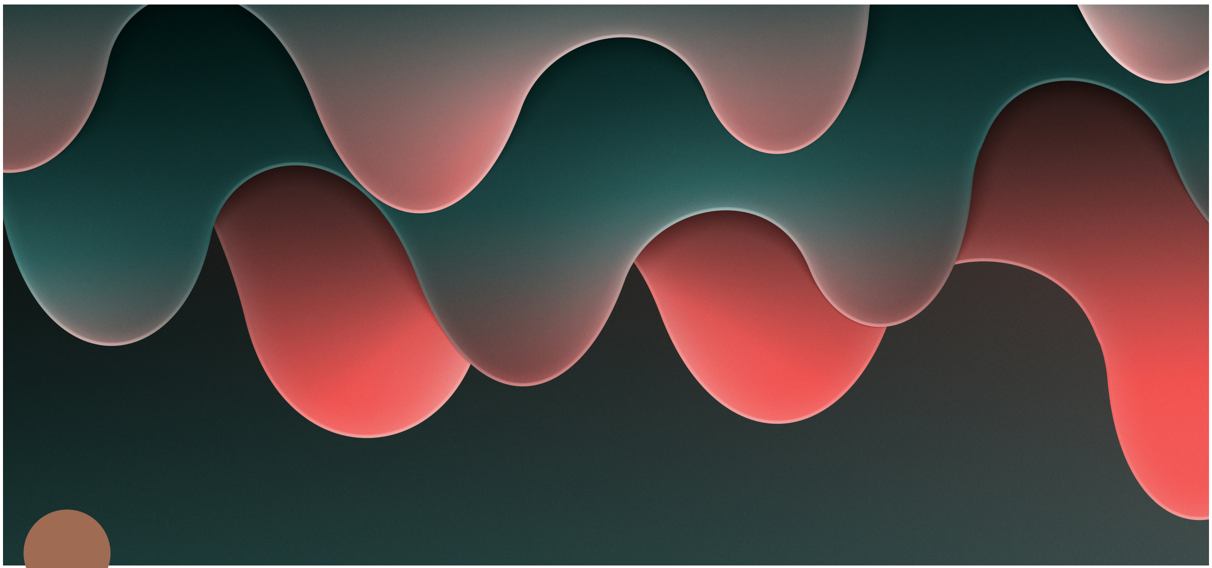


Grafos

Data	@October 17, 2024
Matéria	ECM306
Tarefa	Feito
↗ 🟢 — Atividades e Provas / Assignments & Exams / Tareas y Examenes / 宿題 と 試験 —	ED - Grafos

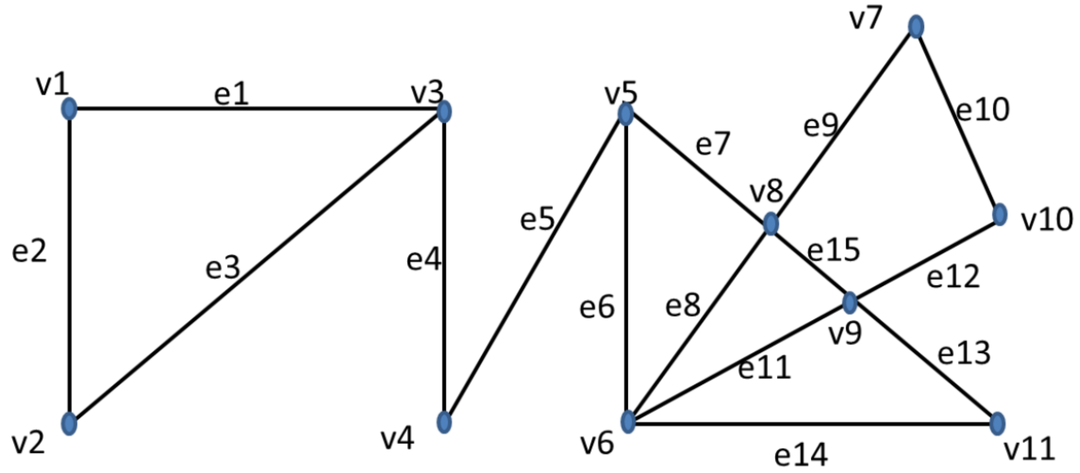
IMT-2024-ECM306-Teo-Aula20-TeoriaDosGrafos-Exercícios-ProfCalvetti.pdf

---

Exercícios sobre Grafos

Conceitos (questão 1 a 22)

Sobre o grafo G (questão 1 a 8)



1. Defina os conjuntos V e E que o constituem.

   V = {v1, v2, v3, v4, v5, v6, v7, v8, v9, v10, v11}
   E = {e1, e2, e3, e4, e5, e6, e7, e8, e9, e10, e11, e12, e13, e14, e15}

2. Há arestas paralelas no Grafo? Justifique.

   O grafo G não tem arestas paralelas, pois para as arestas serem paralelas é necessário que duas ou mais arestas tenham os mesmo vértices. Isso não ocorre no grafo G.

3. Há vértices isolados no Grafo? Justifique.

   O grafo G não tem vértices isolados, pois para que o vértice seja isolado é necessário que ele não seja extremidade de qualquer arestas. Isso não ocorre em G, já que todos os vértices são extremidade de alguma arestas.

4. Qual o conjunto vizinhança dos vértices v6 e v9?

> Vértices vizinhos: vértices ligados por alguma aresta

N(v6) = {v5, v8, v9, v11}

N(v9) = {v6, v8, v10, v11}

5. O grafo G é simples? Justifique.

O grafo G é simples porque ele não tem loops nem arestas paralelas.

6. Defina o grau de todos os vértices do grafo G.

> Grau do vértice: número de arestas que são incidentes ao grafo

d(v1) = 2

d(v2) = 2

d(v3) = 3

d(v4) = 2

d(v5) = 3

d(v6) = 4

d(v7) = 2

d(v8) = 4

d(v9) = 4

d(v10) = 2

d(v11) = 2

7. Defina a sequência dos Graus do Grafo G.

    (2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4)

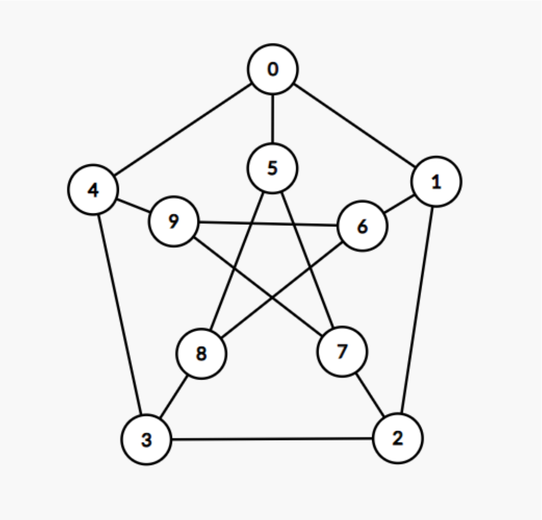
8. O grafo G é regular? Justifique.

    O grafo G não é regular, pois para ser regular todos os vértices precisam ter o mesmo grau. Isso não ocorre me G.

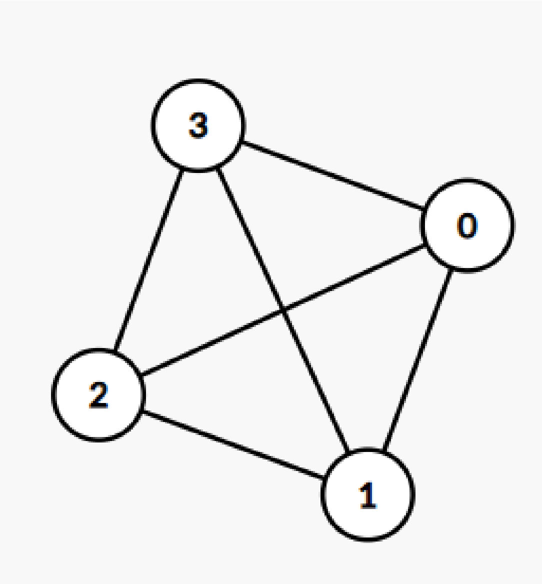
Perguntas diretas 1 (questão 9 a 14)

9. Mostre graficamente, dois grafos G1 e G2 cúbicos.

    > Grafo cúbico: todos os vértices tem grau 3



G1



G2

https://csacademy.com/app/graph_editor/

9. Pode haver um grafo simples com 15 vértices, cada um com grau 5 ? Justifique.

> A soma de todos os graus deve ser o dobro da quantidade de arestas; o produto entre a quantidade de vértices e o grau deve ser par.
> O grau de cada um deve ser menor ou igual a quantidade de vértices menos 1
>
> k ≤ n - 1 e k * n é par

5 ≤ 15 - 1

$15 \cdot 5 = 75$

Não é possível haver um grafo com 15 vértices com grau 5 cada, já que o grafo não segue o teorema de que a soma do grau de todos vértices deve ser resultar em número par.

10. Pode haver um grafo simples com 10 vértices, cada um com grau 3 ? Justifique.

10 ∗ 3 = 30

É possível haver um grafo com 10 vértices com grau 3 cada, já que a soma dos graus de todos os vértices é par.

11. O grafo de intersecção de uma coleção de conjuntos A1, A2, ... , An é o grafo que tem um vértice para cada um dos conjuntos da coleção e tem uma aresta conectando os vértices se esses conjuntos têm uma

intersecção não vazia. Construa o grafo de intersecção para a seguinte coleção de conjuntos:

A1 = { 0, 2, 4 , 6, 8 }
A2 = { 0, 1 , 2 , 3, 4 }
A3 = { 1, 3, 5, 7, 9 }
A4 = { 5, 6, 7, 8, 9 }
A5 = { 0, 1, 8, 9 }

A1 ∩ A2 = {0, 2, 4}

A2 ∩ A3 = {1, 3}

A3 ∩ A4 = {5, 7, 9}

A4 ∩ A5 = {8, 9}

A5 ∩ A1 = {0, 8}

A2 ∩ A5 = {0, 1}

A3 ∩ A5 = {1, 9}

A1 ∩ A4 = {0, 8}

A1 e A3 não tem nada comum

A2 e A4 não tem nada comum

A1 - A2

A1 - A4

A2 - A3

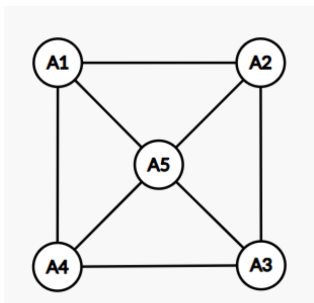
A2 - A5

A3 - A4

A3 - A5

A4 - A5

A5 - A1



12. Considere dois grafos G1, com 10 vértices e G2 com 11 vértices. Os grafos G1 e G2 podem ser isomorfos? Justifique.

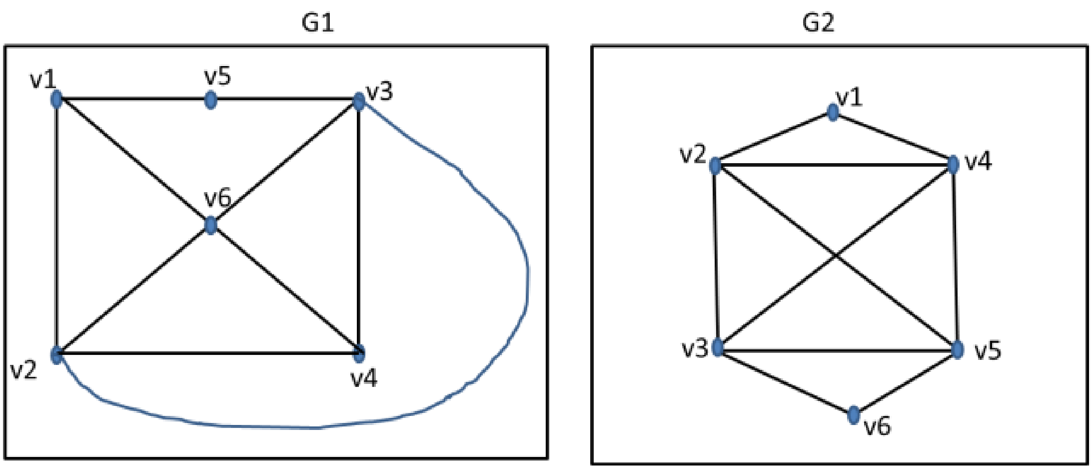
> Grafos Isomorfos é quando existe uma correspondência entre os conjuntos de vértices e arestas entre dois grafos ⇒ tem o mesmo número de arestas e de vértices, e um número igual de vértices com determinado grau → pensa que é feito de elástico, se tu puxar dá pra formar o outro

Não, os grafos G1 e G2 não são isomorfos dado que para serem isomorfos é preciso que eles tenham a mesma quantidade de vértices.

13. Considere dois grafos G1, com 5 arestas e G2 com 6 arestas. Os grafos G1 e G2 podem ser isomorfos? Justifique.

Não, os grafos G1 e G2 não são isomorfos dado que para serem isomorfos é preciso que eles tenham a mesma quantidade de arestas.

Sobre os Grafos G1 e G2 (questão 15)



15. G1 e G2 são isomorfos? Justifique.

Requisitos:

mesma quantidade de vértices ✔

mesma quantidade de vértices ✔

um número igual de vértices com determinado grau ❌

G1 e G2 não são isomorfos porque não possui um número igual de vértices com o mesmo grau.

Perguntas diretas 2 (questão 16 a 19)

16. Quantas arestas tem o grafo K7? Justifique.

> Grafo Kn é o grafo completo ⇒ possui n vértices todos conectados uns nos outros; a quantidade de arestas é dada por $\frac{n(n-1)}{2}$.

$\frac{7 \cdot (7-1)}{2} = 21 \text{ arestas.}$

O grafo K7 tem 21 arestas.

17. Quantas arestas tem o grafo K10 ? Justifique.

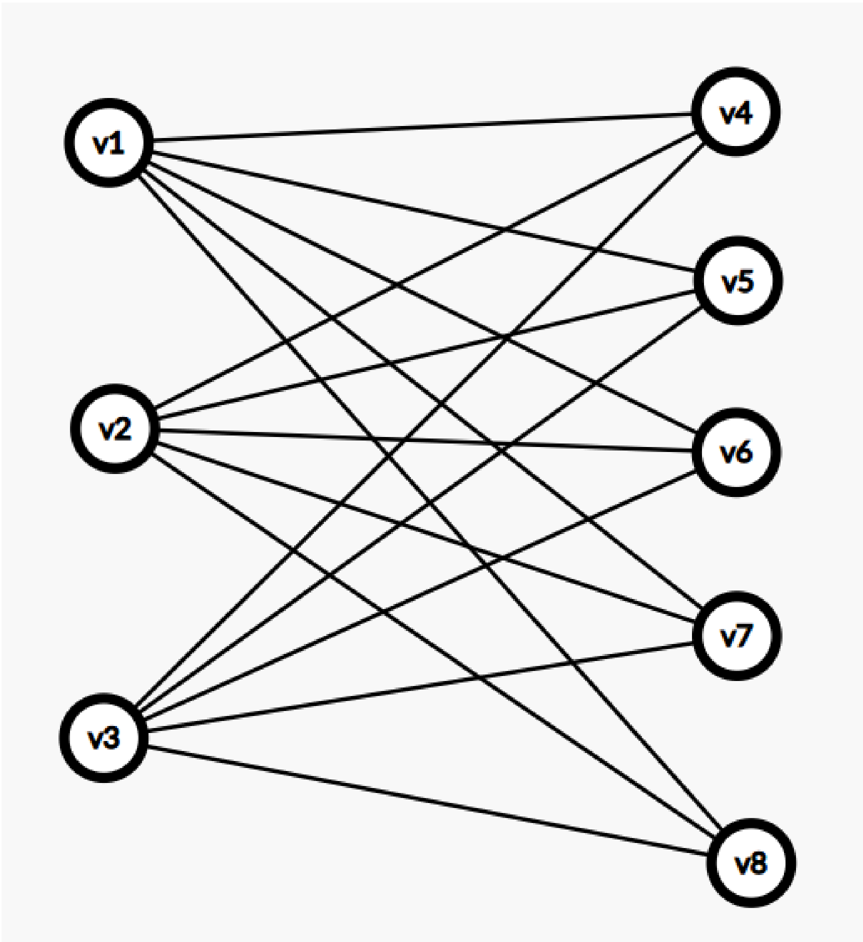
$\frac{10 \cdot (10-1)}{2} = 45$

O grafo K10 tem 45 arestas.

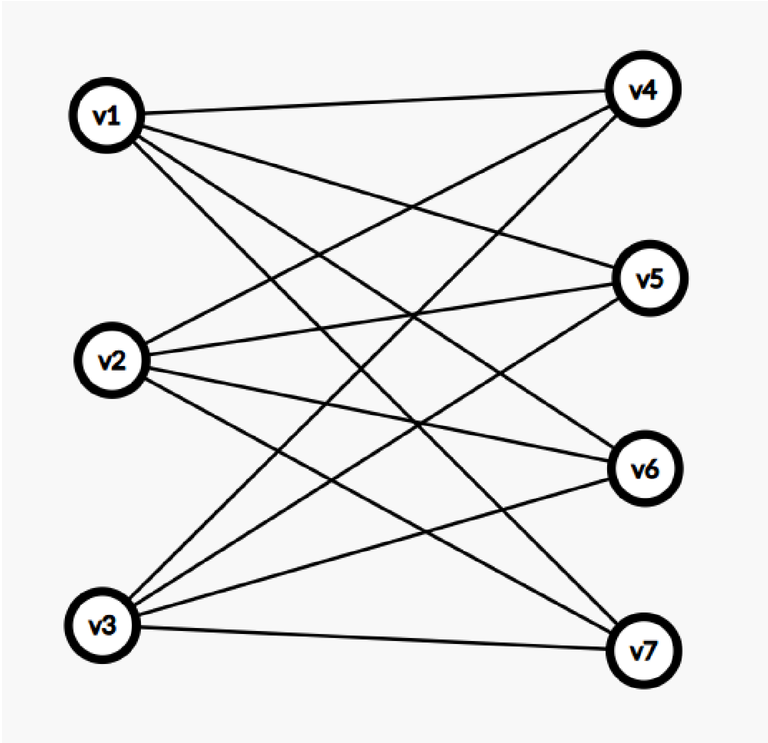
18. Desenhe o grafo K3,5.

Km,n é um grafo bipartido completo.

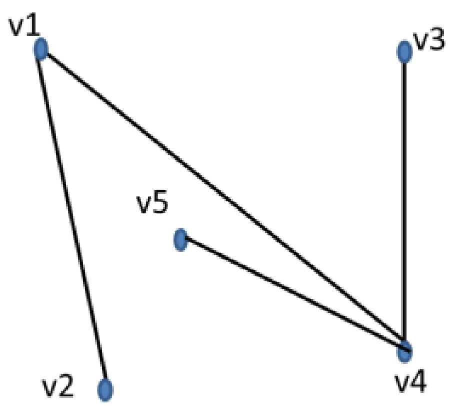
- Os vértices estão divididos em dois conjuntos disjuntos, onde m vértices estão em um conjunto e n vértices no outro.
- Há uma aresta entre cada vértice do primeiro conjunto e cada vértice do segundo conjunto, mas **não existem arestas entre vértices do mesmo conjunto**.



19. Desenhe o grafo K3,4.

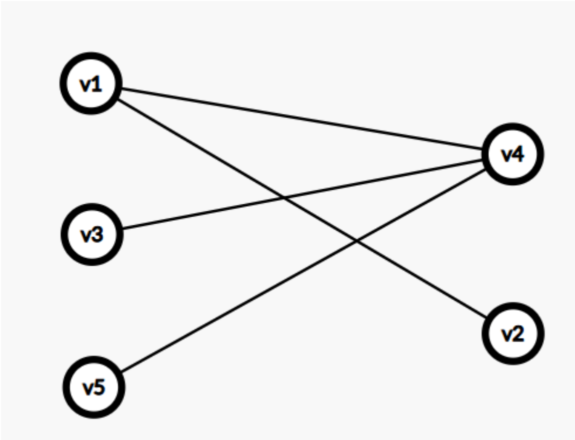


Sobre o Grafo G (questão 20 a 22)



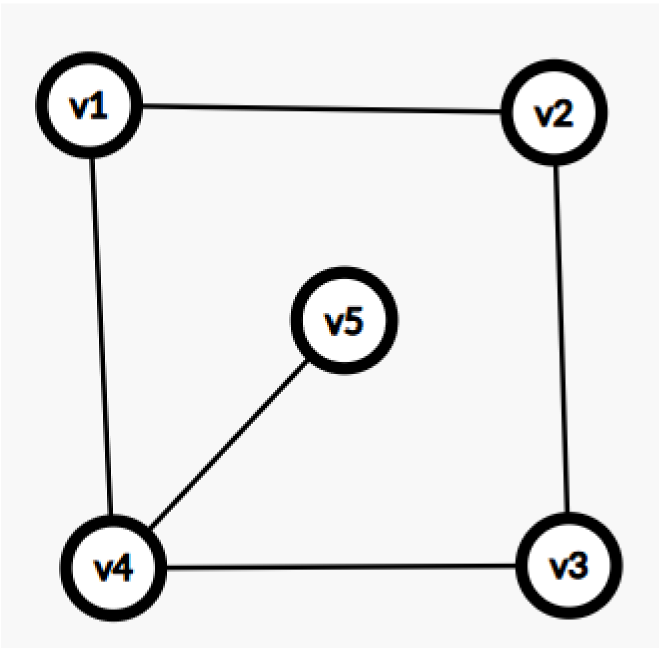
20. G é Bipartido? Justifique.

    Sim, é possível redesenhar o grafo G como se fosse dois conjuntos separados de forma que não há arestas ligando vértices do mesmo conjunto.



21. Defina um supergrafo de G.

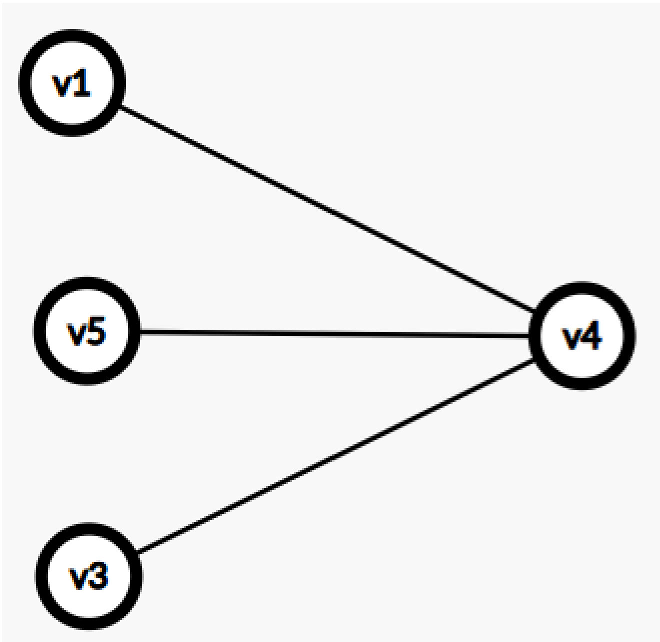
> Supergrafo é um grafo que contém um ou mais grafos como subgrafos.
> Supergrafo inclui todos os vértices e arestas de um ou mais grafos menores.



add aresta entre v1 e v3

22. Defina um subgrafo de G.

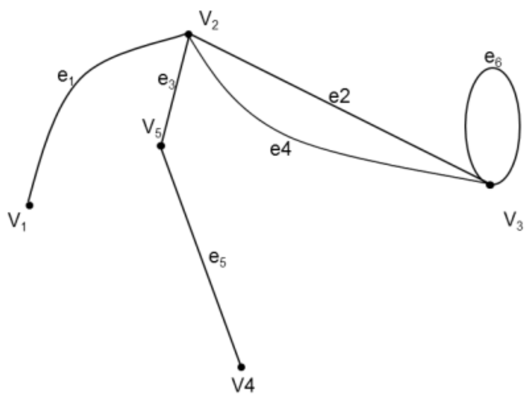
> Subgrafo é uma parte de um grafo que consiste em um subconjunto dos seus vértices e arestas.



subgrafo conjunto v1 v3 v4 v5

Passeio, trilha, caminho

Sobre o Grafo G (questão 23 a - f)



23. Considere o grafo acima:
    a. Defina, se possível, um passeio aberto no Grafo G;

    > Passeio aberto: vértice inicial diferente do final; não tem outras restrições

    w = v1 e1 v2 e4 v3 e2 v2 e3 v5 e5 v4

    b. Defina, se possível, um passeio fechado no Grafo G;

    > Passeio fechado: vértice inicial igual ao final; não tem outras restrições

    w = v2 e2 v3 e6 v3 e4 v2

    c. Defina, se possível, uma trilha aberta no Grafo G;

    > Trilha aberta: vértice inicial diferente do final; não pode repetir aresta

    w = v1 e1 v2 e4 v3 e2 v2 e3 v5 e5 v4

    d. Defina, se possível, um circuito no Grafo G;

> Trilha fechada ou circuito: vértice inicial igual ao final; não pode repetir aresta

w = v2 e2 v3 e6 v3 e4 v2

e. Defina, se possível, um caminho aberto n Grafo G;

> Caminho aberto: vértice inicial diferente do final; não pode repetir aresta nem vértice

w = v1 e1 v2 e4 v3

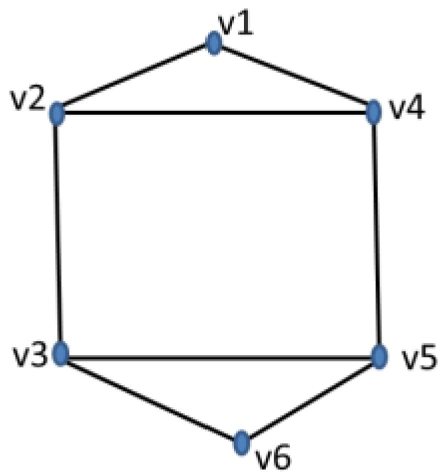
f. Defina, se possível, um ciclo no Grafo G.

> Caminho fechado ou ciclo: vértice inicial igual ao final; não pode repetir aresta nem vértice

w = v2 e2 v3 e4 v2

Grafos Eulerianos

Sobre o grafo G (questão 24)

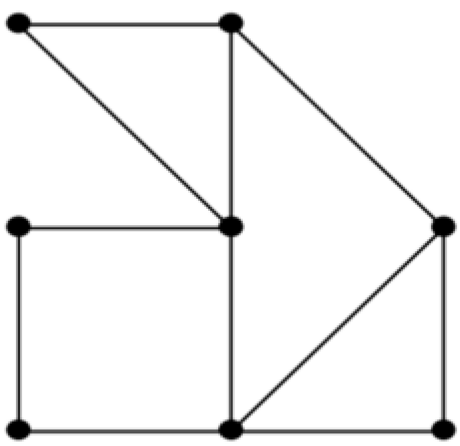


24. O grafo G é Euleriano? Justifique.

> Grafo é Euleriano se tiver uma trilha fechada (circuito) que passe por todos os vértices.
> Todos os vértices têm grau par e o grafo é conexo - deve ser possível ir de qualquer vértice a qualquer outro vértice seguindo as arestas do grafo.

G não é um grafo euleriano porque nem todos os vértices tem grau par e não existe um circuito que passe por todos os vértices.

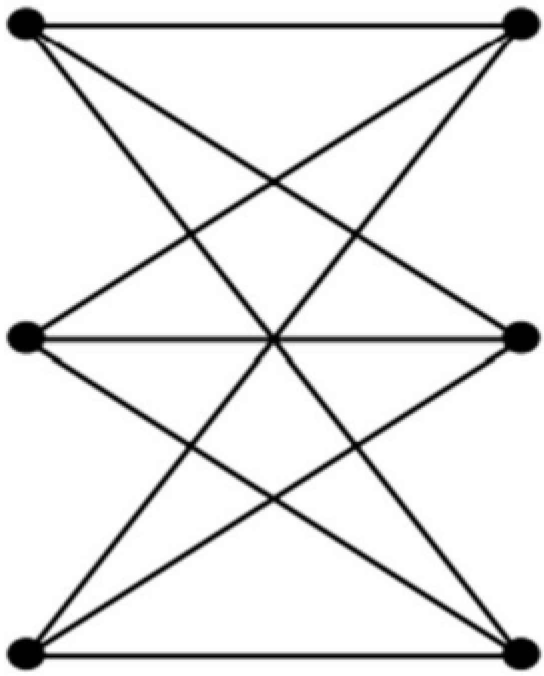
Sobre o grafo G (questão 25)



25. O grafo G é Euleriano? Justifique.

G não é euleriano porque existem vértices cujo o grau é impar e não existe um circuito que passe por todos os vértices.

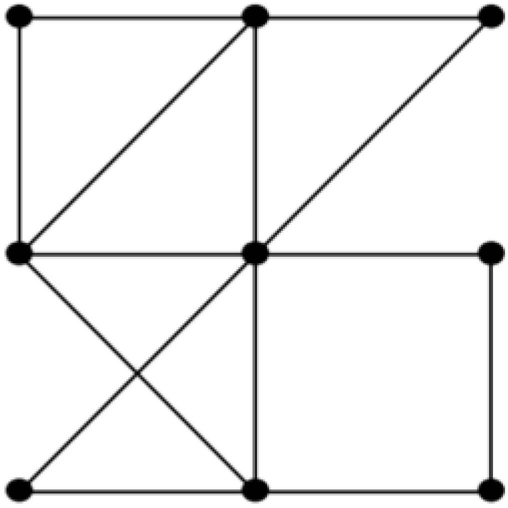
Sobre o grafo G (questão 26)



26. O grafo G é Euleriano? Justifique.

G não é euleriano porque todos os vértices são ímpares.

Sobre o grafo G (questão 27)

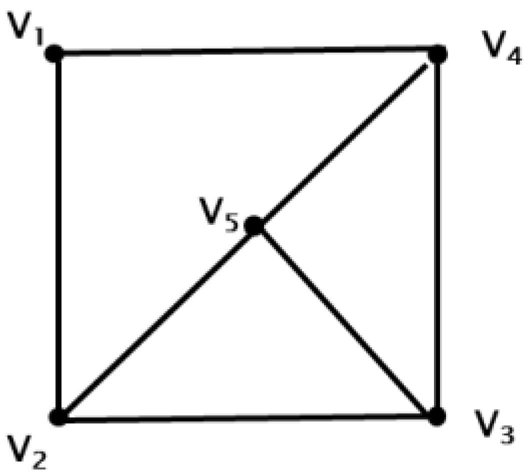


27. O grafo G é Euleriano? Justifique.

O grafo é euleriano pois todos seus vértices tem grau par.

Grafos Halmiltoniano

Sobre o grafo G (questão 28)



28. O grafo G é Hamiltoniano? Justifique.

> Se o grafo é completo com $n \geq 3$, então é hamiltoniano
>
> Se o grafo tem n vértices e todos os vértices têm grau pelo menos n/2, então o grafo é hamiltoniano (Teorema de Dirac).
> Se para cada par de vértices não adjacentes $d(u) + d(v) \geq n$, então o grafo é hamiltoniano (Teorema de Ore).
>
> Se o grafo possui pelo menos dois vértices de grau n−1, onde n é o número total de vértices, então ele é hamiltoniano.

O grafo é hamiltoniano pois segue o teorema de Ore.

Conceitos 2 (29 a 50)

Perguntas diretas 3 (29 a 39)

29. Quantos vértices e arestas têm o grafo K8? Justifique.

    > A notação Kn indica que o grafo é completo com n vértices e n(n-1)/2 arestas.

    Tem 8 vértices e 28 arestas, porque o grafo segue a notação descrita acima.

30. Quantos vértices e arestas tem o grafo K6,3? Justifique.

    > A notação Km,n indica que o grafo é bipartido completo com n + m vértices e n * m arestas.

    Tem 9 vértices e 18 arestas porque o grafo segue a notação descrita acima.

31. Quantos vértices e arestas tem o grafo ciclo C5 ? Justifique.

> A notação Cn indica um ciclo com n vértices em que cada um está conectado a exatamente outros dois vértices formando um ciclo completo, resultando n arestas.

Tem 5 vértices e 5 arestas porque o grafo segue a notação descrita acima.

32. Quantos vértices e arestas tem o grafo Cubo Q5 ? Justifique.

> A notação Qn indica as relações entre os vértices de um hipercubo de n dimensões. O grafo tem 2^n arestas e n*2^(n-1) vértices.

Tem 32 arestas e 80 vértices, já que o grafo segue a notação descrita acima.

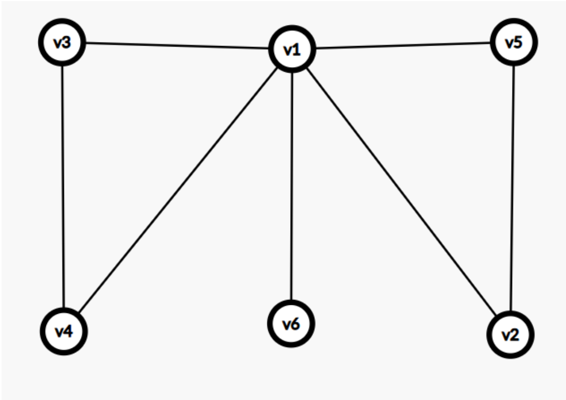
33. Quantos vértices e arestas tem o grafo Roda W4 ? Justifique.

> A notação Wn indica um grafo ciclo com n vértices mais um central. Tem n + 1 vértices e 2*n arestas.

Tem 5 arestas e 8 vértices, conforme descrito acima.

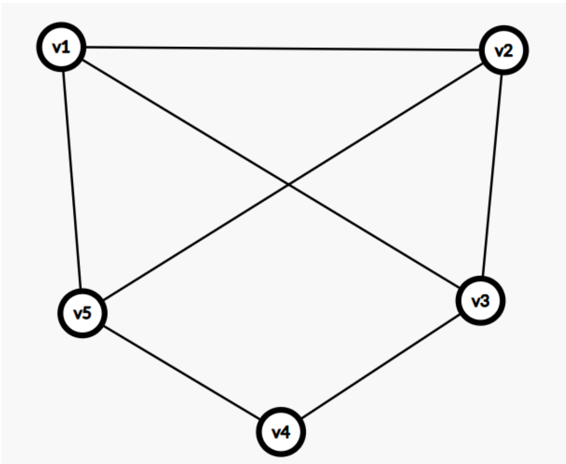
34. Quantas arestas tem um grafo com vértices de Graus 5, 2, 2, 2, 2, 1 ? Desenhe, se possível, o grafo.

Tem 6 vértices e 14 arestas



35. Existe um grafo simples com 5 vértices com os seguintes graus: 3, 3, 3, 3, 2 ? Desenhe, se possível o grafo.

    Sim.



36. Existe um grafo simples com 5 vértices com os seguintes graus: 1, 2, 3, 4, 5 ? Desenhe, se possível o grafo.

    Não existe. Não é possível. A soma de todos os graus é impar.

37. Existe um grafo simples com 5 vértices com os seguintes graus: 1, 2, 3, 4, 4 ? Desenhe, se possível o grafo.

Não existe. Não é possível. Existem dois vértices com grau 4, então todos os outros no mínimo deveriam ter grau 2 para que isso ocorra.

38. Existe um grafo simples com 5 vértices com os seguintes graus: 3, 4, 3, 4, 3 ? Desenhe, se possível o grafo.

Não existe. Não é possível. A soma de todos os graus é impar.

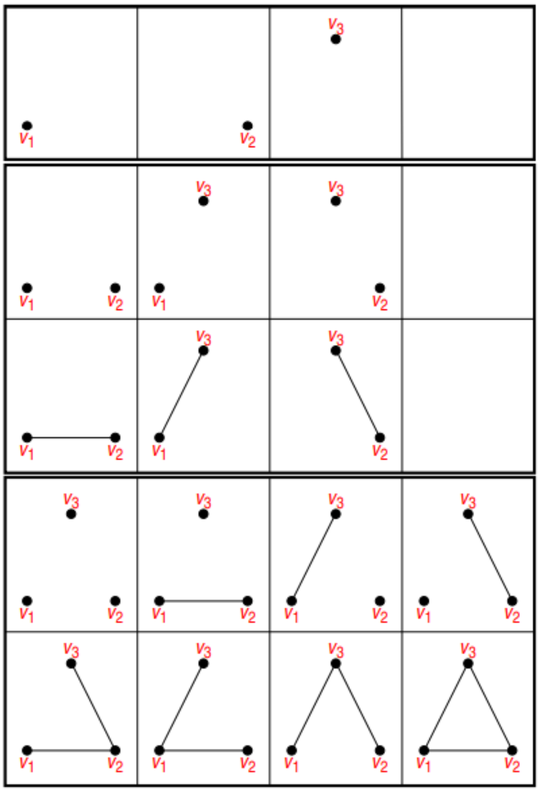
39. Quantos subgrafos com pelo menos um vértice tem K3 ? Justifique.

Pelo menos 1 vértice: 3 (v1 ou v2 ou v3) → todos isolados

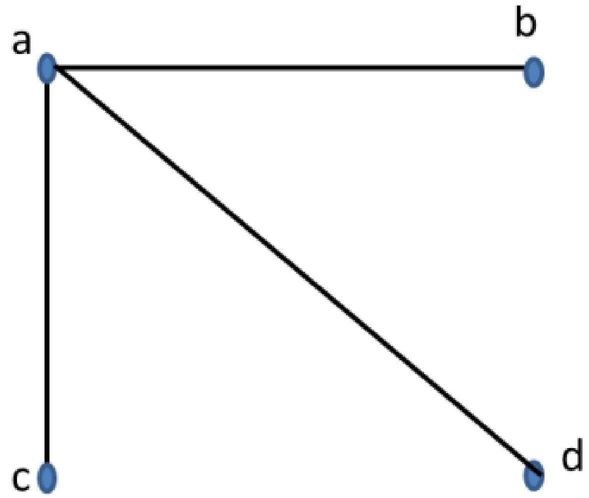
Pelo menos 2 vértices: 6 (v1 e v2 ou v1 e v3 ou v2 e v3) → com ou sem aresta

Pelo menos 3 vértices: 8 (v1, v2 e v3) → com ou sem arestas

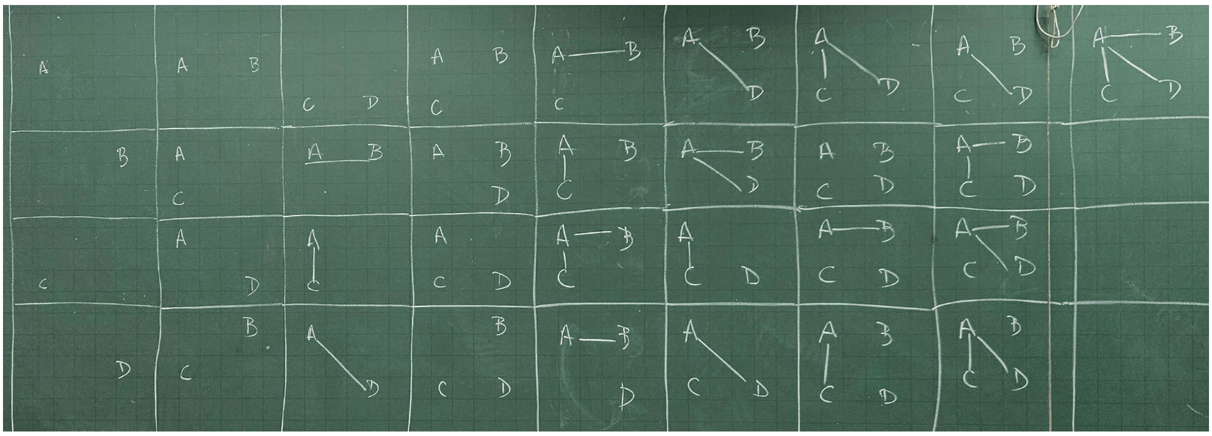
3+6+8 = 17



Sobre o grafo G (questão 40)



40. Desenhe todos os subgrafos de G.



Perguntas diretas 4 (41 a 46)

41. Para que valores de n, os grafos Kn são regulares? Justifique.

    O grafo é regular para qualquer n ≥ 1.

    Cada vértice liga obrigatoriamente em todas os outros vértices, assim todos tem o mesmo grau.

42. Para que valores de n, os grafos Cn são regulares ? Justifique.

    O grafo é regular para qualquer n ≥ 3.

    Cada vértice liga em outros dois, assim todos tem o mesm grau.

43. Para que valores de n, os grafos Wn são regulares ? Justifique.

    Nenhum valor de n torna o grafo W regular, porque o vértice central terá n conexões enquanto os outros vértices terão apenas três.

44. Para que valores de n, os grafos Qn são regulares ? Justifique.

    O grafo é regular para qualquer valor de n ≥ 1.

    Cada vértice se liga a outros a n outros vértices.

45. A condição imposta pelo Teorema de Dirac é suficiente ou necessária? Justifique.

    > Teorema de Dirac: Se cada vértices de G possui pelo menos metade do número total de vértices como vizinhos, então o garfo possui um ciclo hamiltoniano.
    > Outra forma de dizer: Se G é um grafo simples com n vértices (n ≥ 3) e o grau de cada vértice em G é pelo menos n/ 2, então G é hamiltoniano.

    A condição é suficiente porém não necessária.

    Suficiente já que qualquer grafo que satisfaça a condição de Dirac é hamiltoniano, porém não é necessária já que existem grafos hamiltonianos que não satisfazem a condição.

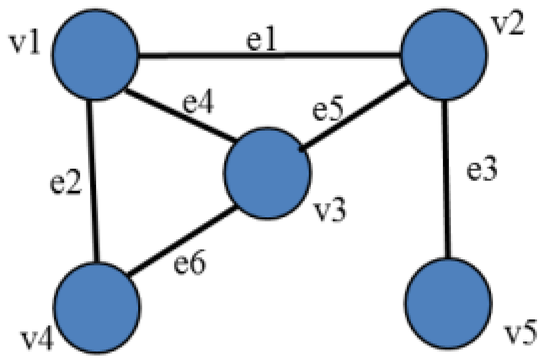
46. A condição imposta pelo Teorema de Ore é suficiente ou necessária? Justifique.

> Teorema de Ore: Se G é um grafo simples com n vértices (n ≥ 3) e se para todos os pares de vértices não adjacentes u e v do grafo, a soma dos graus é d(u) + d(v) ≥ n , então G é hamiltoniano.

A condição é suficiente porém não necessária

Suficiente já que qualquer grafo que satisfaça a condição de Ore é hamiltoniano, porém não necessária já que existem grafos hamiltonianos que não satisfazem a condição.

Sobre o grafo G (questão 47)



47. O grafo G é Hamiltoniano ? Justifique.
    O grafo G é Euleriano ? Justifique

    Condições

    Conexo ? sim

    todos vértices tem grau par? não

    todos os vértices tem grau pelo menos n/ 2? não

O grafo não é nem euleriano nem hamiltoniano, porque ele não ele não possui nem um circuito euleriano nem um ciclo hamiltoniano seguindo as condições propostas.

Perguntas diretas 5 (questão 48 a 50)

48. O que significa dizer que um problema tem complexidade NP Completo? O que significa dizer que um problema tem complexidade P ?

    Um problema de complexidade P é o tipo de problema que tem solução em tempo polinomial em relação ao tamanho da entrada, ou seja, a quantidade de tempo que leva para resolver o problema cresce de forma polinomial conforma cresce o tamanho da entrada.

    O problema de classe NP é uma classe de problemas que podem ser verificadas em tempo polinomial, mas não necessariamente resolvidos em tempo polinomial. Todo problema em P também está em NP. O problema é considerado NP-Completo se está em NP e se não há algoritmo de tempo polinomial que resolva o problema. Os NP-completos são considerados os mais complexos entre os NPs.

49. Descreva o Teorema de Berge para o Problema do Emparelhamento de Grafos. Qual a importância deste teorema para o Problema do Emparelhamento de Grafos ?

    O teorema de Berge diz que se for possível encontrar um caminho que comece e termine com vértices livres alternando entre arestas que pertencem e que não pertencem ao emparelhamento, então existe um emparelhamento M maior que o inicial. Esse caminho se chama Caminho M-aumentante. Em outras palavras, o grafo tem um emparelhamento máximo se não existir cadeia alternada que comece e terminei em um vértice não emparelhado.

    O teorema é importante para encontrar o maior emparelhamento possível, além disso ele é a base de algoritmos de emparelhamento

50. Descreva o Teorema de Hall para o Problema do Emparelhamento de Grafos. Qual a importância deste teorema para o Problema do Emparelhamento de Grafos ?

    O teorema de Hall serve para determinar se tem um emparelhamento completo. Em um grafo bipartido com partição (X, Y) existe um emparelhamento completo se $|N(s)| \geq |s|$ para todo subconjunto S de X. N(s) é chamado de conjunto vizinhança. Essa condição importante porque ela indica que existe um emparelhamento que cobre todos os vértices do conjunto.