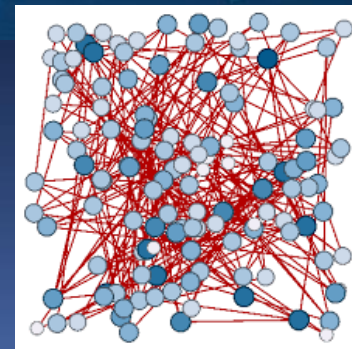
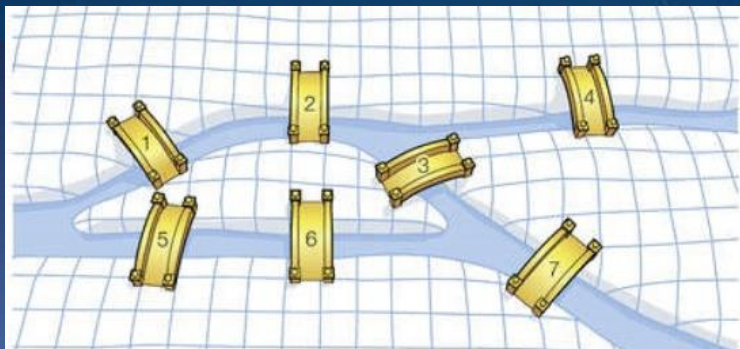




# Unidade 16 – Introdução à Teoria dos Grafos

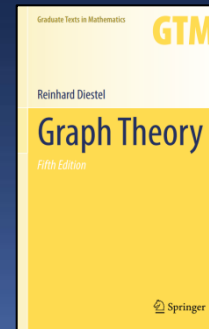
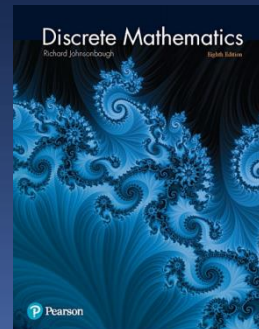
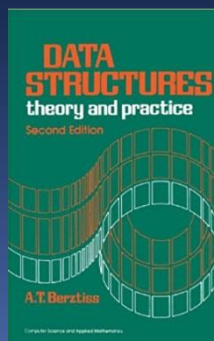
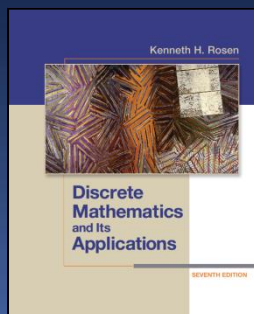
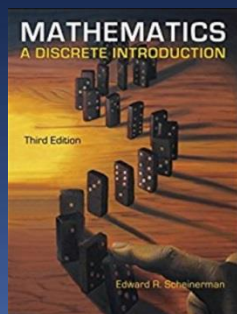
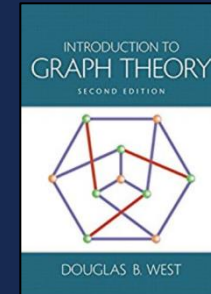
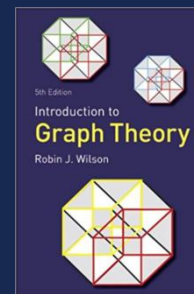
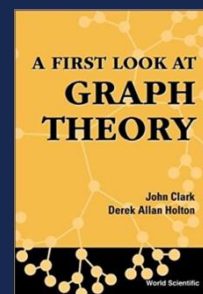
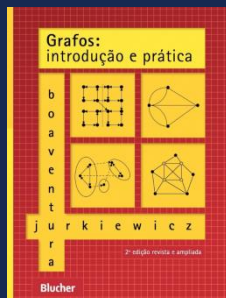
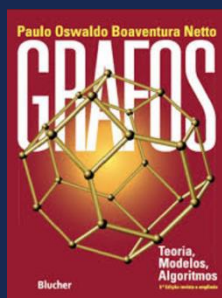
## Conceitos Iniciais





# Bibliografia

- Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação – M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição - LTC
- Grafos – Teoria, Modelos, Algoritmos – Paulo Oswaldo Boaventura Netto, 5ª edição
- Grafos – Conceitos, Algoritmos e Aplicações – Marco Goldbarg, Elizabetj Goldbarg, Editora Campus
- A first look at Graph Theory – John Clark, Derek Allan Holton – 1998, World Cientific
- Introduction to Graph Teory – Robin J. Wilson – 4<sup>th</sup> Edition – Prentice Hall – 1996
- Introduction to Graph Theory – Douglas West – Second Edition 2001 – Pearson Edition
- Mathematics – A discrete Introduction – Third Edition – Edward R. Scheinerman – 2012
- Discrete Mathematics and its Applications – Kenneth H. Rosen – 7<sup>th</sup> edition – McGraw Hill – 2012
- Data Structures – Theory and Practice – A. T. Berztiss - New York – Academic Press – 1975 – Second Edition
- Discrete Mathematics – R. Johnsonbaugh – Pearson – 2018 – Eighth Edition
- Graphy Theory – R. Diestel – Springer – 5<sup>th</sup> Edition – 2017
- Teoria Computacional de Grafos – Jayme Luiz Szwarcfiter – Elsevier - 2018



# Definição

- Um grafo  $G = (V(G), E(G))$  ou  $G = (V, E)$  consiste de **dois** conjuntos finitos:
  - ❖  $V(G)$ , (ou  $V$ ), que é o conjunto de **vértices** do grafo, o qual é um **conjunto não vazio** de elementos chamados vértices e
  - ❖  $E(G)$ , (ou  $E$ ), que é o conjunto de **arestas** do grafo, o qual é um conjunto (**que pode ser vazio**) de elementos chamados **arestas**;
- À cada aresta  $e$  em  $E$  atribui-se um **par não ordenado** de vértices  $(u, v)$  chamados **vértices-extremidade** de  $e$ ;
- Vértices** também são referenciados como pontos ou **nós**.



# Grafos – Exemplo

Seja o grafo  $G = (V, E)$ , tal que

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} \text{ e}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$$

e as extremidades das arestas expressas por:

$$\begin{array}{llllll} e_1 \leftrightarrow (a, b) & e_2 \leftrightarrow (b, c) & e_3 \leftrightarrow (c, c) & e_4 \leftrightarrow (c, e) & e_5 \leftrightarrow (d, f) & e_6 \leftrightarrow (d, f) \\ e_7 \leftrightarrow (c, d) & e_8 \leftrightarrow (c, f) & e_9 \leftrightarrow (e, f) & e_{10} \leftrightarrow (g, h) & e_{11} \leftrightarrow (h, h) & e_{12} \leftrightarrow (h, i) \end{array}$$



# Grafos – Exemplo

Seja o grafo  $G = (V, E)$ , tal que

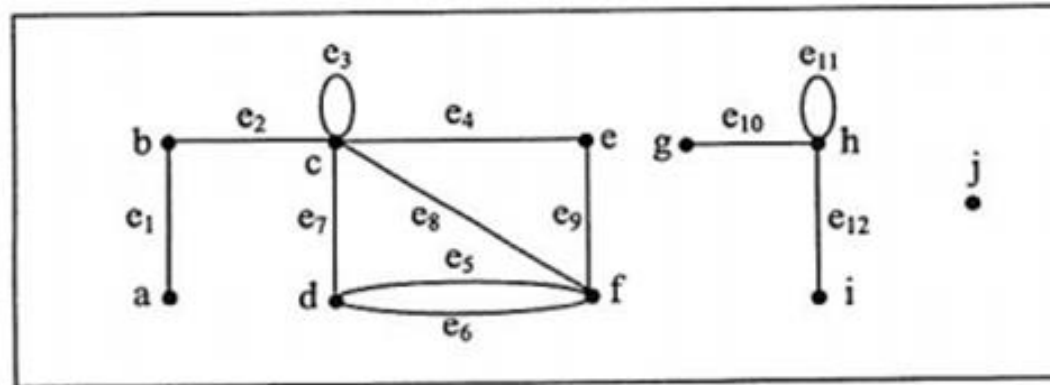
$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} \text{ e}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$$

e as extremidades das arestas expressas por:

$$\begin{array}{llllll} e_1 \leftrightarrow (a, b) & e_2 \leftrightarrow (b, c) & e_3 \leftrightarrow (c, c) & e_4 \leftrightarrow (c, e) & e_5 \leftrightarrow (d, f) & e_6 \leftrightarrow (d, f) \\ e_7 \leftrightarrow (c, d) & e_8 \leftrightarrow (c, f) & e_9 \leftrightarrow (e, f) & e_{10} \leftrightarrow (g, h) & e_{11} \leftrightarrow (h, h) & e_{12} \leftrightarrow (h, i) \end{array}$$

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo  $G$ .



Grafo  $G$  com dez vértices e 12 arestas.



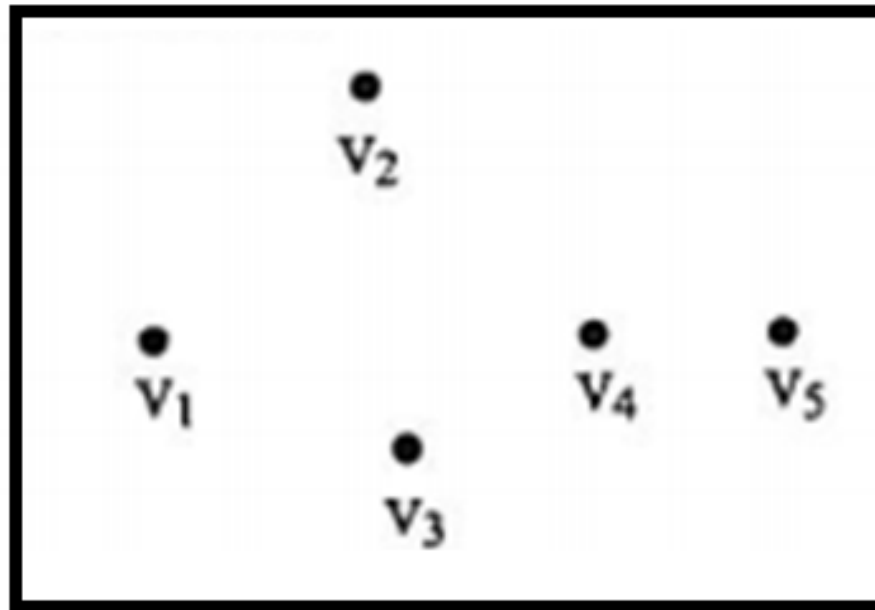
# Grafos – Observação

- De acordo com a definição, que formalmente define o conceito de grafo, **é possível** que o conjunto de arestas  $E$  seja **vazio**;
- Um grafo cujo conjunto de **arestas** é **vazio** é chamado **grafo nulo**;
- Por outro lado, a definição exige que o conjunto de vértices seja **não vazio**, do contrário, **não** se tem grafo.



# Grafos – Observação

- A Figura abaixo mostra o diagrama de um grafo nulo com 5 vértices.



**Grafo nulo com 5 vértices**



# Grafos – Definições

- Se duas (ou mais) arestas de  $G$  têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas **arestas paralelas**;

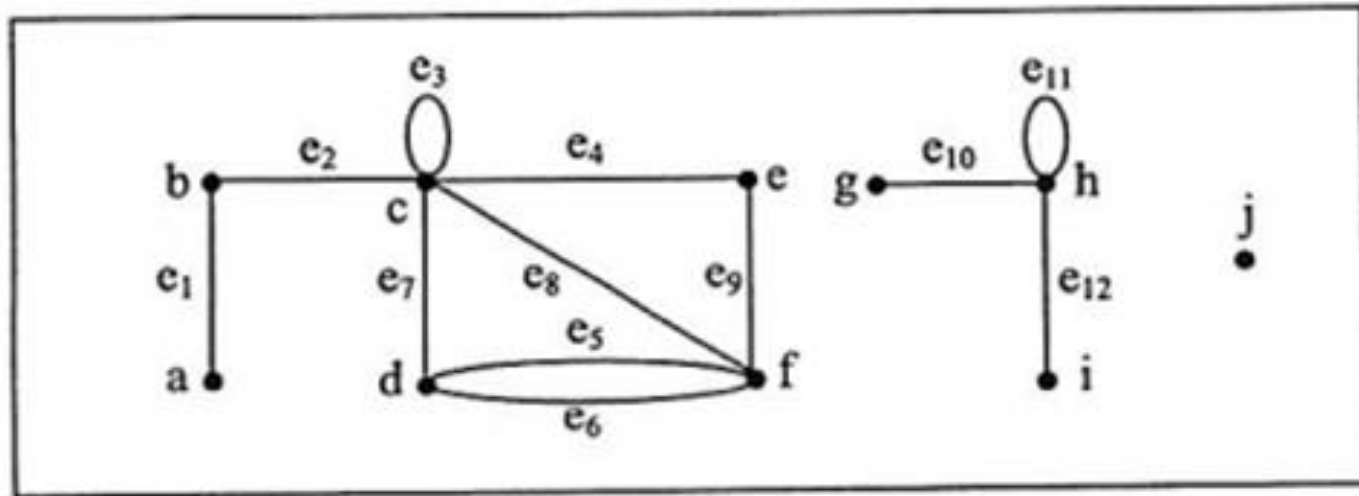




# Arestas Paralelas

- Se duas (ou mais) arestas de  $G$  têm os mesmos vértices-extremidade, essas arestas são chamadas **arestas paralelas**;
- Por exemplo, as arestas  $e_5$  e  $e_6$  do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo  $G$ .



Grafo  $G$  com dez vértices e 12 arestas.



# Vértice Isolado

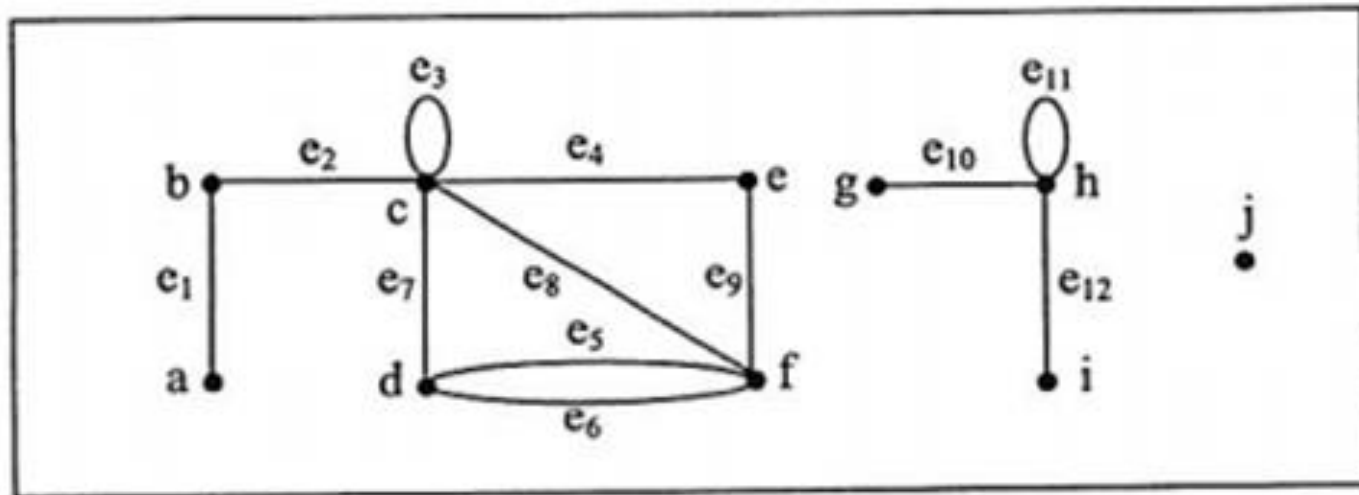
- Um vértice de  $G$  que **não** é extremidade de qualquer aresta é chamado **isolado**.



# Vértice Isolado

- Um vértice de **G** que **não** é extremidade de qualquer aresta é chamado **isolado**.
- Por exemplo, o vértice **j** do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.

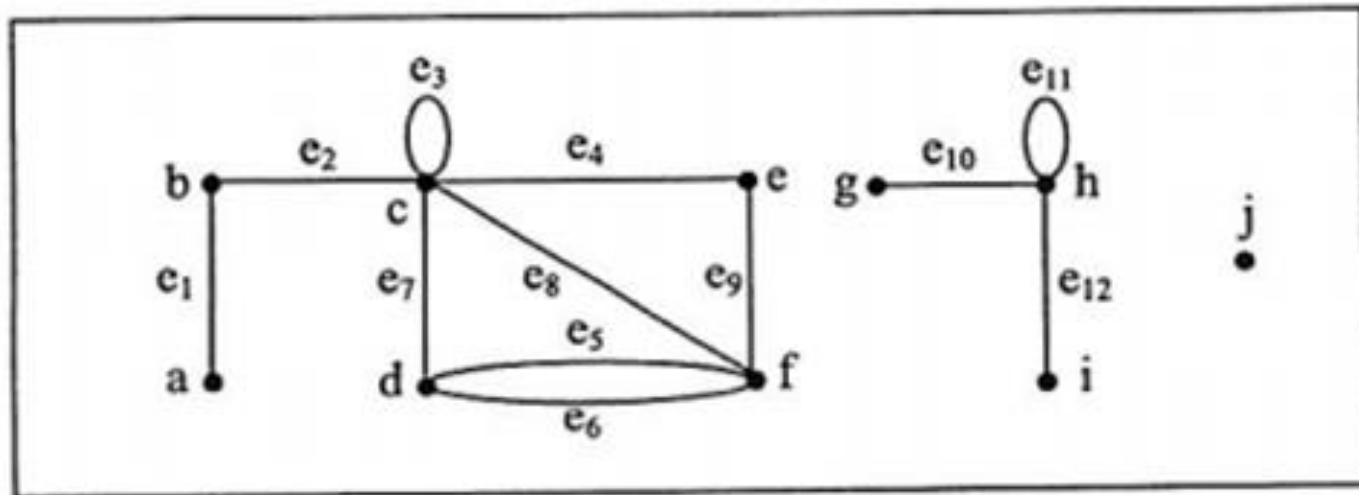
# Vértices Adjacentes ou Vizinhos

- Dois vértices que estão **unidos** por uma **aresta** são chamados **adjacentes** ou **vizinhos**.

# Vértices Adjacentes

- Dois vértices que estão **unidos** por uma aresta são chamados **adjacentes** ou **vizinhos**.
- Por exemplo, os vértices **a** e **b** do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.



Grafo G com dez vértices e 12 arestas.





# Exemplo – Vértices Adjacentes

- No grafo da figura abaixo,  $v_1$  e  $v_2$  são adjacentes:





# Arestas Adjacentes

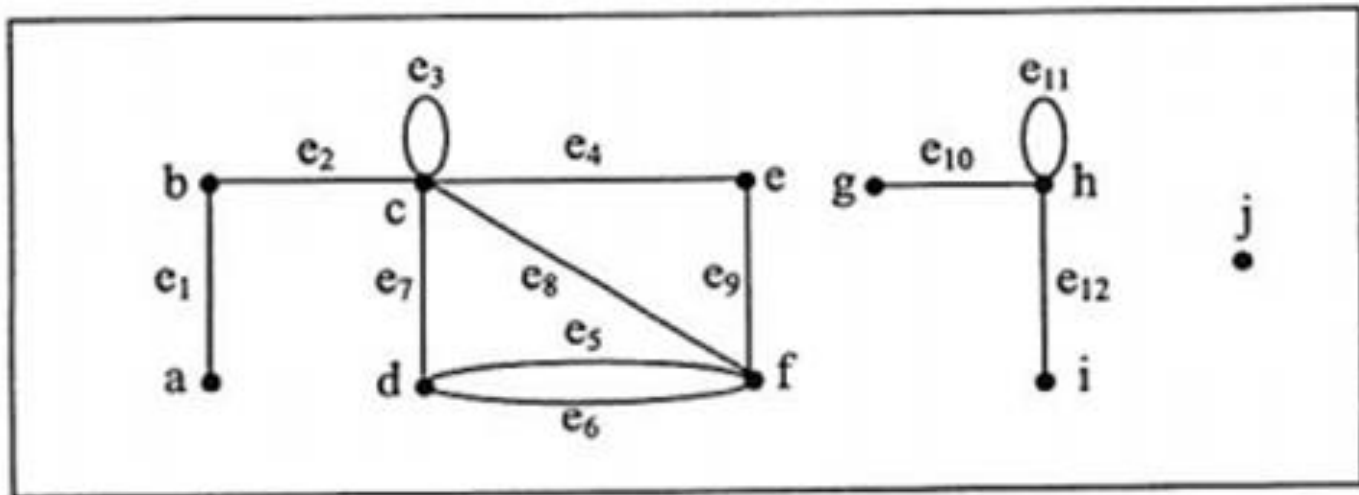
- Duas **arestas** distintas  $e_i$  e  $e_j$  são **adjacentes** se têm um vértice em comum.



# Arestas Adjacentes

- Duas **arestas** distintas  $e_i$  e  $e_j$  são **adjacentes** se têm um vértice em comum.
- Por exemplo, as arestas  $e_1$  e  $e_2$  do grafo abaixo:

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo G.

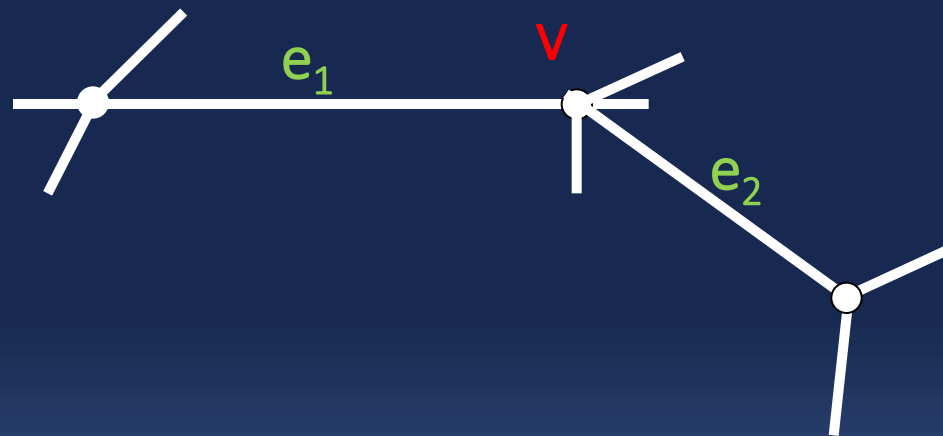


Grafo G com dez vértices e 12 arestas.



# Exemplo – Arestas Adjacentes

- No grafo da figura abaixo,  $e_1$  e  $e_2$  são adjacentes:





# Conjunto Vizinhaça

- O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo  $v$  de  $G$  é chamado **conjunto vizinhaça** de  $v$  e é denotado por  $N(v)$ .

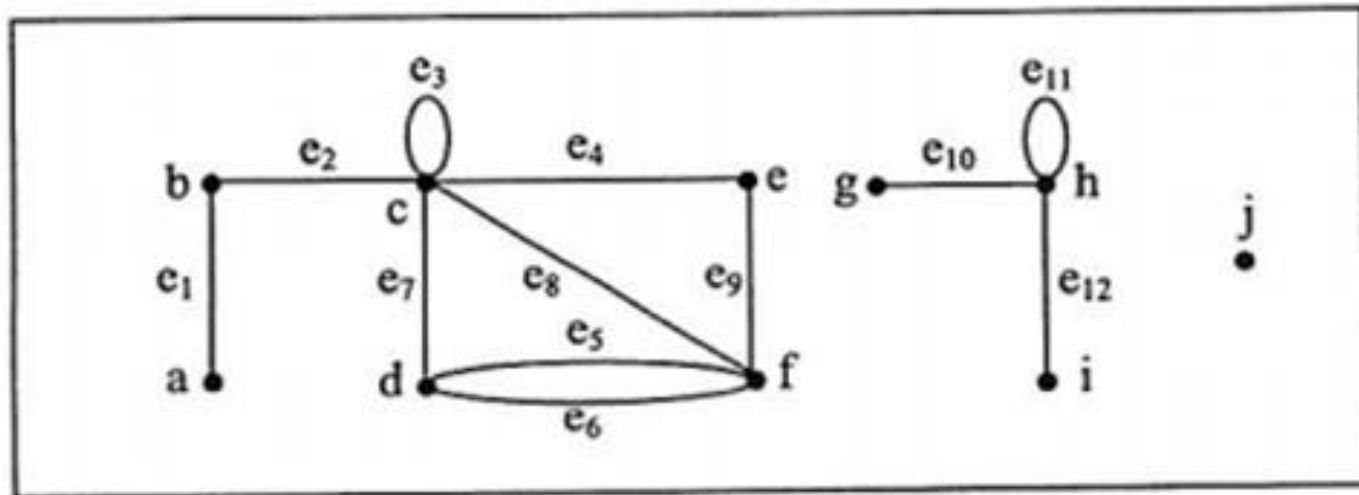




# Conjunto Vizinhaça

- O conjunto de todos os vizinhos de um vértice fixo  $v$  de  $G$  é chamado **conjunto vizinhaça** de  $v$  e é denotado por  $N(v)$ .
- Por exemplo,  $N(f) = \{c, d, e\}$ .

A Figura mostra a representação em diagrama do grafo  $G$ .



Grafo  $G$  com dez vértices e 12 arestas.



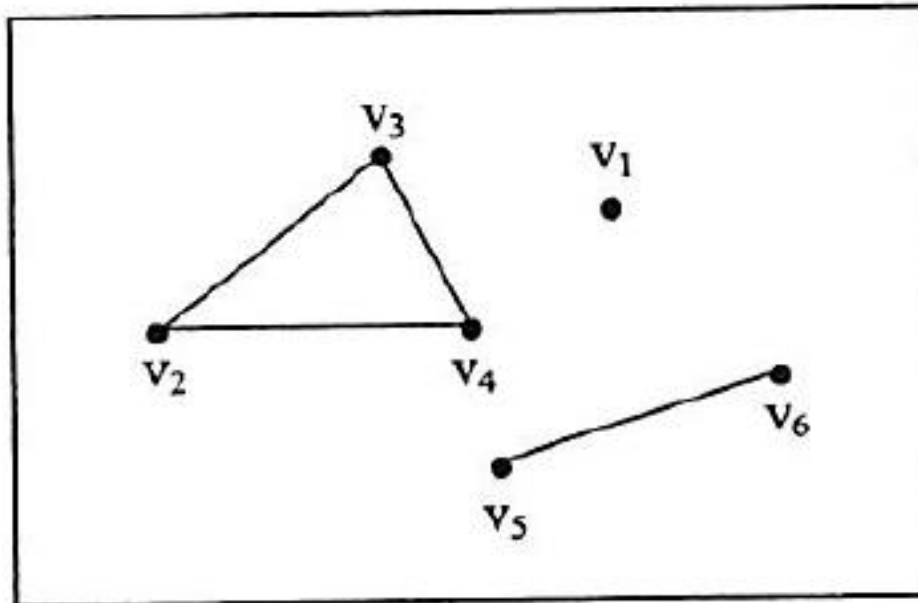
# Grafo Simples

- Um grafo é simples se **não** tem loops, **nem** arestas paralelas



# Grafo Simples

- Um grafo é simples se **não** tem loops, **nem** arestas paralelas;
- Exemplo, Grafo da figura abaixo:



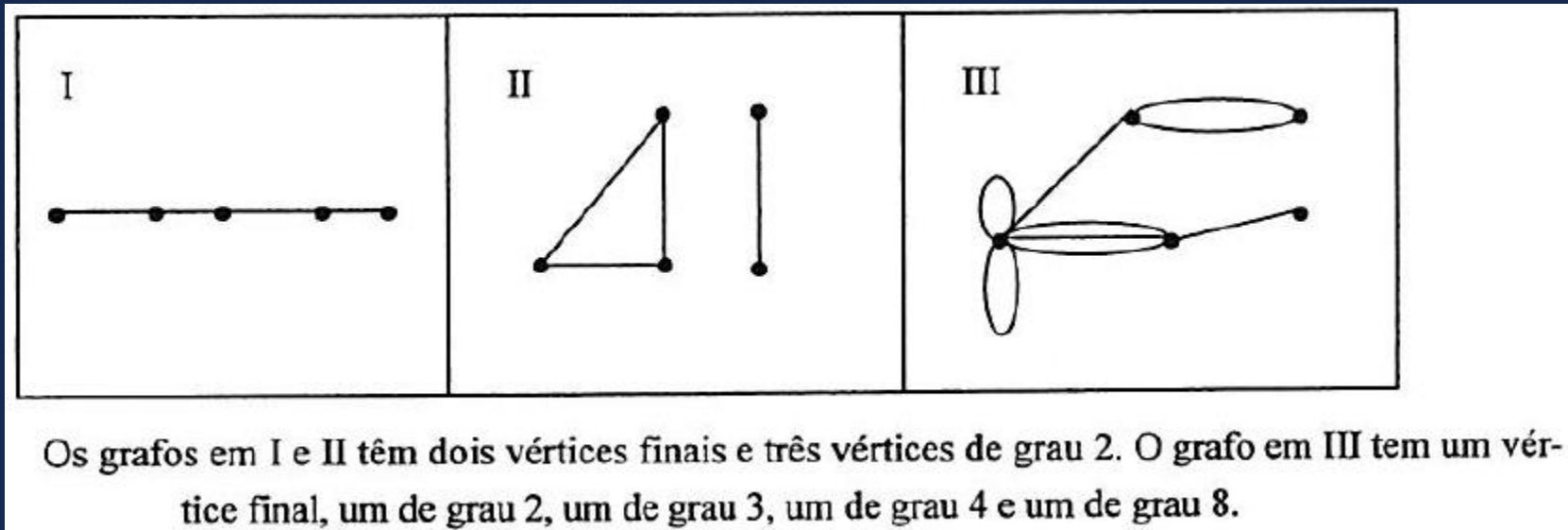
Grafo simples: não tem *loops* e não tem arestas paralelas.

# Grau de um vértice

- O **grau** de um vértice  $v$ , denotado por  $d(v)$ , é o **número** de arestas de  $G$  que são incidentes com  $v$ , contando cada **loop duas** vezes;
- É pois, o **número de vezes** que  $v$  é vértice-extremidade de uma aresta;
- Um vértice de **grau 0** é um vértice **isolado**;
- Um vértice de **grau 1** é um vértice **final**.



# Grau de um vértice







# Vértice par ou ímpar

- Um **vértice** de um grafo é **par** se o seu grau for **par**;
- Um **vértice** de um grafo é **ímpar** se o seu grau for **ímpar**;





# Sequência de graus de um grafo

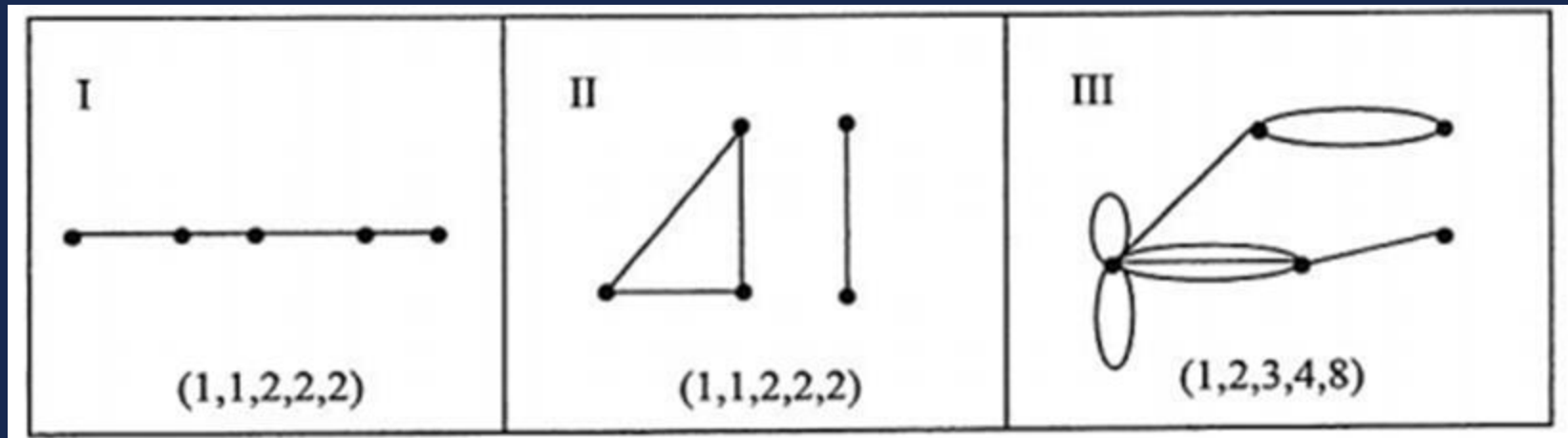
- A **sequência** de graus de um **grafo** consiste nos graus de seus vértices escritos em ordem **crescente**, com **repetições**, se **necessário**.





## Grafos – Definições

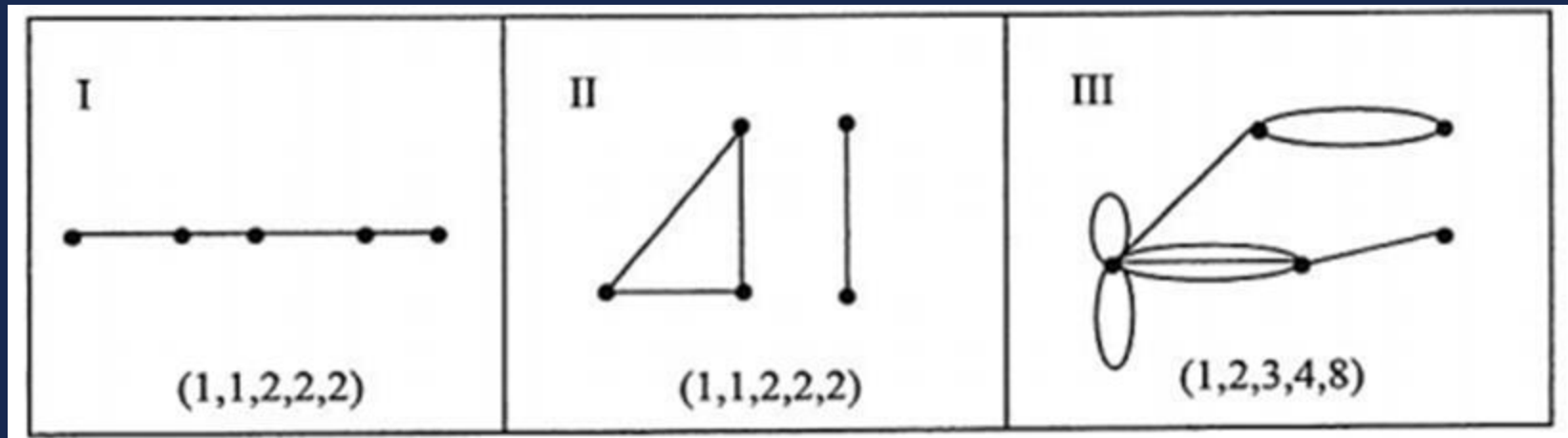
## Sequência de graus de um grafo





## Grafos – Definições

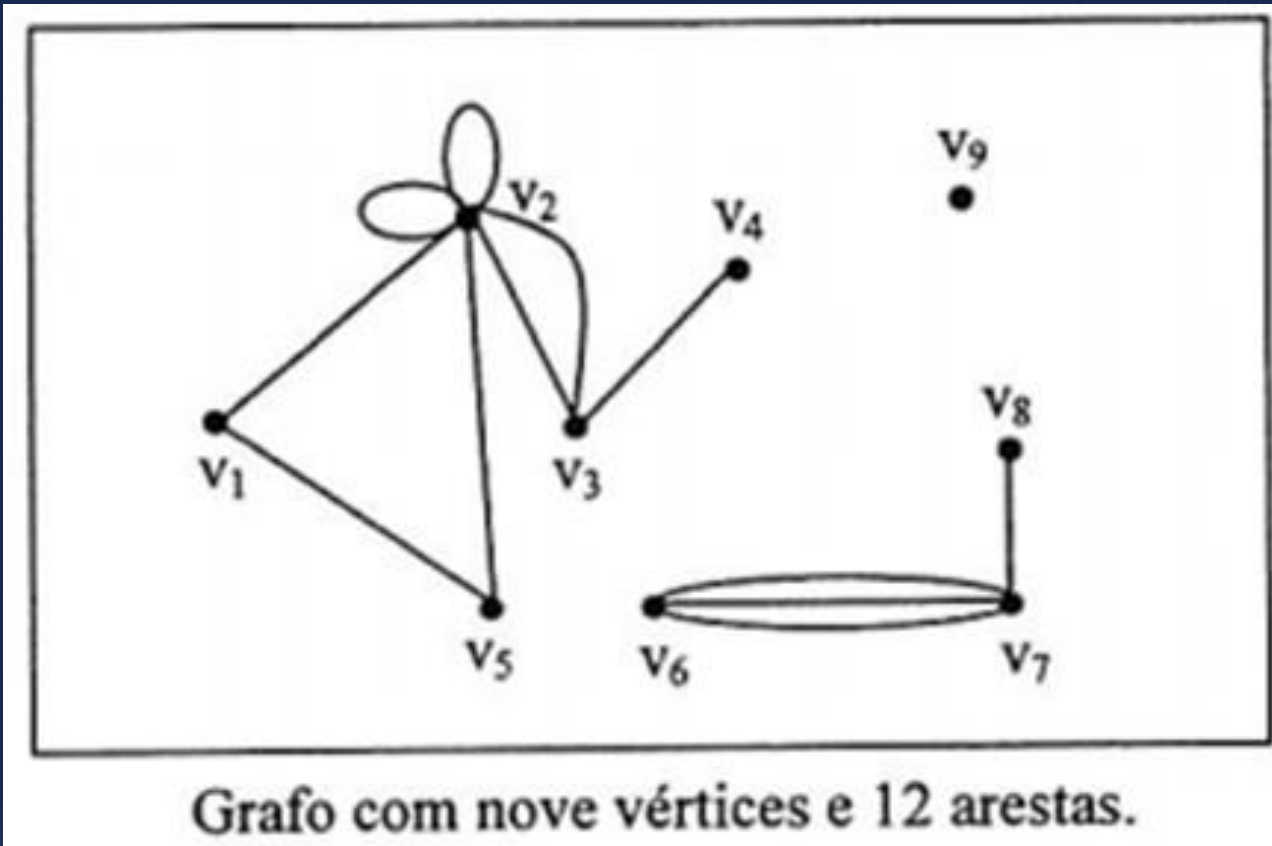
## Sequência de graus de um grafo





# Grafos – Definições

## Exemplo



- Os vértices  $v_1$  e  $v_2$  são adjacentes.

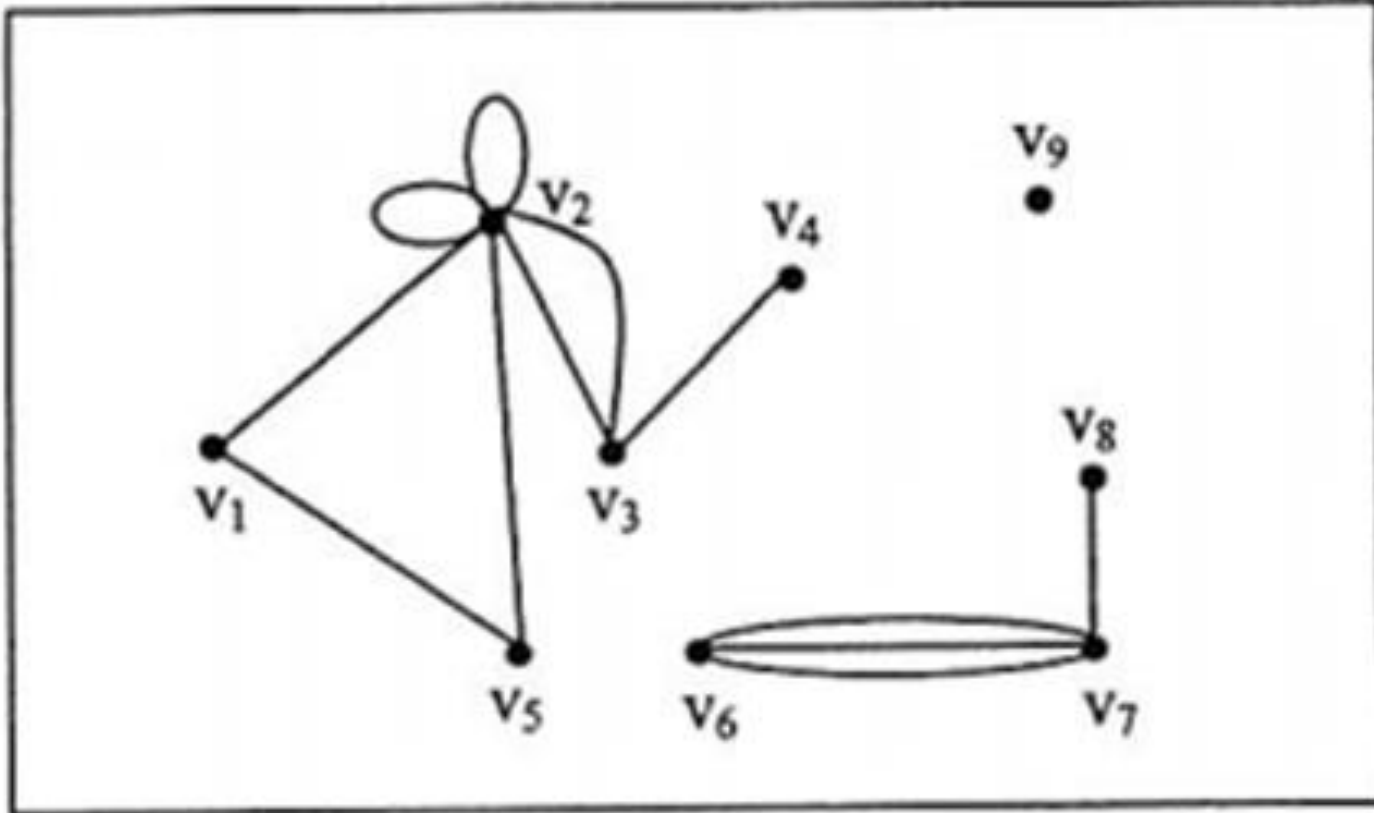






# Grafos – Definições

## Exemplo



Grafo com nove vértices e 12 arestas.

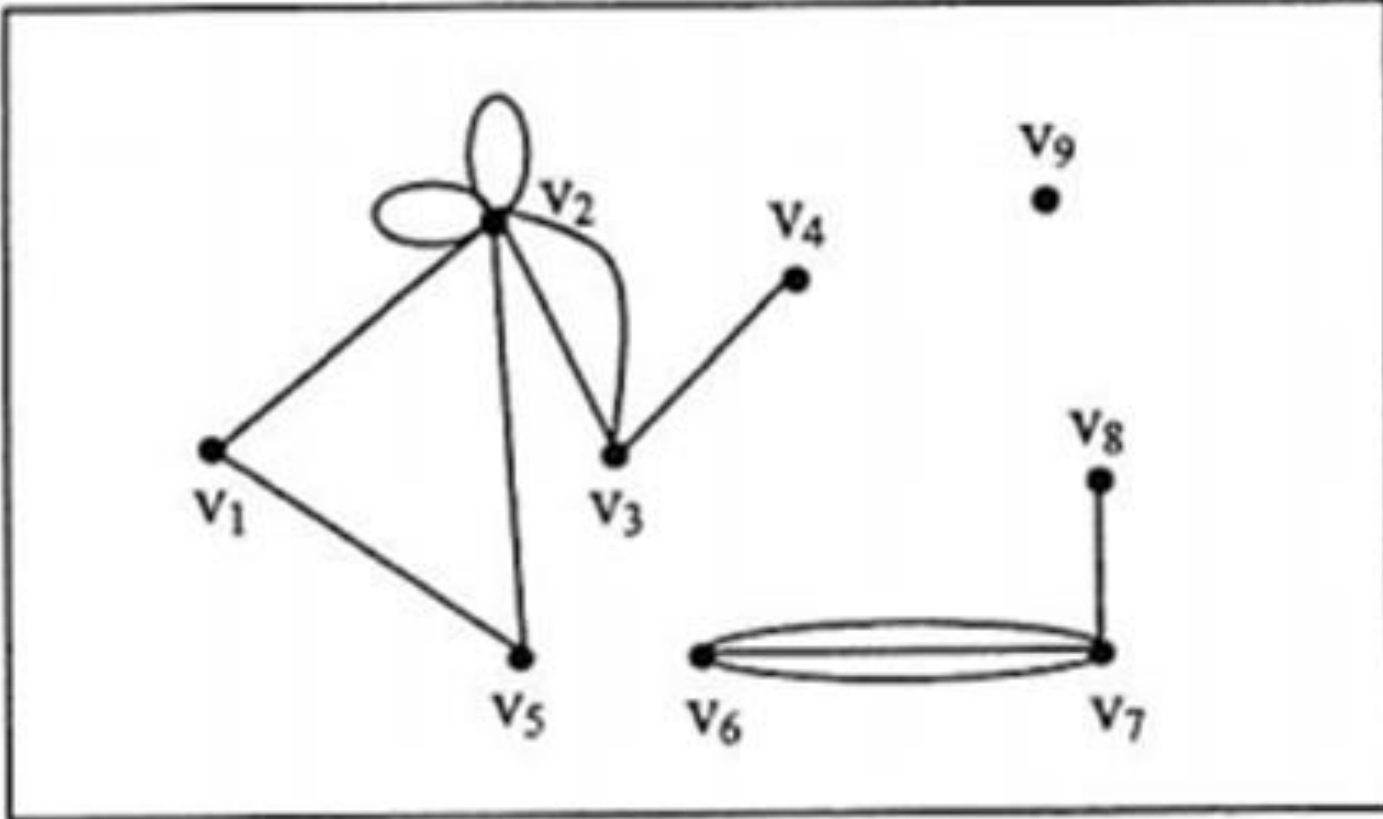
Os vértices  $v_1$  e  $v_3$  **não** são adjacentes.





# Grafos – Definições

## Exemplo



Grafo com nove vértices e 12 arestas.

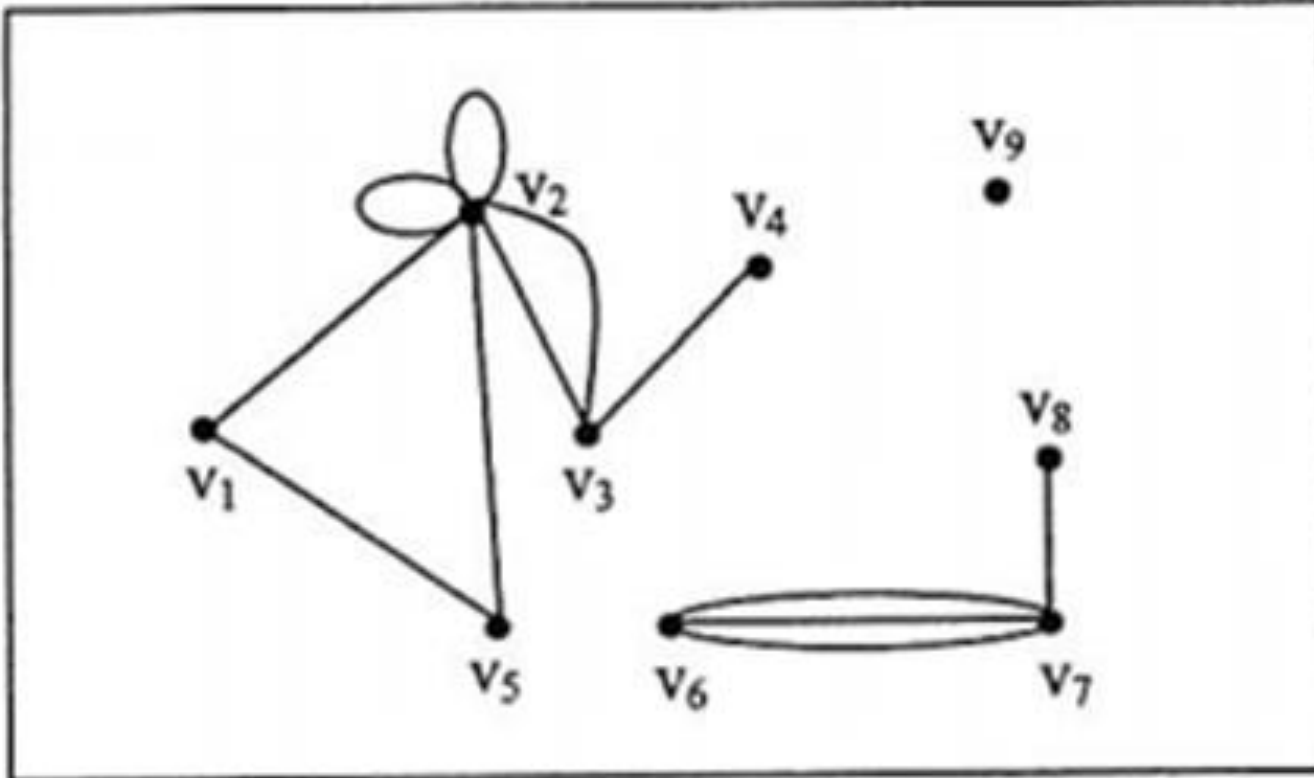
As arestas  $(v_1, v_2)$  e  $(v_2, v_3)$  são **adjacentes**.





# Grafos – Definições

## Exemplo



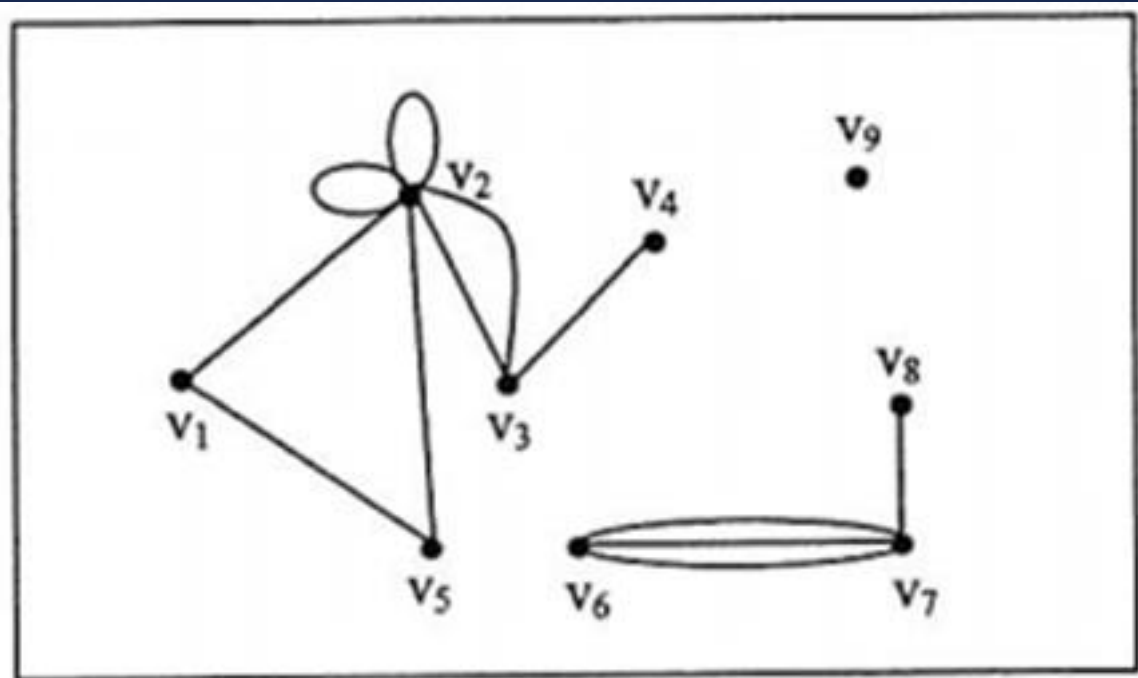
Grafo com nove vértices e 12 arestas.

- As arestas  $(v_1, v_2)$  e  $(v_3, v_4)$  **não** são adjacentes.





# Exemplo



Grafo com nove vértices e 12 arestas.

Os graus dos vários vértices são:

$$d(v_1) = 2; \quad d(v_2) = 8; \quad d(v_3) = 3; \quad d(v_4) = 1;$$

$$d(v_5) = 2; \quad d(v_6) = 3; \quad d(v_7) = 4; \quad d(v_8) = 1 \quad e \quad d(v_9) = 0$$

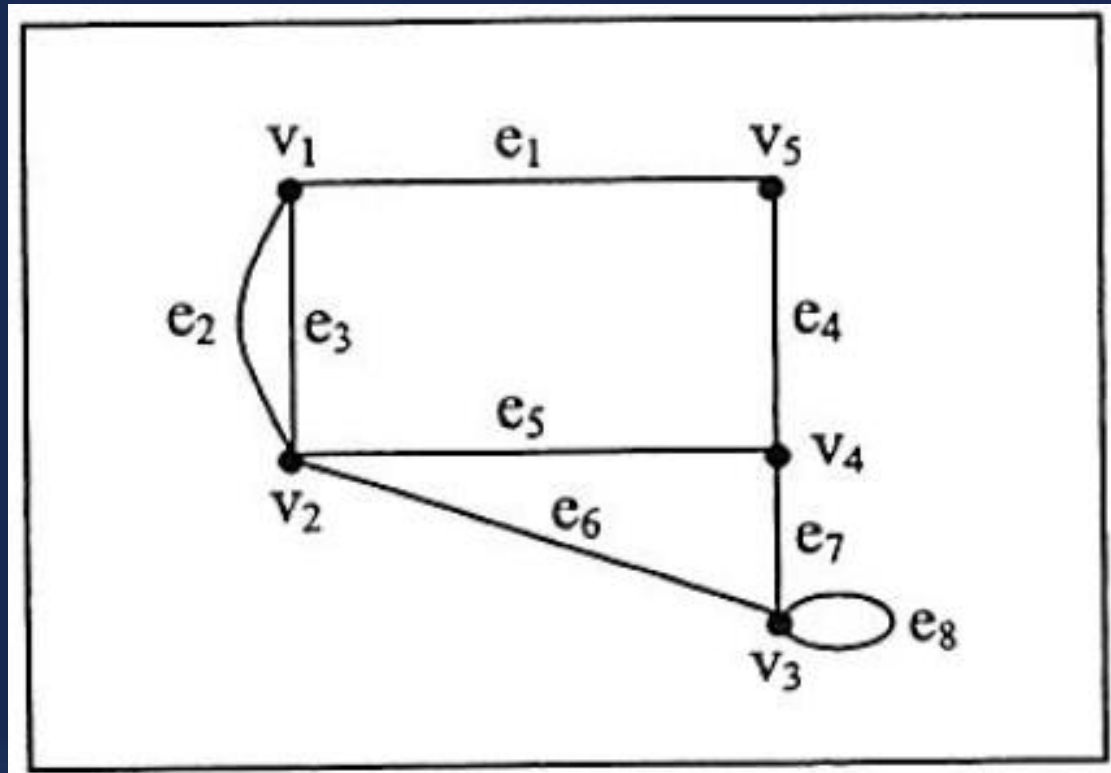




# Grafos – Exemplo

## Exercício 1

Dado o grafo abaixo:



- Determine a quantidade de arestas do grafo
- Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo

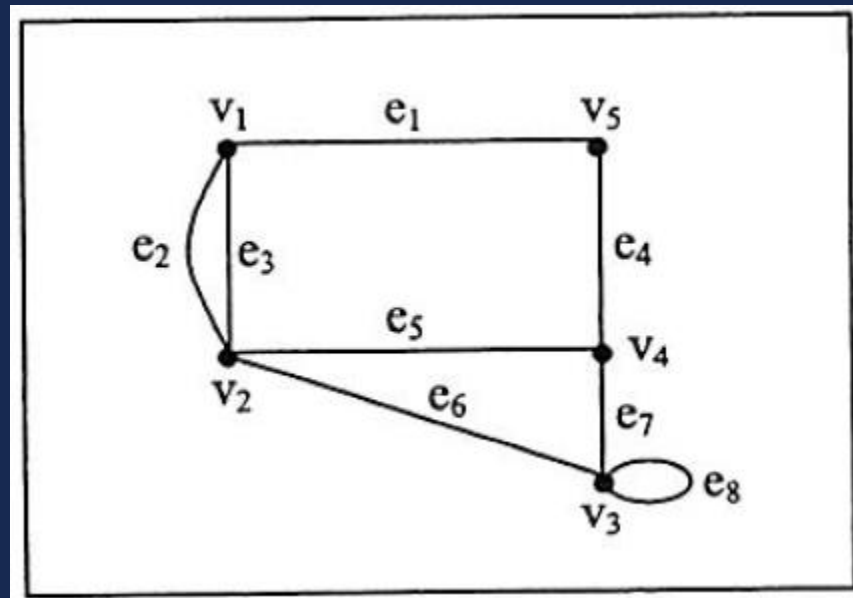
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação –  
M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC





# Exercício 1

Dado o grafo abaixo:

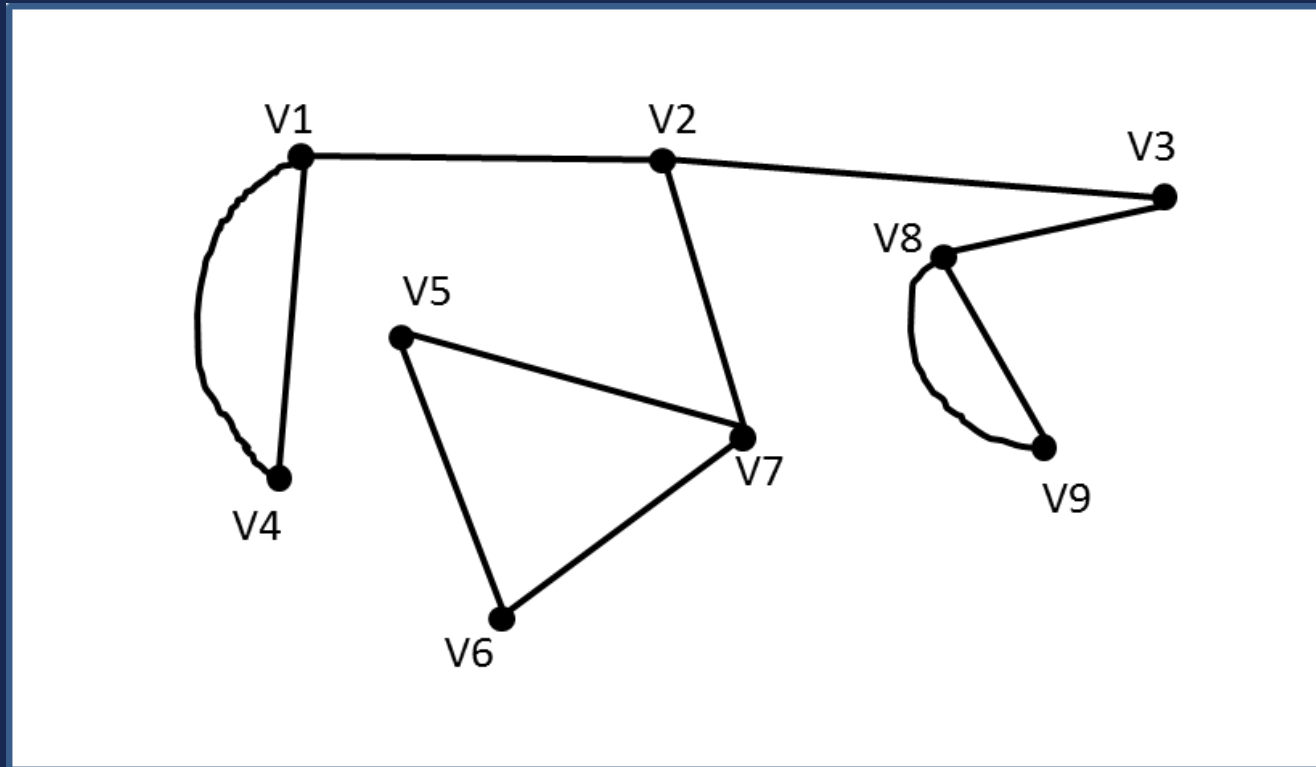


- a) Determine a quantidade de arestas do grafo => **8**
- b) Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo  
=> **3 + 4 + 4 + 3 + 2 = 16**



## Exercício 2

Dado o grafo abaixo:



- Determine a quantidade de arestas do grafo
- Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo

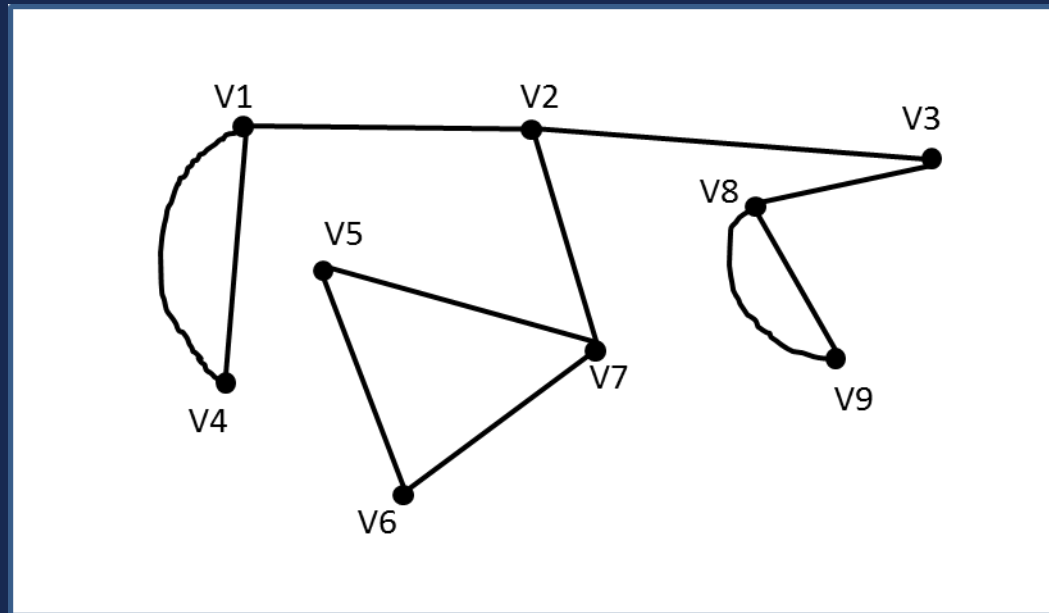
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação –  
M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



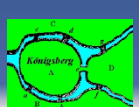


## Exercício 2

Dado o grafo abaixo:



- a) Determine a quantidade de arestas do grafo => **11**
- b) Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo  
=>  $(3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2) = 22$

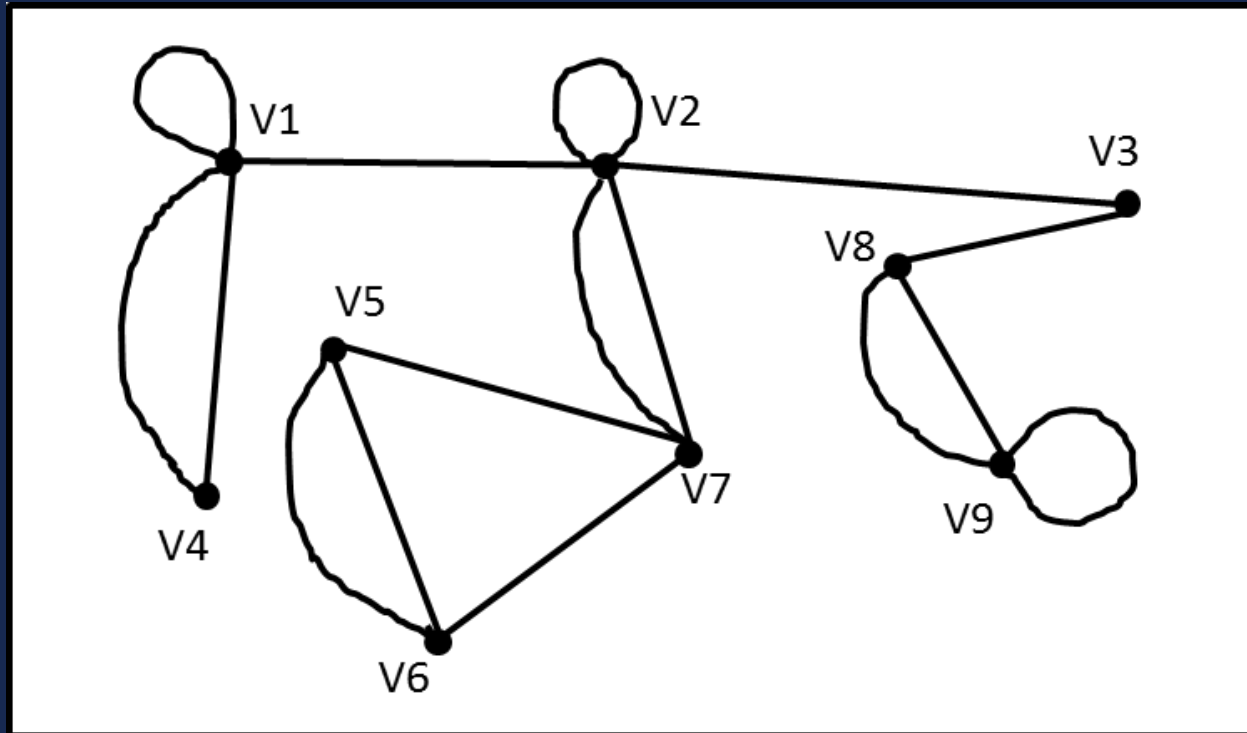






# Exercício 3

Dado o grafo abaixo:



- Determine a quantidade de arestas do grafo
- Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação –  
M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

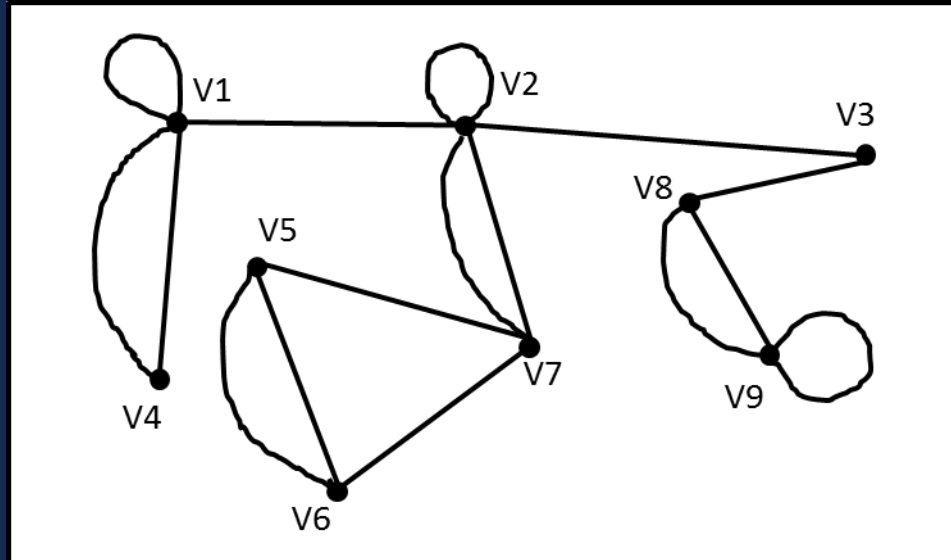




# Grafos – Exemplo

## Exercício 3

Dado o grafo abaixo:



- a) Determine a quantidade de arestas do grafo => **16**
- b) Determine a soma dos graus de todos os nós do grafo  
=>  $(5 + 6 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 3 + 4) = \mathbf{32}$





# Interessante !!!





# Será que existe alguma relação entre vértices e arestas?





# Teorema 1

Para um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , ( $|V| = n$ ) e  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  ( $|E| = m$ ), tem-se:

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$



Esse teorema está afirmando que a soma dos graus dos vértices de um grafo é o dobro da quantidade de arestas.





# Teorema 1 – Prova

Para um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ( $|V| = n$ ) e  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  ( $|E| = m$ ), tem-se :

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

- Uma vez que cada **aresta** contribui com **dois graus**, a soma dos graus de todos os vértices em  $G$  é igual a duas vezes o número de arestas em  $G$ .  $\square$

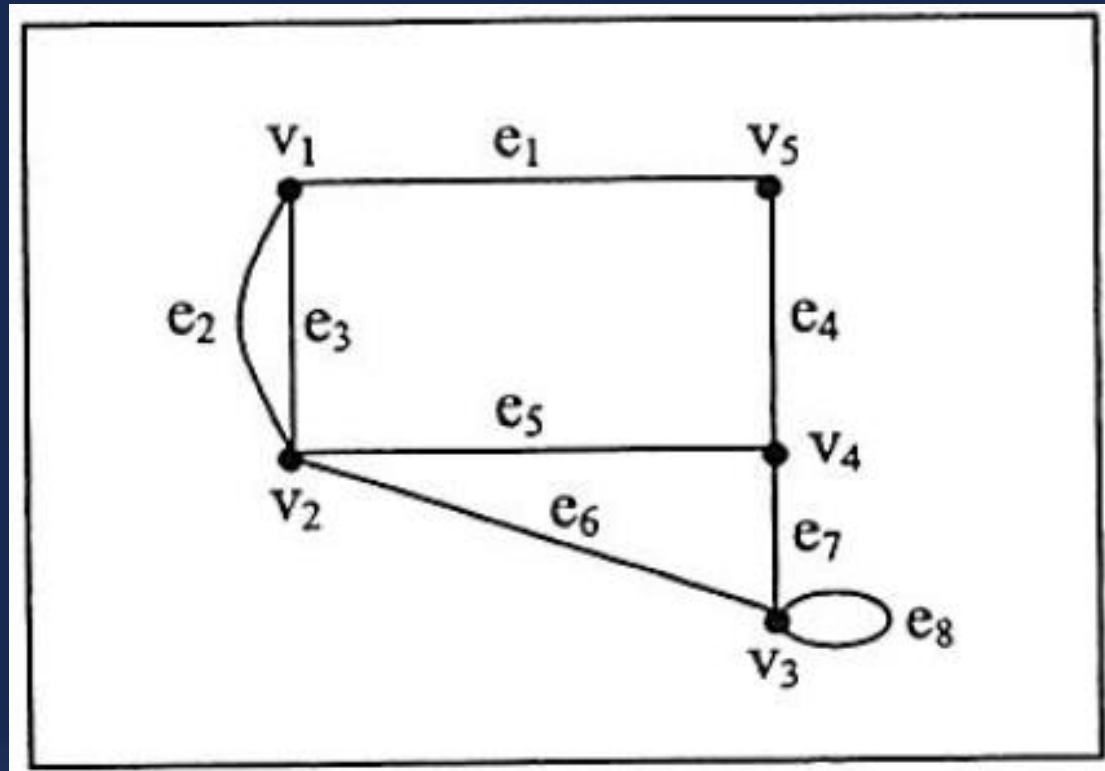




# Grafos – Exemplo

## Exercício 4

Dado o grafo abaixo:



Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

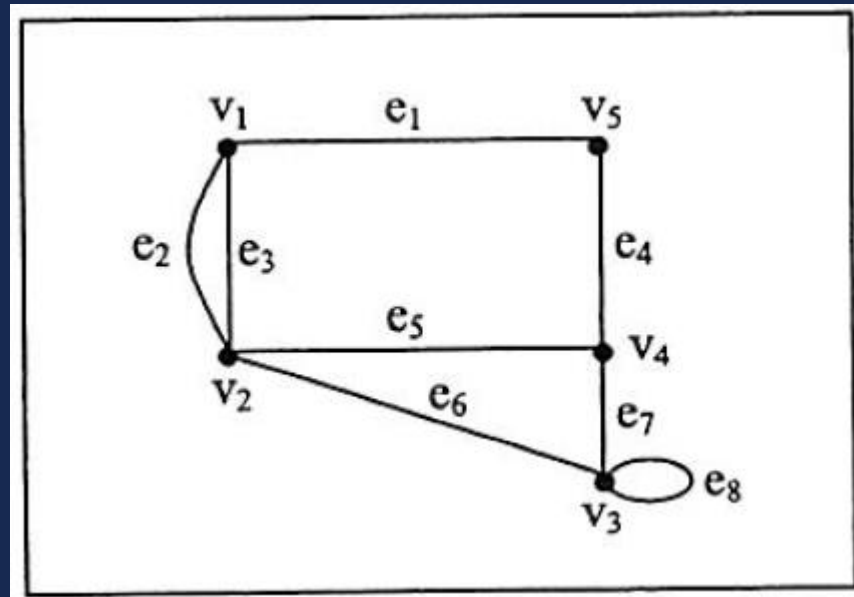
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação –  
M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC





# Exercício 4

Dado o grafo abaixo:



Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

Ímpares => { **v1**, **v4** } ; Portanto há **2** vértices ímpares! (3 pares)



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação –  
M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC



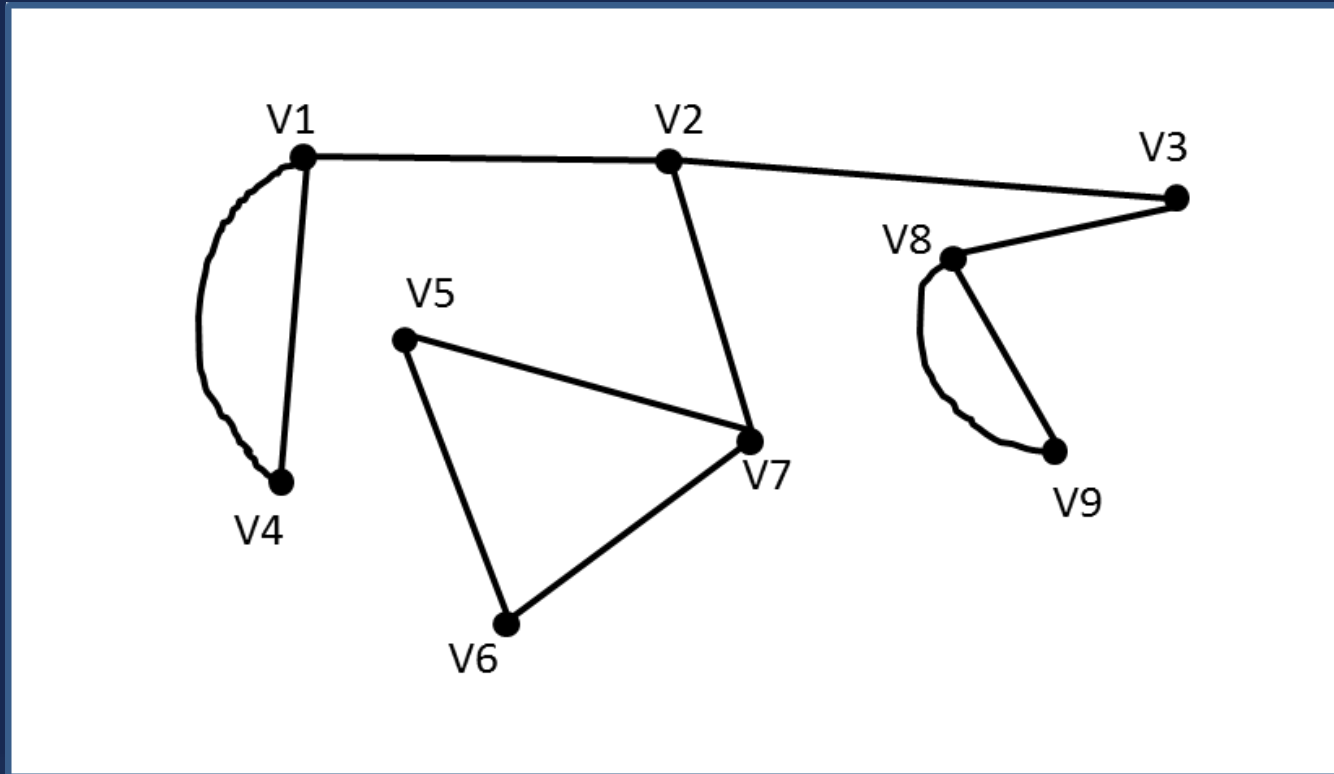




# Grafos - Exemplo

## Exercício 5

Dado o grafo abaixo:



Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação –  
M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

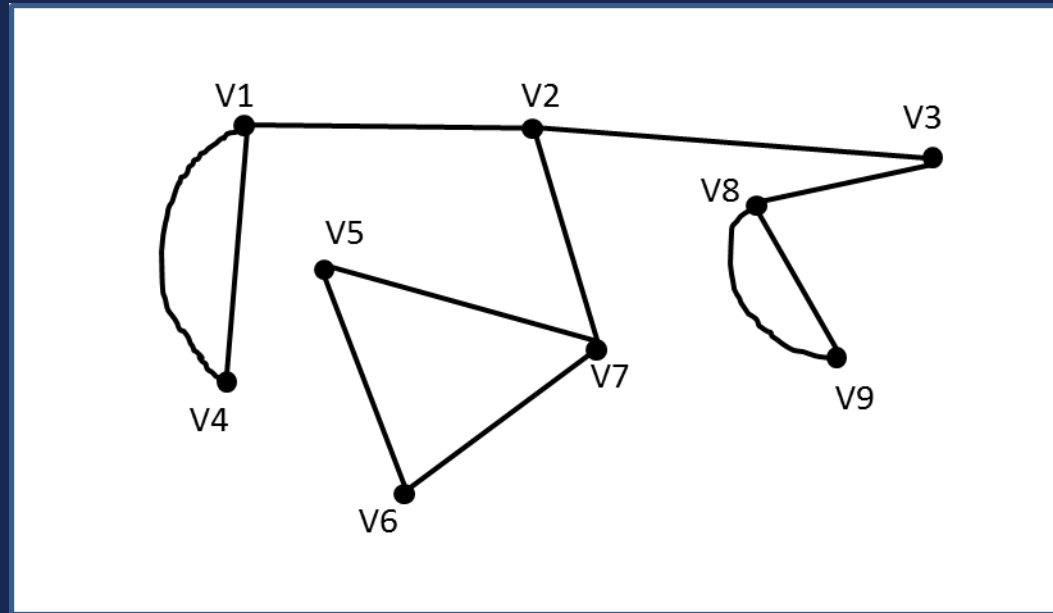




# Grafos - Exemplo

## Exercício 5

Dado o grafo abaixo:



Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

Ímpares  $\Rightarrow \{v1, v2, v7, v8\}$  ; Portanto há **4** vértices ímpares! (5 pares)



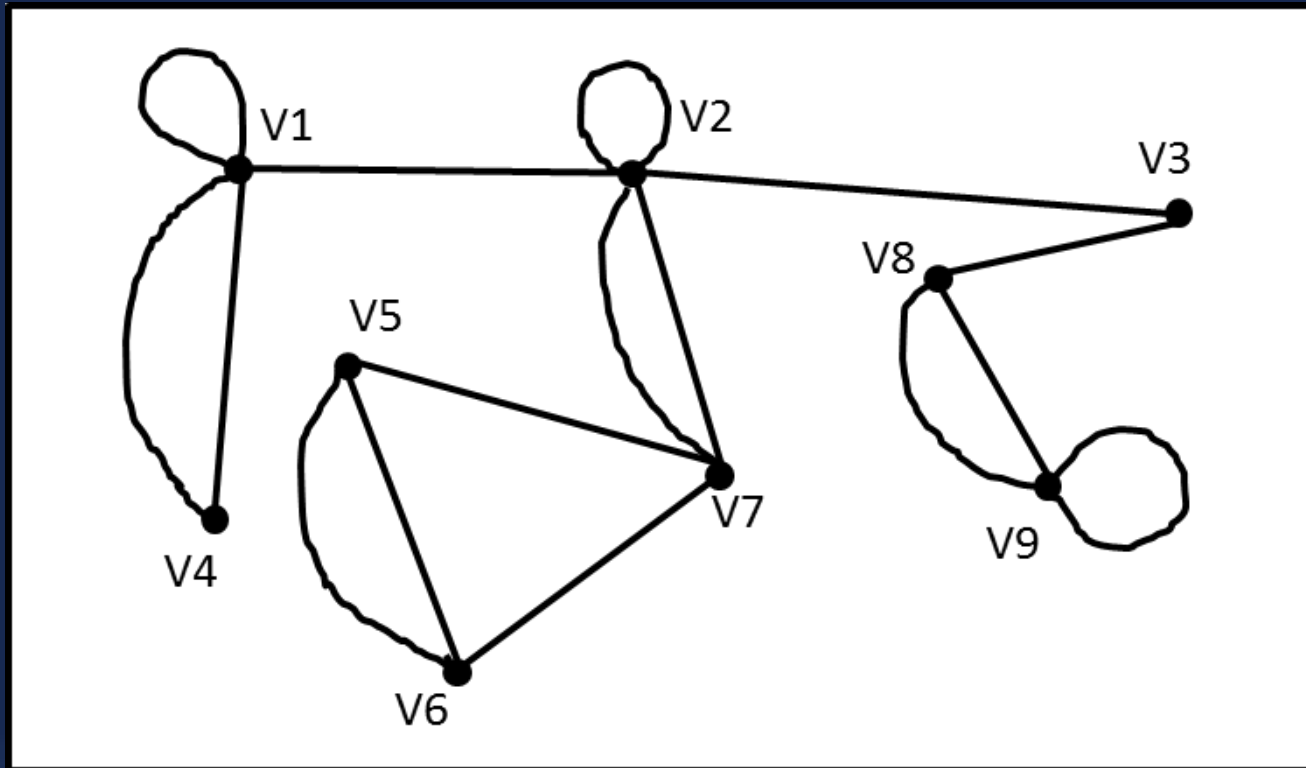
Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação –  
M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC





## Exercício 6

Dado o grafo abaixo:



Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação –  
M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC

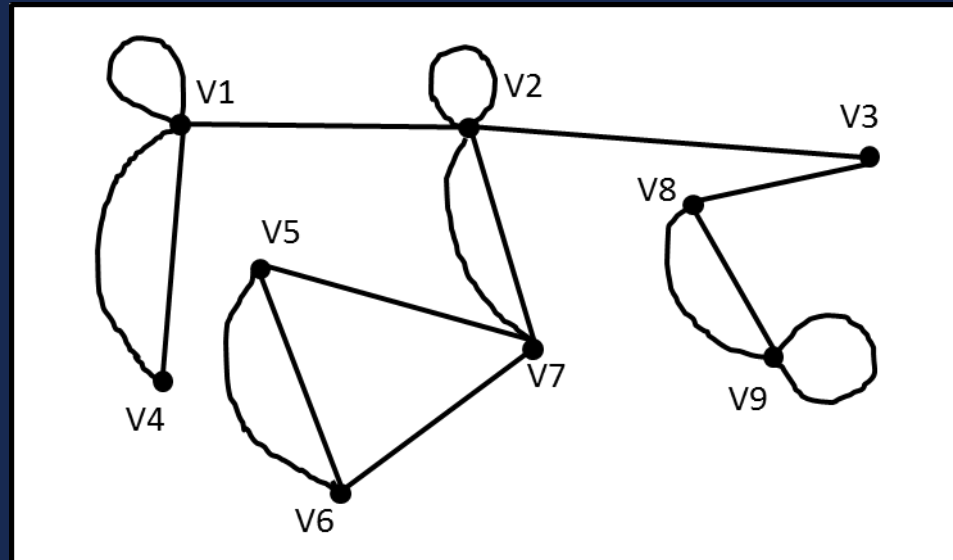




# Grafos – Exemplo

## Exercício 6

Dado o grafo abaixo:



Quantos e quais são os vértices ímpares que existem no grafo ?

Ímpares  $\Rightarrow \{v1, v5, v6, v8\}$  ; Portanto há **4** vértices ímpares! (**5** pares)



Fonte: Fundamentos da Teoria dos Grafos para Computação –  
M.C. Nicoletti, E.R. Hruschka Jr. 3ª Edição – LTC





Será que existe alguma  
propriedade do número de  
vértices ímpares ?





# Teorema 2

Em um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ( $|V| = n$ ) e  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  ( $|E| = m$ ), o número de vértices **ímpares** é sempre **par**.



# Grafos – Teorema 3.2

**Teorema 3.2** Em um grafo  $G = (V, E)$ , tal que  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $|E| = \{e_1, e_2, \dots, e_m\} = m$ , o número de vértices ímpares é sempre par.

**Prova:** O conjunto total de vértices  $V$  de  $G$  pode ser escrito como  $V = P \cup I$ , tal que  $P$  é o conjunto dos vértices pares e  $I$ , o conjunto dos vértices ímpares. Com base no resultado estabelecido pelo Teorema 3.1, pode-se escrever que:

$$2m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{u \in P} d(u) + \sum_{w \in I} d(w)$$

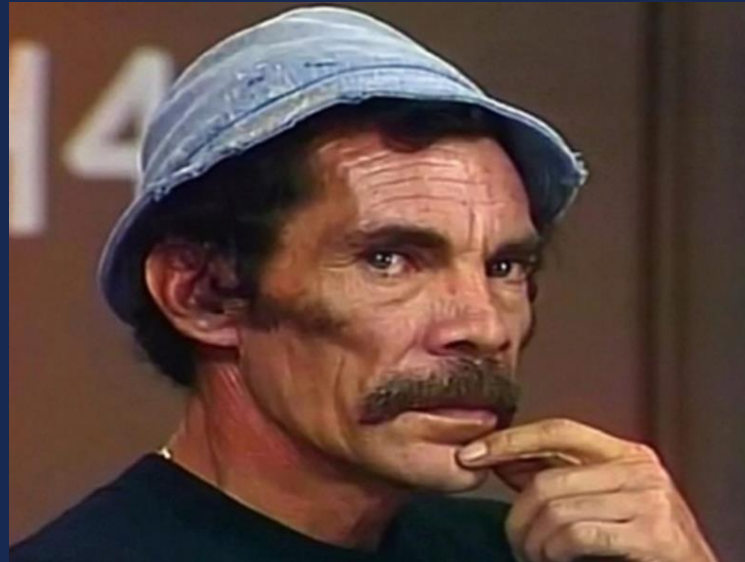
Assim, tem-se:

$$\sum_{w \in I} d(w) = 2m - \sum_{u \in P} d(u)$$

A diferença acima é um número par, uma vez que é a diferença de dois números pares. Como cada um dos termos na soma  $\sum_{w \in I} d(w)$  é ímpar (uma vez que cada um deles é o grau de um vértice ímpar) e como essa soma é par, deve existir um número par desses termos (uma vez que a soma de um número ímpar de números ímpares é sempre ímpar) ♦.



O **teorema 2** afirma que a quantidade de vértices ímpares é par !



Posso afirmar que a quantidade de vértices pares é **sempre** ímpar ?







# Observação

- Pelo teorema 2, a quantidade de vértices **ímpares** é sempre **par** ;
- Mas, **nada** se pode afirmar sobre a quantidade de vértices pares;
- A quantidade de vértices pares pode ser par ou ímpar.

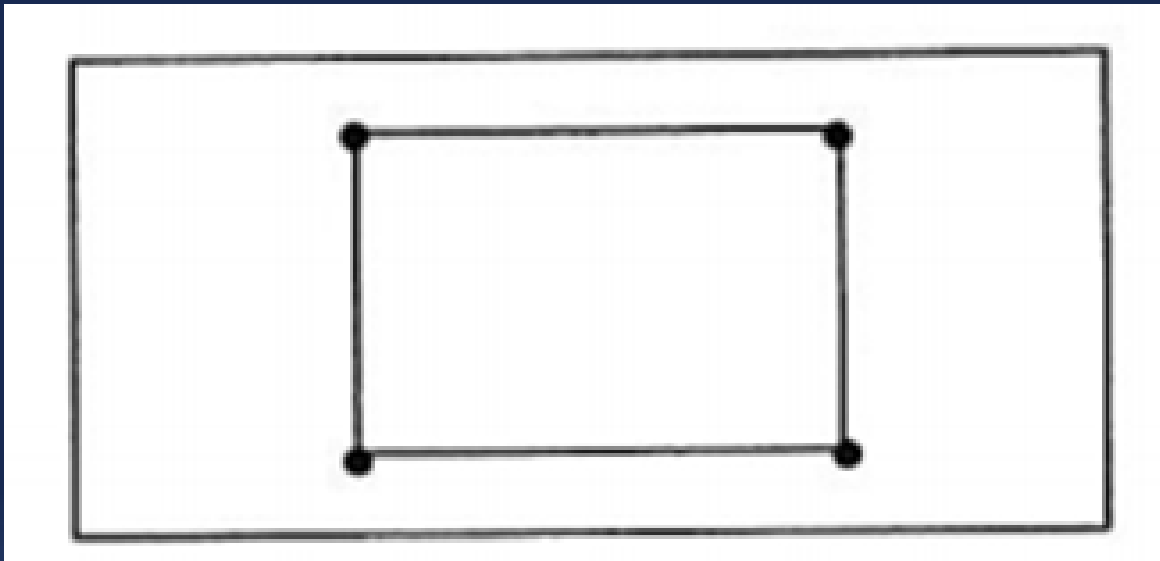
Note que nem sempre é fato que um grafo deve ter um número ímpar de vértices pares. Considere, por exemplo, o grafo da Figura 3.8, que tem um número par (quatro) de vértices pares (vértices de grau 2).





# Observação

- A quantidade de vértices pares pode ser par ou ímpar.



Grafo com número par de vértices pares





# Grafo Regular

Em [Teoria dos grafos](#), um **grafo regular** é um [grafo](#) onde cada vértice tem o mesmo número de **adjacências**, i.e. cada vértice tem o mesmo [grau](#) ou valência.

Um grafo regular com vértices de grau  $k$  é chamado um grafo  **$k$ -regular** ou grafo regular de grau  $k$ .

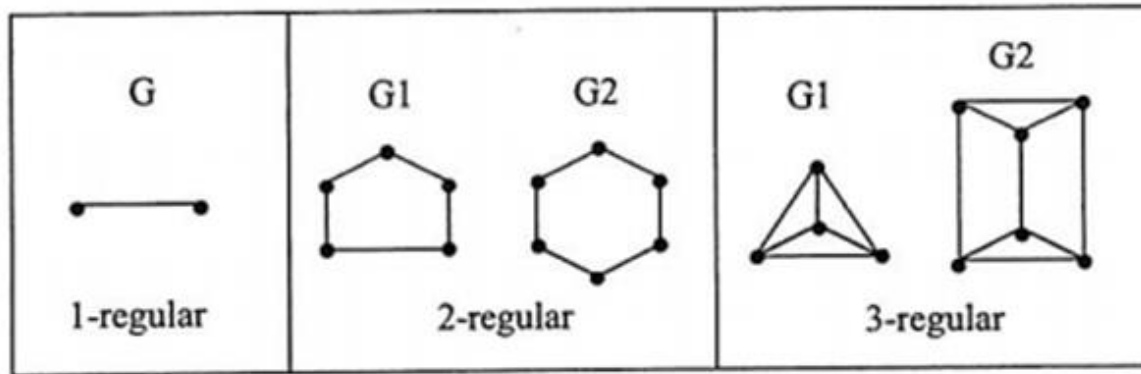
**Definição 3.4** Seja o grafo  $G = (V, E)$ , se para algum inteiro positivo  $k$ ,  $d(v) = k$  para todo vértice  $v \in V$ , então  $G$  é chamado  *$k$ -regular*. Um *grafo regular* é um grafo que é  $k$ -regular para algum  $k$ .



# Grafo Regular

**Observação 3.1** Em Teoria dos Grafos, os chamados *grafos cúbicos* (3-regulares) são particularmente importantes. Note que o grafo nulo  $G = (V, \emptyset)$  é um grafo regular de grau 0.

**Exemplo 3.4** A Figura 3.9 mostra o único grafo 1-regular, dois grafos 2-regular e 2 grafos 3-regular.



**Figura 3.9** Grafos regulares.

Freqüentemente, acontece o caso de dois grafos terem a mesma estrutura e diferirem apenas na maneira como seus vértices e arestas são rotulados ou, então, apenas na maneira como são representados geometricamente. Para muitos propósitos, esses dois grafos são essencialmente o mesmo grafo. A Definição 3.5 trata formalmente dessa situação.

# Grafos – Isomorfismo

**Definição 3.5** Dois grafos  $G1 = (V1, E1)$  e  $G2 = (V2, E2)$  são *isomorfos* se:

1. existir uma função bijetora  $f$ , do conjunto de vértices de  $G1$ , no conjunto de vértices de  $G2$  ( $f: V1 \rightarrow V2$ ) ( $f$  é total);
2. existir uma função bijetora  $g$ , do conjunto de arestas de  $G1$ , no conjunto de arestas de  $G2$  ( $g: E1 \rightarrow E2$ ) ( $g$  é total),

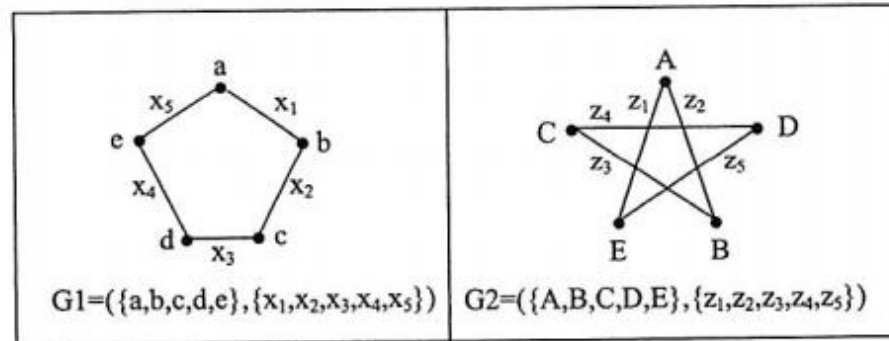
tal que uma aresta  $e$  é incidente a  $v_1$  e  $v_2$  em  $G1$  se e somente se a aresta  $g(e)$  for incidente a  $f(v_1)$  e  $f(v_2)$  em  $G2$ . O par de funções  $f$  e  $g$  é chamado um isomorfismo de  $G1$  em  $G2$ .

Parafraseando a Definição 3.5, diz-se que o grafo  $G1 = (V1, E1)$  é *isomorfo* ao grafo  $G2 = (V2, E2)$  se existir uma correspondência entre os conjuntos de vértices  $V1$  e  $V2$  e uma correspondência entre os conjuntos de arestas  $E1$  e  $E2$ , de tal maneira que, se  $e_1$  for uma aresta com vértices-extremidade  $u_1$  e  $v_1$  em  $G1$ , então a aresta correspondente  $e_2$  em  $G2$  (isto é,  $g(e_1)$ ) deve ter como vértices-extremidade os vértices  $u_2$  e  $v_2$  em  $G2$  que correspondem a  $u_1$  e  $v_1$ , respectivamente; se os vértices  $v_1$  e  $v_2$  forem adjacentes em  $G1$ , os vértices  $f(v_1)$  e  $f(v_2)$  devem ser adjacentes em  $G2$ .



# Grafos – Exemplo – Isomorfismo

**Exemplo 3.5** Os grafos G1 e G2 mostrados na Figura 3.10 são isomorfos.



**Figura 3.10** Grafos isomorfos G1 e G2.

Para os grafos G1 e G2 da Figura 3.10, um isomorfismo pode ser estabelecido como as funções bijetoras f e g, definidas a seguir, que preservam a relação de adjacência entre os vértices.

(1)  $f: \{a, b, c, d, e\} \rightarrow \{A, B, C, D, E\}$ , tal que:

| x    | a | b | c | d | e |
|------|---|---|---|---|---|
| f(x) | A | B | C | D | E |

$x_1 \leftrightarrow (a, b)$ .  $g(x_1)$  deve ter como imagem a aresta que une  $f(a)$  a  $f(b)$ , que é a aresta  $(A, B) \leftrightarrow z_2$   
 $x_2 \leftrightarrow (b, c)$ .  $g(x_2)$  deve ter como imagem a aresta que une  $f(b)$  a  $f(c)$ , que é a aresta  $(B, C) \leftrightarrow z_3$   
 $x_3 \leftrightarrow (c, d)$ .  $g(x_3)$  deve ter como imagem a aresta que une  $f(c)$  a  $f(d)$ , que é a aresta  $(C, D) \leftrightarrow z_4$   
 $x_4 \leftrightarrow (d, e)$ .  $g(x_4)$  deve ter como imagem a aresta que une  $f(d)$  a  $f(e)$ , que é a aresta  $(D, E) \leftrightarrow z_5$   
 $x_5 \leftrightarrow (e, a)$ .  $g(x_5)$  deve ter como imagem a aresta que une  $f(e)$  a  $f(a)$ , que é a aresta  $(E, A) \leftrightarrow z_1$

A função g, portanto, é definida como:

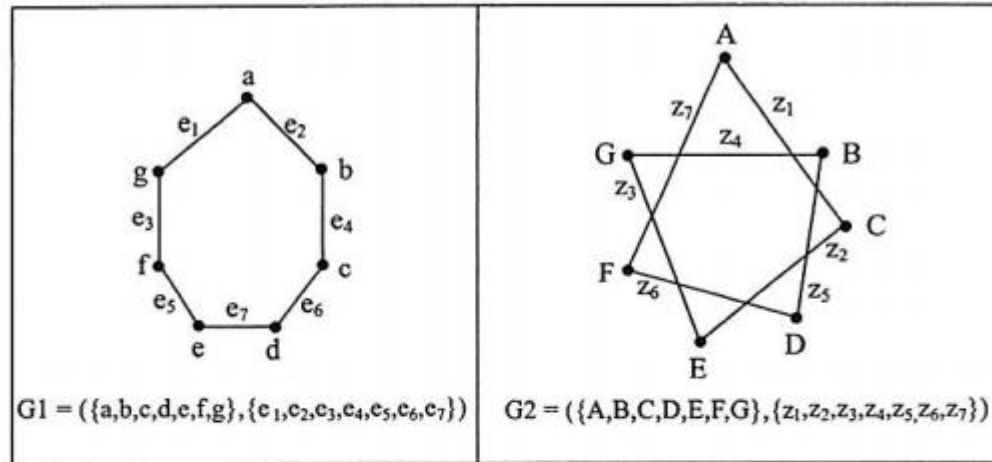
(2)  $g: \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \rightarrow \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$

| x    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| g(x) | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ | $z_5$ | $z_1$ |



# Grafos – Exemplo – Isomorfismo

**Exemplo 3.6** Os grafos  $G_1$  e  $G_2$ , mostrados na Figura 3.11, são isomorfos.



**Figura 3.11** Grafos isomorfos  $G_1$  e  $G_2$ .

As funções  $f$  e  $g$  que definem o isomorfismo são:

(1)  $f: \{a, b, c, d, e, f, g\} \rightarrow \{A, B, C, D, E, F, G\}$ , tal que:

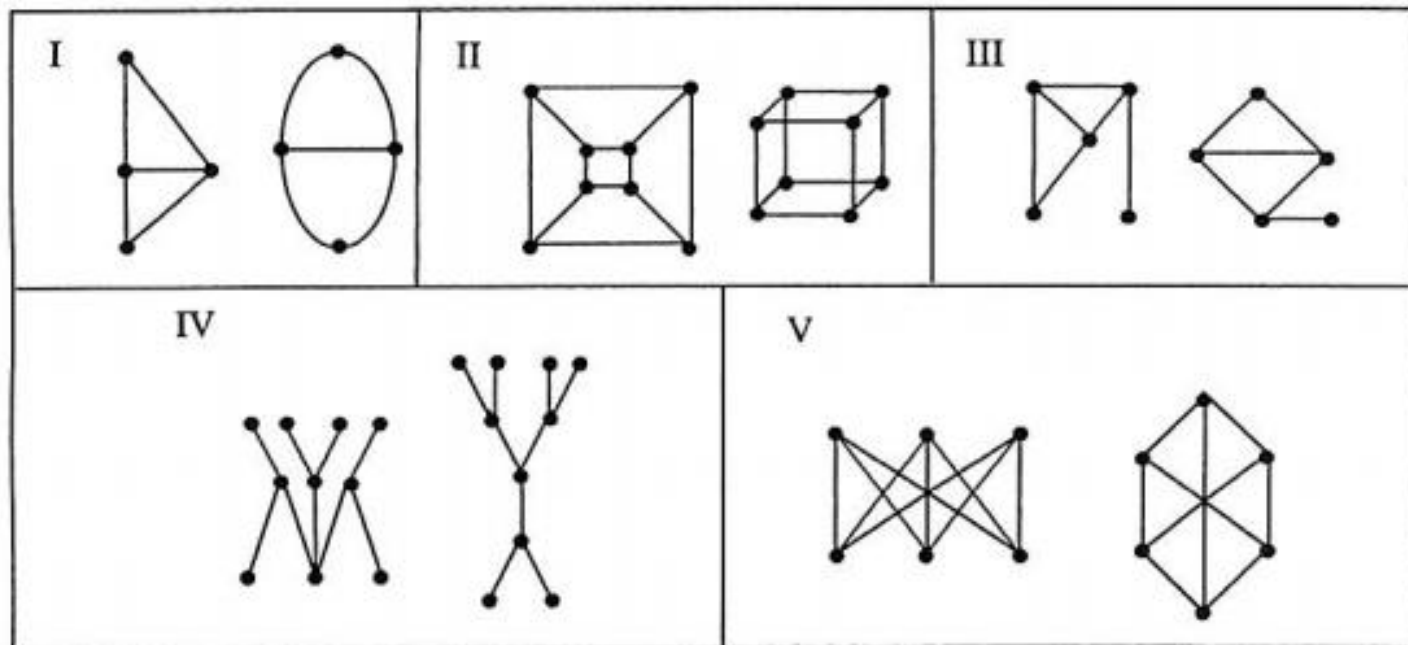
| x    | a | b | c | d | e | f | g |
|------|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | A | C | E | G | B | D | F |

(2)  $g: \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} \rightarrow \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}$

| x    | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| g(x) | $z_7$ | $z_1$ | $z_6$ | $z_2$ | $z_5$ | $z_3$ | $z_4$ |

# Grafos – Exemplo – Isomorfismo

**Exemplo 3.7** A Figura 3.12 mostra cinco exemplos (I, II, III, IV, V) de pares de grafos isomorfos.



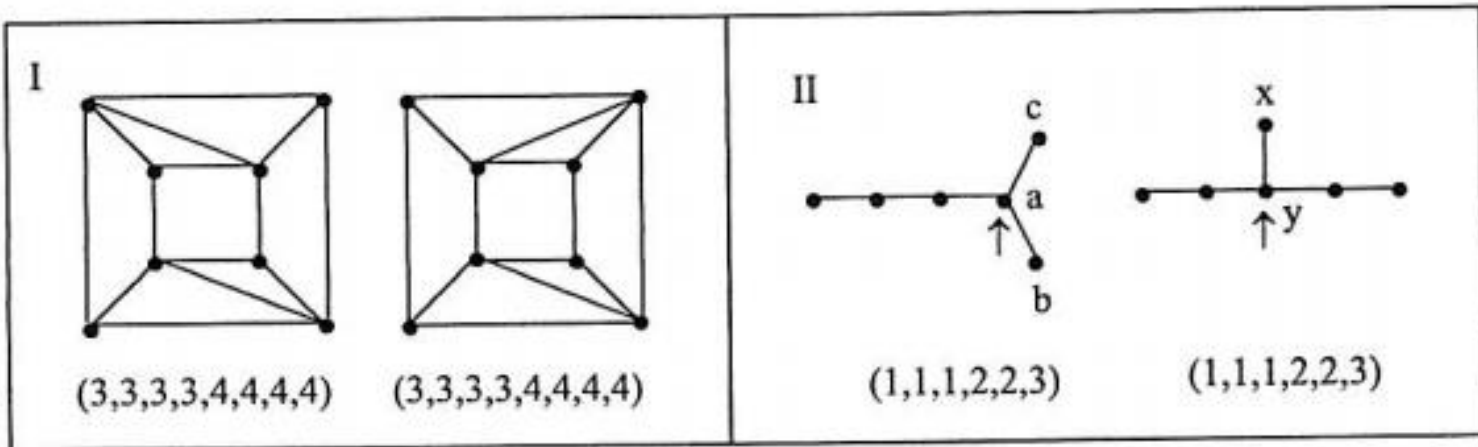
**Figura 3.12** Os grafos em I, II, III, IV e V são isomorfos.





# Grafos – Contra-exemplo – Isomorfismo

**Exemplo 3.8** A Figura 3.13 mostra dois pares de grafos que não são isomorfos. Em (I), no grafo à direita, cada vértice de grau 4 é adjacente a dois outros vértices de grau 4. No grafo à esquerda, cada vértice de grau 4 é adjacente a apenas um outro vértice de grau 4. Assim, os dois grafos em questão não são isomorfos.



**Figura 3.13** Grafos em I e II são não isomorfos.



# Grafos – Isomorfismo – Observações

Com base na definição de isomorfismo entre grafos (Definição 3.5), para que dois grafos sejam isomorfos eles devem ter:

- o mesmo número de vértices;
- o mesmo número de arestas; e
- um número igual de vértices com determinado grau.

Essas condições, entretanto, não são suficientes. Considere, por exemplo, os dois grafos mostrados na Figura 3.13 (II). Eles satisfazem todas as três condições e, entretanto, não são isomorfos. O fato de não serem isomorfos pode ser evidenciado considerando a seguinte argumentação: se os grafos fossem isomorfos, o vértice  $a$  do grafo à esquerda deveria corresponder ao vértice  $y$  do grafo à direita, uma vez que são os únicos dois vértices com grau três. No grafo à direita, existe apenas um vértice de grau 1 adjacente a  $y$ , que é o vértice  $x$ , enquanto no grafo à esquerda existem dois,  $b$  e  $c$ . A busca por um critério simples e eficiente para a detecção de isomorfismo é ainda um problema não resolvido em TG. Existem, entretanto, vários algoritmos que se propõem à detecção automática de isomorfismo, como será visto posteriormente.

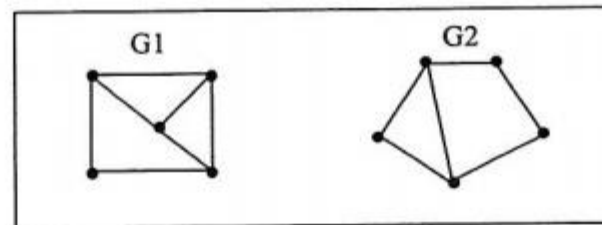
**Observação 3.2** O problema de determinar se dois grafos são isomorfos torna-se mais difícil à medida que o número de vértices e de arestas no grafo aumentam. Por exemplo, enquanto existem apenas quatro grafos simples não isomorfos com três vértices e 11 com quatro vértices, existem 1.044 grafos simples não isomorfos com sete vértices.

# Grafos – Isomorfismo – Invariantes

**Definição 3.6** Sejam  $G_1$  e  $G_2$  grafos isomorfos. Uma propriedade  $P$  é um invariante sempre que  $G_1$  tiver a propriedade  $P$  e  $G_2$  também tiver esta mesma propriedade.

Com base na Definição 3.6, se os grafos  $G_1$  e  $G_2$  são isomorfos, então existem funções bijetoras entre os vértices (e entre as arestas) de  $G_1$  e  $G_2$ . Assim, se  $G_1$  e  $G_2$  são isomorfos, eles têm o mesmo número de arestas e o mesmo número de vértices. Portanto, se  $n$  e  $m$  são inteiros não negativos, as propriedades “tem  $n$  vértices” e “tem  $m$  arestas” são invariantes.

**Exemplo 3.11** Os grafos  $G_1$  e  $G_2$ , mostrados na Figura 3.17, são não isomorfos, uma vez que o invariante “têm o mesmo número de arestas” não é verificado.

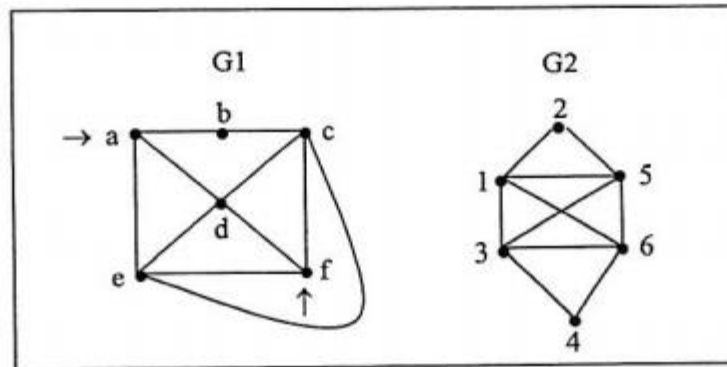


**Figura 3.17**  $G_1$  tem sete arestas,  $G_2$  tem seis arestas e “tem  $m$  arestas” é invariante. Portanto,  $G_1$  e  $G_2$  não são isomorfos.

**Observação 3.4** Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois grafos, a propriedade “os grafos têm o mesmo número de vértices com grau  $k$  ( $k > 0$ , inteiro)” é um invariante.

# Grafos – Isomorfismo – Invariantes

**Exemplo 3.12** Os grafos  $G_1$  e  $G_2$  da Figura 3.19 são não isomorfos.

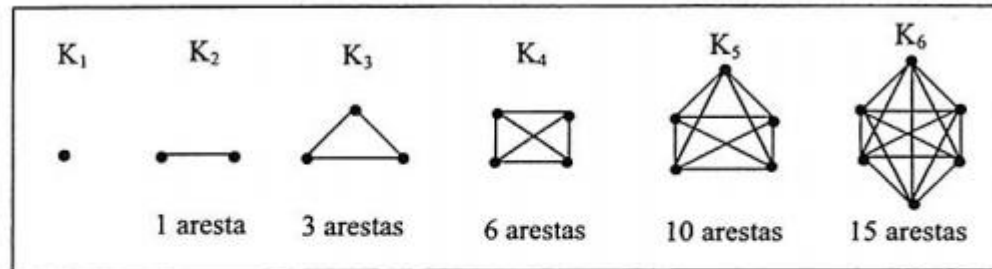


**Figura 3.19** Apesar de  $G_1$  e  $G_2$  terem o mesmo número de vértices e arestas,  $G_1$  tem vértices de grau 3, e  $G_2$  não tem vértices de grau 3.  $G_1$  e  $G_2$  não são isomorfos.

# Grafo Completo

**Definição 3.7** Um grafo *completo* de ordem  $n$ , notado por  $K_n$ , é um grafo que tem  $n$  vértices e exatamente uma aresta conectando cada um dos possíveis pares de vértices distintos.

A Figura 3.20 mostra os grafos completos de  $K_1$  até  $K_6$ .



**Figura 3.20** Grafos completos  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$ ,  $K_5$  e  $K_6$ .

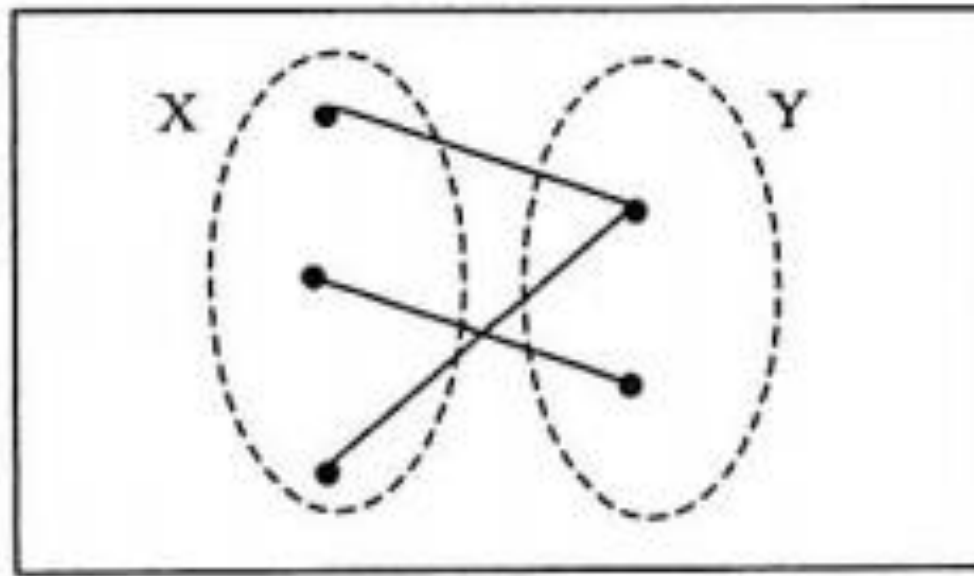
**Observação 3.6** Obviamente, grafos completos são grafos simples, ou seja, não têm arestas paralelas ou *loops*. Uma vez que existem  $\binom{n}{2}$  possíveis pares em  $n$  vértices, o grafo completo  $K_n$  tem exatamente  $\frac{n(n-1)}{2}$  arestas.

**Observação 3.7** Note que todo grafo completo com  $n$  vértices é um grafo  $(n-1)$ -regular.



# Grafo Bipartido

**Definição 3.8** Seja  $G = (V, E)$  um grafo, se o conjunto de vértices  $V$  de  $G$  puder ser particionado em dois subconjuntos não vazios,  $X$  e  $Y$  ( $X \cup Y = V$  e  $X \cap Y = \emptyset$ ), de tal maneira que cada aresta de  $G$  tenha uma extremidade em  $X$  e a outra em  $Y$ , então  $G$  é chamado *bipartido*. A partição  $V = X \cup Y$  é chamada *bipartição* de  $G$ .



**Figura 3.21** Grafo bipartido.

# Grafo Bipartido

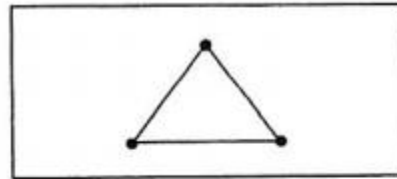


Figura 3.22 Grafo não bipartido.

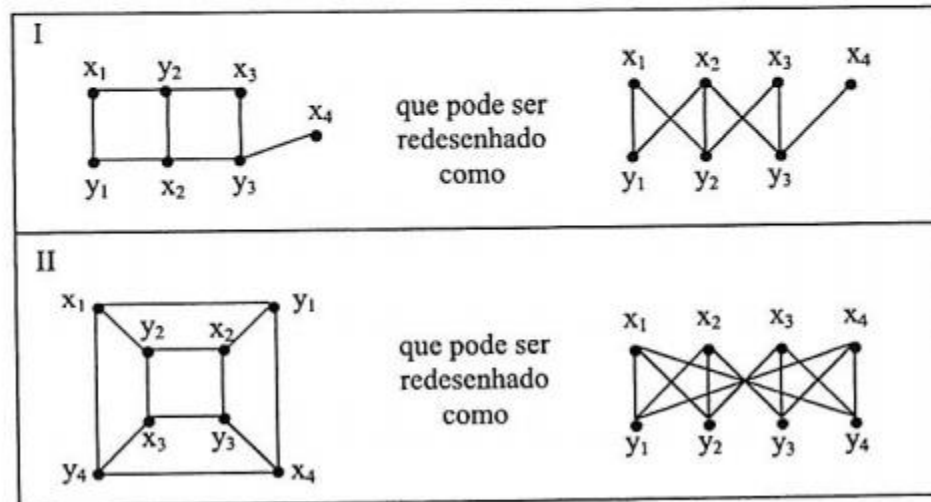


Figura 3.23 Os grafos em I e II são exemplos de grafos bipartidos.

# Grafo Bipartido Completo

**Definição 3.9** Um *grafo bipartido completo* é um grafo simples bipartido  $G$ , com a bipartição  $V = X \cup Y$ , em que todo vértice em  $X$  está unido a todo vértice em  $Y$ . Se  $|X| = m$  e  $|Y| = n$ , então tal grafo é denotado por  $K_{m,n}$ . Para padronizar, assume-se que  $m \leq n$ . Note que  $K_{n,n}$  é um grafo regular de grau  $n$ .

**Exemplo 3.13** A Figura 3.24 mostra os diagramas de  $K_{m,n}$ , para  $m = 1, 2, 3$  e  $n = m, m+1, m+2$ .

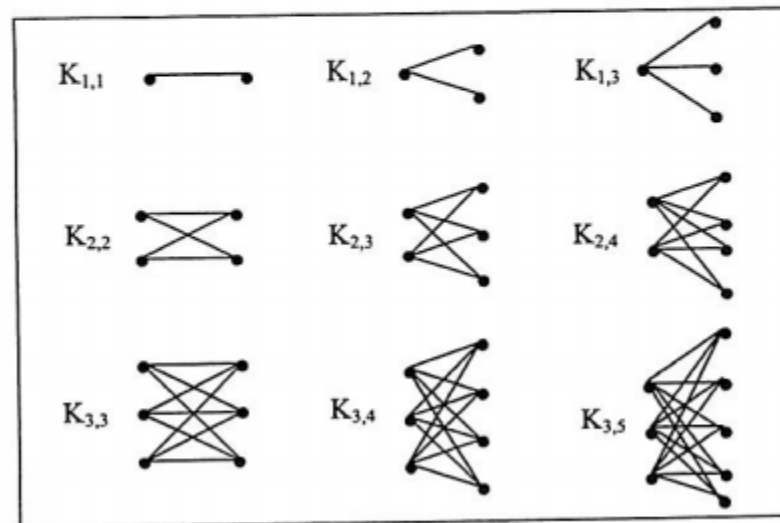


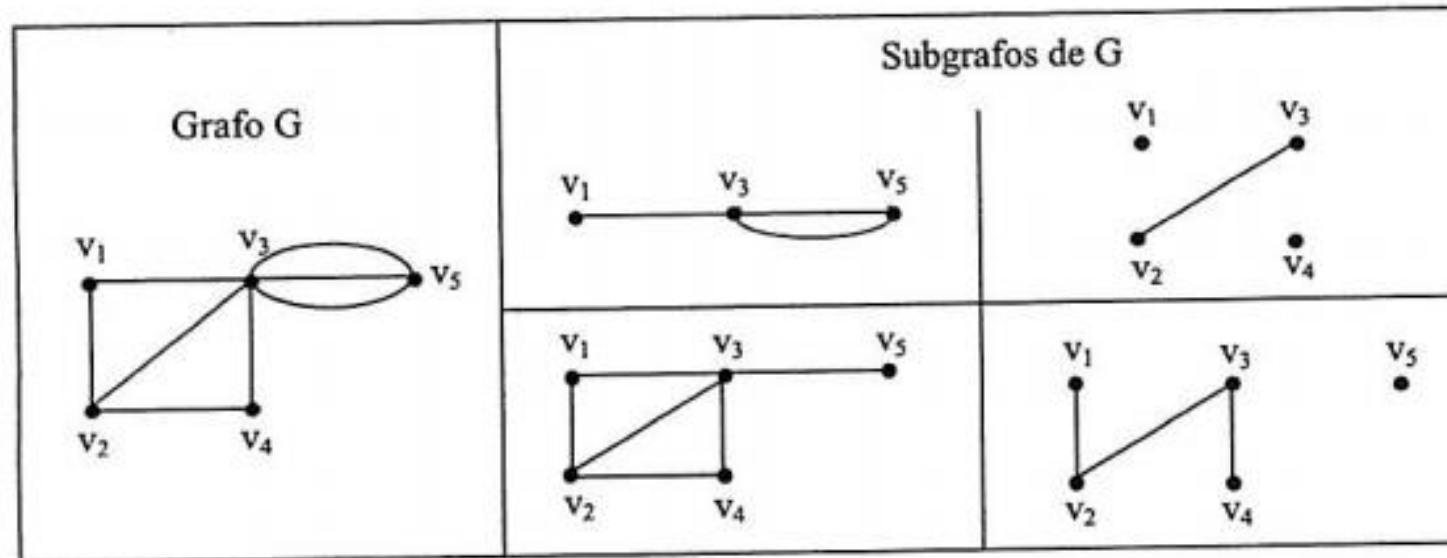
Figura 3.24  $K_{m,n}$ , para  $m = 1, 2, 3$  e  $n = m, m+1, m+2$ .



# Subgrafo

**Definição 3.10** Sejam dois grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$ . Diz-se que  $G_2$  é *subgrafo de*  $G_1$  se  $V_2 \subseteq V_1$  e  $E_2 \subseteq E_1$ , e para toda aresta  $e \in E_2$ , se  $e$  for incidente a  $v_1$  e  $v_2$ , então  $v_1, v_2 \in V_2$ . Nesse caso, diz-se também que  $G_1$  é *supergrafo de*  $G_2$ .

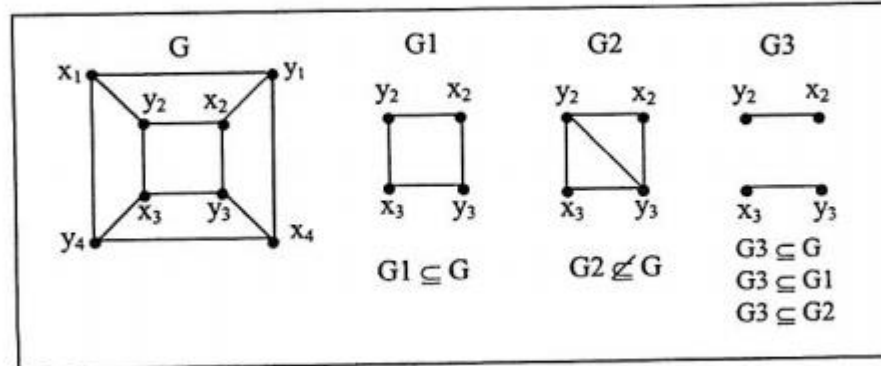
**Exemplo 3.14** A Figura 3.28 mostra um grafo e alguns de seus possíveis subgrafos.



**Figura 3.28** Grafo G e quatro possíveis subgrafos.

# Subgrafo

**Exemplo 3.15** A Figura 3.29 mostra um grafo  $G$  e um grafo  $G_1$ , que é subgrafo de  $G$ . Mostra também o grafo  $G_2$ , que não é subgrafo de  $G$ .



**Figura 3.29** Grafo  $G_1$  é subgrafo do grafo  $G$ , mas o grafo  $G_2$  não é subgrafo de  $G$ . O grafo  $G_3$  é subgrafo de  $G_1$ , o que o torna um subgrafo de  $G$  também.

Note que:

- Todo grafo é seu próprio subgrafo.
- Um subgrafo de um subgrafo de  $G$  é um subgrafo de  $G$ .
- Um único vértice em um grafo  $G$  é subgrafo de  $G$ .
- Uma única aresta de  $G$ , com seus vértices-extremidade, é também um subgrafo de  $G$ .



# FIM

