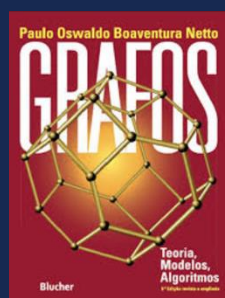
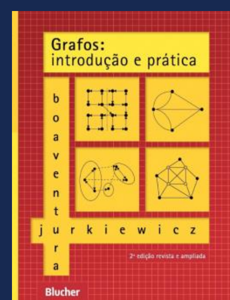
Unidade 19 – Emparelhamentos

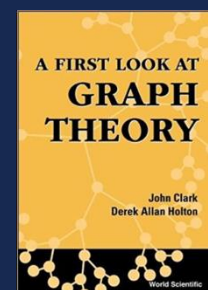
INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA MAUÁ

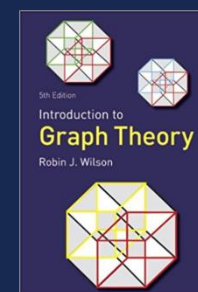
Bibliografia

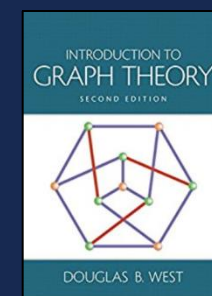
- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. **Nicoletti**, E.R. **Hruschka** Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo **Boaventura** Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco **Goldbarg**, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John **Clark**, Derek Allan **Holton** – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. **Wilson** – 4th Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas **West** – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. **Scheinerman** – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. **Rosen** – 7th edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. **Berztiss** - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. **Johnsonbaugh** – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graoy Theory – R. **Diestel** – Springer – 5th Edition – 2017
- Teoria Computacional de Grafos – Jayme Luiz Szwarcfiter – Elsevier - 2018

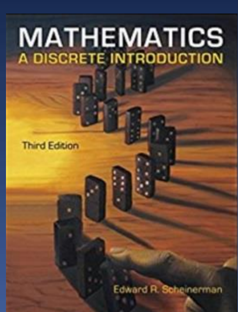


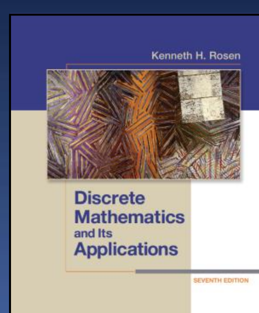


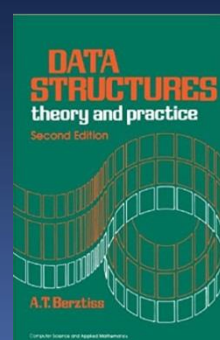


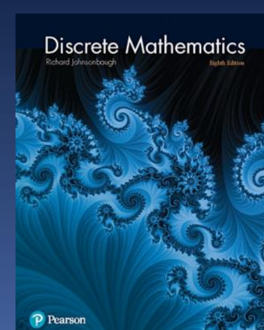


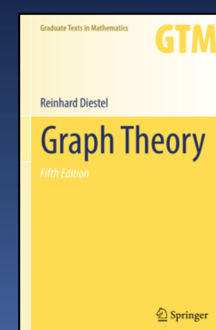






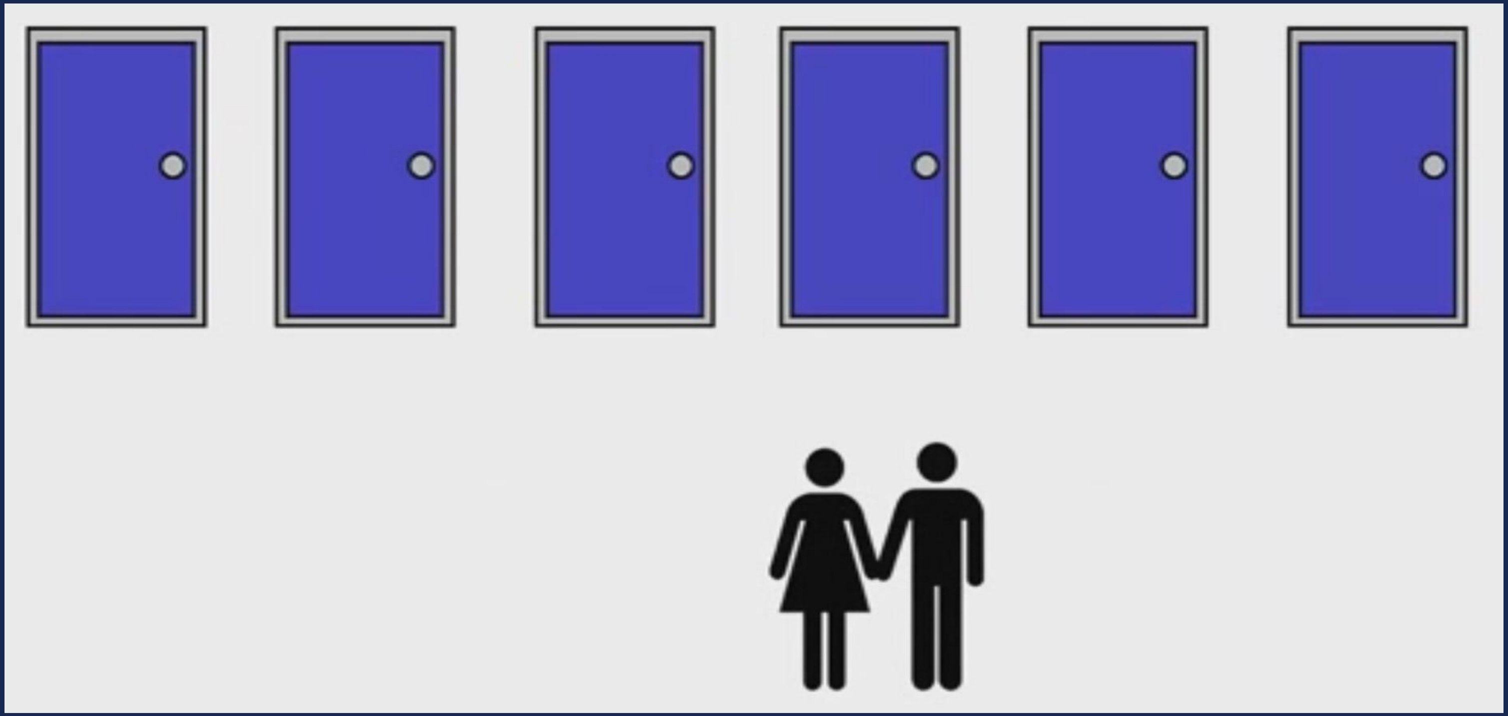






Contextualização

De quantas maneiras pode-se hospedar 6 casais em 6 quartos de um hotel ?



Primeiro casal tem 6 possibilidades de escolha !

Segundo casal terá 5 possibilidades de escolha!

E assim, por diante...

Total de Possibilidades: C(6,1) + C(5,1) + C(4,1) + C(3,1) + C(2,1) + C(1,1)

$$C_s^n = \binom{n}{s} = \frac{n!}{s! \cdot (n-s)!}$$

Total de Possibilidades: 6+5+4+3+2+1= 21 possibilidades

Contextualização

- ✓ Consideremos uma variação do Problema apresentado;
- ✓ Considere um **hotel** com apenas **6** quartos;
- ✓ No instante do check-in, seis casais se apresentaram com algumas **preferências** de acomodações:

Contextualização

- ✓ No instante do check-in, seis casais se apresentaram com as seguintes **preferências** de acomodações:

- ✓ O casal **A** tem preferência pelos quartos **1**,**2** e **4**
- ✓ O casal **B** tem preferência pelos quartos **2** e **6**
- ✓ O casal **C** tem preferência pelos quartos **2** e **3**
- ✓ O casal **D** tem preferência pelos quartos **3**,**5** e **6**
- ✓ O casal **E** tem preferência pelos quartos **3**,**4**,**5** e **6**
- ✓ O casal **F** tem preferência pelos quartos **2** e **5**

Contextualização

- ✓ Durante o check-in, o gerente do hotel, se deparou com o seguinte problema!
- ✓ **Será possível hospedar todos os casais respeitando suas preferências?**

Contextualização

✓ A questão corresponde a:

- Qual é o número máximo de subconjuntos de tamanho 2 que é possível formar com 12 elementos, respeitando-se as restrições apresentadas?

Contextualização

- ✓ Será que as ferramentas da Análise Combinatória serão suficientes para resolver esse problema?

Será que poderíamos modelar o problema com Grafos ?

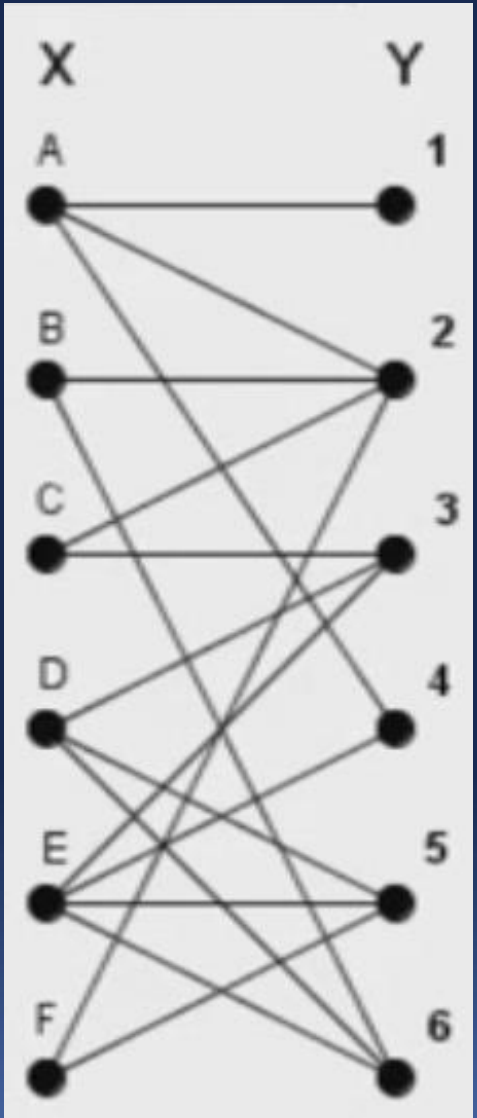
Aplicando Grafos ao problema

- ✓ Pode-se criar um grafo para a partir dele tentar a solução do problema;
- ✓ Consideremos um grafo **G**, com **12** vértices, **6** representando os casais e **6** representando os quartos;
- ✓ Pode-se conectar os casais aos quartos respeitando-se as suas preferências;
- ✓ Nesse grafo, não haverá necessidade de se conectar casais com casais, pois essas conexões não se aplicam ao problema;

Aplicando Grafos ao problema

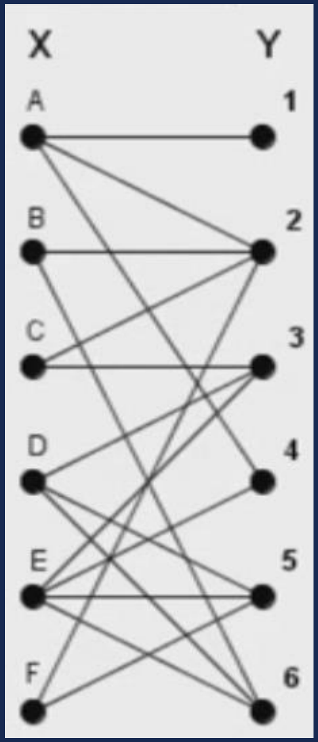
- ✓ Pode-se esboçar um grafo de modo que **vértices** representando **casais** estejam à esquerda e vértices representando os quartos, à direita;
- ✓ Nessa situação, toda aresta conectará um vértice da esquerda à um vértice da direita.
- ✓ Pode-se denotar o conjunto dos vértices à esquerda por **X={A,B,C,D,E,F}** e o conjunto da direita por **Y={1,2,3,4,5,6}**.

Aplicando Grafos no problema



- ✓ O casal A prefere os quartos 1,2 e 4
- ✓ O casal B prefere os quartos 2 e 6
- ✓ O casal C prefere os quartos 2 e 3
- ✓ O casal D prefere os quartos 3,5 e 6
- ✓ O casal E prefere os quartos 3,4,5 e 6
- ✓ O casal F prefere os quartos 2 e 5

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



O grafo desenhado para o problema tem alguma característica interessante?

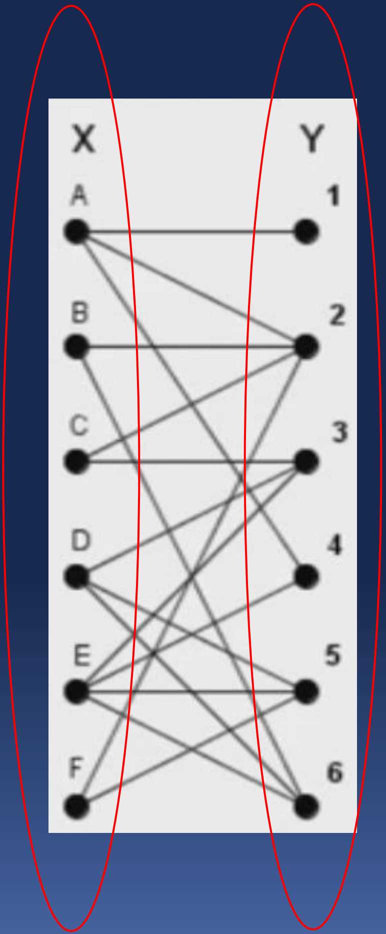
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação - M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição - LTC

Grafo Bipartido

- ✓ Sim, o gráfico desenhado tem uma propriedade interessante!
- ✓ Trata-se de um **Grafo Bipartido**!

Grafo Bipartido

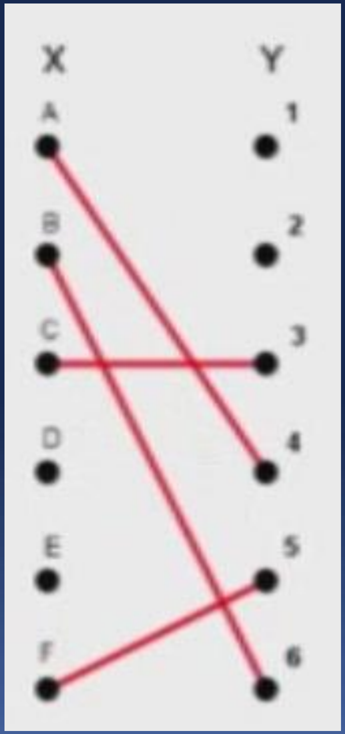
Um Grafo é dito Bipartido se o conjunto de vértices pode ser particionados em dois conjuntos X e Y tais que toda aresta conecta um vértice em X a um vértice em Y.



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Tentativa de Solução

- A solução para o problema consiste em se determinar um relacionamento entre os vértices que atenda às restrições do problema;
- Será que o relacionamento abaixo, resolveria o problema?



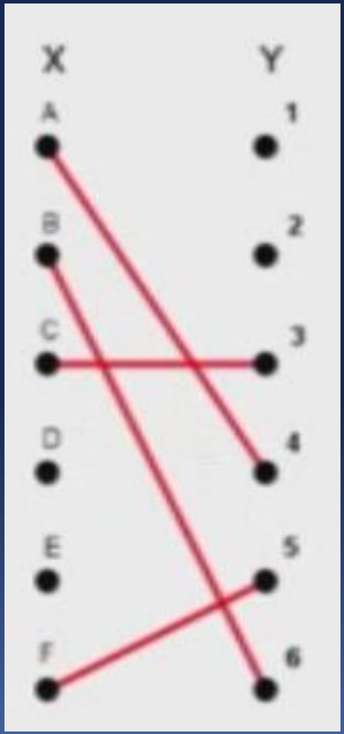
- O **casal A** prefere os quartos 1,2 e **4**
- O **casal B** prefere os quartos 2 e **6**
- O **casal C** prefere os quartos 2 e **3**
- O casal D prefere os quartos 3,5 e 6
- O **casal E** prefere os quartos 3,4,5 e 6
- **O casal F** prefere os quartos 2 e **5**

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA MAUÁ

Tentativa de Solução

- ✓ O emparelhamento proposto **não** resolve o problema, pois os casais **D** e **E** não teriam quartos disponíveis;
- ✓ Assim, deve-se procurar um **emparelhamento** adequado que resolva o problema.



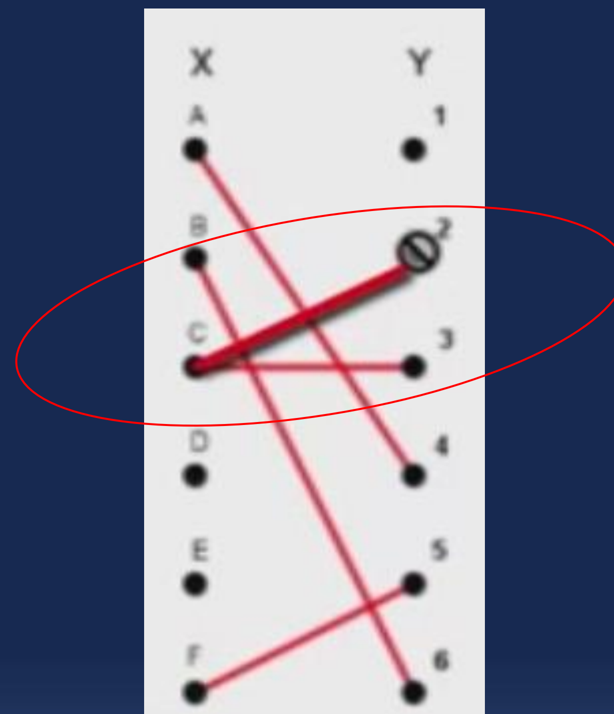
- ✓ O **casal A** prefere os quartos 1,2 e **4**
- ✓ O **casal B** prefere os quartos 2 e **6**
- ✓ O **casal C** prefere os quartos 2 e **3**
- ✓ O casal D prefere os quartos 3,5 e 6
- ✓ O **casal E** prefere os quartos 3,4,5 e 6
- ✓ **O casal F** prefere os quartos 2 e **5**

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Emparelhamento

Emparelhamento

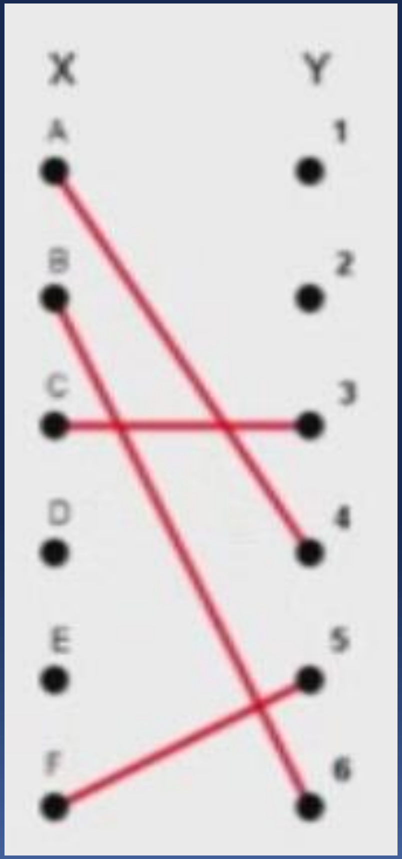
Emparelhamento é um conjunto de arestas onde não existem duas arestas incidentes a um mesmo vértice.



- ✓ No exemplo, os conjuntos **X** e **Y** **não** estão emparelhados, pois o vértice **C** de **X** está sendo conectado aos vértices **2** e **3** de **Y**;

Solução parcial

- ✓ Para a solução apresentada, conseguiu-se emparelhar **4 vértices**!
- ✓ **Será que se consegue um emparelhamento maior?**



- ✓ **O casal A** preferia os quartos 1,2 e **4**
- ✓ **O casal B** preferia os quartos 2 e **6**
- ✓ **O casal C** preferia os quartos 2 e **3**
- ✓ O casal D preferia os quartos 3,5 e 6
- ✓ O casal E preferia os quartos 3,4,5 e 6
- ✓ **O casal F** preferia os quartos 2 e **5**

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

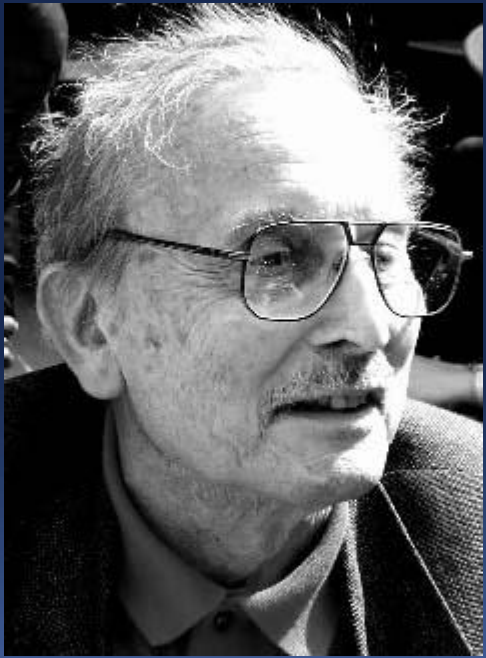
Emparelhamento Perfeito

✓ Para a solução do problema do hotel, deve-se encontrar um **emparelhamento perfeito**, que é um **emparelhamento que tem todos os vértices conectados**;

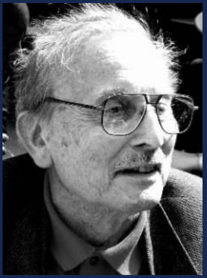
Será que para o problema do hotel, consegue-se obter um emparelhamento perfeito ?

Teorema de Berge

- ✓ Graças ao Matemático francês Claude **Berge**, pode-se determinar se há um emparelhamento maior (com mais arestas) que o já encontrado.



Teorema de Berge



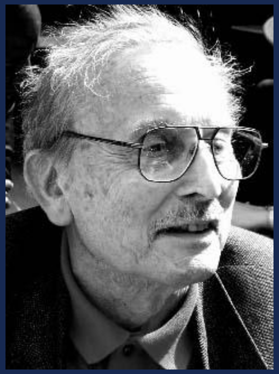
Segundo Berge, se conseguirmos encontrar um caminho que comece e termine com vértices livres alternando entre arestas que pertencem e que não pertencem ao emparelhamento, então existe um emparelhamento M' maior que o inicial. Esse tipo de caminho chama-se Caminho M-aumentante.

Vértice Livre

Vértice livre ou vértice não M-saturado é um vértice que não pertence ao emparelhamento M.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

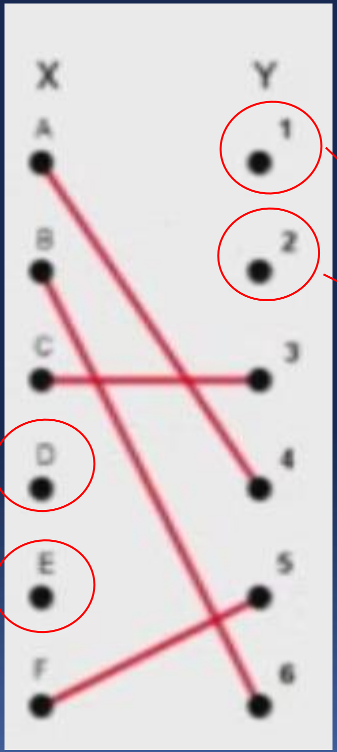
Teorema de Berge



Segundo Berge, se conseguirmos encontrar um caminho que comece e termine com vértices livres alternando entre arestas que pertencem e que não pertencem ao emparelhamento, então existe um emparelhamento M' maior que o inicial. Esse tipo de caminho chama-se Caminho M-aumentante.

Vértice Livre

Vértice livre ou vértice não M-saturado é um vértice que não pertence ao emparelhamento M.

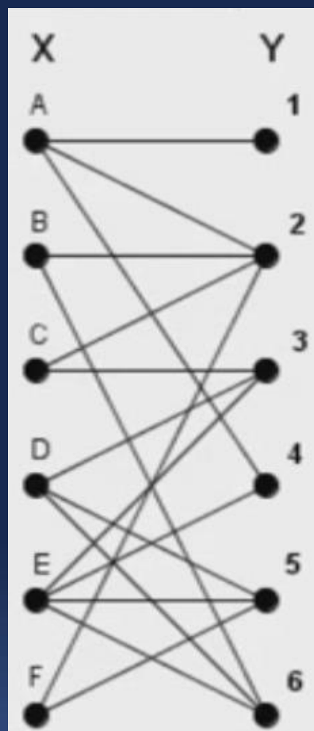


Vértices Livres

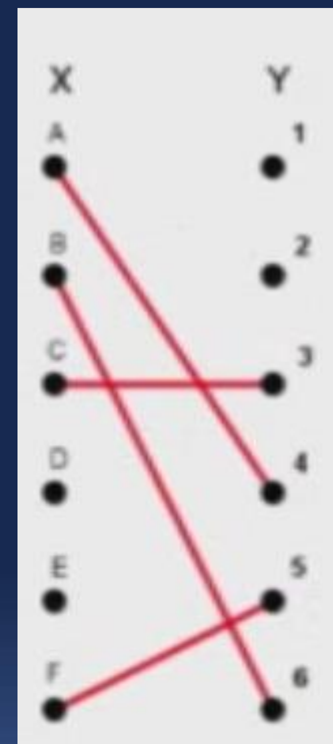
Vértices Livres

Teorema de Berge

Segundo Berge, se conseguirmos encontrar um caminho que comece e termine com vértices livres alternando entre arestas que pertencem e que não pertencem ao emparelhamento, então existe um emparelhamento M' maior que o inicial. Esse tipo de caminho chama-se Caminho M-aumentante.



- ✓ Problema Original

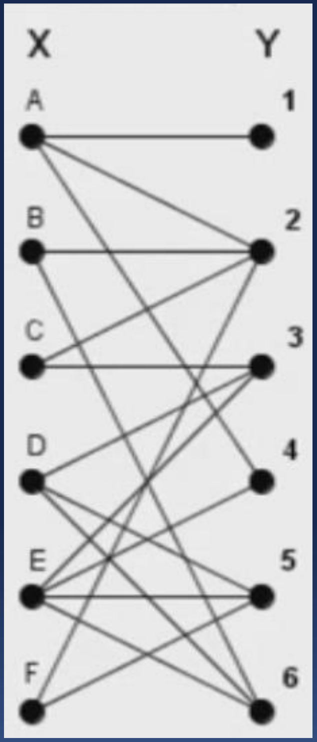


- ✓ Emparelhamento Parcial com **4 arestas conectadas**

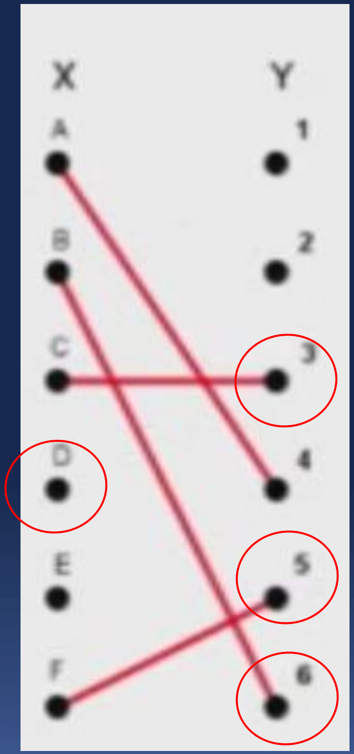
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Teorema de Berge

- ✓ Deve-se começar e terminar com vértices livres, alternando-se entre arestas que pertencem e não pertencem ao emparelhamento;
- ✓ Por exemplo, ao se escolher o vértice **D**, deve-se escolher alguma aresta que não pertence ao emparelhamento, podendo ser **D3**, **D5** ou **D6**;



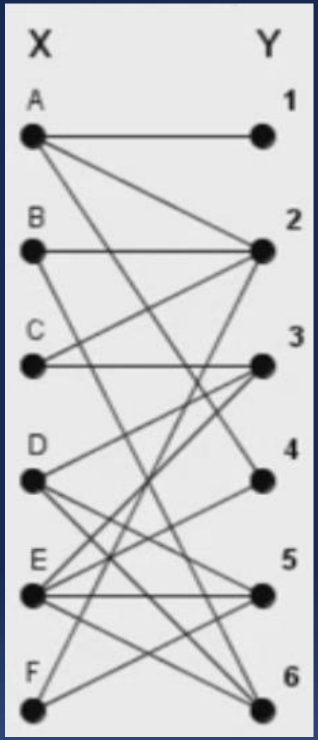
- ✓ Problema Original

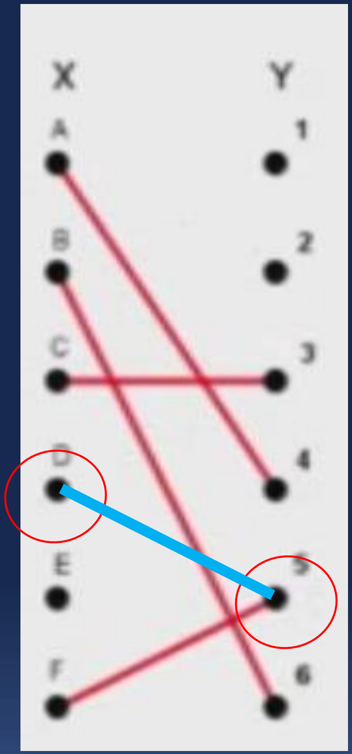


Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Teorema de Berge

- ✓ Por exemplo, ao se escolher o vértice **D**, deve-se escolher alguma aresta que não pertence ao emparelhamento, podendo ser **D3**, **D5** ou **D6**;
- ✓ Pode-se, por exemplo, escolher **D5**.



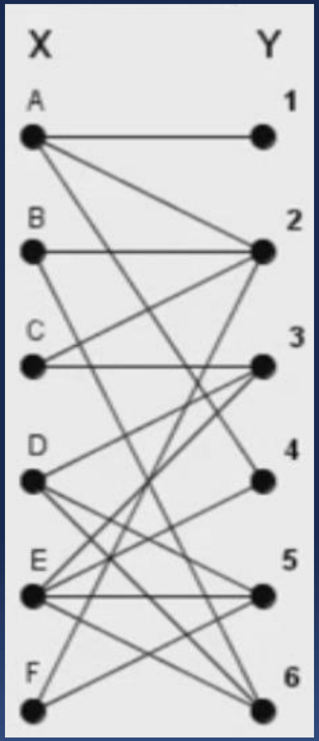


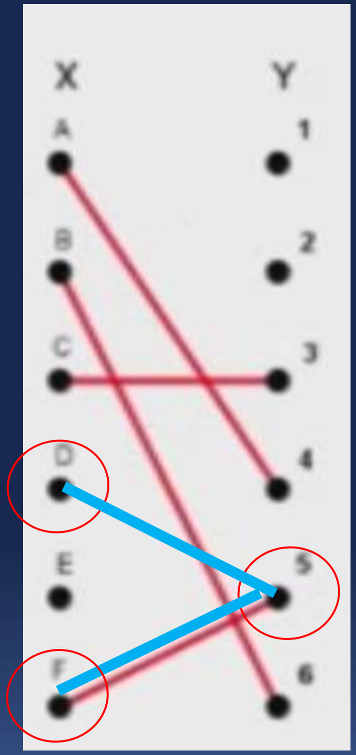
- ✓ Problema Original

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA MAUÁ

Teorema de Berge

- Pode-se, por exemplo, escolher **D5;**
- Como o caminho é alternante, a próxima aresta **deve ser do emparelhamento**;
- Portanto, a aresta do emparelhamento que deve ser escolhida é **5F**.



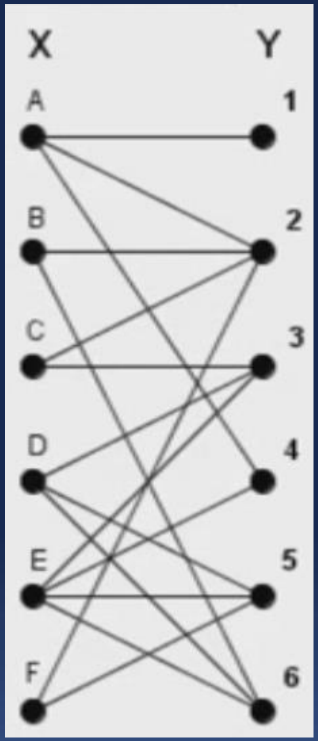


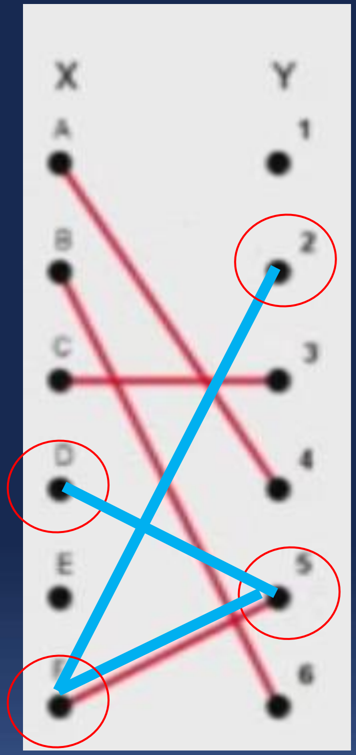
- Problema Original

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Teorema de Berge

- ✓ Portanto, a aresta do emparelhamento que deve ser escolhida é **F5**
- ✓ Como o caminho é alternante, a próxima **não** deve ser do emparelhamento;
- ✓ Portanto, a próxima aresta a ser escolhida deve ser **F2**.



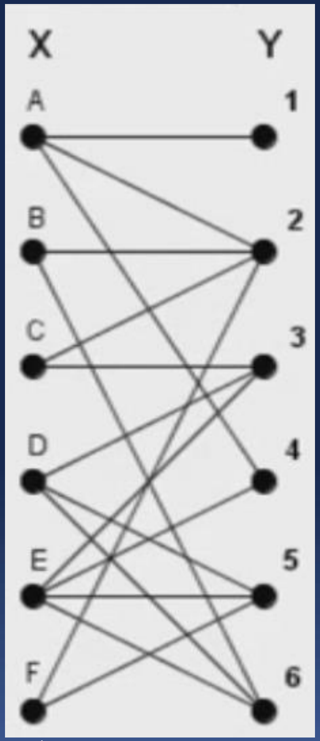


- ✓ Problema Original

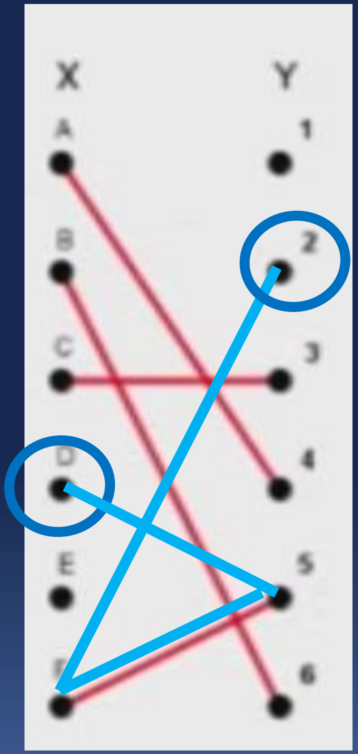
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Teorema de Berge

- Como o caminho é **alternante**, a próxima aresta **deve ser do emparelhamento**;
- Mas, não há aresta do emparelhamento ligando **2**;
- Portanto, o caminho encerra-se aqui;
- Mas, o caminho traçado iniciou-se com um **vértice livre (D)** e terminou **com vértice livre (2)**
- Assim, de acordo com o **Teorema de Berge**, obteve-se um caminho **M-alternante**.

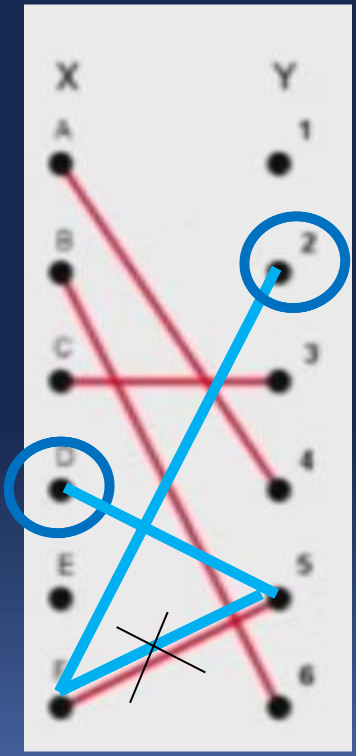


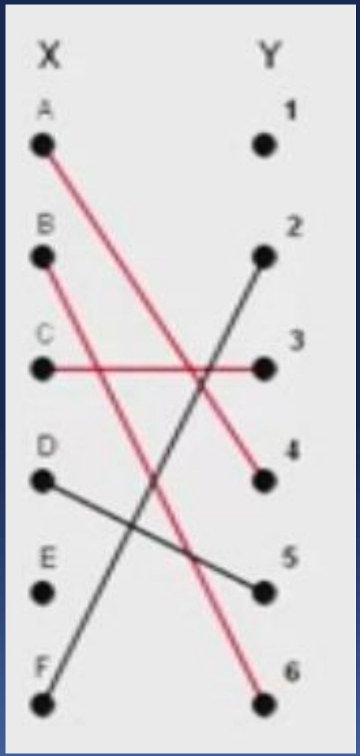
- Problema Original



Teorema de Berge

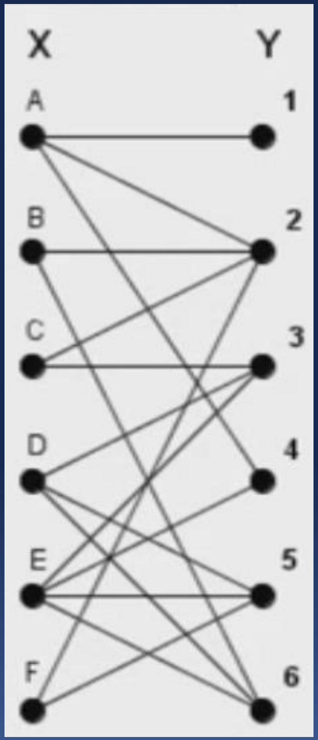
- Próximo passo: Deve-se retirar do caminho M-aumentante (**D5F2**), toda aresta desse caminho que pertence a **M**;
- Deve-se portanto, retirar a aresta **F5**;
- Com isso, obtém-se um emparelhamento com uma aresta a mais.





Agora, pode-se hospedar 5 casais!!!

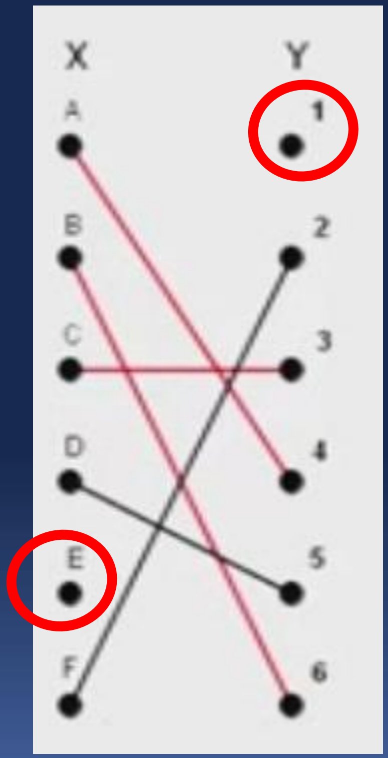
- ✓ Já se conseguiu hospedar **5** casais!
- ✓ Mas, será que poderemos hospedar os **6** casais?



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

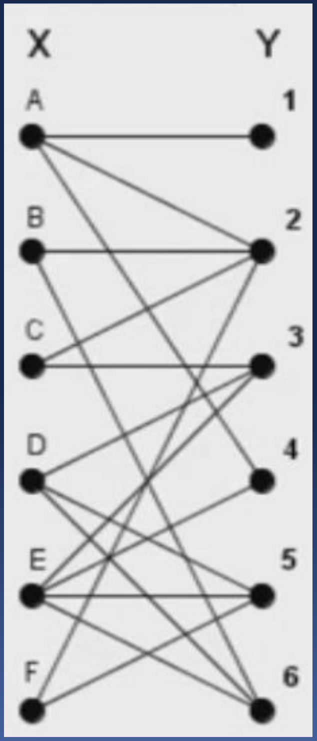
Teorema de Berge

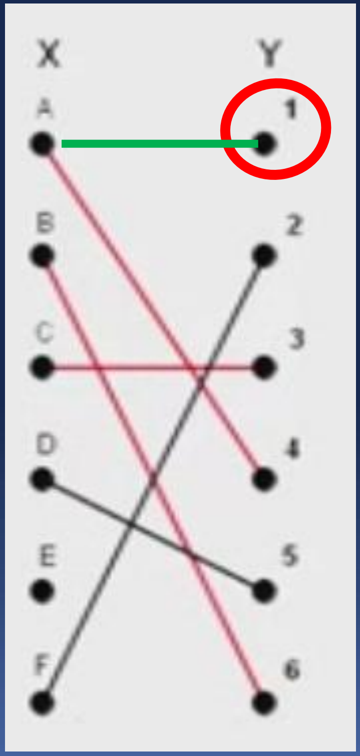
- Será que poderemos hospedar os **6 casais**?
- Deve-se aplicar novamente o **Teorema de Berge**;
- Os vértices livres são **1** e **E.**



Teorema de Berge

- Será que poderemos hospedar os **6 casais**?
- Deve-se aplicar novamente o **Teorema de Berge**;
- Deve-se começar e terminar com vértices livres, alternando-se entre arestas que **pertencem** e **não pertencem** ao emparelhamento;
- Os vértices livres são **1** e **E**;
- Por exemplo, ao se escolher o vértice **1**, deve-se escolher alguma aresta que não pertence ao emparelhamento, devendo ser portanto, **A1**.

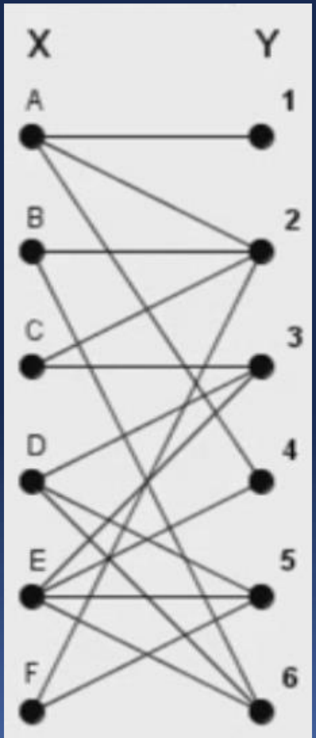


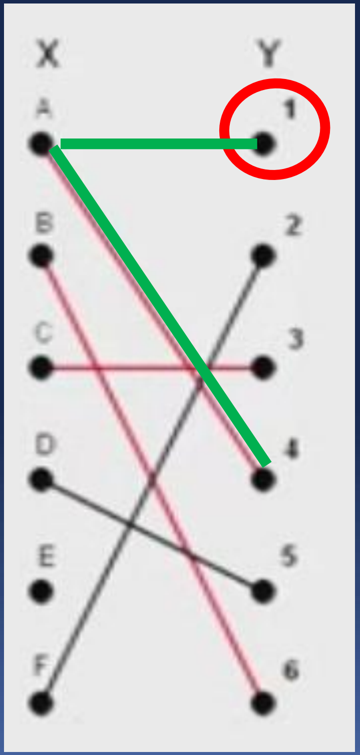


Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Teorema de Berge

- ✓ Por exemplo, ao se escolher o vértice **1**, deve-se escolher alguma aresta que **não** pertence ao emparelhamento, devendo ser portanto, **A1**;
- ✓ Como os caminhos são alternantes, deve-se agora escolher alguma aresta do emparelhamento, devendo ser, portanto, **A4**.

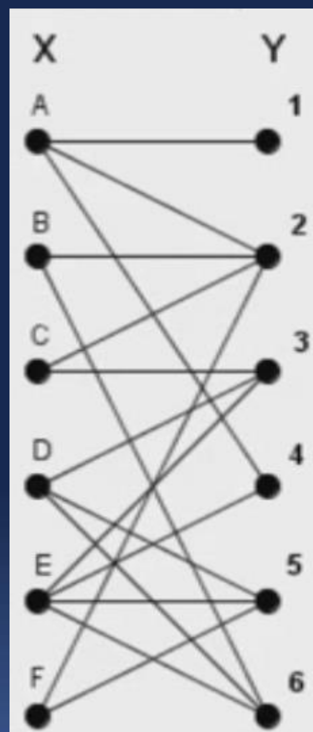


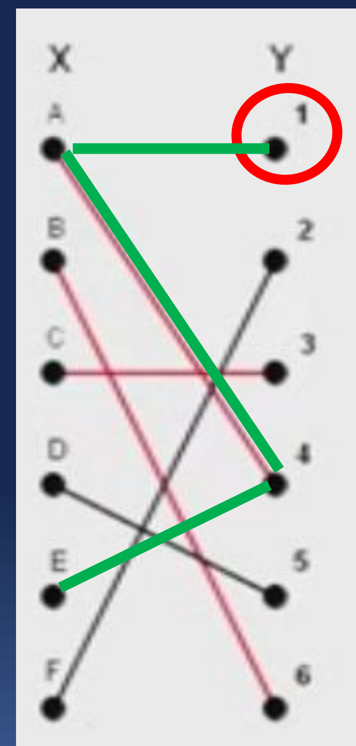


Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Teorema de Berge

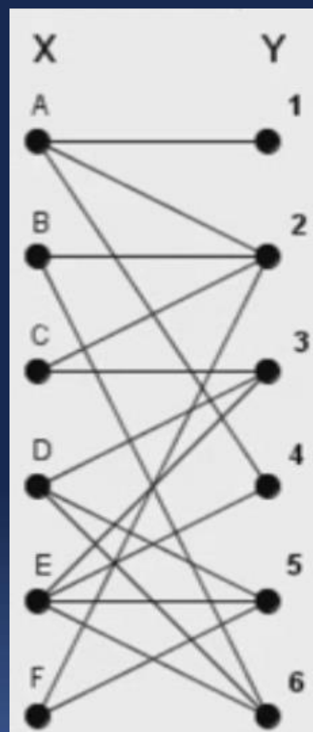
- ✓ Como os caminhos são alternantes, deve-se agora escolher alguma aresta que **não** pertença ao emparelhamento;
- ✓ Assim, a próxima aresta deve ser **E4**;

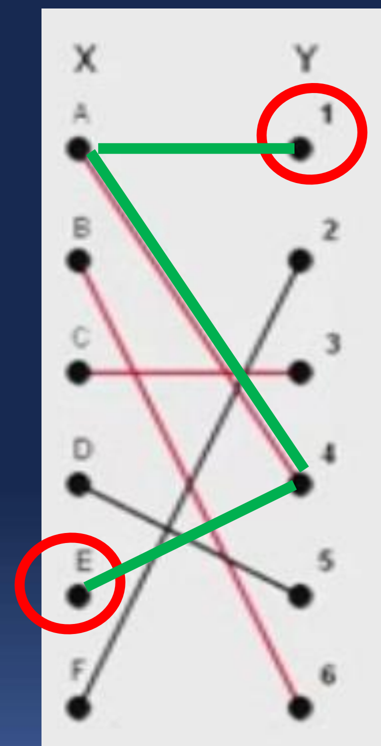




Teorema de Berge

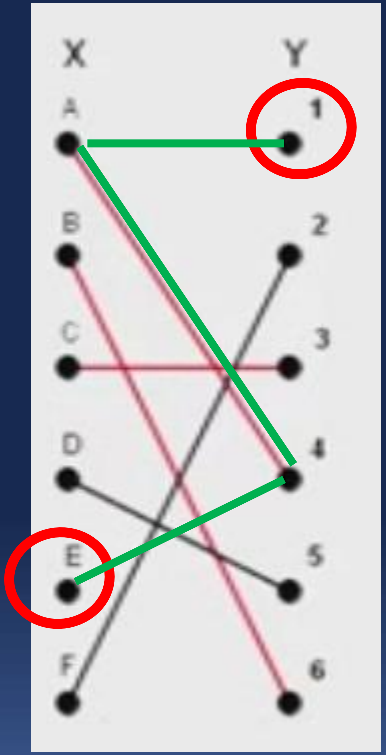
- Como os caminhos são alternantes, deve-se agora escolher alguma aresta que pertença ao emparelhamento;
- Como não há aresta do emparelhamento que inicia em **E**, o caminho termina;
- Os vértice 1 e E são **livres**, portanto o caminho obtido é **M-aumentante**;

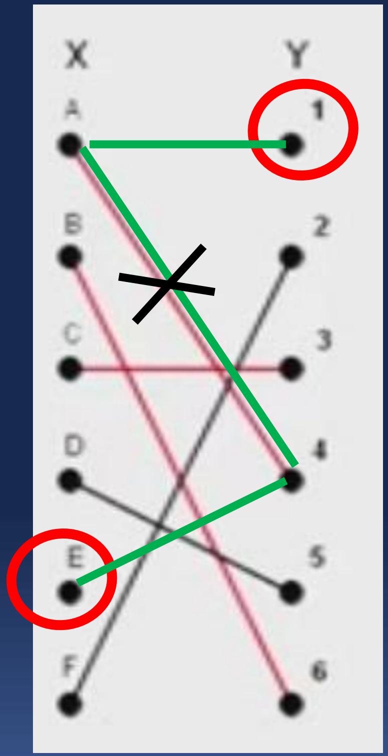


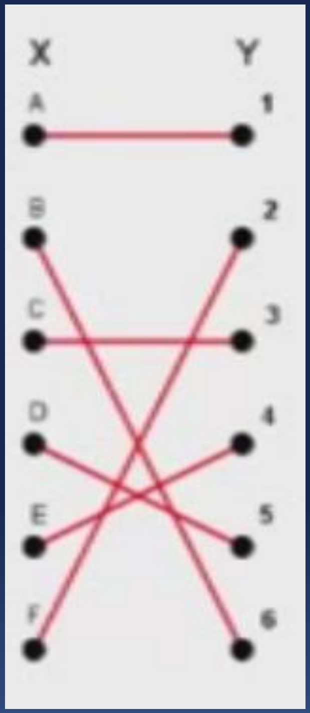


Teorema de Berge

- ✓ Deve-se eliminar todas as arestas do caminho **M-aumentante** que estão no emparelhamento;
- ✓ No caso, deve-se portanto eliminar a aresta A4.





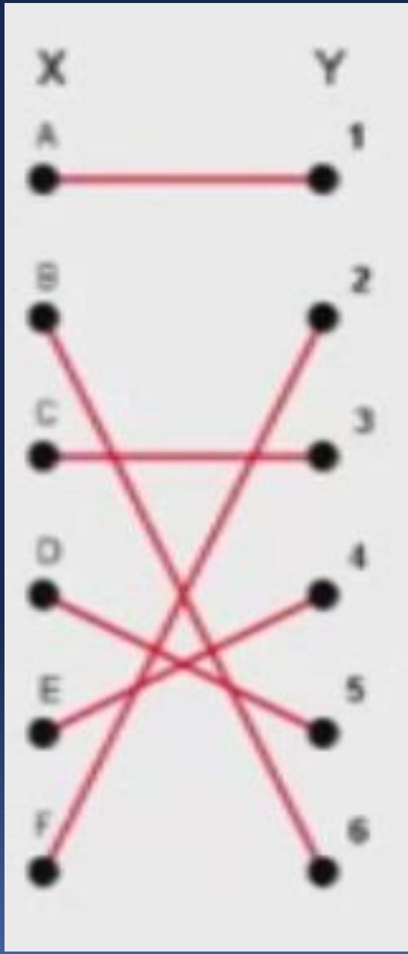


Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Teorema de Berge

- Portanto, conseguiu-se resolver o problema dos **6 casais**;

- O casal **A** preferia os quartos **1,2 e 4**
- O casal **B** preferia os quartos **2 e 6**
- O casal **C** preferia os quartos **2 e 3**
- O casal **D** preferia os quartos **3,5 e 6**
- O casal **E** preferia os quartos **3,4,5 e 6**
- O casal **F** preferia os quartos **2 e 5**



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Formalização – Gafos Bipartidos

GRAFO BIPARTIDO

Grafo bipartido (bicolorido, bigrafo ou bipartite) é um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos X e Y tais que toda aresta conecta um vértice em X a um vértice em Y. Resumindo:

- Seja G = (V, A) um grafo simples;
- V pode ser particionado em dois conjuntos X e Y;
- $V = X \cup Y$;
- $X \cap Y = \emptyset$;
- Vértices em X conectam-se apenas a vértices em Y (e vice-versa).

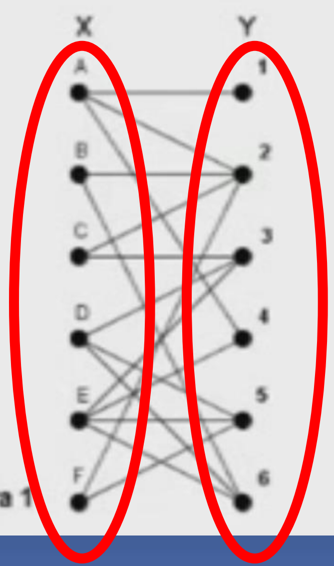


Figura 1

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Formalização - Emparelhamentos

EMPARELHAMENTO

Sejam $G = (V, A)$ um grafo, m e $n \in \mathbb{N}$. Um emparelhamento (ou matching, ou acoplamento) é um conjunto $M \subseteq A$ tal que, $a_m \cap a_n = \emptyset$ para todas as arestas a_m e $a_n \in M$, com $m \neq n$. Em outras palavras, as arestas não têm vértices em comum, ou seja, não existem duas arestas adjacentes neste conjunto. Este conjunto também é chamado de conjunto independente de arestas.

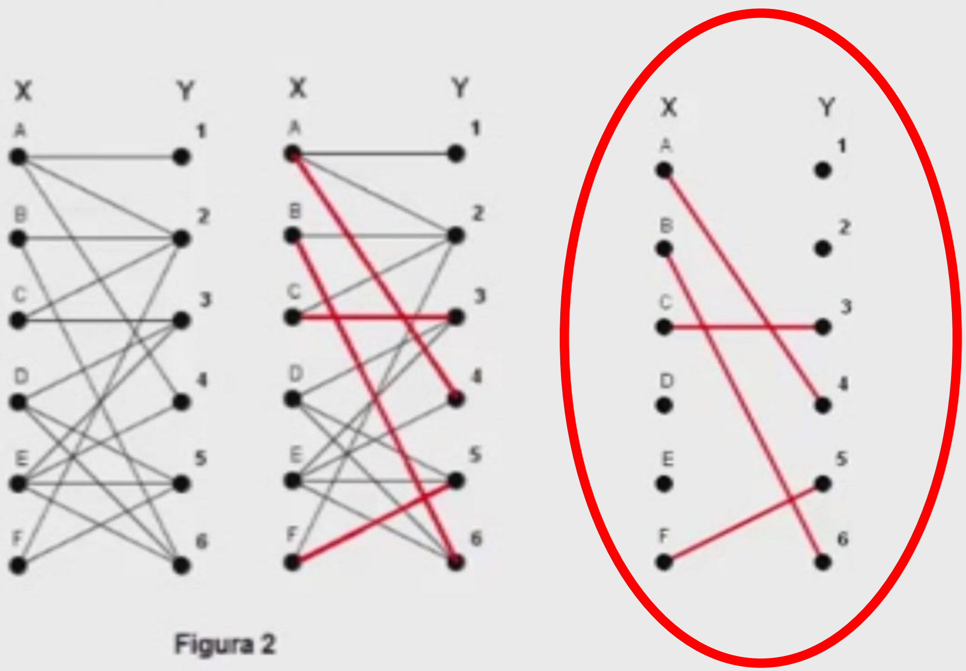
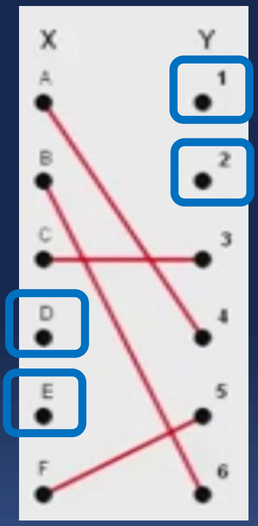


Figura 2

Formalização – Vértice Livre

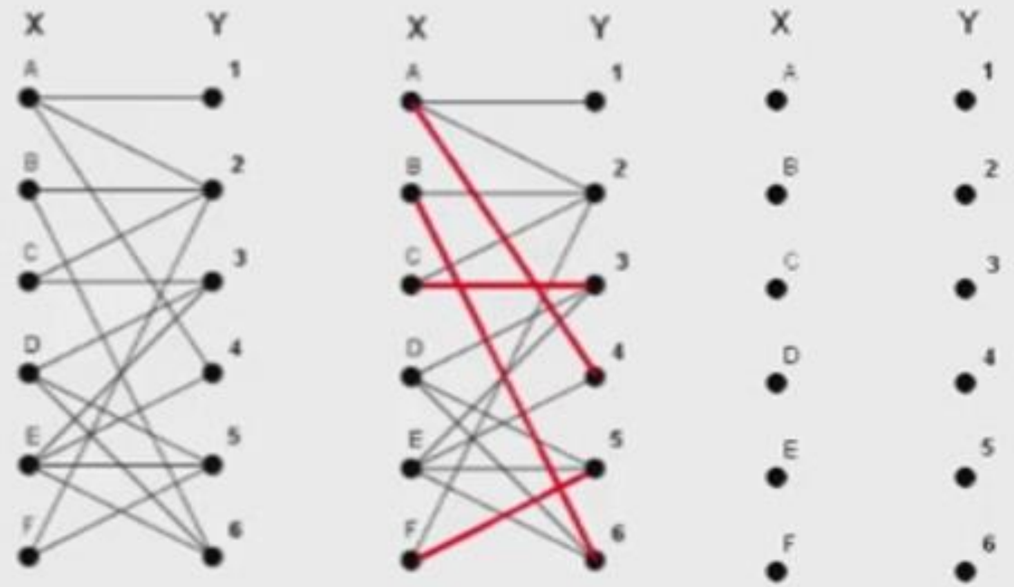
- ✓ Vértice livre ou vértice não M-saturado é um vértice que não pertence ao emparelhamento **M**.



Formalização – Caminho M-Alternante

CAMINHO M-ALTERNANTE

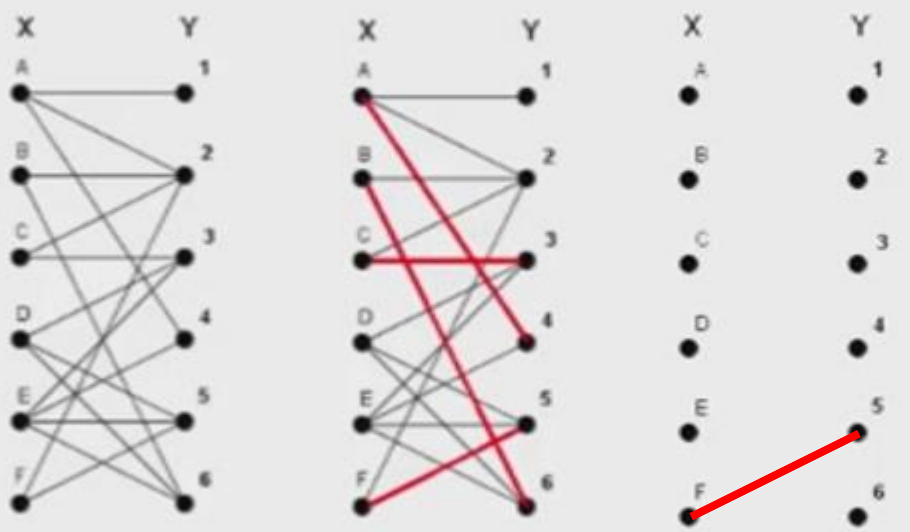
Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.



Formalização – Caminho M-Alternante

CAMINHO M-ALTERNANTE

Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.



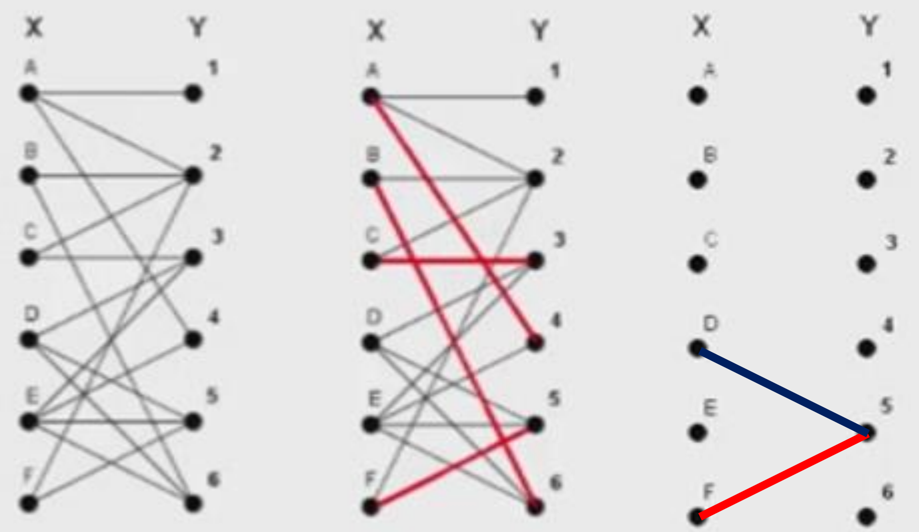
- ✓ Iniciou-se o caminho com uma aresta do emparelhamento (**F5**);
- ✓ Portanto, a próxima aresta do caminho **NÃO** deve pertencer ao emparelhamento;
- ✓ Portanto, a próxima aresta deve ser **D5** ou **E5**

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Formalização – Caminho M-Alternante

CAMINHO M-ALTERNANTE

Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.



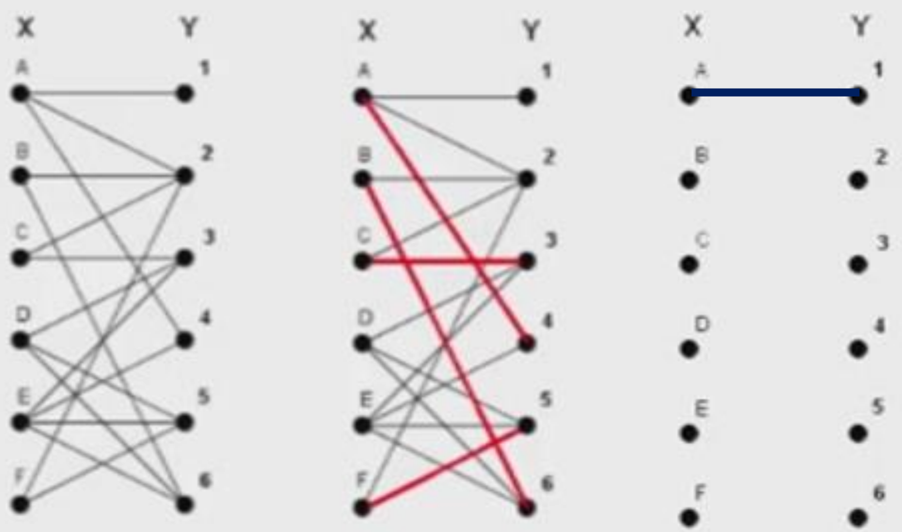
- ✓ Escolheu-se **D5;**
- ✓ Portanto, a próxima aresta do caminho **DEVE** pertencer ao emparelhamento;
- ✓ Mas, tal aresta não existe. Logo, terminou o caminho M-alternante.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação - M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição - LTC

Formalização – Caminho M-Alternante

CAMINHO M-ALTERNANTE

Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.



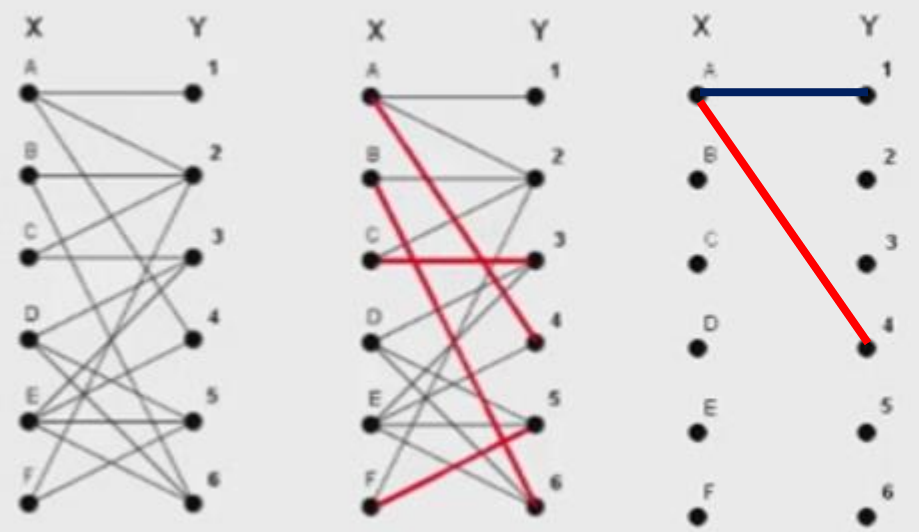
- ✓ Outro caminho M-Alternante
- ✓ Exemplo: Inicia-se em **A1** (aresta não pertencente ao emparelhamento)
- ✓ Logo a próxima aresta deve pertencer ao emparelhamento;
- ✓ Assim, a próxima aresta deve ser **A4**

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Formalização – Caminho M-Alternante

CAMINHO M-ALTERNANTE

Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.



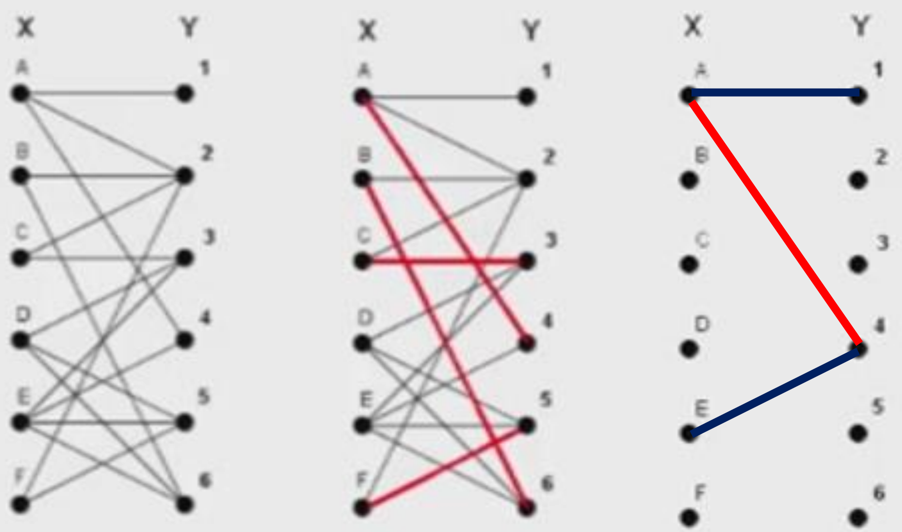
- ✓ A próxima aresta **NÃO** deve ser do emparelhamento;
- ✓ Portanto, a próxima aresta deve ser **E4**

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Formalização – Caminho M-Alternante

CAMINHO M-ALTERNANTE

Um *caminho M-alternante* P para um emparelhamento M é aquele onde as arestas se alternam entre arestas que pertencem a M e arestas que não pertencem.



- ✓ A partir de **E4**, a próxima aresta do caminho **DEVE** pertencer ao emparelhamento;
- ✓ Mas, tal aresta não existe. Logo, terminou o caminho M-alternante

Formalização – Caminho M-Aumentante

CAMINHO M-AUMENTANTE

É um caminho M-alternante onde os extremos (vértices final e inicial) não são saturados pelas arestas de *M*.

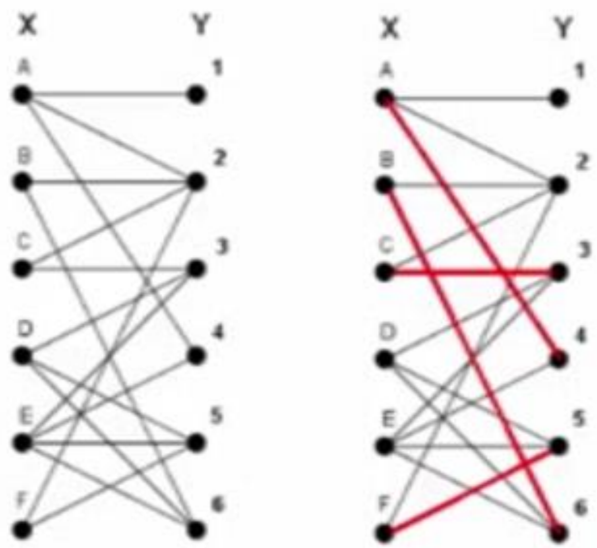


Figura 3

Formalização – Caminho M-Aumentante

CAMINHO M-AUMENTANTE

É um caminho M-alternante onde os extremos (vértices final e inicial) não são saturados pelas arestas de *M*.

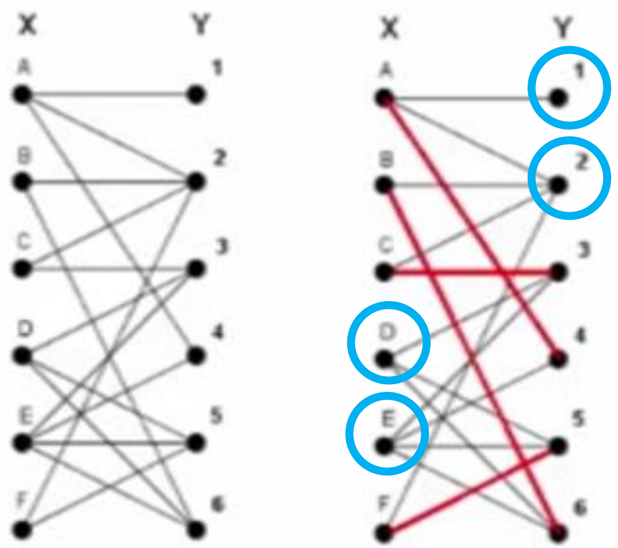


Figura 3

- ✓ Vértices Livres: **1,2,D,E**
- ✓ Para ser um caminho M-aumentante deve-se começar em um desses vértices livres e terminar também em um desses vértices livres.

QualitSys Consultoria de Informática Ltda – www.qualitsys.com

Formalização – Caminho M-Aumentante

CAMINHO M-AUMENTANTE

É um caminho M-alternante onde os extremos (vértices final e inicial) não são saturados pelas arestas de *M*.

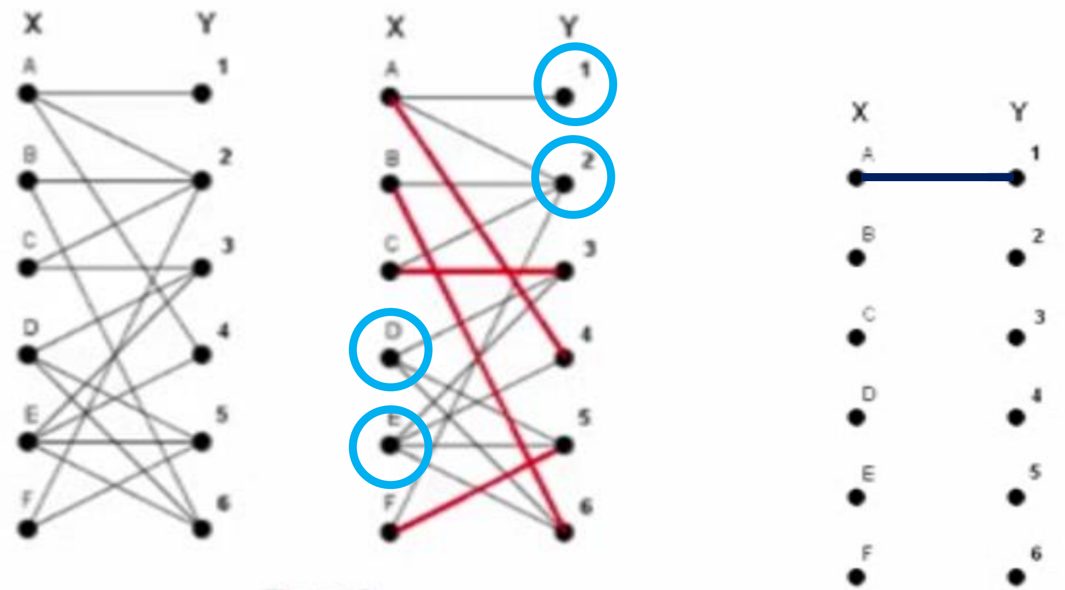


Figura 3

- ✓ Por exemplo, pode-se iniciar por **A1**, aresta **não** pertencente ao emparelhamento;
- ✓ Logo, a próxima aresta deve pertencer ao emparelhamento, devendo portanto ser **A4**;

Formalização – Caminho M-Aumentante

CAMINHO M-AUMENTANTE

É um caminho M-alternante onde os extremos (vértices final e inicial) não são saturados pelas arestas de *M*.

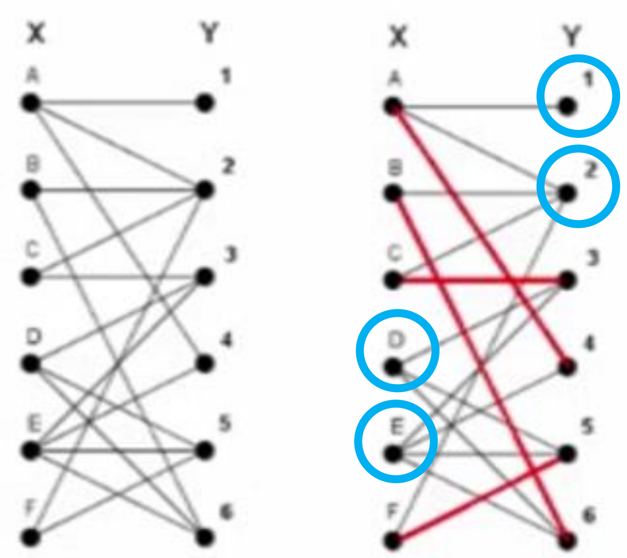
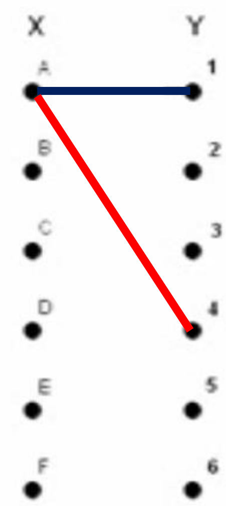


Figura 3



- A partir de **A4**, deve-se escolher uma aresta que **não** pertença ao emparelhamento;
- Portanto, a próxima aresta deve ser **E4**

Formalização – Caminho M-Aumentante

CAMINHO M-AUMENTANTE

É um caminho M-alternante onde os extremos (vértices final e inicial) não são saturados pelas arestas de *M*.

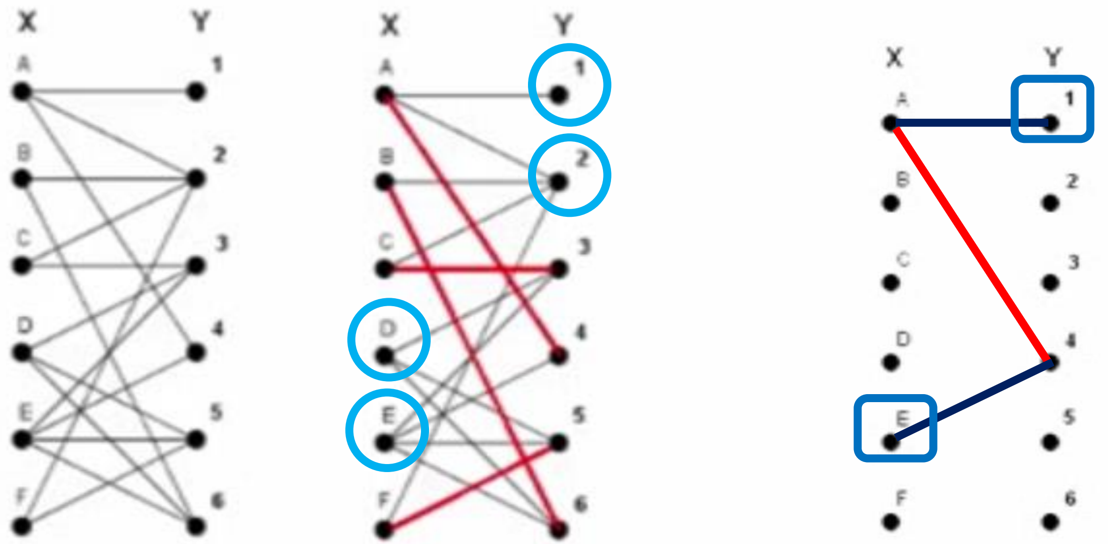


Figura 3

- ✓ A partir de **E4**, deve-se escolher uma aresta que pertença ao emparelhamento;
- ✓ Mas, tal aresta não existe no emparelhamento e, portanto, o caminho termina;
- ✓ Como E é vértice livre, então o caminho é **M-Aumentante**;
- ✓ Conclui-se portanto que o emparelhamento em vermelho **não é máximo**;
- ✓ Ou seja, há um emparelhamento maior que ele.

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA
MAUÁ

Formalização – Emparelhamento Perfeito

EMPARELHAMENTO PERFEITO

É um emparelhamento que tem todos os vértices conectados.

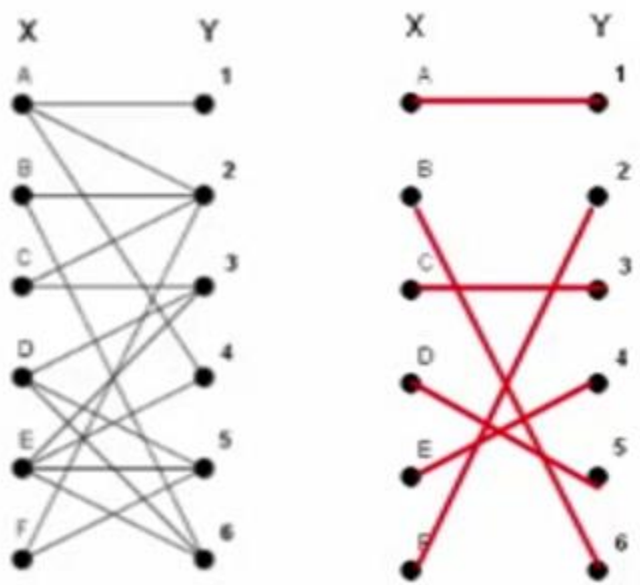


Figura 1

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

Outra questão

- ✓ **Será que é possível** saber-se de **antemão** se pode-se ou não hospedar todos, **sem** se precisar indicar quais são os quartos a serem alocados de imediato?

Outra questão

✓ Para responder a essa questão, precisa-se de novos conceitos, tais como: **Emparelhamento Completo** e **Vizinhança**;

Vejamos um outro problema...

- ✓ Em uma plataforma rodoviária, um fiscal de ônibus se deparou com o seguinte problema: **É possível alocar os 5 ônibus em 6 vagas**?

Vejamos um outro problema...

- ✓ Basta alocar-se um ônibus em cada vaga e ainda sobrará uma vaga!

QualitSys Consultoria de Informática Ltda – www.qualitsys.com

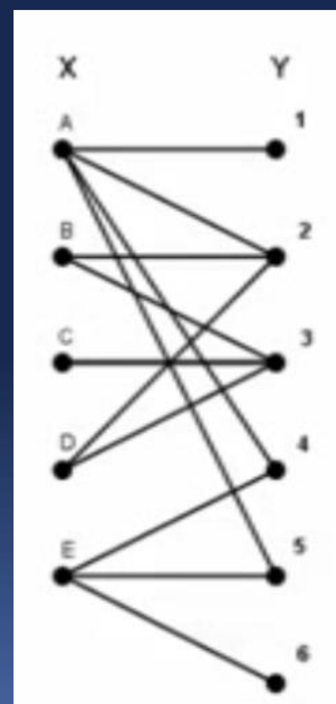
O problema de alocação dos ônibus

- ✓ Cada empresa tem um **controle distinto** da plataforma de acordo com as **ações** que possui, ou seja, os ônibus
  - da empresa A, que possuía mais ações, só poderiam estacionar nas vagas 1, 2, 4 e 5.
  - da empresa B só poderiam estacionar nas vagas 2 e 3.
  - da empresa C só poderiam estacionar na vaga 3.
  - da empresa D só poderiam estacionar nas vagas 2 e 3.
  - da empresa E só poderiam estacionar nas vagas 4, 5 e 6.

QualitSys Consultoria de Informática Ltda – www.qualitsys.com

Modelando-se o problema com grafos

- ✓ Pode-se desenhar **11** vértices, **5** representando os **ônibus** e **6** representando-se as **vagas**;
- ✓ Conecta-se os ônibus às vagas respeitando-se as restrições;
- ✓ Como **não** há necessidade de se conectar ônibus com ônibus nem vagas com vagas, consegue-se organizar os vértices em um **grafo bipartido** onde **X**={**A**,**B**,**C**,**D**,**E**} e **Y**={**1**,**2**,**3**,**4**,**5**,**6**};
- ✓ O problema se resume a saber se há um **Emparelhamento Completo** (no conjunto X) !

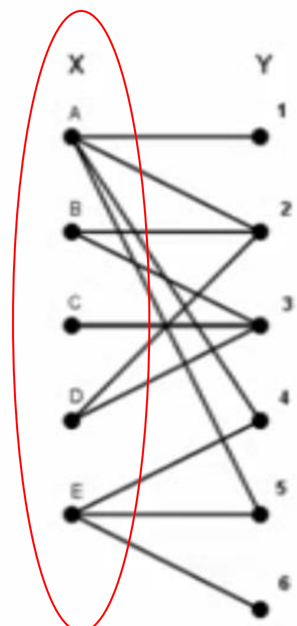


Emparelhamento Completo

Porém, dessa vez estávamos à procura da existência de um Emparelhamento Completo.

Emparelhamento Completo

É um emparelhamento que cobre (ou satura), em um grafo bipartido, todos os vértices do conjunto X, onde X representa o conjunto dos elementos que devem ser alocados.



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação - M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição - LTC

Teorema de Hall

Graças ao matemático britânico Philip Hall (figura 3.8), conseguiremos determinar se há um emparelhamento completo. Como demonstrou Hall, em um grafo G bipartido com partição (X, Y), existe um emparelhamento completo se e somente se, $|N(s)| \geq |s|$, para todo subconjunto S de X.

- ✓ Quantidade de elementos de **N(s)** é maior ou igual à quantidade de elementos de **S**;
- ✓ **N(s)** é chamado **Conjunto Vizinhança** de **S**;

Conjunto Vizinhança

Conjunto Vizinhança

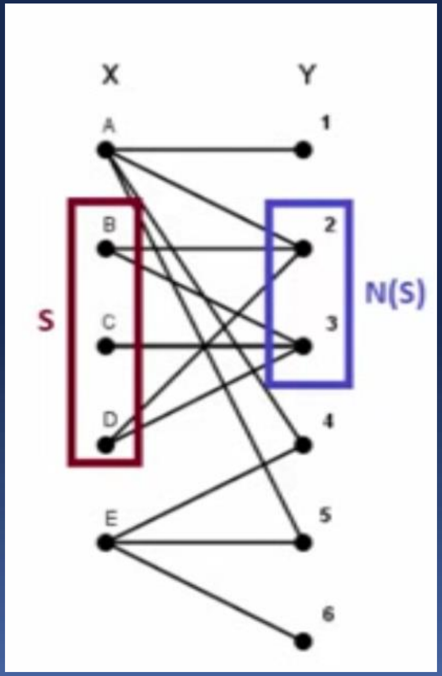
N(s) é conhecido como conjunto vizinhança de S. Em outras palavras, seus elementos são todos os vértices que se conectam (são vizinhos) aos elementos de S.

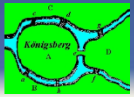
QualitSys Consultoria de Informática Ltda – www.qualitsys.com

Resolvendo-se o problema de Alocação dos Ônibus
Teorema de Hall

Graças ao matemático britânico Philip Hall (figura 3.8), conseguiremos determinar se há um emparelhamento completo. Como demonstrou Hall, em um grafo G bipartido com partição (X, Y), existe um emparelhamento completo se e somente se, $|N(s)| \geq |s|$, para todo subconjunto S de X.

- ✓ Deve-se analisar alguns subconjuntos de **X**;
- ✓ O subconjunto **S = {B,C,D}** possui a quantidade de elementos menor que a quantidade de vértices que se conectavam a eles;
- ✓ **S tem 3 elementos;**
- ✓ **N(s) = { 2,3} tem 2 elementos;**
- ✓ Logo **|N(s) | < |s|** , o que contradiz o **Teorema de Hall;**
- ✓ Assim, **NÃO** há emparelhamento completo;
- ✓ Logo, não existe a possibilidade de se alocar todos os ônibus simultaneamente;





FIM