \mathbb{N} : Ord(m) = (p^i)\}$$

Es gilt:

1.
$$M_P \text{ ist Untermodul für alle } P.$$

2.
$$M = \bigoplus_{P \in \Phi} M_P$$

3.
$$Ann(M) \subset P \Longleftrightarrow M_P \neq \{0\}$$

Die M_P heißen *Primärkomponeten* von M. (vgl. Satz 3.10.10 [**?**])

Wiederum betrachten wir den Fall $\mathbb{K}[X]$. Desweiteren setzten wir vorraus, daß das Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt. Dies kann man immer erreichen, ggf. nach Übergang zum Zerfällungskörper. Die Primärkomponenten sehen also folgendermaßen aus: $\{v \in V, \exists i \in \mathbb{N} : Ord(v) = (X-\lambda)^i \Leftrightarrow (A-\lambda)^i v = 0\}$. Falls $M_P \neq \{0\}$, so gilt doch $Ord(v)|Ann(V)$, also $X - \lambda$ ein Teiler des Minimalpolynoms. Wir brauchen also nur $(A-\lambda)^r = 0$ zu fordern, wobei r die Potenz des Primfaktors $X-\lambda$ im Minimalpolynom ist. Aufgrund von **??** können wir uns auf $p = X - \lambda$ mit λ Nullstelle des Minimalpolynoms also Eigenwert beschränken $(p|m)$. Trivialerweise ist A auf M_P invariant. Wir schränken die Matrix also auf Primärkomponente ein. Das Minimalpolynom auf M_P lautet dann, $(X-\lambda)^r$, wobei r der Index in dem Minimalpolynom auf V ist. Nach **??** erhalten wir eine Zerlegung in ein direkte Summe $\mathbb{K}[X]$ zyklische Unterräume. Mit M_{P_λ} gleich der Primärkomponente zum Eigenwert λ gilt also:

$$M_{P_\lambda} = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{K}[X] m_i \tag{1}$$

Die Elementarteiler als Teiler des Minimalpolynoms haben die Gestalt $(X-\lambda)^{\delta_i}$ mit $r = \delta_1 \leq .. \leq \delta_s$. Jetzt betrachten wir den Untermodul $U_{\delta_i} := \mathbb{K}[X](X-\lambda)^{\delta_i}$ mit zugehörigem Vektor v. Eine $\mathbb{K}$ Basis bilden die Vektoren $v, (A-\lambda)v, \ldots, (A-\lambda)^{\delta_i - 1}v$. A hat bezüglich dieser Basis Jordanblockgestalt auf U_{δ_i}:

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

3.2 Beispiel

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist in Rationaler Normalform. Das Minimalpolynom lässt sich also direkt ablesen: $x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x+4)^3$. Wir betrachten die einzige

Primärkomponente P_1 zum Eigenwert 1.

$$(A{-}1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (A{-}1{*}E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (A{-}1{*}E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis der Primärkomponente liefern uns also die Einheitsvektoren. Der Vektor $e_1 = (1,0,0)^T$ hat als Ordnungspolynom $(X+4)^3$. Es gibt also keine weiteren Elementarteiler. Die Jordanbasis bekommen wir also mit $e_1, (A-1) * e_1 = (4,1,0)^T, (A-1)^2 * e_1 = (1,3,1)^T$. Die Jordanform sieht bezüglich dieser Basis dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aus.

4 Algorithmus JNF Variante 1: Vorlesung bzw. Lüneburg

4.1 Der Algorithmus

Sei $\mathbb{K}$ Körper, $\mathbb{V}\mathbb{K}-$Vektorraum mit $n := \dim(\mathbb{V})$ und sei $\varphi \in End_{\neg}(\mathbb{V})$ und A seine darstellende Matrix bezüglich der kanonischen Einheitsvektoren in Quelle und Ziel.

Initialisierung Berechne die Eigenwerte von A.

Iterationschritt Für jeden Eigenwert λ_i

1. Berechne eine Basis der Primärkomponete $(V_\varphi)_{(X-\lambda_i)}$
2. Schränke φ ein auf V_i und berechne die Elementarteiler $(m_{i,0}, \ldots, m_{i,s_i})$ und zugehörige Vektoren $v_{i,j}$ mit $Ord(v_{i,j}) = (m_{i,j})$

$m_{i,j} = (X-\lambda_i)^{\delta_{i,j}}$, wobei $\delta_{i,0} = r_i \geq \delta_{i,1} \geq \ldots \geq \delta_{i,s_i}$. Die Jordanmatrix hat also zum Eigenwert λ_i genau s_i Jordanblöcke, die jeweils die Gröse $\delta_{i,j}$ haben. Eine Jordanbasis ergibt sich aus dem Hintereinaderreihen von $(v_{i,j}, (A-\lambda_i) * v_{i,j}, \ldots, (A-\lambda_i)^{\delta_{i,j-1}} * v)$.

5 Algorithmus JNF Variante 2: Repetitorium der Linearen Algebra

5.0.1 Lemma

Sei $f \in End(V,V)$, dann gilt:

$$Kern(f^i) \subseteq Kern(f^{i+1}), i \in \mathbb{N}$$

Beweis: trivial

5.0.2 Definition: Stufenbasis

S heißt Stufenbasis zur Primärkomponente P_i, falls gilt:

1. $S = S_1 \cup \ldots S_k, S_i \cap S_j = \emptyset, i \neq j$
2. $S_1 \cup \ldots \cup S_j$ ist Basis von $Kern((A - \lambda_i)^j)$, $j = 1, \ldots, k$

Zur Veranschaulichung:

v_8	v_9			S_3
v_5	v_6	v_7		S_2
v_1	v_2	v_3	v_4	S_1

S_1 ist Basis von $Kern(A - \lambda_i)$, $S_2 \cup S_!$ ist Basis von $Kern(A - \lambda_i)^2$. S_2 enthält also die Basisvektoren, die für eine Basis von $Kern(A - \lambda_i)^2$ noch "fehlen".

5.1 Der Algorithmus

Eingabe Eine Matrix über einen $\mathbb{K}-Vektorraum\mathbb{V}$, sowie deren Eingenwerte.

Iteration Durchlaufe die Eigenwerte von A mit λ

1. Berechne eine Stufenbasis der Primärkomponente $V_\varphi)_{(X-\lambda)}$
2. Berechne aus der Stufenbasis eine Jordanbasis

Zur Stufenbasis
Die Existens folgt **??**. Die Berechnung folgt mittels Gauss. Man nutzt an dieser Stelle aus, daß bei der Berechnung von $Kern(X - \lambda_i)^j$ die Nullzeilen von der Berechnung von $Kern(X - \lambda_i)^{j-1}$ erhalten bleiben. Man muß bei der Berechnung also nur die neuen Nullzeilen als freie Parameter betrachten.
Zur Jordanbasis
Hier nutzt man die Tatsache, daß $Ord(v) = (X - \lambda_i)^j \Rightarrow Ord((X - \lambda_i)v) = (X-\lambda_i)^{j-1}$ gilt. Denn wenn gilt: $(A-\lambda_i)^j v = 0 \Leftrightarrow (A-\lambda_i)^{j-1}((A-\lambda_i)v) = 0$. Also hat $(A-\lambda_i)v$ als Ordnungspolynom $(X-\lambda_i)^{j-1}$ liegt also im $Kern(A-\lambda_i)^{j-1}$ also "eine Stufe tiefer". Ausserdem nutzen wir aus, dass für lineare unabhnnagige v_i mit $Ord(v_i) = (X - \lambda_i)^j, j > 1$ gilt: $(X - \lambda_i)v_i$ sind linear unabhängig, denn

$$\sum_{i=1}^{k} \kappa_i (A - \lambda_i) v_i = 0 \Rightarrow (A - \lambda_i) \sum_{i=1}^{k} \kappa_i v_i = 0$$

Also liegt die Linearkombination der v_i im $Kern(A - \lambda_i)$. Da die v_i als linear unabhängig vorrausgesetzt waren, gilt dies nur, falls $j = 1$ ist.
Folgender Algorithmus liefert damit eine Jordanbasis:

Initialisierung $T_k := R_k := S_k$

Schritt j

- Basis von $Kern(A - \lambda_i)^{k-j} : S_1 \cup \ldots S_{k-j} \cup T_{k-j+1}$
- ersetzte S_{k-j} durch $X := \{(A - \lambda_i) * v | v \in T_{k-j+1}\}$
- erweitere diese Menge durch R_{k-j} zu einer Basis von $Kern(A-\lambda_i)^{k-j}$
- setze $T_{k-j} := X \cup R_{k-j}$

Zur Veranschaulichung:
Betrachten wir noch einmal obige Skizze, dann starten wir mit v_8, v_9 in der Stufe S_3. Beim Übergang zu Stufe S_2 berechnen wir als erstes $(A-\lambda_i)v_8, (A-\lambda_i)v_9$ und nehmen dann noch einen zu diesen Vektoren linear unabhängigen Vektor aus der Menge $\{v_5, v_6, v_7\}$ hinzu. Sei dies o.E. v_7, dann ist $v_1, \ldots, v_4, (A-\lambda_i)v_8, (A-\lambda_i)v_9, v_7$ eine Basis von $(A-\lambda_i)^2$. Wir iterieren und betrachten $(A-\lambda_i)^2 v_8, (A-\lambda_i)^1 v_9, (A-\lambda_i)v_7$ und erweitern wieder zu einer Basis, z.B. durch v_4.

v_8	v_9			S_3
$(A-\lambda_i)v_8$	$(A-\lambda_i)v_9$	v_7		S_2
$(A-\lambda_i)^2 v_8$	$(A-\lambda_i)^2 v_9$	$(A-\lambda_i)v_7$	v_4	S_1

Kontruktion der Jordanbasis:
Zu $r \in R_j$ existiert ein $j \times j$ *Jordanblock* mit der Basis: $r, \ldots, (A-\lambda)^j * r$. Durch Hintereinanderschreiben dieser Basen erhält man die Jordanbasis von A. Im Beispiel ist die Jordanbasis:

$$v_8, (A-\lambda_i)v_8, (A-\lambda_i)^2 v_8, v_9, (A-\lambda_i)v_9, (A-\lambda_i)^2 v_9, v_7, (A-\lambda_i)v_7, v_4$$

Wir bekommen demnach 2 3×3 Jordanblöcke, 1 2×2 Jordanblock und 1 1×1 Jordanblock.

5.2 Beispiel

Betrachten wir wieder die Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A - 1 * E) := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{Zeilenstufenform}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis von $Kern(A-1*E)$ liefert demnach der Vektor $v_1 := (1,3,1)^T, S_1 := \{v_1\}$

$$(A - 1 * E)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Zeilenstufenform}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als neue Nullzeile bekommen wir die zweite Zeile. Demnach bekommen wir den Vektor $v_2 := (4,1,0)^T, S_2 = \{v_2\}$
Die dritte Potenz von $(A-1*E)$ war die Nullmatrix und liefert uns mit der ersten Zeile als zusätzliche Nullzeile den ersten Einheitsvektor. $v_3 = (1,0,0)^T, S_3 = \{v_3\}$. Wir bekommen hier mit $v_3, (A-1*E)v_3, (A-1*E)^1 v_3$ die selbe Basis wie zuvor (**??**).

Literatur

[lina02] Prof. Dr. A. Kerber. Lineare Algebra, WS 2002/2003

[rep] Dr. Michael Holz, Dr. Detlef Wille, Repetitorium der Linearen Algebra Teil 2, Binomi Verlag

[hl] H. Lüneburg, Vorlesung über Lineare Algebra, BI Wissenschaftsverlag, 1993

[hb] H. Buchholzer, Vortrag über Minimalpolom am 08.01.2004

[bvkp] Binca Valentin, Katja Pöllman, Vortrag über Gauß Algorithmus nach Lüneburg