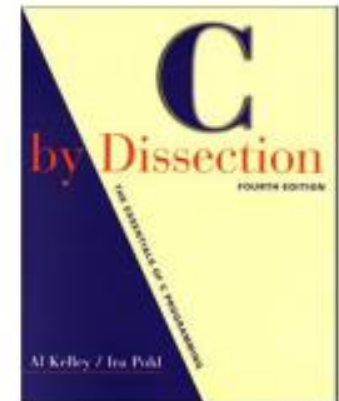
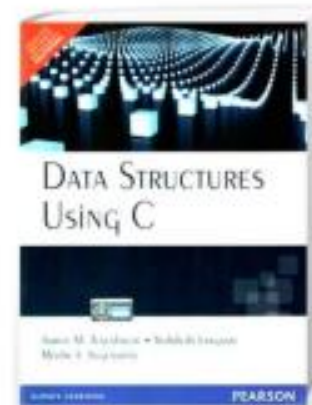


Unidade 14 – Heaps e Filas de Prioridade



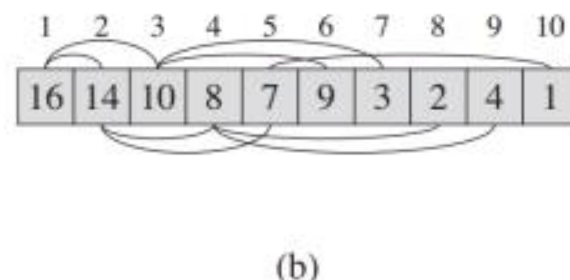
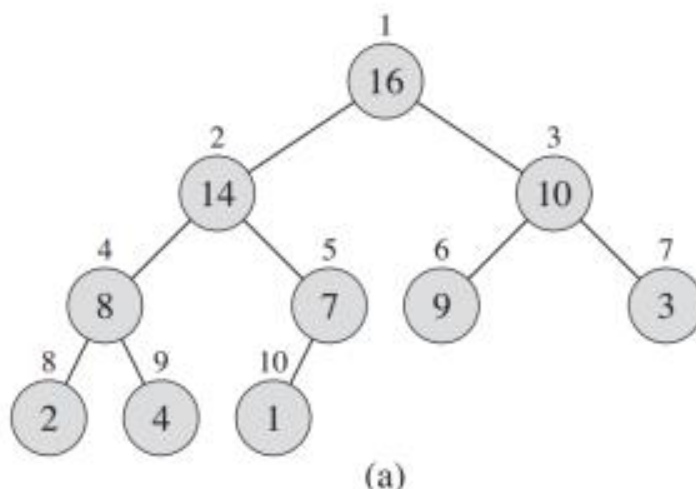
Bibliografia

- Algoritmos – Teoria e Prática – **Cormen** – Segunda Edição – Editora Campus, 2002
- Data Structures using C – Oxford University Press – 2014
- Data Structures Using C – A. Tenenbaum, M. Augense, Y. Langsam, Pearson 1995
- C By Dissection – Kelley, Pohh – Third Edition – Addison Wesley



Heaps

- A estrutura de dados **heap** (binário) pode ser vista como uma **árvore binária praticamente (QUASE) ou completa**.
- Cada **nó** da árvore corresponde a um elemento do array que armazena o valor do nó;
- A árvore está completamente preenchida em todos os níveis, exceto talvez no nível mais baixo, que é preenchido à **esquerda** até certo ponto;
- **Heaps** são **usualmente** implementados por meio de **arrays**.

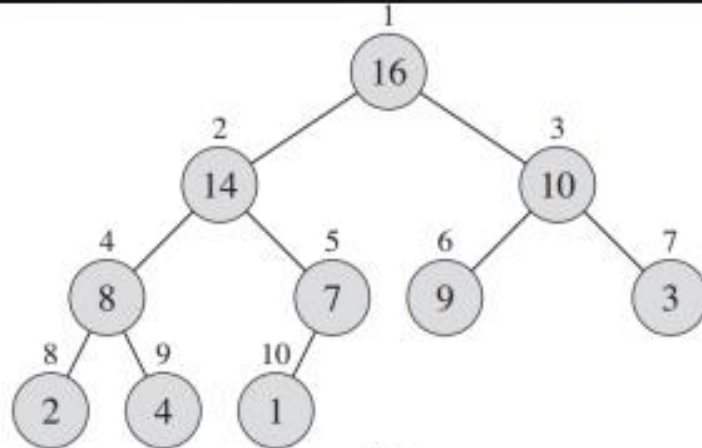


Heaps – Propriedades

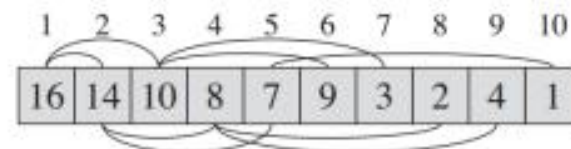
É uma estrutura de dados que pode ser visualizada como uma **árvore binária quase completa**.

Cada nó da árvore é ocupado por um elemento e temos as seguintes propriedades:

- A árvore é completa até o penúltimo nível
- No último nível as folhas estão o mais à esquerda possível
- O conteúdo de um nó é **maior ou igual** ao conteúdo dos nós na subárvore enraizada nele (**max-heap**)



(a)



(b)

■ **Observação:** Se o conteúdo de um nó é **menor** ou igual ao conteúdo dos nós da subárvore enraizada por ele, tem-se um (**min-heap**).

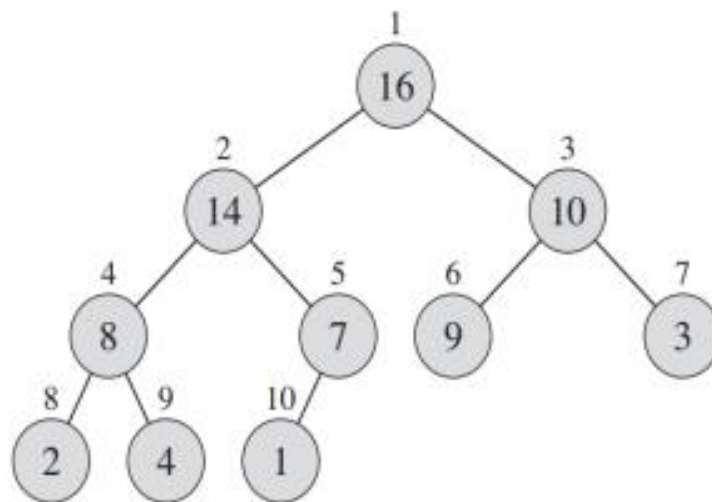
Heaps – Observação

É uma estrutura de dados que pode ser visualizada como uma **árvore binária quase completa**.

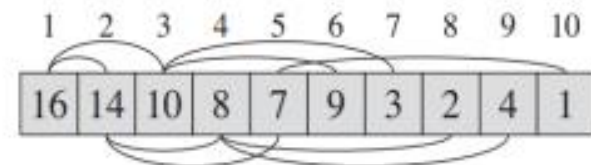
Cada nó da árvore é ocupado por um elemento e temos as seguintes propriedades:

- A árvore é completa até o penúltimo nível
- No último nível as folhas estão o mais à esquerda possível
- O conteúdo de um nó é **maior ou igual** ao conteúdo dos nós na subárvore enraizada nele (**max-heap**)

■ **Observação:** Essas propriedades garantem que um **heap** pode ser implementado em um **array $A[1..m]$** .

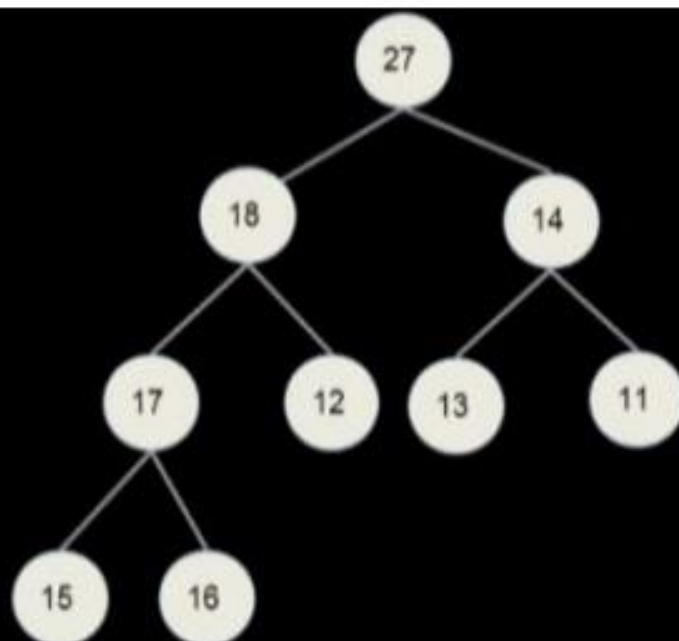


(a)



(b)

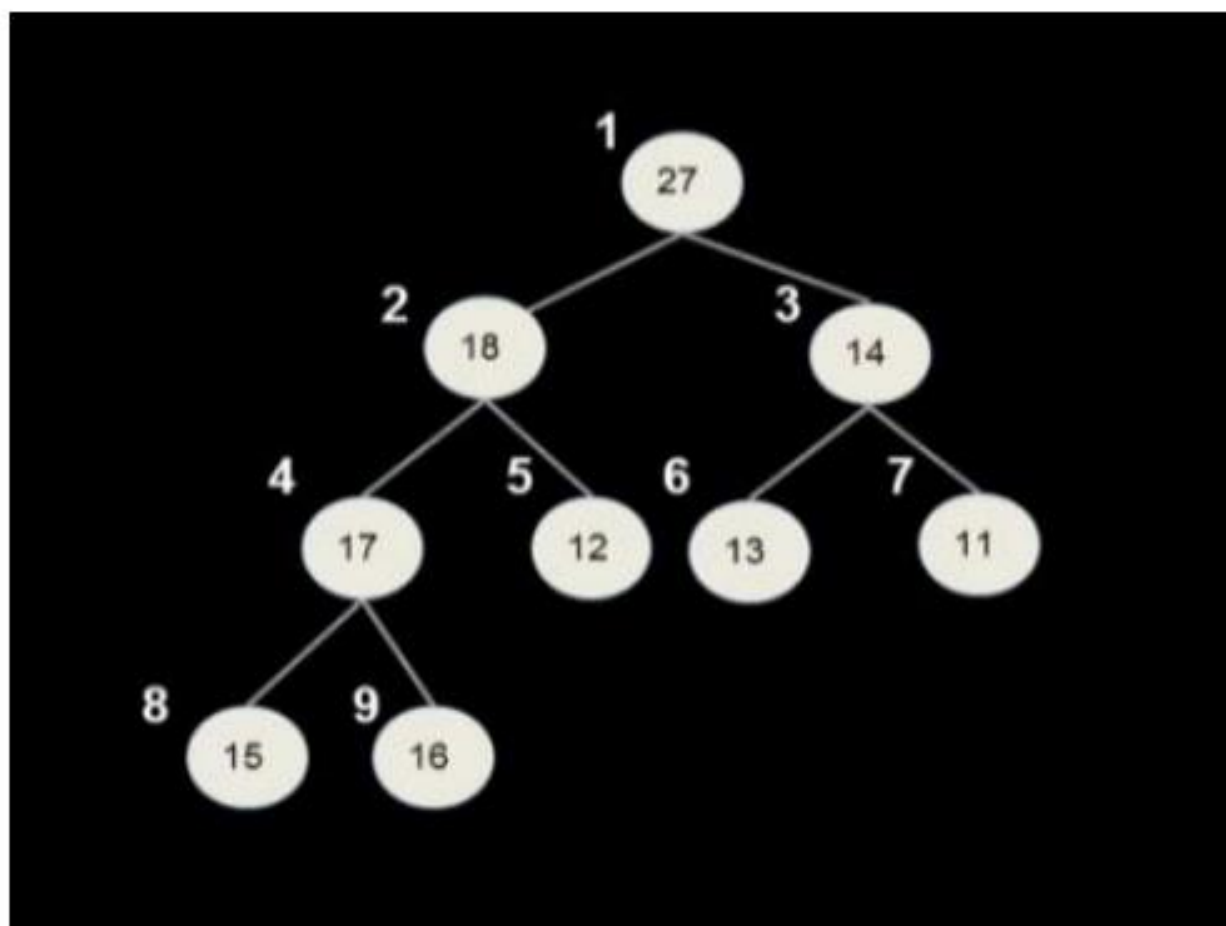
Heap – Exemplo



- A árvore é completa até o penúltimo nível
- No último nível as folhas estão o mais à esquerda possível
- O conteúdo de um nó é **maior ou igual** ao conteúdo dos nós na subárvore enraizada nele (**max-heap**)

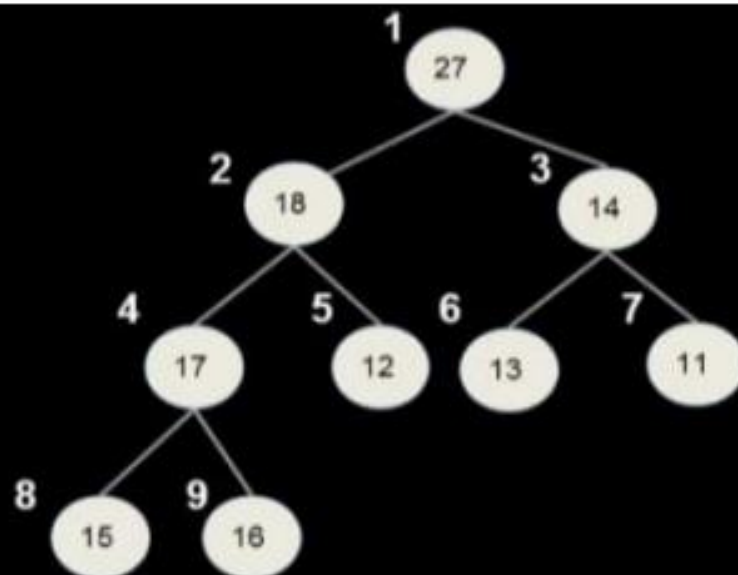
Heap – Implementação

- A implementação do heap, pelas suas propriedades, não exige que se crie uma árvore;
- Pode-se assim, implementar um **heap** por meio de um **array**;



Heap – Implementação

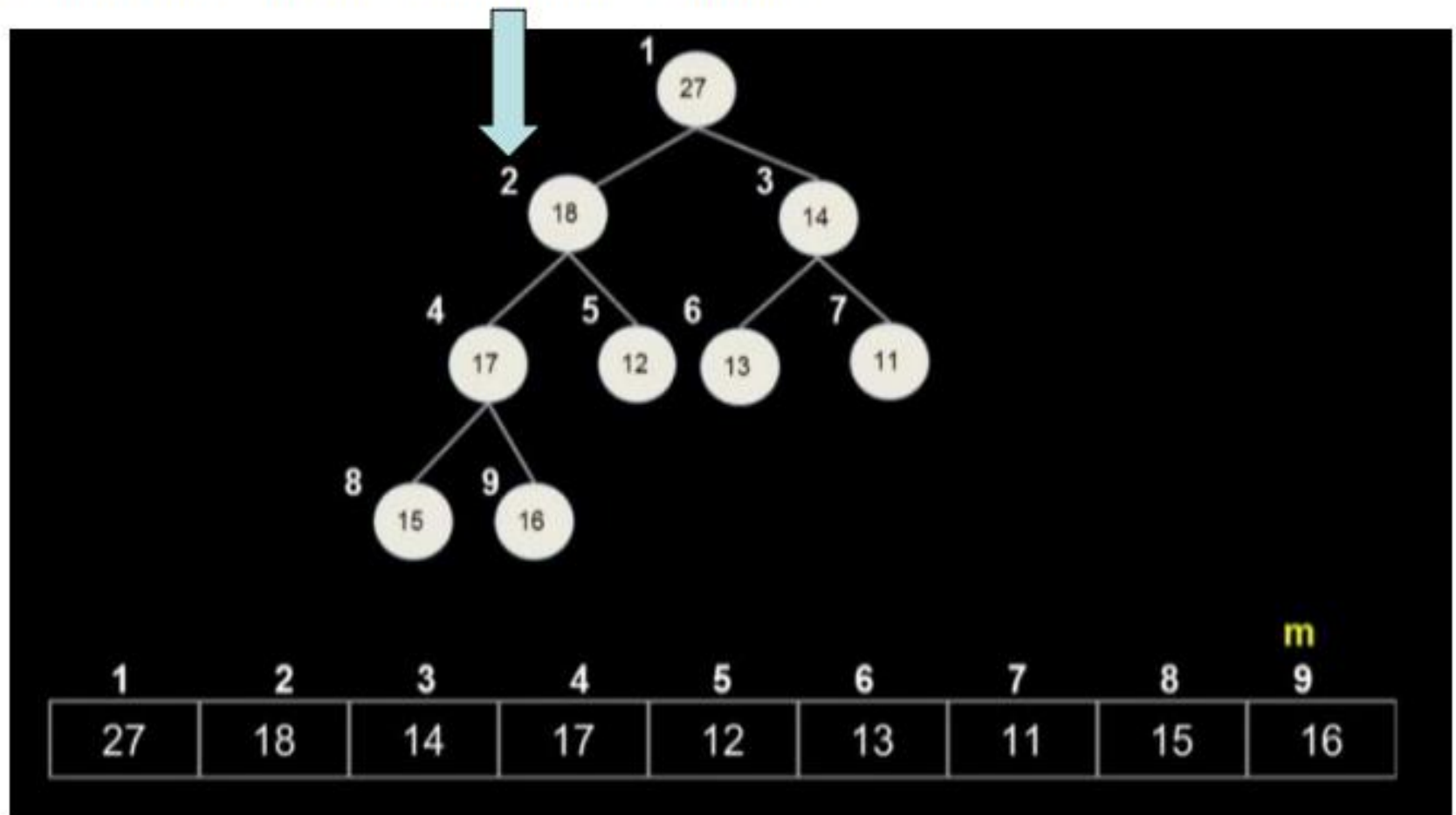
- Assim, a implementação de um heap é feita por meio de um array;



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ^m 9 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----------------|
| 27 | 18 | 14 | 17 | 12 | 13 | 11 | 15 | 16 |

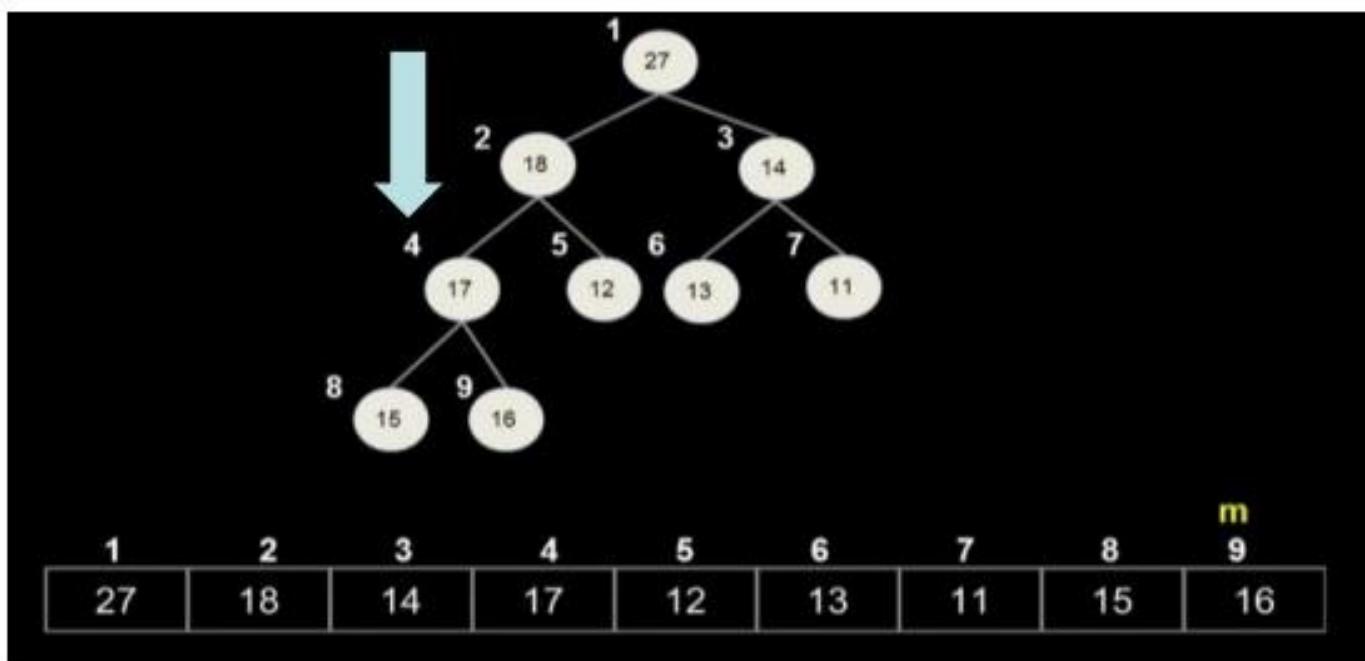
Heap – Implementação

- Dado um elemento do heap, como determinar os valores correspondentes a seus filhos?
- Por exemplo, quem são os filhos do nó de **índice 2**?



Heap – Implementação

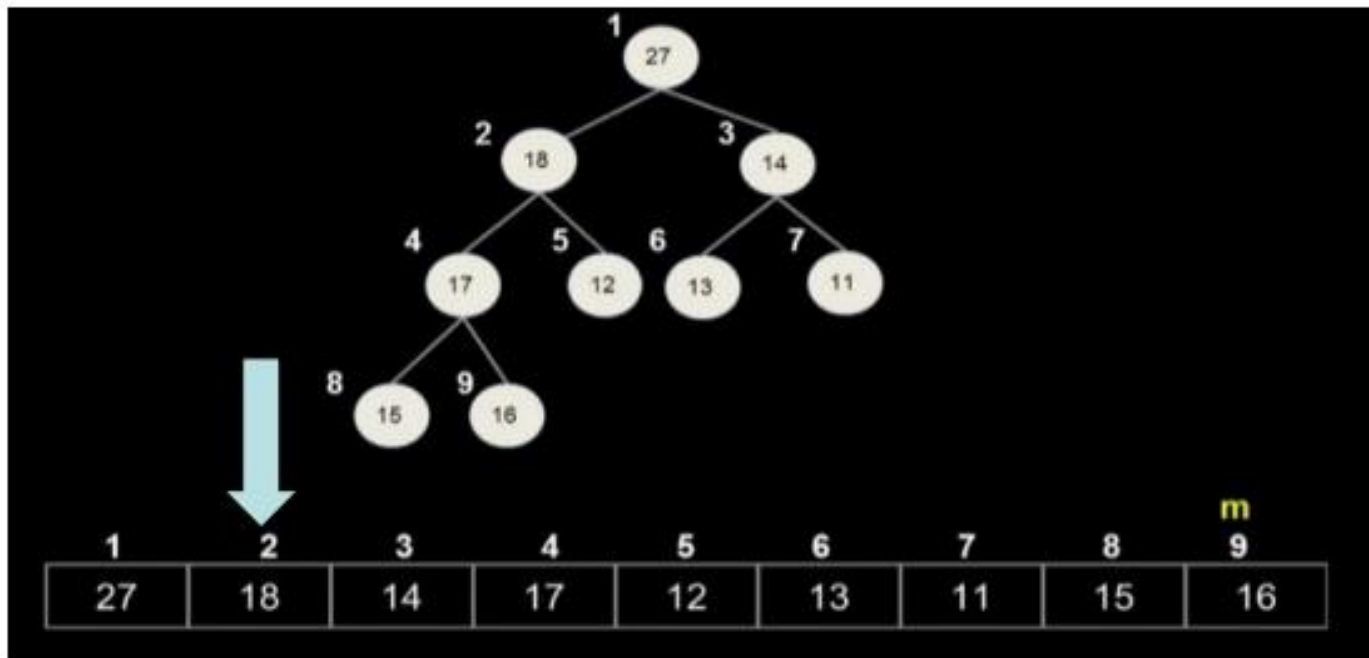
- Por exemplo, quem são os filhos do nó de **índice 2**?



- Observando a árvore correspondente ao heap, é fácil verificar-se que os filhos de 18 são 17 e 12.
- Mas, como determiná-los no array de implementação?

Heap – Implementação

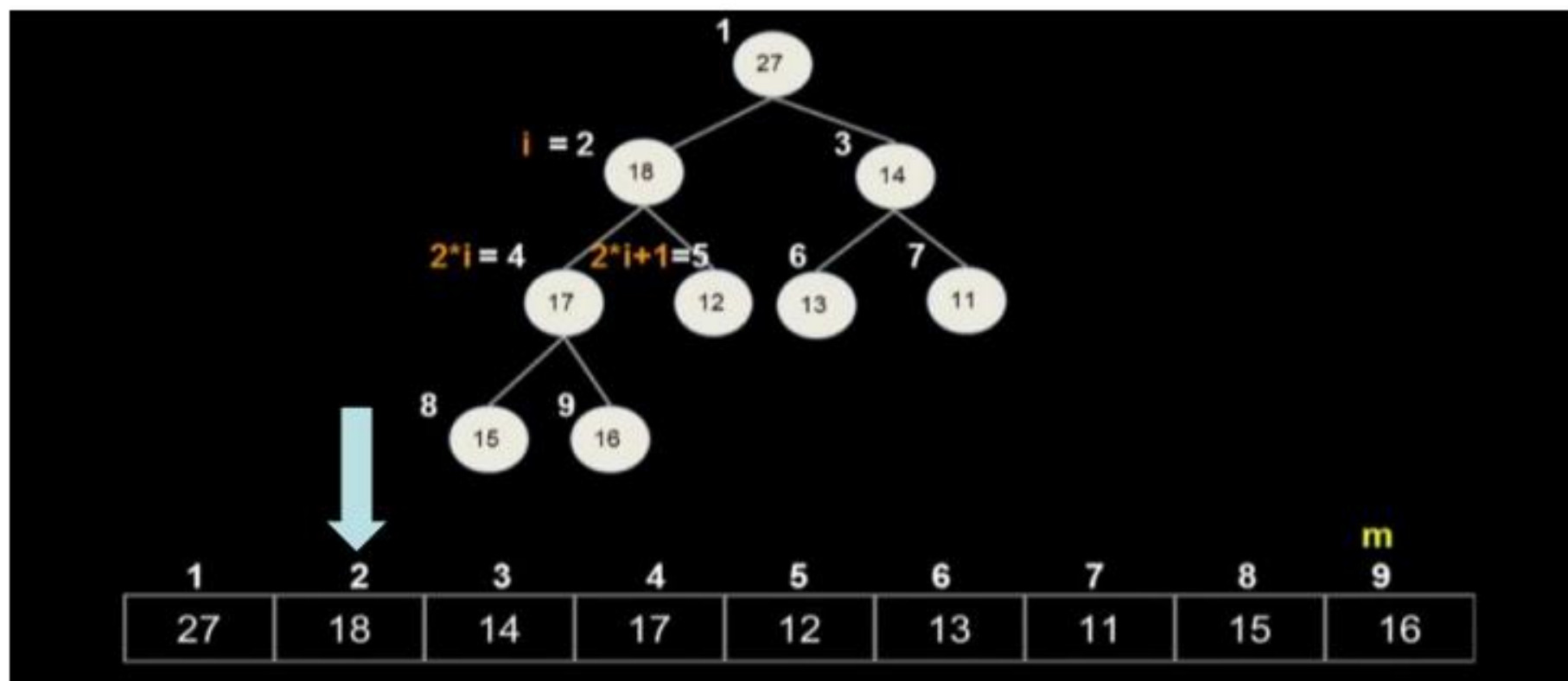
- Por exemplo, quem são os filhos do nó de índice 2?



- Mas, como determiná-los no array de implementação?

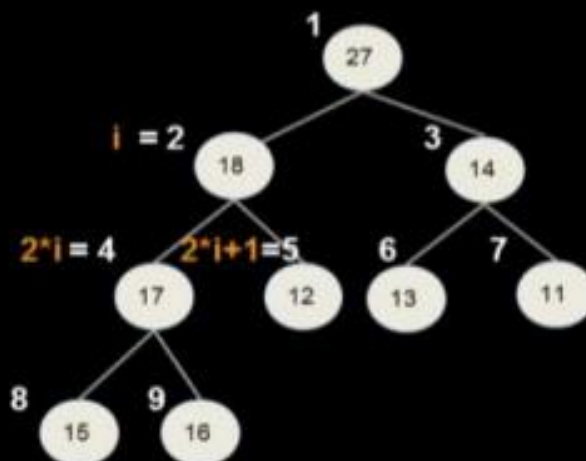
Heap – Implementação

- Por exemplo, quem são os filhos do nó de **índice 2**?



- No array de implementação, o filho a **esquerda** do nó com endereço **i** , está na posição **$2*i$** ;
- No array de implementação, o filho a **direita** do nó com endereço **i** , está na posição **$2*i + 1$** .

Heap – Implementação



Para qualquer nó i :
 $2i$ é o filho esquerdo de i
 $2i+1$ é o filho direito de i
 Quem é o pai de i ?

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 27 | 18 | 14 | 17 | 12 | 13 | 11 | 15 | 16 |

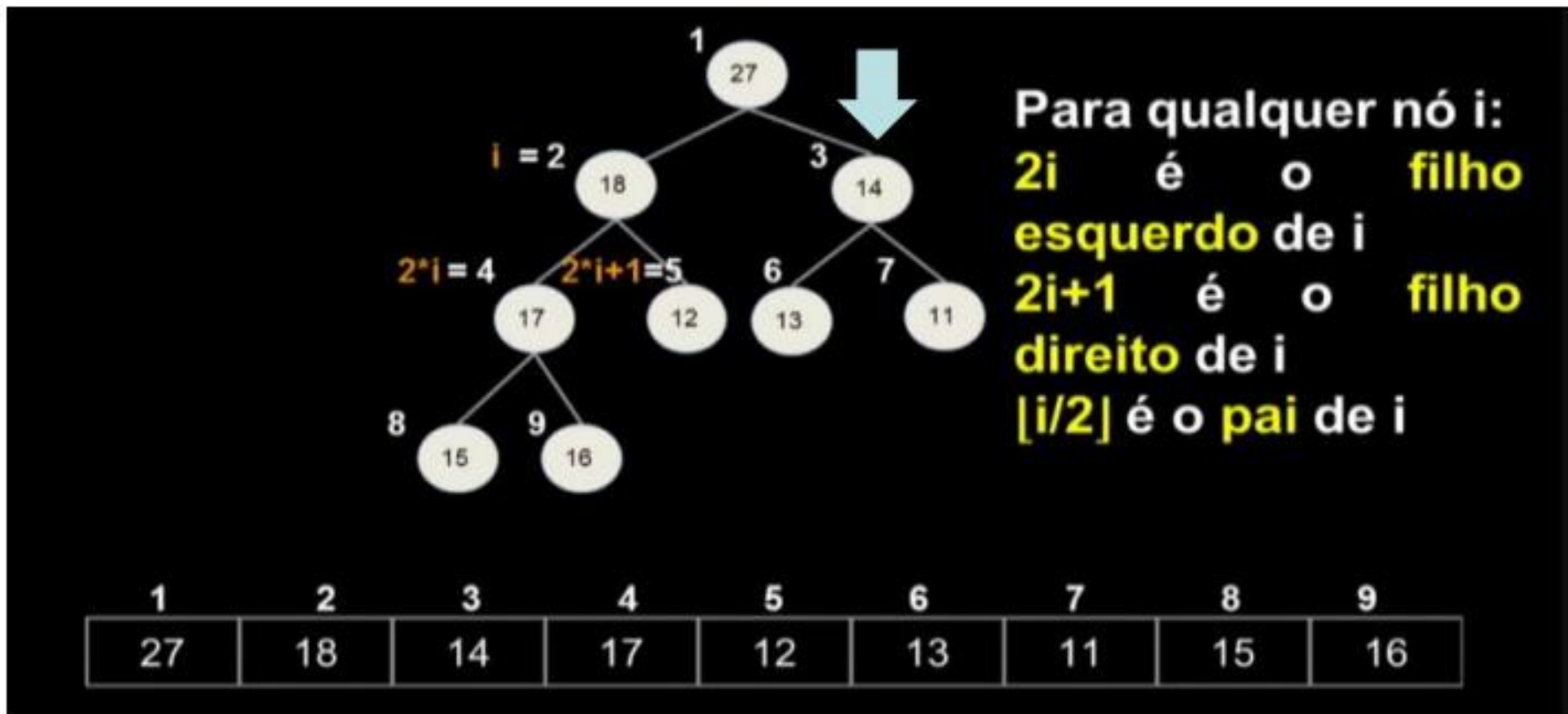
Heap – Implementação

- Dado um nó em um endereço i , qual o endereço de seu pai?



Heap – Implementação

- Dado um nó em um endereço i , qual o endereço de seu pai?



- No array de implementação, o pai de um nó em um endereço i está na posição $\lfloor i/2 \rfloor$.



Heap – Propriedades

- Dado um nó em um endereço i , qual o endereço de seu pai?

PARENT(i)

return $\lfloor i/2 \rfloor$

LEFT(i)

return $2i$

RIGHT(i)

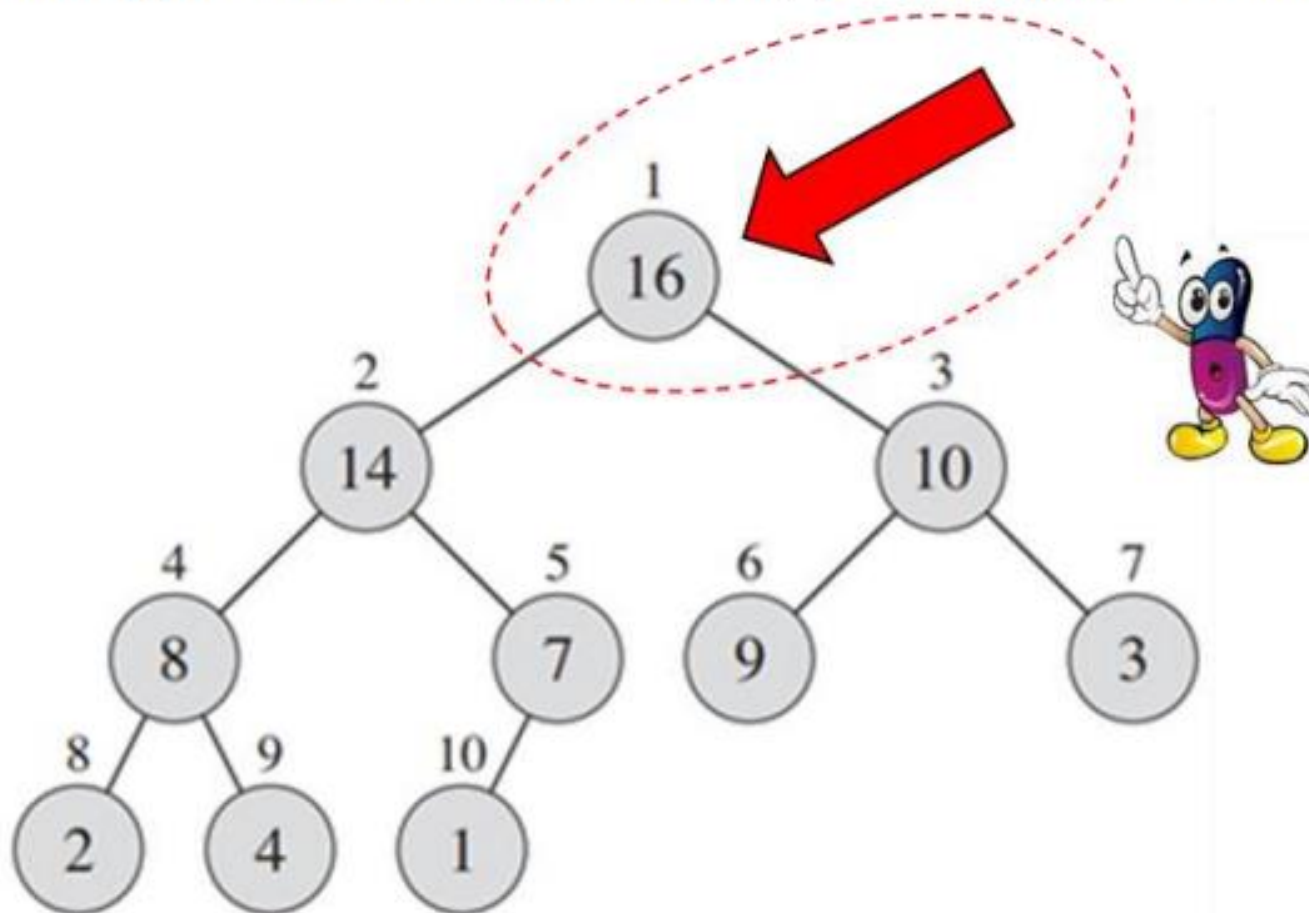
return $2i + 1$



**Detalhes, na página
104 do Cormen!**

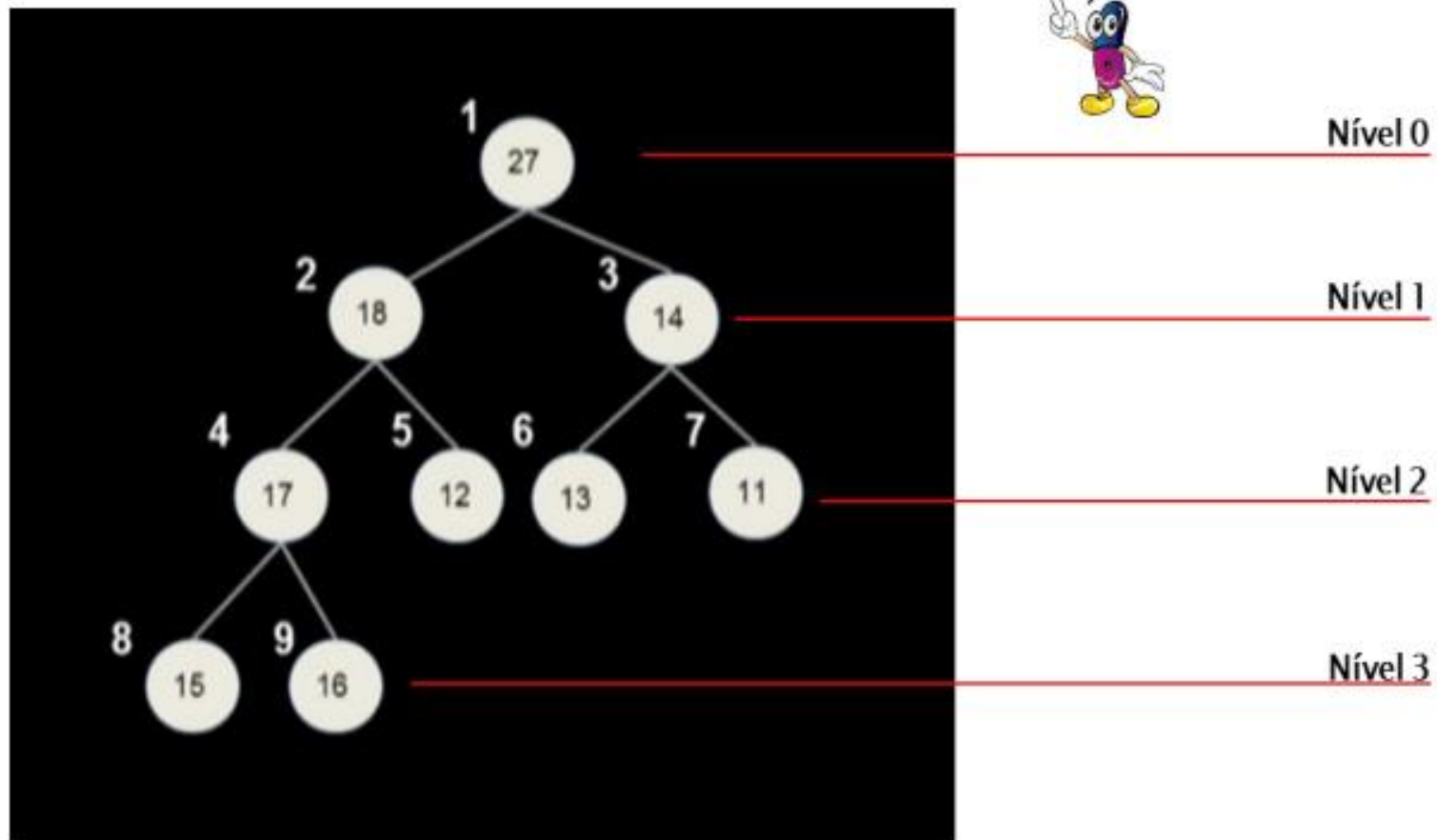
Heap – Observação

- Em um **max-heap**, o maior elemento da árvore, por definição, está na raiz;



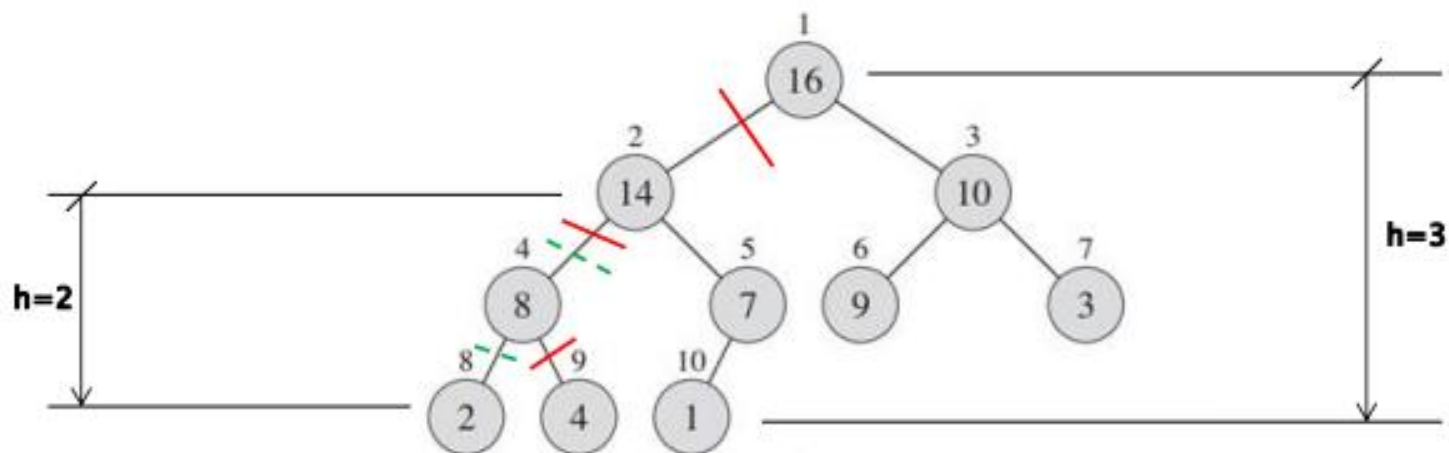
Níveis de um Heap

- Cada nível p , tem exatamente 2^p nós, **exceto** talvez no **último nível**;
- Por exemplo, no heap abaixo, o nível 2 tem exatamente 4 nós.

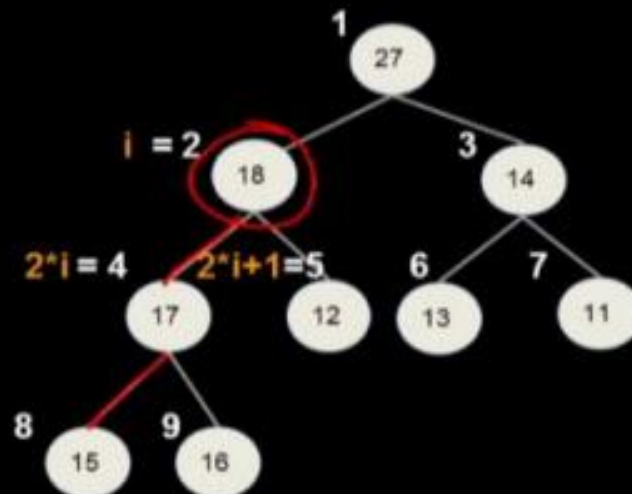


Altura de nós do Heap

A altura de um nó i é o maior comprimento de um caminho de i até uma folha, isto é, o número de arestas no caminho mais longo desde i até uma folha.



Altura de nós do Heap



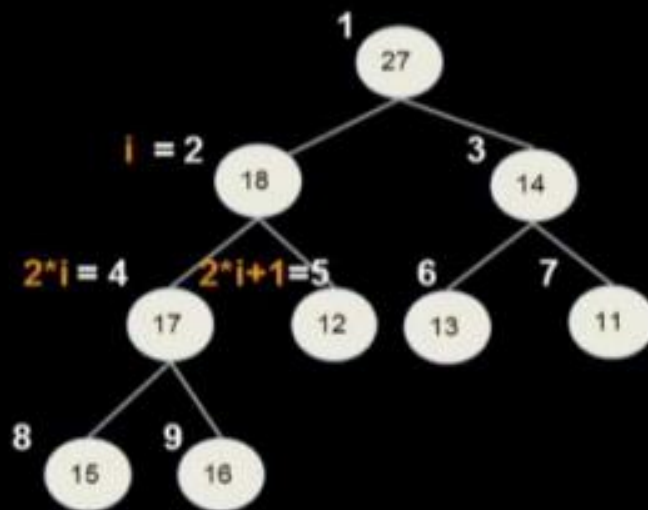
As folhas têm altura 0
 Qual a altura do nó número 2?
 Resposta: 2

| 1 | 2 | 3 |
|----|----|----|
| 27 | 18 | 14 |

A altura de um nó i é o maior comprimento de um caminho de i a uma folha, isto é, o número de arestas no caminho mais longo desde i até uma folha.



Altura de nós do Heap



Pode ser demonstrado que a altura de um nó i é:

$$h = \lfloor \lg(m/i) \rfloor$$

A altura da raiz é:

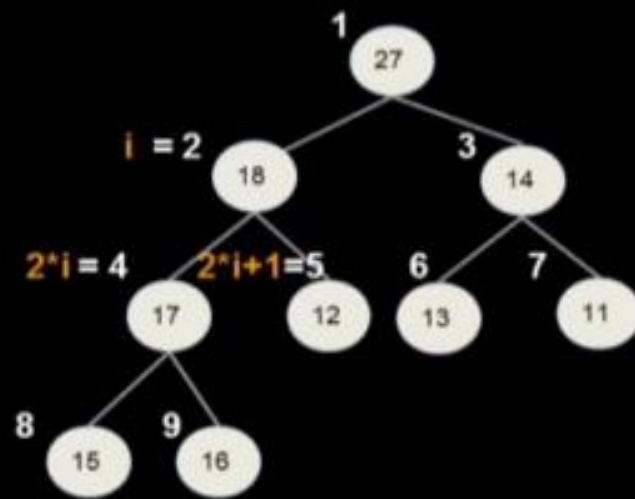
$$h = \lfloor \lg(m) \rfloor$$

| 1 | 2 | 3 |
|----|----|----|
| 27 | 18 | 14 |

A altura de um nó i é o maior comprimento de um caminho de i a uma folha, isto é, o número de arestas no caminho mais longo desde i até uma folha.



Altura de uma árvore



Pode ser demonstrado que a altura de um nó i é:

$$h = \lfloor \lg(m/i) \rfloor$$

A altura da árvore é:

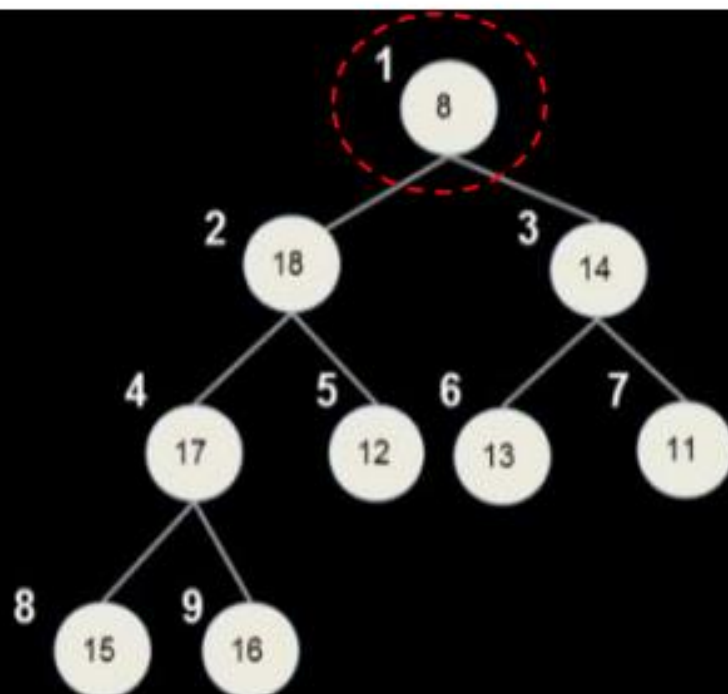
$$h = \lfloor \lg(m) \rfloor$$

| 1 | 2 | 3 |
|----|----|----|
| 27 | 18 | 14 |

A altura de um nó i é o maior comprimento de um caminho de i a uma folha, isto é, o número de arestas no caminho mais longo desde i até uma folha.



Manutenção do Heap



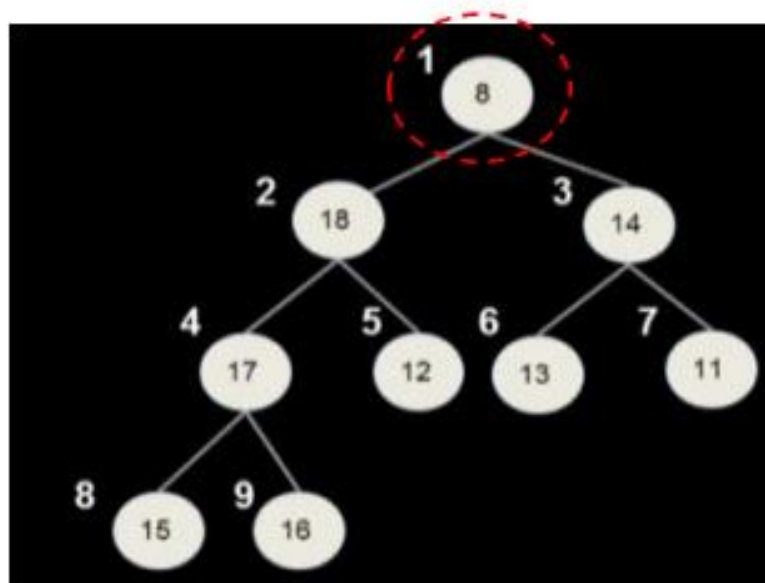
É quase um heap.

Apenas o elemento da raiz não satisfaz a propriedade de heap.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 8 | 18 | 14 | 17 | 12 | 13 | 11 | 15 | 16 |



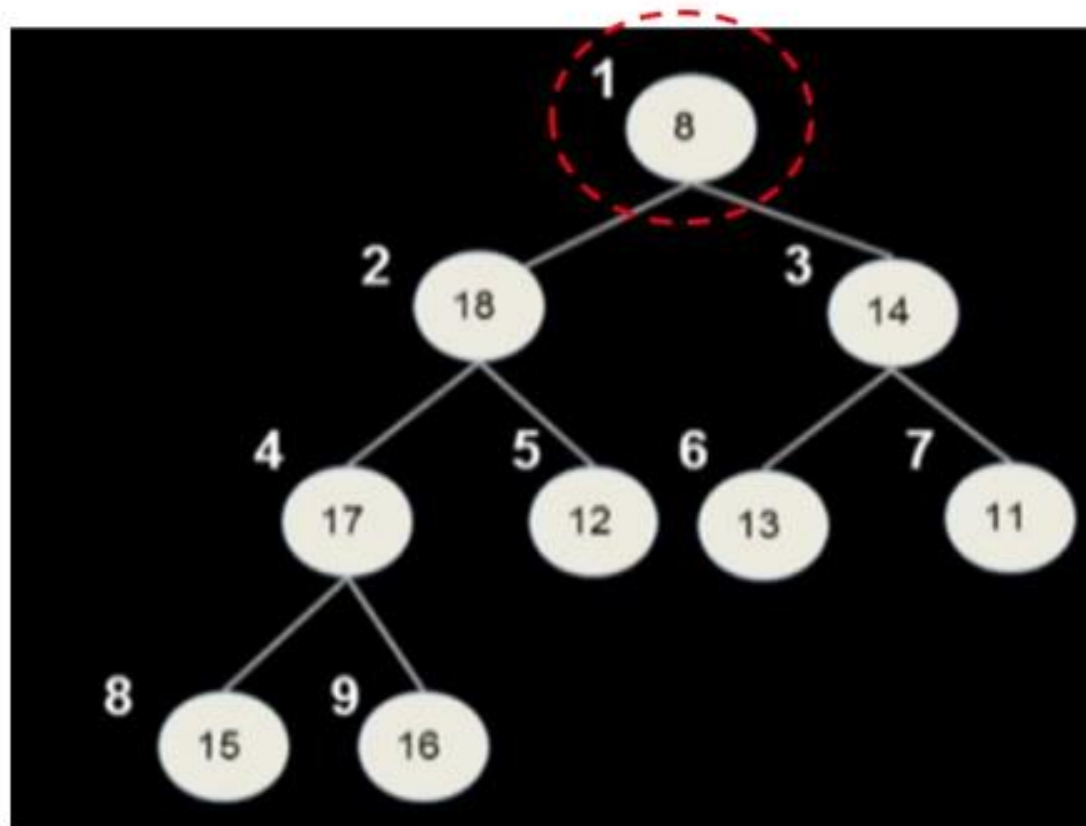
Manutenção do Heap



O que se deve fazer para que a árvore se torne um heap?



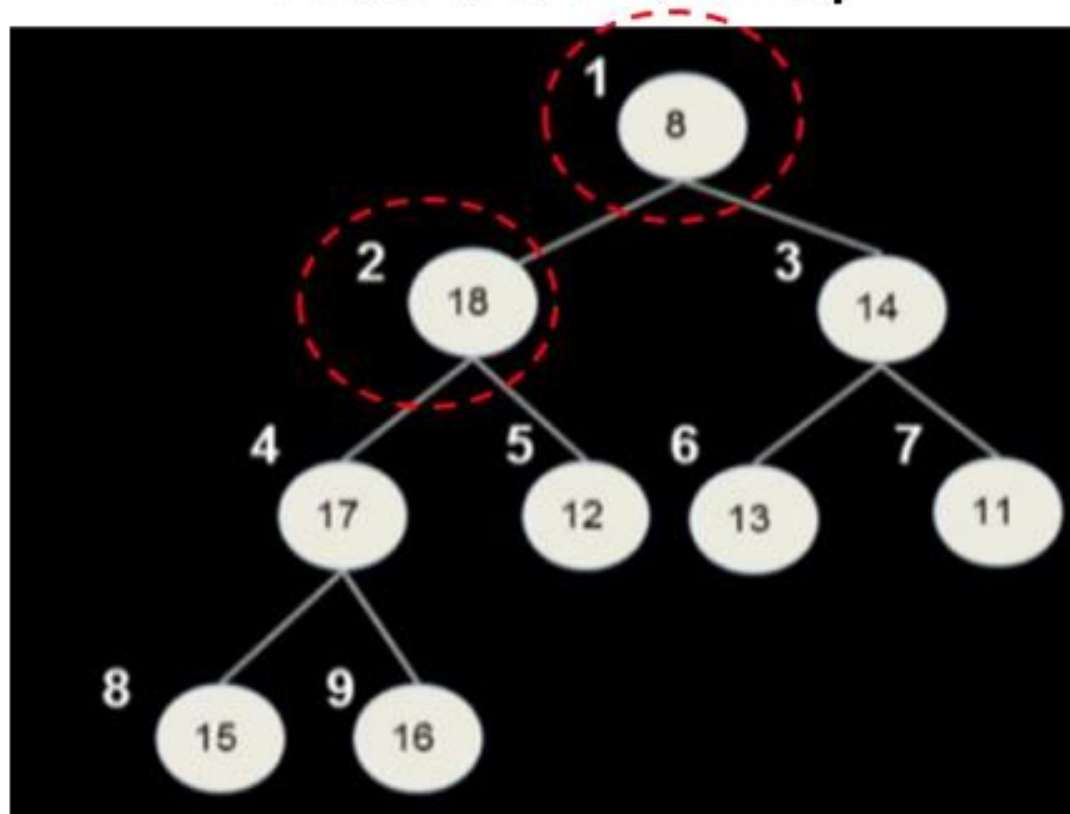
Manutenção do Heap



- Uma ideia seria descer o nó com o valor **8** para baixo, até deixá-lo numa posição conveniente que atenda a propriedade do heap;

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 8 | 18 | 14 | 17 | 12 | 13 | 11 | 15 | 16 |

Manutenção do Heap



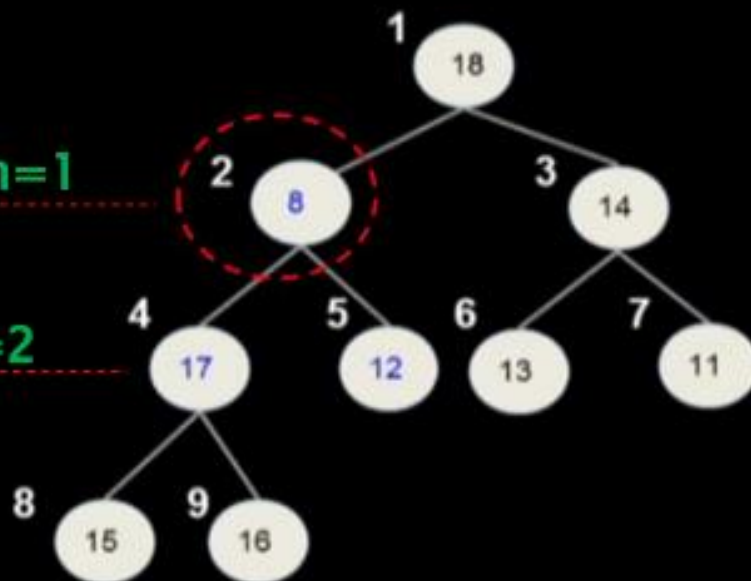
- Primeiramente, vamos comparar o **8** com os seus filhos;
- Vamos trabalhar com o maior dos filhos, no caso o nó com o valor **18**;
- Proceda-se à **troca** do **8** com o **18**;

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 8 | 18 | 14 | 17 | 12 | 13 | 11 | 15 | 16 |

Manutenção do Heap

Altura $h=1$

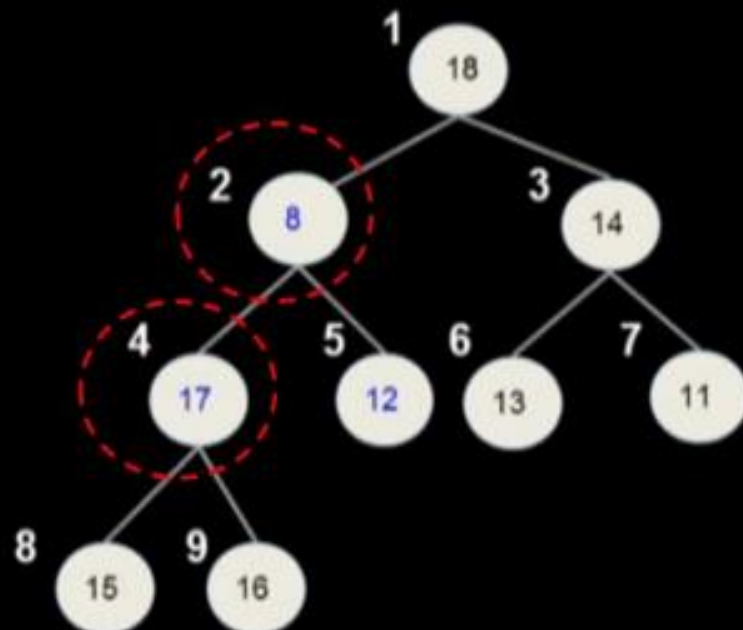
Altura $h=2$



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 18 | 8 | 14 | 17 | 12 | 13 | 11 | 15 | 16 |

- Fazemos agora o mesmo com os filhos do nó 8;
- Compara-se o nó 8 com os seus filhos 17 e 12

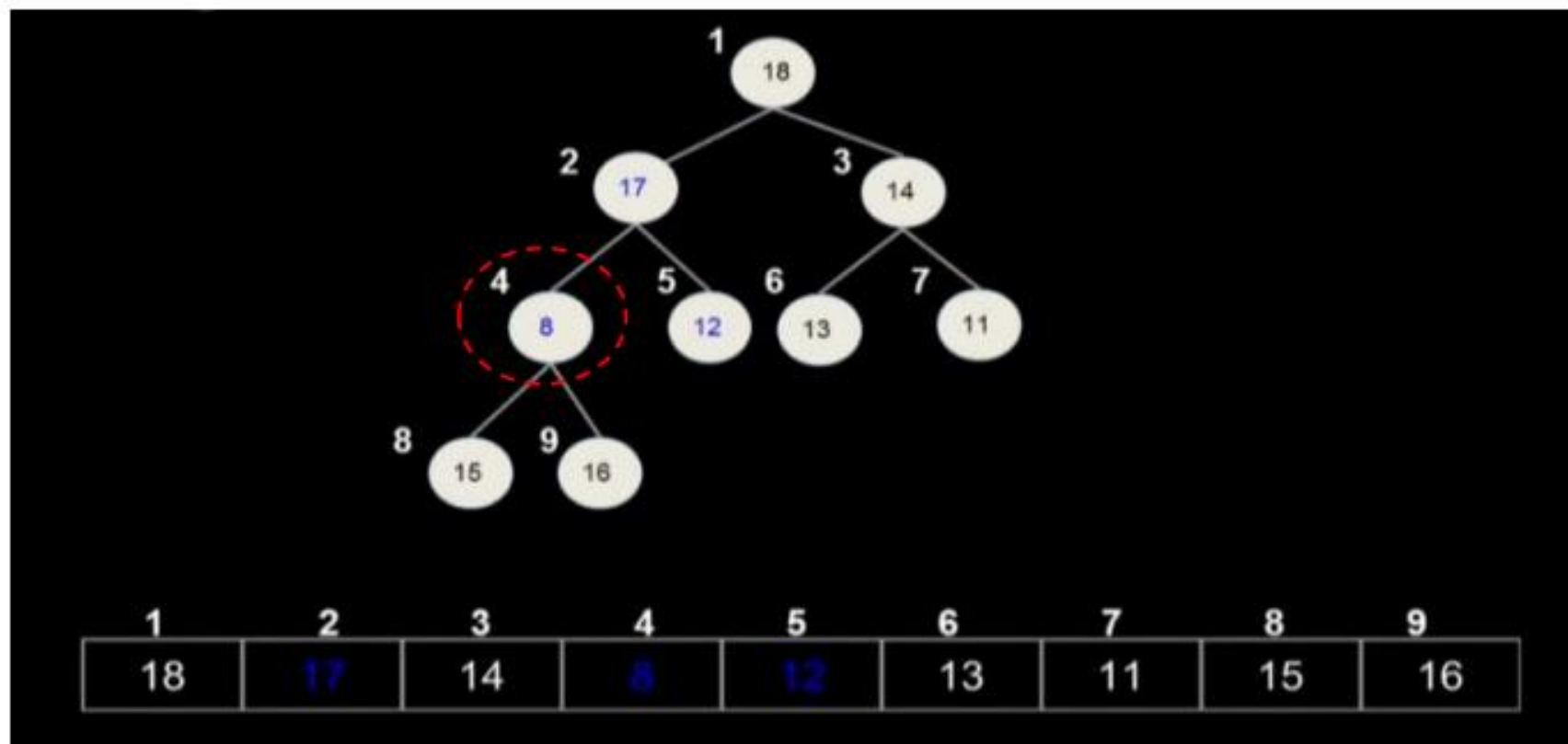
Manutenção do Heap



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 18 | 8 | 14 | 17 | 12 | 13 | 11 | 15 | 16 |

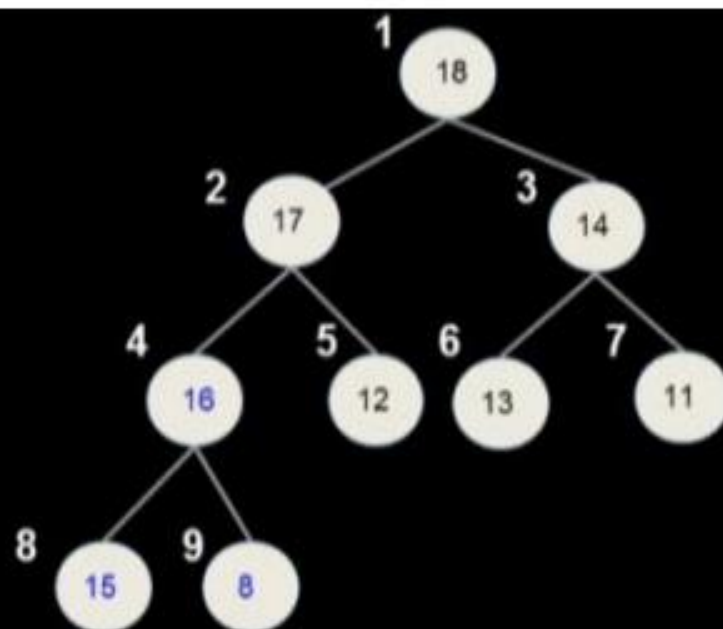
- Proceda-se à troca do nó 8 com o maior dos filhos que é o 17

Manutenção do Heap



- O processo continua até a árvore se tornar um heap (**heapify**);

Manutenção do Heap (Heapify)



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 18 | 17 | 14 | 16 | 12 | 13 | 11 | 15 | 8 |

■ A árvore agora é um heap;

Algoritmo Max-Heapify

Manutenção da propriedade de heap

MAX-HEAPIFY (A, m, i)

1 $e \leftarrow 2*i$

2 $d \leftarrow 2*i + 1$

3 se $e \leq m$ e $A[e] > A[i]$

4 então maior $\leftarrow e$

5 senão maior $\leftarrow i$

6 se $d \leq m$ e $A[d] > A[\text{maior}]$

7 então maior $\leftarrow d$

8 se maior $\neq i$

9 então $A[i] \leftrightarrow A[\text{maior}]$

10 **MAX-HEAPIFY** (A, m, maior)

Recebe o vetor $A[1 \dots m]$ e o índice i , tal que as árvores com raízes nos filhos esquerdo e direito do nó i são max-heaps.

Algoritmo Max-Heapify

Manutenção da propriedade de heap

MAX-HEAPIFY (A, m, i)

1 $e \leftarrow 2 \cdot i$

2 $d \leftarrow 2 \cdot i + 1$

3 se $e \leq m$ e $A[e] > A[i]$

4 então maior $\leftarrow e$

5 senão maior $\leftarrow i$

6 se $d \leq m$ e $A[d] > A[\text{maior}]$

7 então maior $\leftarrow d$

8 se maior $\neq i$

9 então $A[i] \leftrightarrow A[\text{maior}]$

10 **MAX-HEAPIFY (A, m, maior)**

$$T(h) \leq T(h-1) + \Theta(1)$$

$$T(h) = O(h)$$

Como: a altura de um nó i é:

$$h = \lfloor \lg(m/i) \rfloor$$

$$T(h) = O(h) = O(\lfloor \lg(m/i) \rfloor)$$

$$= O(\lg(m/i)) = O(\lg(m))$$

A complexidade do algoritmo Max-Heapify
é logarítmica \Rightarrow **$O(\log m)$**

Construção de um Max Heap

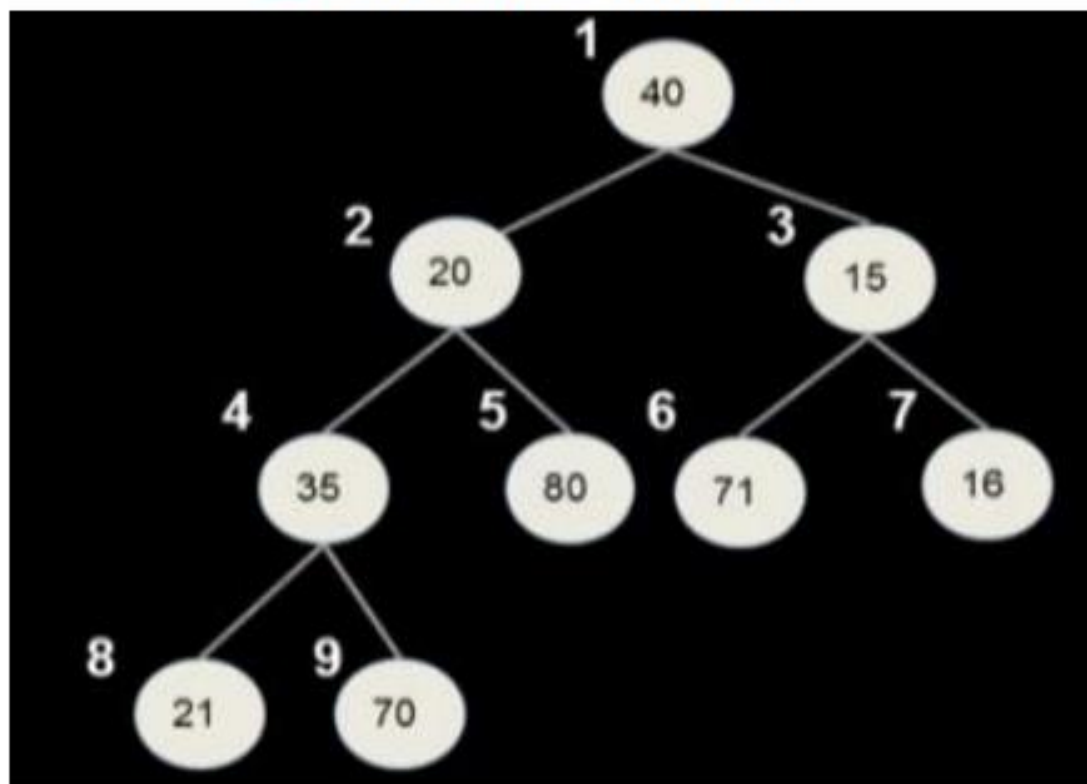
- Dado um array de valores, como construir um **max heap** a partir deste array?

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 40 | 20 | 15 | 35 | 80 | 71 | 16 | 21 | 70 |

Construção de um Max Heap

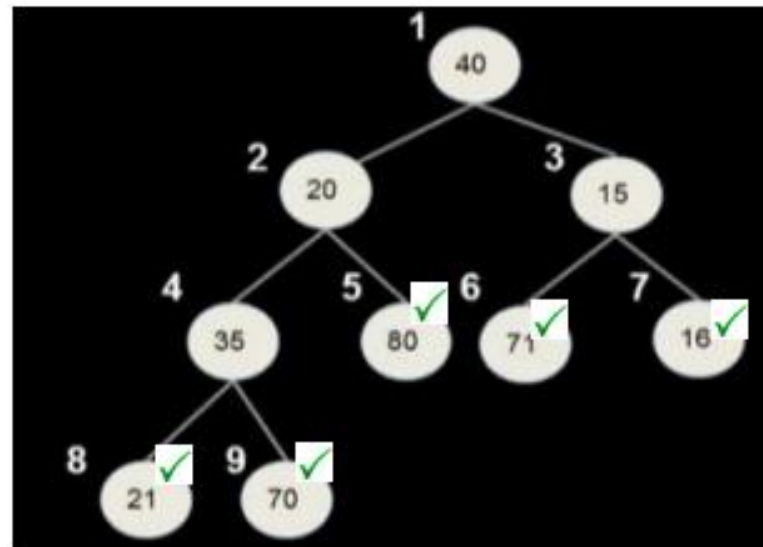
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 40 | 20 | 15 | 35 | 80 | 71 | 16 | 21 | 70 |

■ Árvore Inicial



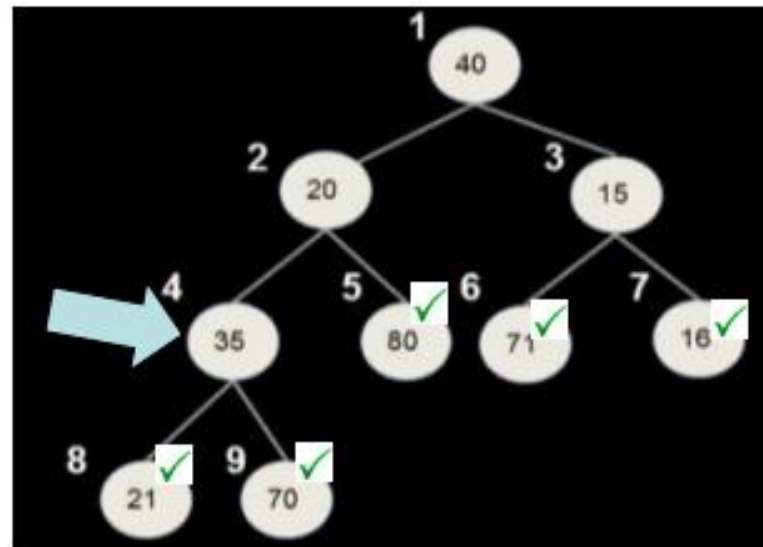
Construção de um Max Heap

- Os nós folhas cumprem a propriedade de heap pois eles não têm filhos!



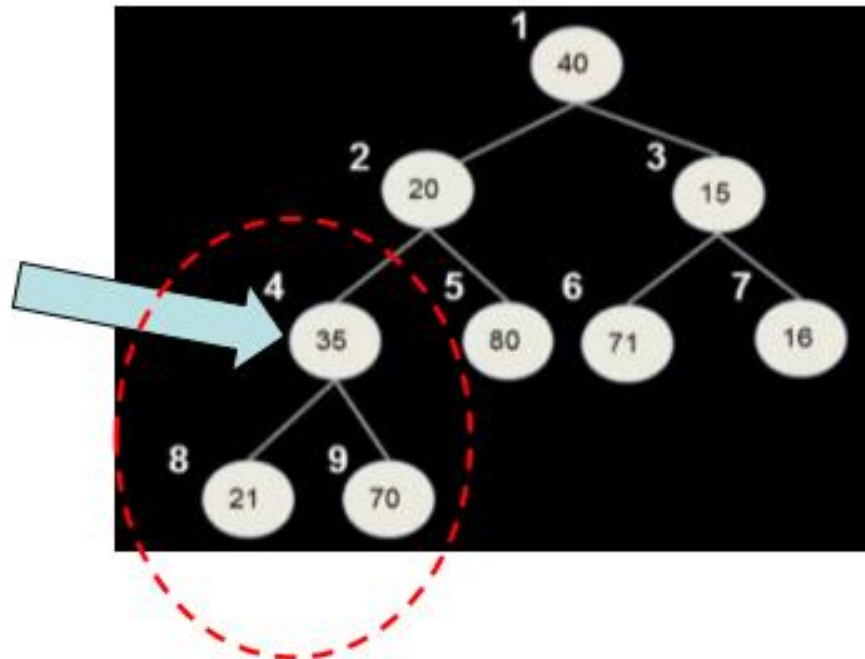
Construção de um Max Heap

- O nó **35** não cumpre a propriedade de heap;



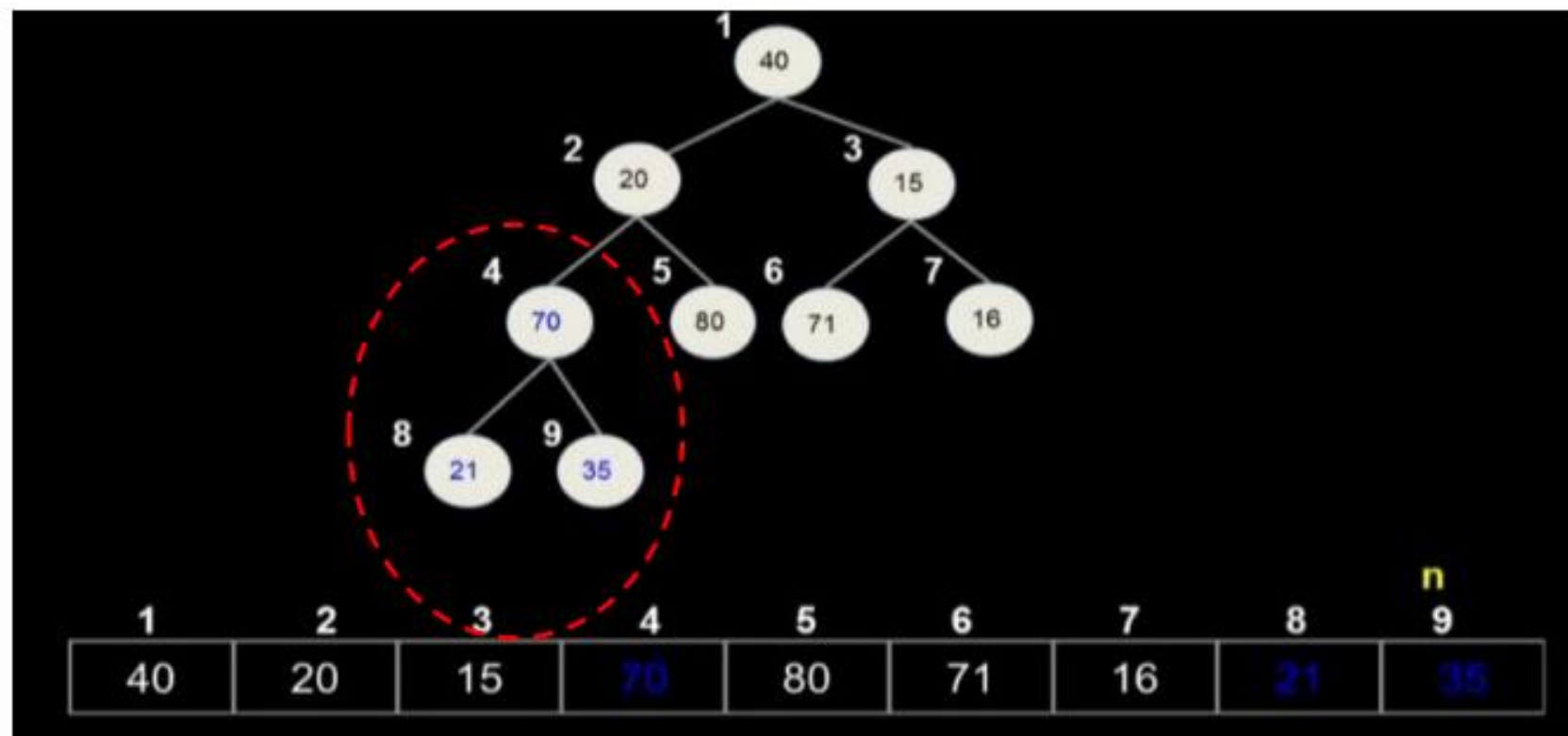
Construção de um Max Heap

- O nó **35** não cumpre a propriedade de heap;
- Vamos trocá-lo com o nó 70 que é o maior dos filhos;



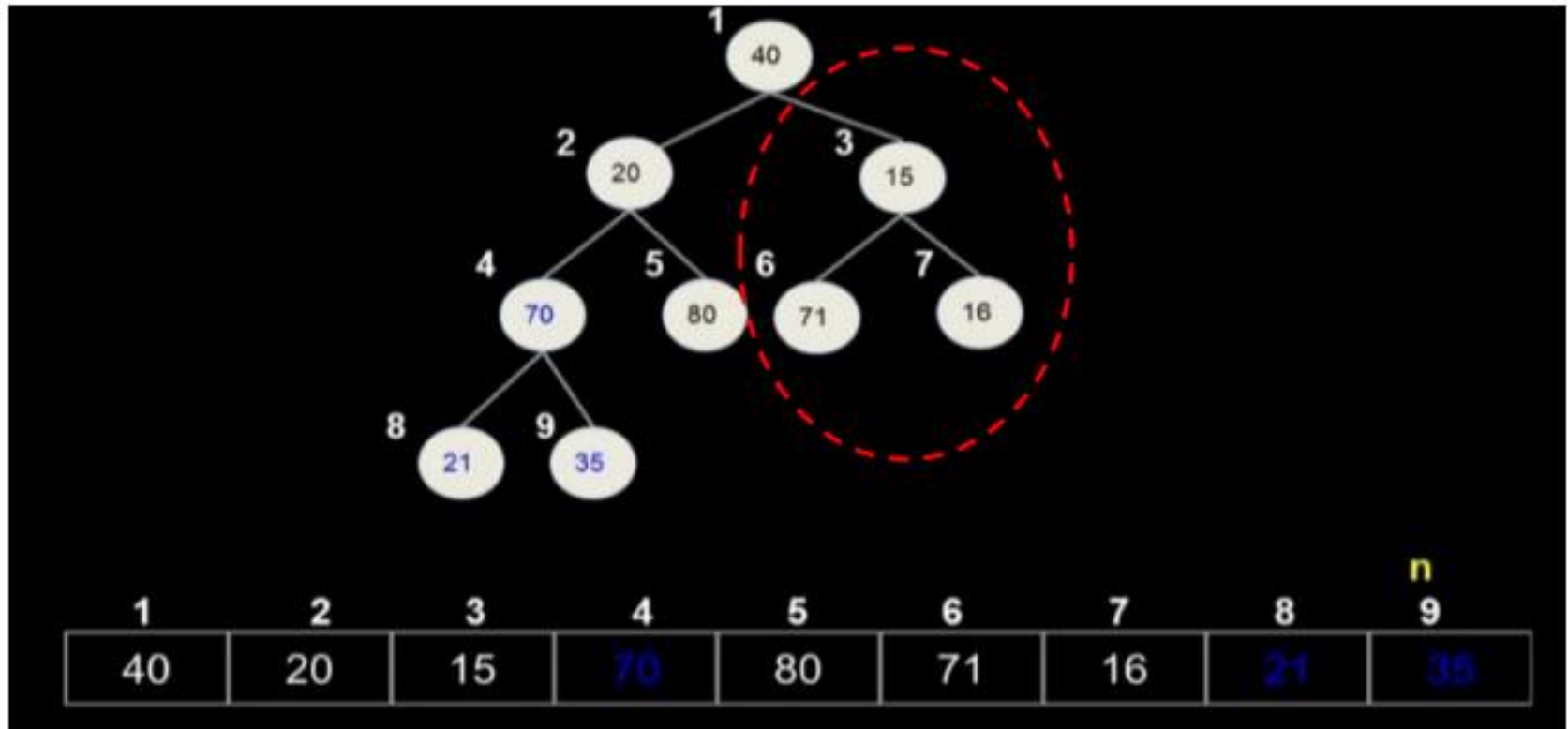
Construção de um Max Heap

- O nó **35** não cumpre a propriedade de heap;
- Vamos trocá-lo com o nó 70 que é o maior dos filhos;



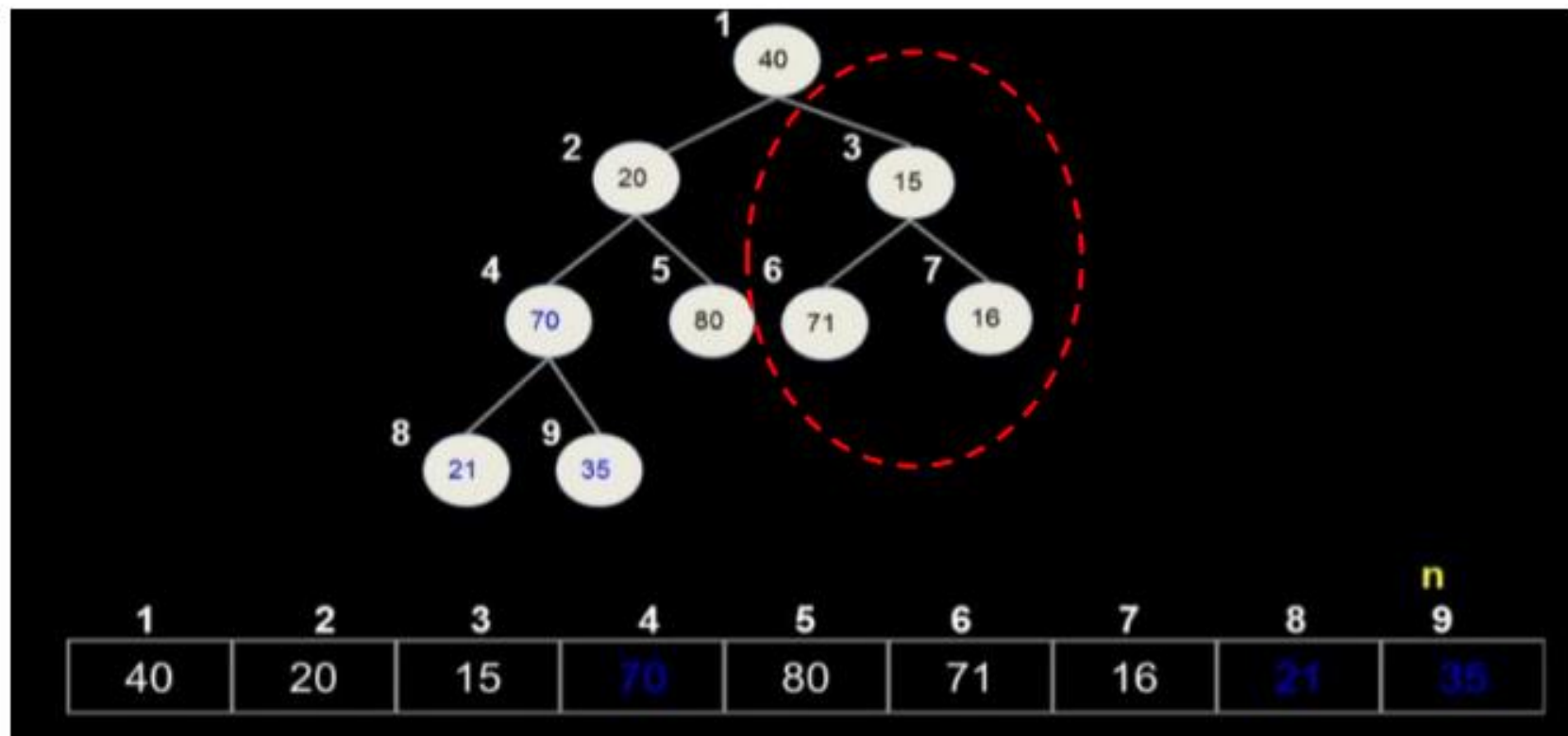
Construção de um Max Heap

- O processo continua com o nó 15;



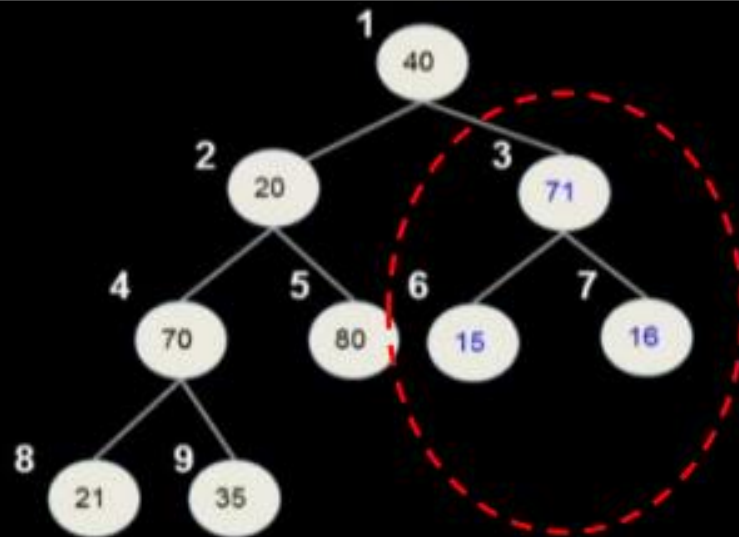
Construção de um Max Heap

- O processo continua com o nó 15;
- O nó com valor 15 é trocado com o nó 71



Construção de um Max Heap

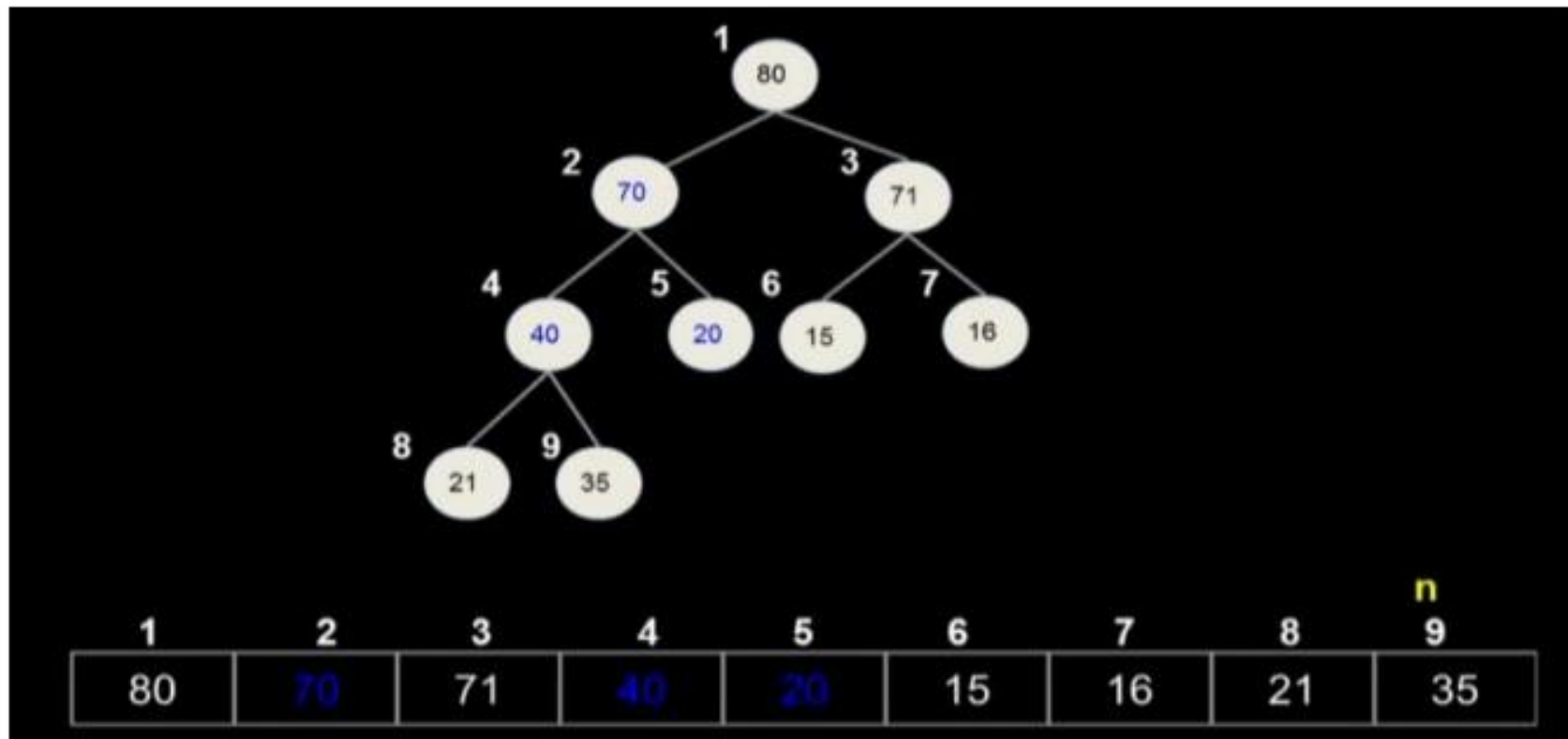
- O processo continua com o nó 15;
- O nó com valor 15 é trocado com o nó 71



| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ⁿ 9 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----------------|
| 40 | 20 | 71 | 70 | 80 | 15 | 16 | 21 | 35 |

Construção de um Max Heap

- O processo continua;
- Na verdade, o que se está fazendo é para cada nó não folha, aplica-se o algoritmo max-heapfy, até finalizar-se a árvore com a estrutura de **heap**.



Construção de um Max Heap

BUILD-MAX-HEAP (A, n)

1. para $i \leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ decrescendo até 1 faça
2. **MAX-HEAPIFY (A, n, i)**

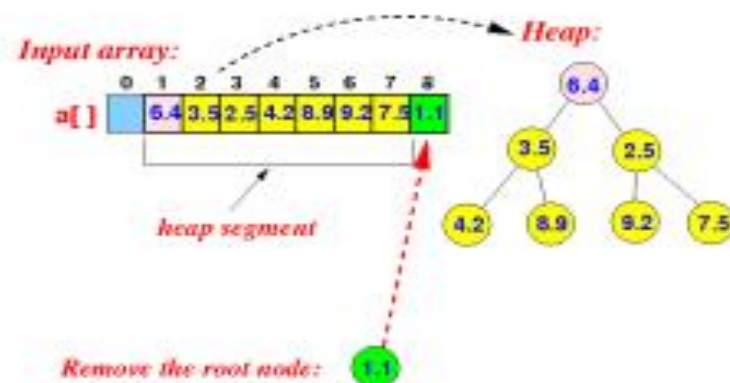
- Mostra-se que a complexidade do algoritmo BUILD-MAX-HEAP é $O(n)$

Aplicações de Heap

■ Fila de Prioridade



■ Heapsort



Fila de Prioridade

- É uma fila que permite que elementos sejam adicionados associados a uma **prioridade**;
- Cada elemento na fila deve possuir um dado adicional que representa sua **prioridade** de atendimento;
- Uma regra explícita define que o elemento de maior **prioridade** (o que tem o maior número associado) deve ser o primeiro a ser removido da fila, quando uma remoção for requerida;



Fila de Prioridade

- São empregadas em diversas aplicações;
- Por exemplo, em filas de bancos geralmente há um esquema de prioridade em que clientes preferenciais, idosos ou mulheres grávidas possuem maior prioridade de atendimento quando comparados aos demais clientes;

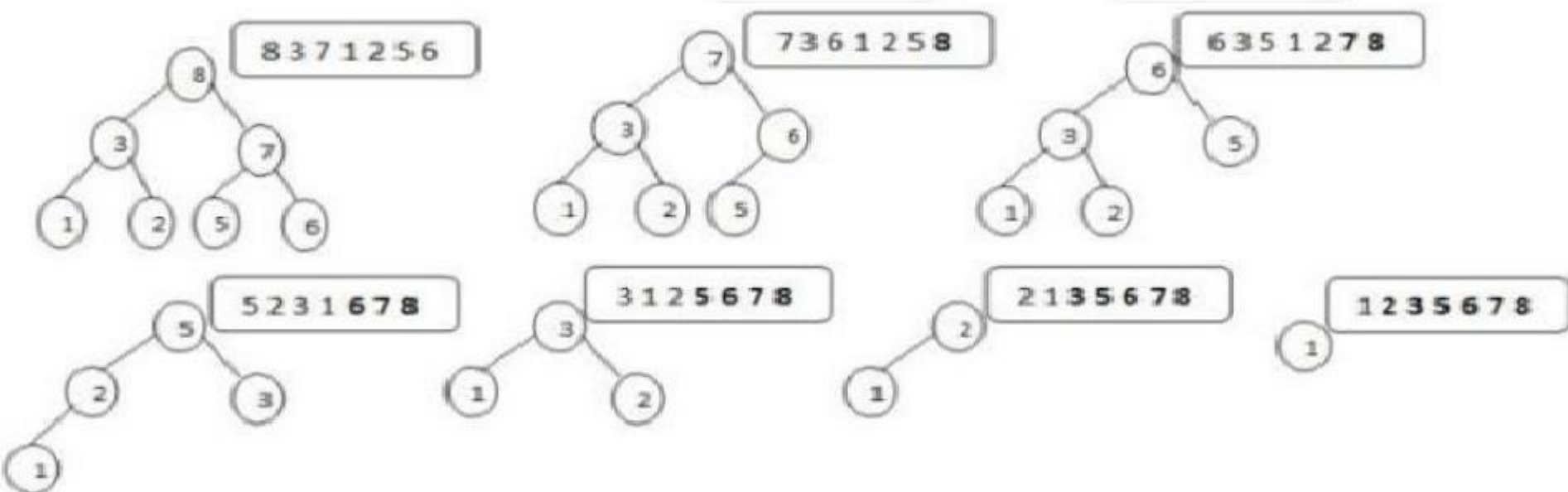


Fila de Prioridade – Operações

- **Inserir** com prioridade;
- **Remover** do elemento com mais alta prioridade;
- **Alterar** a prioridade de um determinado elemento;
- **Retornar** o número de elementos existentes na fila de prioridade;
- **Testar** a existência de elementos de mesma prioridade.



Implementação HeapSort



Implementação HeapSort

```
import java.util.Arrays;

public class HeapSort {

    public static int tamanho;

    public static void main(String[] args) {

        int[] lista = {5,6,2,1,9,10,12,0,3,7,14,99,34,77};

        System.out.println("Lista antes do HeapSort: \n");
        System.out.println(Arrays.toString(lista)) ;

        System.out.println("\n\nlista após o HeapSort: \n");
        heapSort(lista);

        System.out.println(Arrays.toString(lista)) ;

    }
```


Implementação HeapSort

```
public static void maxHeapify (int[] A, int pai) {  
  
    int esq = 2 * pai + 1;  
    int dir = (2 * pai) + 2;  
    int maior = pai;  
  
    if (esq <= tamanho && A[esq] > A[maior])  
        maior = esq;  
  
    if (dir <= tamanho && A[dir] > A[maior])  
        maior = dir;  
  
    if (maior != pai) {  
        int aux = A[pai];  
        A[pai] = A[maior];  
        A[maior] = aux;  
        maxHeapify(A, maior);  
    }  
}
```

Implementação HeapSort

```
public static void buildMaxHeap(int[]A) {  
    tamanho = A.Length - 1;  
  
    for (int pai = tamanho/2; pai >=0; pai--) {  
        maxHeapify(A,pai);  
    }  
}
```

Implementação HeapSort

```
public static void heapSort(int[] A) {  
    buildMaxHeap(A);  
  
    for (int i = tamanho; i > 0; i--) {  
        int aux = A[i];  
        A[i] = A[0];  
        A[0] = aux;  
        tamanho--;  
        maxHeapify(A, 0);  
    }  
}
```

FIM

