ECM306 – Tópicos Avançados em Estrutura de Dados

Aula 02

Engenharia da Computação – 3ª série

Método Analítico e Modelo de Knuth (E1, E2)

2024

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O Método Experimental é suficiente para análise de algoritmos?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O Método Experimental:

  - ✓ Embora tenha um importante papel em análise de algoritmos, quando tratado de forma isolada não é suficiente.

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que é necessário, então, além do Método Experimental?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- É necessário um Método Analítico que:
  - ✓ Considere todas as entradas possíveis;
  - ✓ Seja independente de ambientes de *hardware* e de *software*;
  - ✓ Seja obtido sem a execução do algoritmo.

Método Analítico e Modelo de Knuth

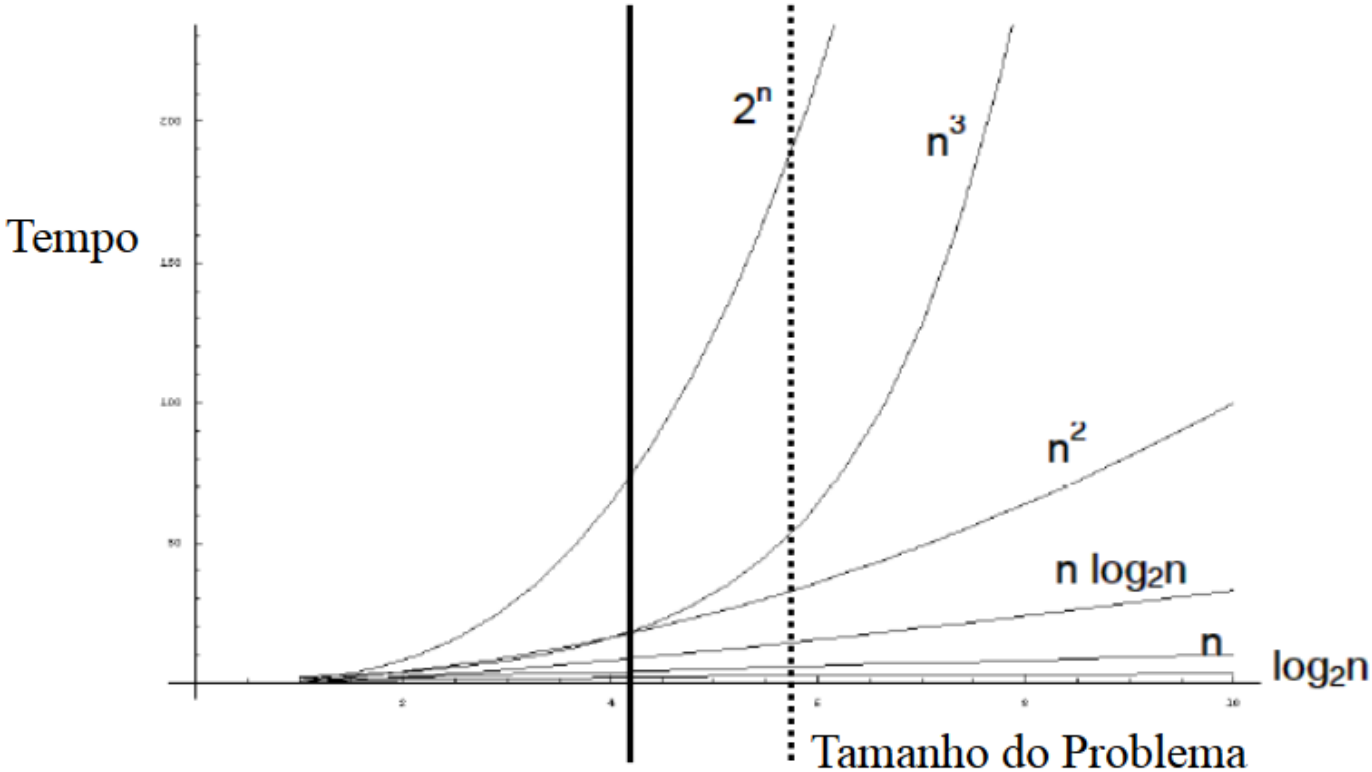
Pergunta

- O que é um Método Analítico?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- Método Analítico:



Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que é o Modelo de Knuth?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- Modelo de Knuth é:

  - ✓ Modelo matemático, desenvolvido pelo cientista computacional e professor Donald Knuth, da Stanford University, em 1968;
  - ✓ Baseado na contabilização do conjunto de operações executadas pelo algoritmo;
  - ✓ Uma associação de custo para cada operação executada, ignorando-o, em geral, em algumas operações e contabilizando-o, apenas, nas mais significativas, denominadas **Operações Básicas**.

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que acontece no Modelo Detalhado?

Resposta

- No Modelo Detalhado:
  - ✓ O tempo de execução de um algoritmo será calculado pela somatória do tempo necessário para a execução das operações básicas;
  - ✓ O tempo de processamento das operações básicas é definido por um conjunto de **Axiomas**.

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que propõe o ***Axioma 1***?

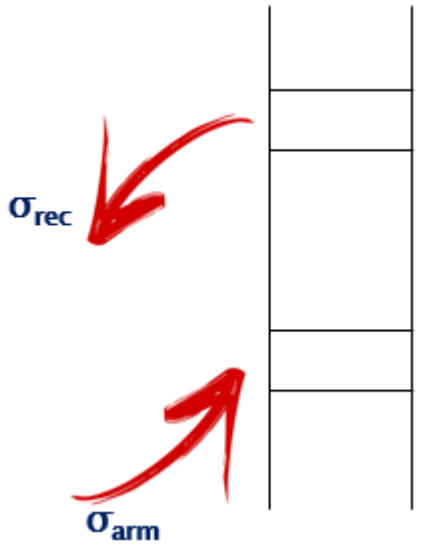
Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 1*** propõe que:

  - ✓ Os tempos requeridos para recuperar um operando da memória e para armazenar o resultado na memória são constantes, respectivamente:

σ_{rec} e σ_{arm}



Método Analítico e Modelo de Knuth

Exemplo 1

- ***Axioma 1***:
  - Qual o tempo de processamento da atribuição?

$$y = x;$$

Método Analítico e Modelo de Knuth

Exemplo 1

- ***Axioma 1***:
  - Qual o tempo de processamento da atribuição?

$$y = x;$$

  - ✓ Será necessário recuperar-se em memória o conteúdo da variável ***x***, sendo esse tempo o σ_{rec}
  - ✓ O tempo requerido para se armazenar o valor na variável ***y*** é σ_{arm}

Método Analítico e Modelo de Knuth

Exemplo 1

- ***Axioma 1***:

  - Qual o tempo de processamento da atribuição?

$$y = x;$$

  - ✓ Será necessário recuperar-se em memória o conteúdo da variável ***x***, sendo esse tempo o σ_{rec}
  - ✓ O tempo requerido para se armazenar o valor na variável ***y*** é σ_{arm}

Resposta: $\sigma_{rec} + \sigma_{arm}$

Método Analítico e Modelo de Knuth

Exemplo 2

- ***Axioma 1***:
  - Qual o tempo de processamento da atribuição?

$$y = 1;$$

Método Analítico e Modelo de Knuth

Exemplo 2

- ***Axioma 1***:
  - Qual o tempo de processamento da atribuição?

$$y = 1;$$

  - ✓ Constantes, chamadas de literais numéricos, também são armazenadas em memória (tabela de literais gerada pelo computador);

Método Analítico e Modelo de Knuth

Exemplo 2

- ***Axioma 1***:
  - Qual o tempo de processamento da atribuição?

$$y = 1;$$

  - ✓ Assim, o custo para se recuperar em memória a constante ***1*** também será σ_{rec}
  - ✓ O tempo requerido para se armazenar o valor na variável ***y*** é σ_{arm}

Exemplo 2

- ***Axioma 1***:

  - Qual o tempo de processamento da atribuição?

$$y = 1;$$

  - ✓ Assim, o custo para se recuperar em memória a constante ***1*** também será σ_{rec}
  - ✓ O tempo requerido para se armazenar o valor na variável ***y*** é σ_{arm}

Resposta: $\sigma_{rec} + \sigma_{arm}$

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que propõe o ***Axioma 2***?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 2*** propõe que:
  - ✓ Os tempos necessários para se realizar operações aritméticas elementares, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão e comparação são todos **constantes**.
  - ✓ Estes tempos são denotados, respectivamente, por:

$$\sigma_+ , \sigma_- , \sigma_x , \sigma_/ \text{ e } \sigma_\leq$$

Método Analítico e Modelo de Knuth

Exemplo 3

- ***Axioma 2***:
  - Qual o tempo de processamento da atribuição?

$$y = y + 1;$$

Método Analítico e Modelo de Knuth

Exemplo 3

- ***Axioma 2***:

  - Qual o tempo de processamento da atribuição?

$$y = y + 1;$$

  - ✓ Deve-se recuperar dois valores em memória: ***y*** e ***1***;
  - ✓ O tempo para se recuperar esses valores é $2\sigma_{rec}$
  - ✓ O tempo para se efetuar a soma é σ_{+}
  - ✓ O tempo requerido para se armazenar o resultado na variável ***y*** é σ_{arm}

Método Analítico e Modelo de Knuth

Exemplo 3

- ***Axioma 2***:

  - Qual o tempo de processamento da atribuição?

$$y = y + 1;$$

  - ✓ Deve-se recuperar dois valores em memória: ***y*** e ***1***;
  - ✓ O tempo para se recuperar esses valores é $2\sigma_{rec}$
  - ✓ O tempo para se efetuar a soma é σ_{+}
  - ✓ O tempo requerido para se armazenar o resultado na variável ***y*** é σ_{arm}

Resposta: $2\sigma_{rec} + \sigma_{+} + \sigma_{arm}$

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que propõe o ***Axioma 3***?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 3*** propõe que:
  - ✓ O tempo necessário para se chamar uma função é **constante**: $\sigma_{chamada}$ e o tempo necessário para se retornar de uma função é **constante**: $\sigma_{retorno}$
  - ✓ Quando um método é chamado, algumas operações de bastidores são necessárias: *save* de endereços de retorno, chaveamento de contexto etc.
  - ✓ Estas operações são desfeitas no momento de retorno.

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que propõe o ***Axioma 4***?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 4*** propõe que:
  - ✓ O tempo necessário para se passar um parâmetro, ou argumento, a um método é o mesmo tempo para se armazenar um valor em memória: σ_{arm}
  - ✓ Conceitualmente, o esforço computacional necessário para o tratamento da passagem de parâmetros é o mesmo que se atribuir ao parâmetro formal do método o valor do argumento.

Método Analítico e Modelo de Knuth

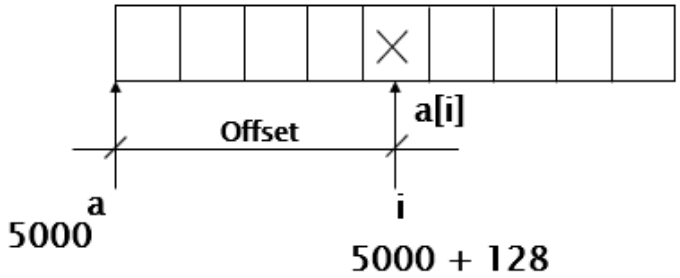
Pergunta

- Como ficam as Operações com índices de *Arrays*?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- Operações com índices de *Arrays*:
  - ✓ Em geral, os elementos de um *array*, ou vetor, são armazenados em locais contíguos de memórias;
  - ✓ Assim, dado o endereço do primeiro elemento do *array*, uma simples operação de adição é suficiente para se determinar o endereço de um elemento arbitrário do *array*.



Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que propõe o ***Axioma 5***?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 5*** propõe que:
  - ✓ O tempo requerido para o cálculo do **endereço** advindo de uma operação de índice de um *array*, por exemplo, ***a[i]*** é constante: σ.
  - ✓ Esse tempo não inclui o tempo para calcular a expressão do índice, nem inclui o tempo de acesso, ou seja, o tempo de recuperação ou armazenamento, ao elemento do *array*;
  - ✓ Exemplo: ***y = a[i];***

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 5*** propõe que:
  - ✓ Exemplo: ***y = a[i];***

Tempo: $3\sigma_{rec} + \sigma_{.} + \sigma_{arm}$

  - ✓ Serão necessários **três recuperações**:
    - A primeira para recuperar ***a***, que é o endereço base do *array*;
    - A segunda para recuperar ***i***; e
    - A terceira para recuperar o elemento ***a[i]***.

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que ocorre no Modelo Simplificado de Knuth?

Resposta

- No Modelo Simplificado de Knuth:
  - ✓ É eliminada a dependência de tempo, assumindo-se um tempo constante e igual ao ciclo do processador **T = 1**;
  - ✓ Assim, contabiliza-se apenas a quantidade de operações efetuadas pelo algoritmo;
  - ✓ O modelo detalhado fornece uma boa previsão do desempenho de execução de um algoritmo, porém, tal modelo é oneroso e trabalhoso, comparado ao modelo simplificado.

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que propõe o ***Axioma 1*** do Modelo Simplificado?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 1*** do Modelo Simplificado propõe que:
  - ✓ O total de ciclos de processador requeridos para recuperar um operando da memória e para armazenar o resultado na memória são constantes:
    1 ciclo = 1 operação, para recuperar; e
    1 ciclo = 1 operação para armazenar.
  - ✓ Exemplo: Qual o total de operações para executar a atribuição?

$$y = x; \qquad (\sigma_{rec} + \sigma_{arm})$$

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 1*** do Modelo Simplificado propõe que:
  - ✓ O total de ciclos de processador requeridos para recuperar um operando da memória e para armazenar o resultado na memória são constantes:
    1 ciclo = 1 operação, para recuperar; e
    1 ciclo = 1 operação para armazenar.
  - ✓ Exemplo: Qual o total de operações para executar a atribuição?

$$y = x; \qquad (\sigma_{rec} + \sigma_{arm})$$

Resposta: **1 + 1 = 2 operações**

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que propõe o ***Axioma 2*** do Modelo Simplificado?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 2*** do Modelo Simplificado propõe que:
  - ✓ As operações necessárias para se realizar operações aritméticas elementares, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão e comparação são todas constantes e iguais a **1 ciclo cada** ou **1 operação**;
  - ✓ Exemplo: Qual o total de operações para executar a atribuição?

$$y = y + 1; \quad (2\sigma_{rec} + \sigma_{+} + \sigma_{arm})$$

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 2*** do Modelo Simplificado propõe que:
  - ✓ As operações necessárias para se realizar operações aritméticas elementares, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão e comparação são todas constantes e iguais a **1 ciclo cada** ou **1 operação**;
  - ✓ Exemplo: Qual o total de operações para executar a atribuição?

$$y = y + 1; \quad (2\sigma_{rec} + \sigma_{+} + \sigma_{arm})$$

Resposta: **4 operações**

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que propõe o ***Axioma 3*** do Modelo Simplificado?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 3*** do Modelo Simplificado propõe que:

  - ✓ Gasta-se **1 ciclo** de processador, ou **1 operação**, para se chamar um método e **1 ciclo**, ou **1 operação**, para se providenciar o retorno do método;

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 3*** do Modelo Simplificado propõe que:

  - ✓ Gasta-se **1 ciclo** de processador, ou **1 operação**, para se chamar um método e **1 ciclo**, ou **1 operação**, para se providenciar o retorno do método;

Resposta: **2 operações**

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que propõe o ***Axioma 4*** do Modelo Simplificado?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 4*** do Modelo Simplificado propõe que:

  - ✓ Gasta-se **1 ciclo** de processador, ou **1 operação**, para se passar um parâmetro a um método;

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 4*** do Modelo Simplificado propõe que:

  - ✓ Gasta-se **1 ciclo** de processador, ou **1 operação**, para se passar um parâmetro a um método;

Resposta: **1 operação**

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- O que propõe o ***Axioma 5*** do Modelo Simplificado?

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 5*** do Modelo Simplificado propõe que:

  - ✓ Serão necessárias três recuperações:
    - A primeira para recuperar ***a***, o endereço base do *array*;
    - A segunda para recuperar ***i***; e
    - A terceira para recuperar o elemento ***a[i]***;

$$y = a[i]; \quad \text{Tempo: } (3\sigma_{rec} + \sigma_{.} + \sigma_{arm})$$

Método Analítico e Modelo de Knuth

Resposta

- O ***Axioma 5*** do Modelo Simplificado propõe que:

  - ✓ Serão necessárias três recuperações:
    - A primeira para recuperar ***a***, o endereço base do *array*;
    - A segunda para recuperar ***i***; e
    - A terceira para recuperar o elemento ***a[i]***;

$$y = a[i]; \quad \text{Tempo: } (3\sigma_{rec} + \sigma_{.} + \sigma_{arm})$$

Resposta: **5 operações básicas**

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- Qual a utilidade da Função de Complexidade?

Resposta

- A Função Complexidade é útil:

  - ✓ Para medir o custo de execução de um algoritmo é comum definir uma função de custo ou função de complexidade ***f***;
  - ✓ A Função de Complexidade na realidade não representa tempo diretamente, mas o número de vezes que determinada operação, considerada relevante, é executada.

Método Analítico e Modelo de Knuth

Pergunta

- Quais os tipos de Função de Complexidade?

Método Analítico e Modelo de Knuth

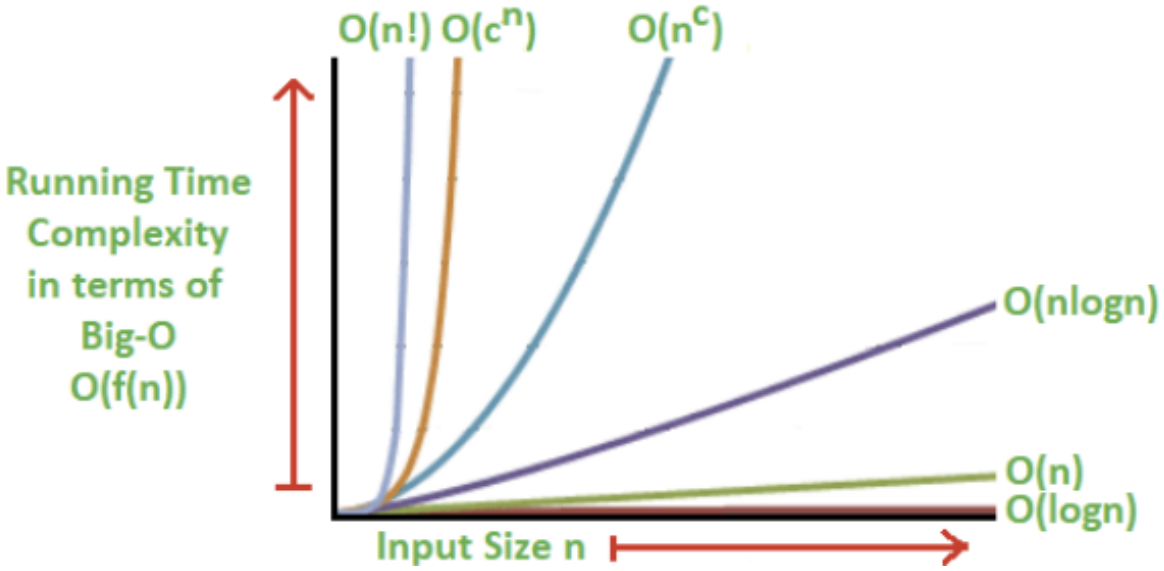
Resposta

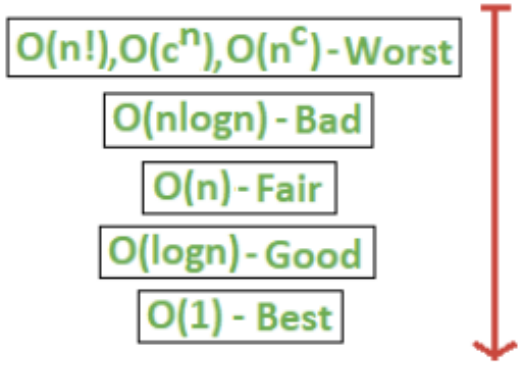
- A Função Complexidade pode ser:

  - ✓ Função de complexidade de **tempo**: ***f(n)*** mede o tempo necessário para executar um algoritmo em um problema de tamanho ***n***;
  - ✓ Função de complexidade de **espaço**: ***f(n)*** mede a memória necessária para executar um algoritmo em um problema de tamanho ***n***.

Método Analítico e Modelo de Knuth

Função de Complexidade





Referências bibliográficas

- CORMEN, T.H. et al. Algoritmos: Teoria e Prática (Caps. 13). Campus. 2002.
- ZIVIANI, N. Projeto de algoritmos: com implementações em Pascal e C (Cap. 1). 2.ed. Thomson, 2004.
- FEOFILOFF, P. Minicurso de Análise de Algoritmos, 2010. Disponível em:

  http://www.ime.usp.br/~pf/livrinho-AA/
- DOWNEY, A.B. *Analysis of algorithms* (Cap. 2), Em: *Computational Modeling and Complexity Science.* Disponível em:

  http://www.greenteapress.com/compmod/html/book003.html
- ROSA, J.L. Notas de Aula de Introdução a Ciência de Computação II. Universidade de São Paulo. Disponível em:

  http://coteia.icmc.usp.br/mostra.php?ident=639

Referências bibliográficas

- GOODRICH, Michael T. et al: *Algorithm Design and* Applications. Wiley, 2015.
- LEVITIN, Anany. *Introduction to the Design and Analysis of Algorithms*. Pearson, 2012.
- SKIENA, Steven S. *The Algorithm Design Manual.* Springer, 2008.
- Série de Livros Didáticos. *Complexidade de Algoritmos.* UFRGS.
- BHASIN, Harsh. *Algorithms – Design and Analysis.* Oxford University Press, 2015.
- FREITAS, Aparecido V. de – 2022 – Estruturas de Dados: Notas de Aula.
- CALVETTI, Robson - 2015 – Estruturas de Dados: Notas de Aula.

FIM