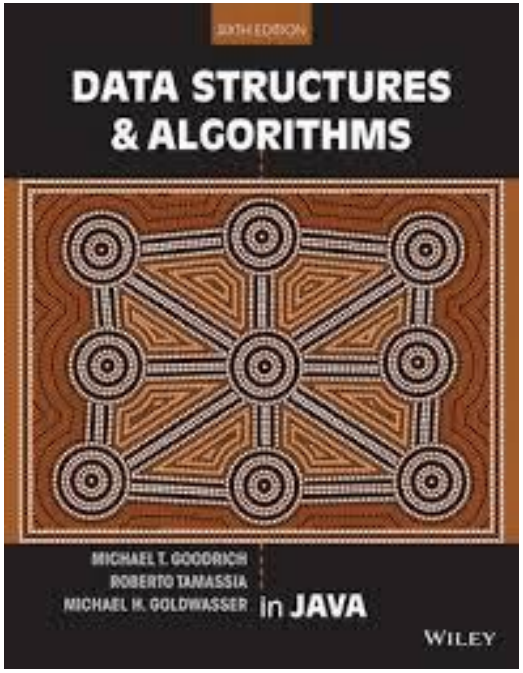
Unidade 12 – Árvores Binárias

Bibliografia

- Data Structures and Algorithms in Java – Fourth Edition – Roberto Tamassia – Michael T. Goodrich – John Wiley & Sons, Inc
- Head First Java, 2nd Edition by Kathy Sierra and Bert Bates
- Estrutura de Dados e Algoritmos – Bruno R. Preiss, Editora Campus, 2001
- Estrutura de Dados e Algoritmos em Java – Robert Lafore, Editora Ciência Moderna, 2005
- Algoritmos e Estrutura de Dados – Niklaus Wirth – Editora Prentice Hall do Brasil, 1989
- Estrutura de Dados e Algoritmos em C++, Adam Drozdek – Thompson
- Introdução à Estrutura de Dados, Celes, Cerqueira, Rangel – Elsevier
- FREITAS, Aparecido V. de – 2022 – Estruturas de Dados: Notas de Aula.
- CALVETTI, Robson - 2015 – Estruturas de Dados: Notas de Aula.

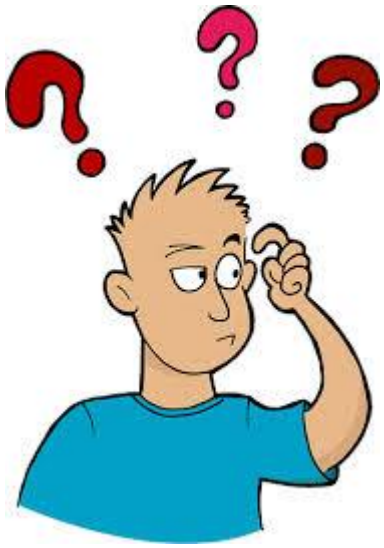
Leitura Recomendada para a Unidade 5

- Data Structures and Algorithms in Java (*), Roberto Tamassia and Michael T. Goodrich, Sixty Edition – **2014** , Seção **8.2**



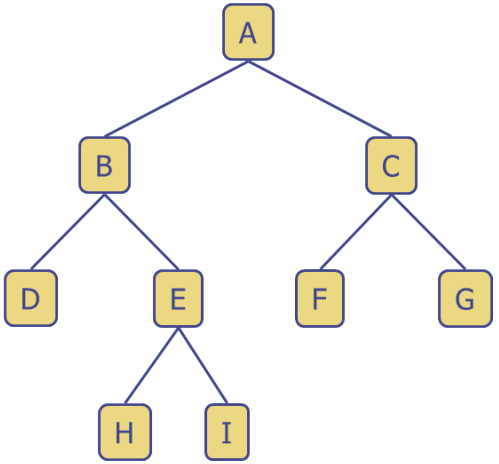
(*) Em português, Estrutura de Dados e Algoritmos em Java

O que é árvore binária ?



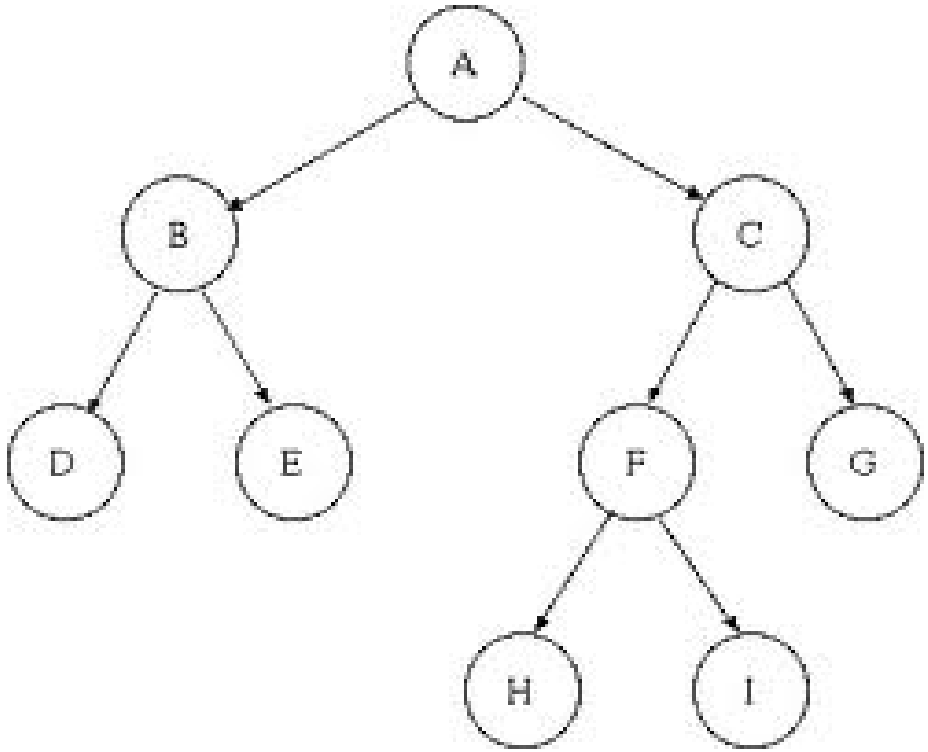
Árvore Binária

- É uma árvore ordenada com as seguintes propriedades:
  - Todo nó tem no máximo 2 filhos.
  - Cada filho é rotulado como sendo **filho a esquerda** ou **filho a direita**.
  - Um filho a esquerda precede o filho a direita na ordenação dos filhos de um nó.
  - Assim, filhos formam um par ordenado.



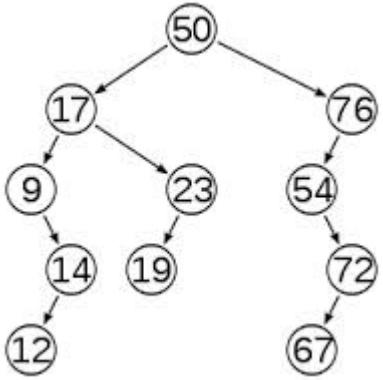
Árvore Binária própria

- Uma árvore binária é **própria** se cada nó tem 0 ou 2 filhos.
- Em uma árvore binária **própria** cada nó interno tem exatamente 2 filhos.



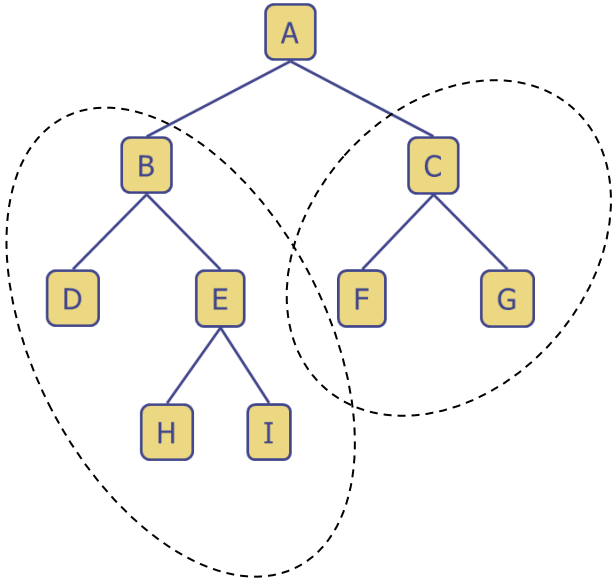
Árvore Binária Imprópria

- Uma árvore é **imprópria** se não for própria, ou seja, a árvore tem pelo menos um nó com apenas um filho.



Definição Recursiva

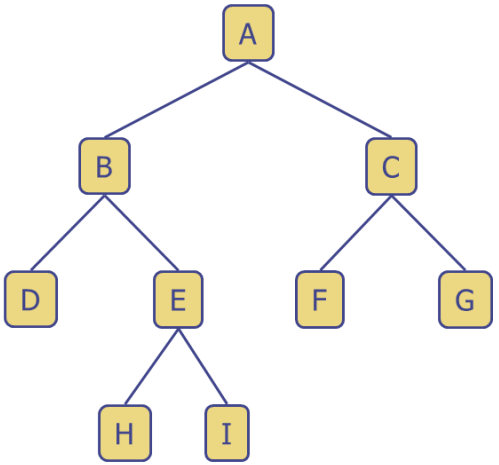
- Uma **árvore binária** é:
  - Uma árvore que consiste de apenas um nó, ou
  - Uma árvore cuja raiz tem um par ordenado de filhos, onde cada qual é uma árvore binária.



Quais as aplicações de árvores binárias ?

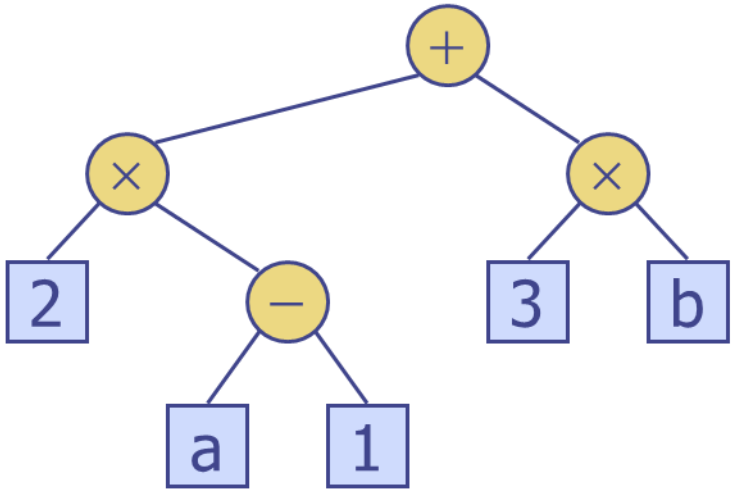
Árvores Binárias – Aplicações

- Expressões aritméticas
- Processos de decisão
- Searching



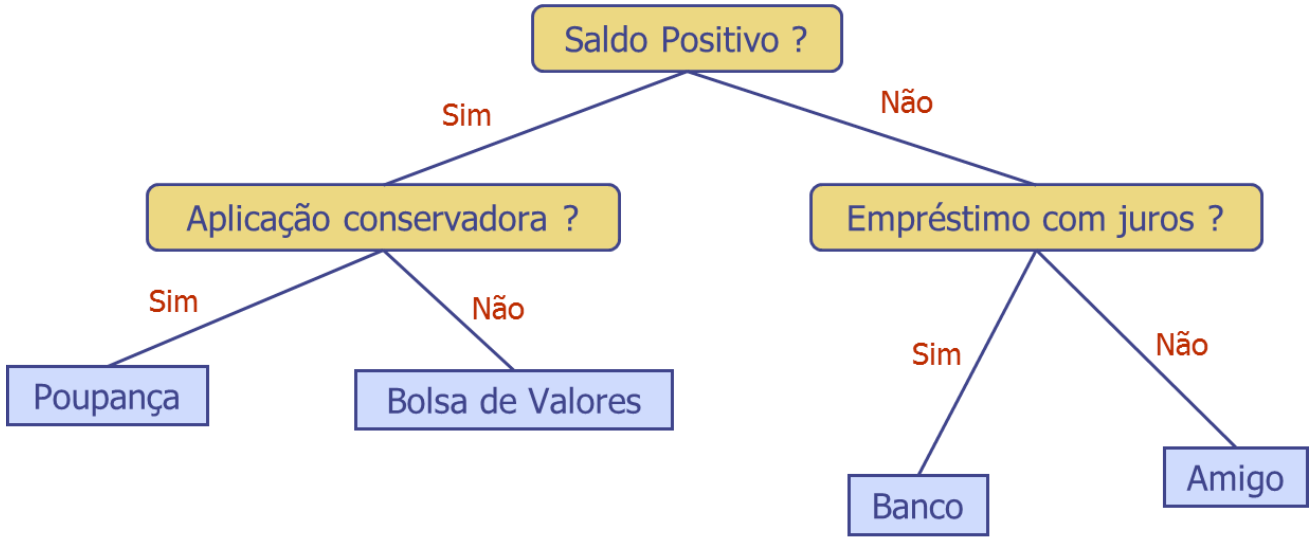
Árvore aritmética de expressões

- Árvore binária associada à uma expressão aritmética.
- Nós internos contém operadores (+, -, *, /, log, etc...)
- Nós externos contém operandos (variáveis ou constantes)
- Exemplo: (2 x (a - 1) + (3 x b))



Árvore de Decisão

- Árvore binária associada a um processo de decisão.
- Nós internos: questões com resposta sim/não
- Nós externos: decisões



ADT – Árvore Binária

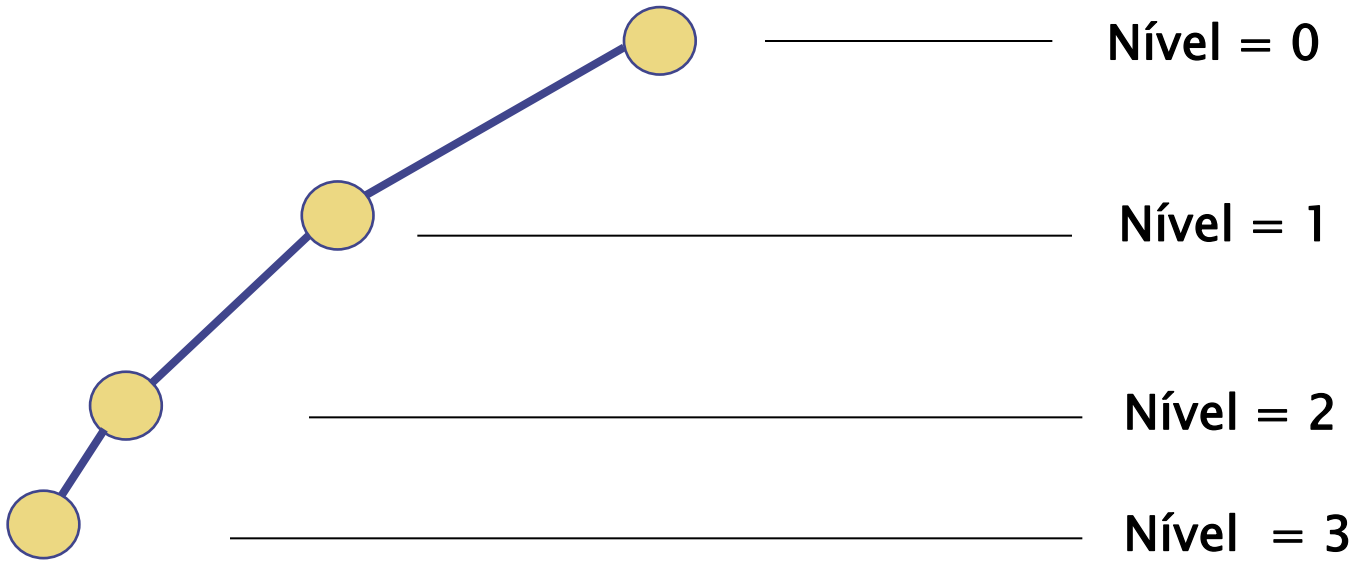
- A árvore binária estende a ADT Árvore, isto é , herda todos os métodos vistos no capítulo anterior (árvores genéricas).

- Adicionalmente, suporta os seguintes métodos:

```
left(): retorna o filho esquerdo de um nó
right(): retorna o filho direito de um nó
hasLeft(): testa se o nó tem filho a esquerda
hasRight(): testa se o nó tem filho a direita
inorder(): percurso inorder
```

Número mínimo de nós

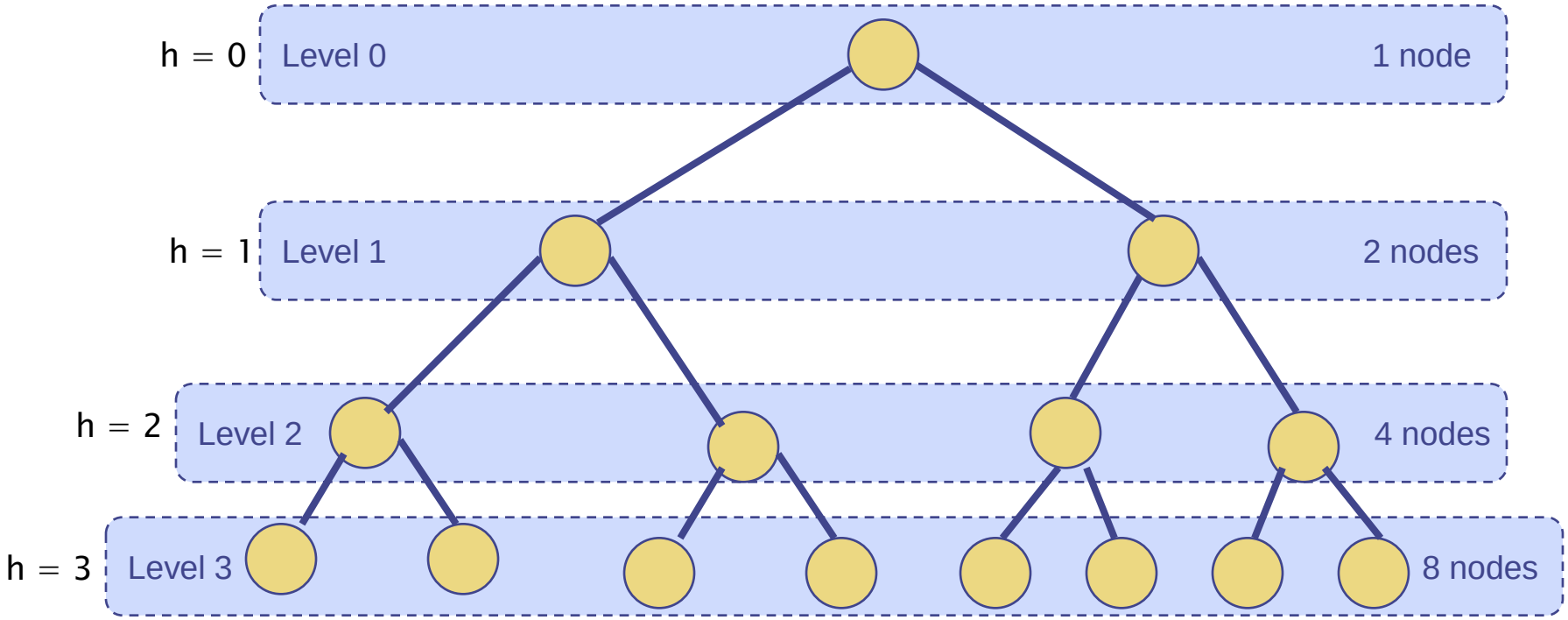
- O número mínimo de nós em uma árvore binária de altura **h**, é **n ≥ h+1**.
- Ao menos um nó em cada um dos níveis d.



Número mínimo de nós é ***h+1***

- **Altura de um nó: Tamanho do caminho de n até seu mais profundo descendente.**

Máximo número de nós

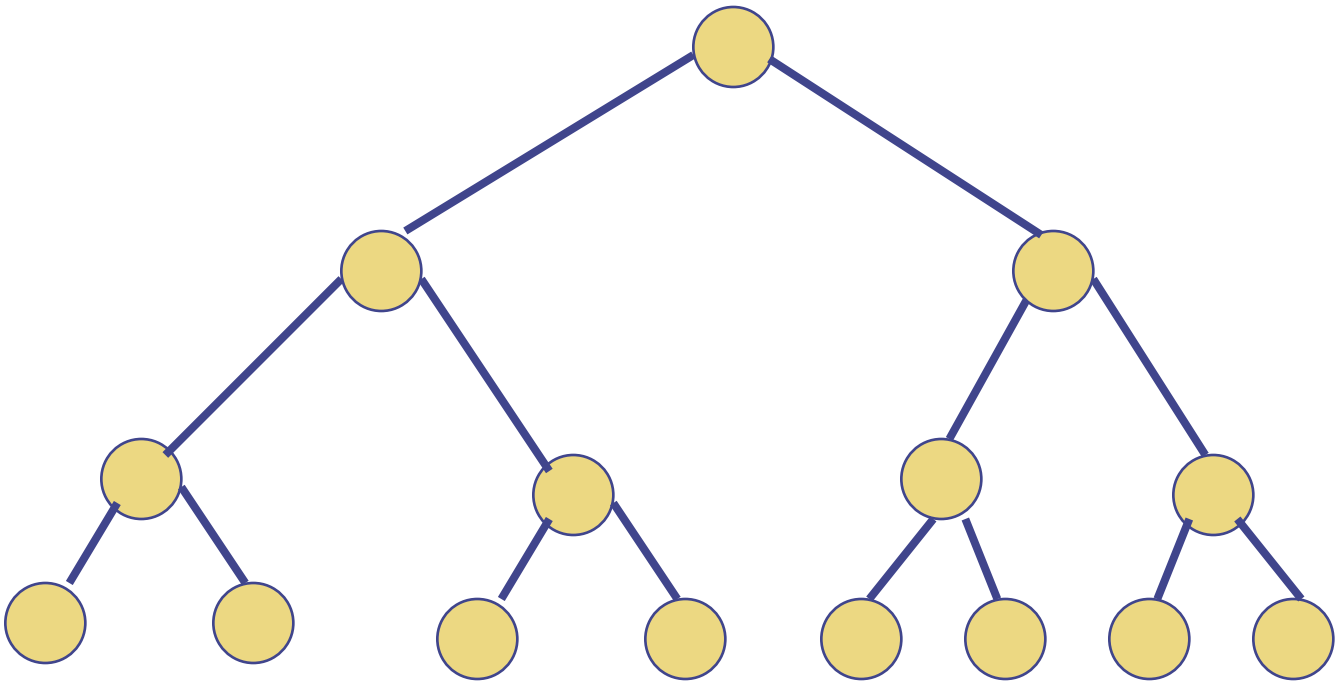


Máximo número de nós $= 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^h$

$$n = 2^{h+1} - 1$$

Árvore Binária Completa (Full)

Uma árvore binária completa de altura *h* tem $2^{h+1} - 1$ nós.



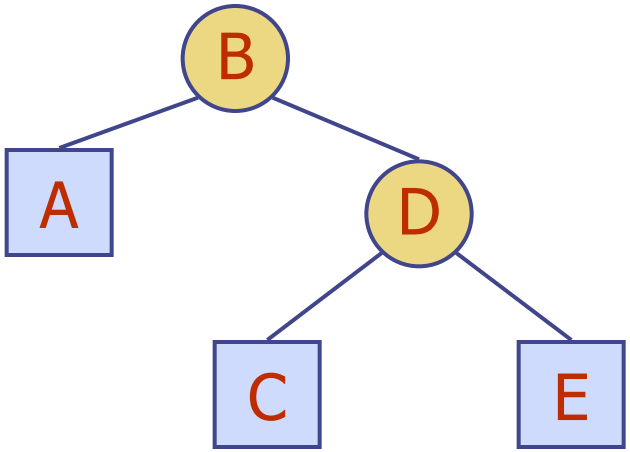
Árvore binária completa de altura 3

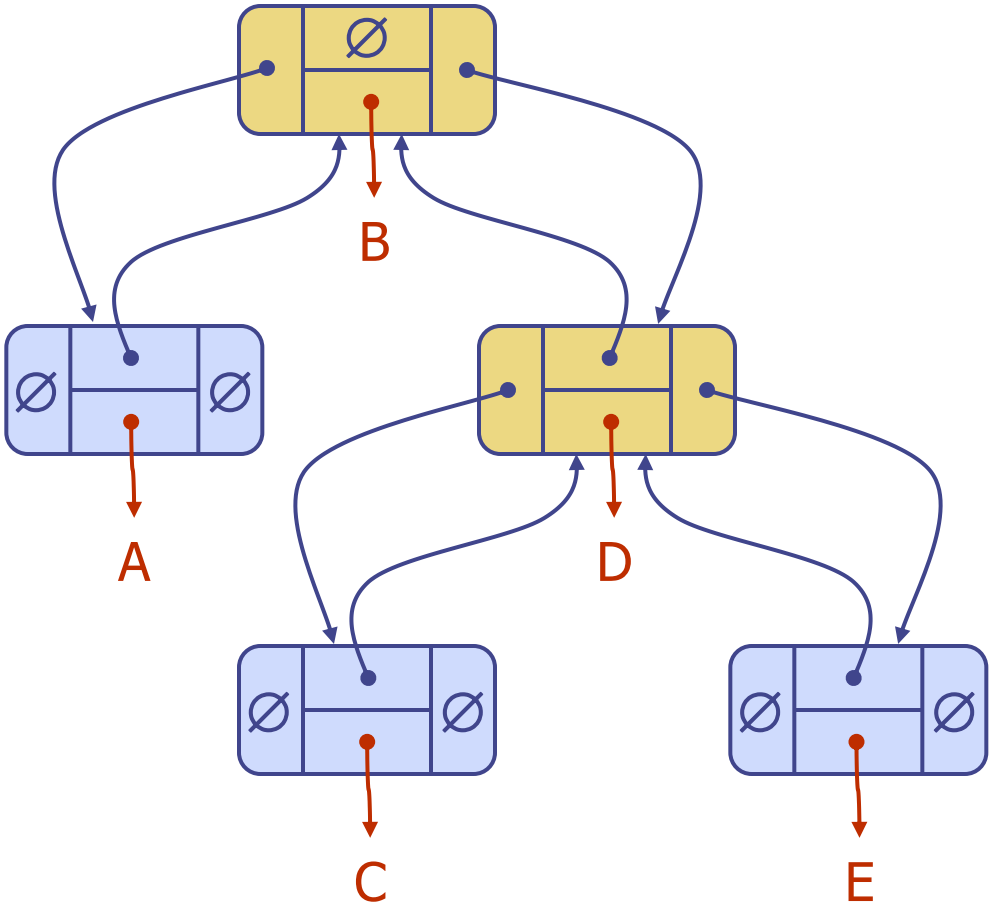
Representação de árvores binárias

1. **Linked Structure**
2. **Array List**

Representação por lista ligada

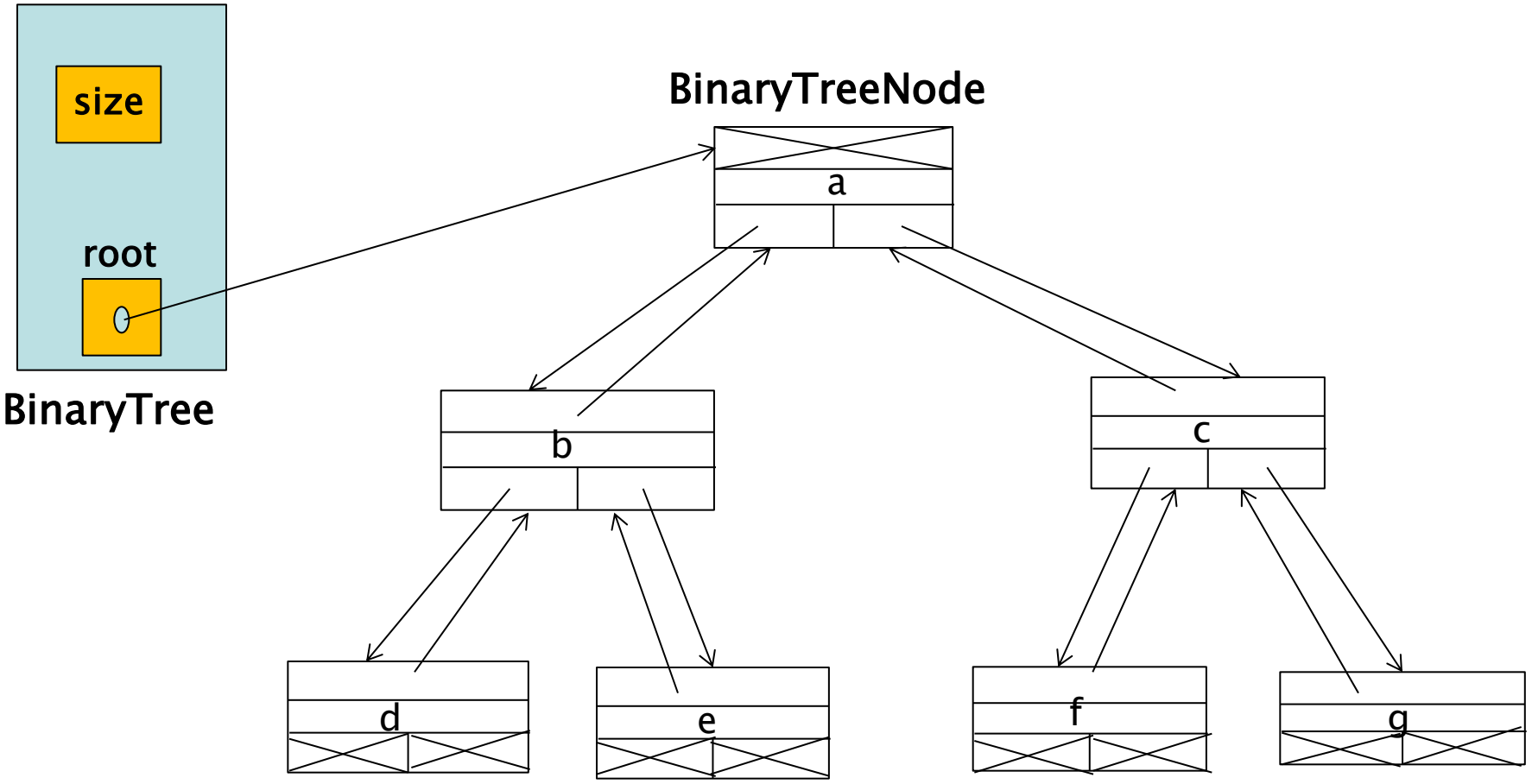
- Um nó é representado por um objeto armazenando:
  - Elemento
  - Nó pai
  - Nó Left child
  - Nó Right child





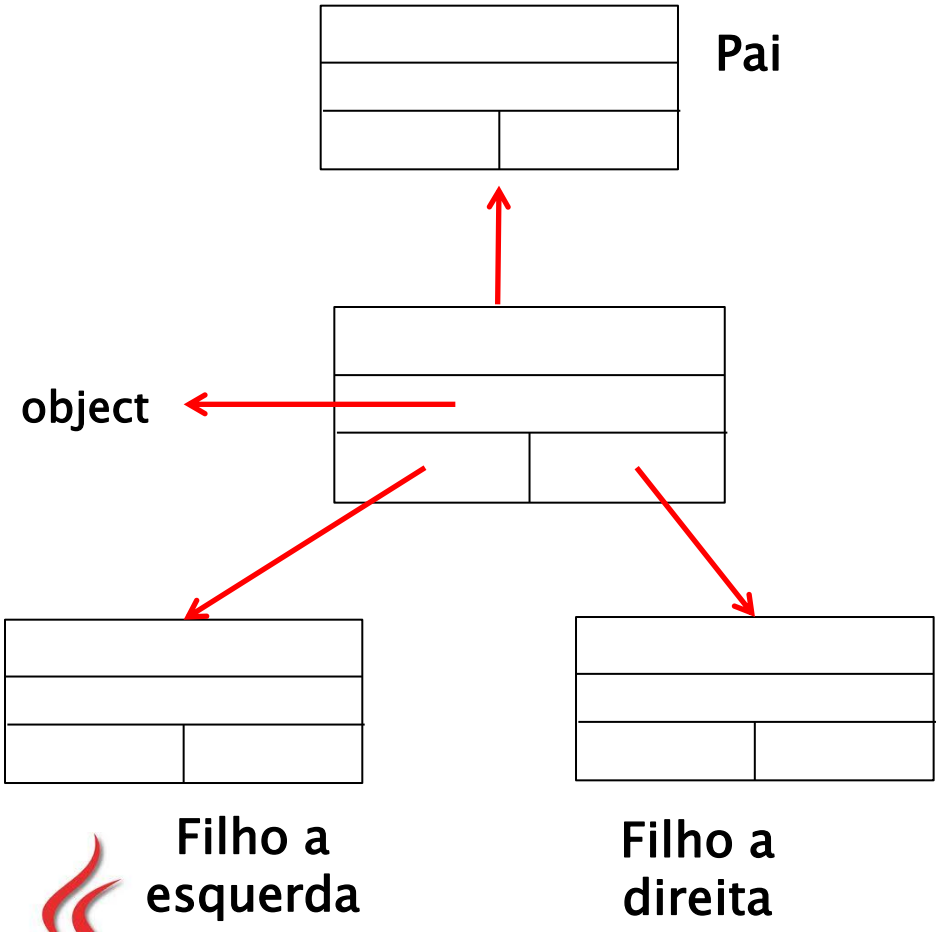
Representação por lista ligada

size -> #nós da árvore



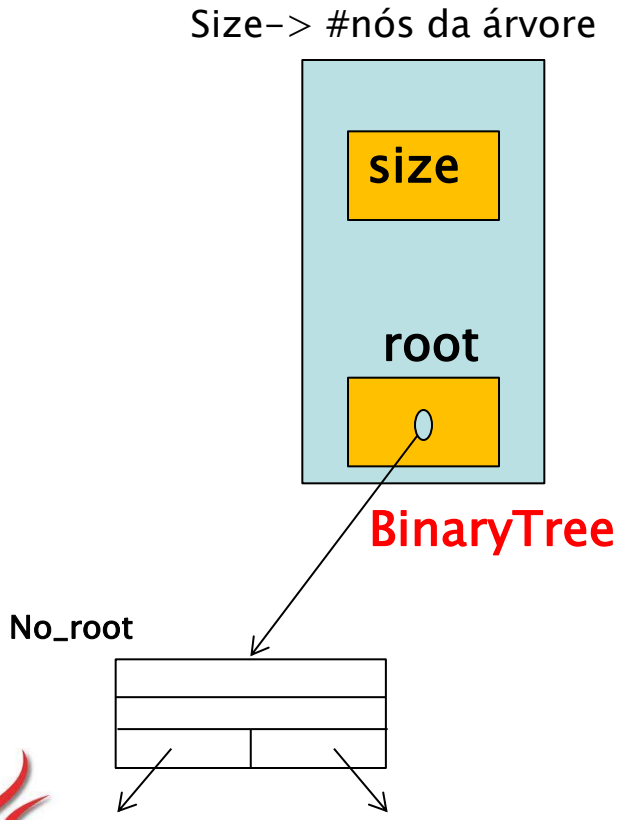
Representando nó da Árvore

- Cada nó tem quatro referências: item, pai, filho a esquerda e filho a direita.



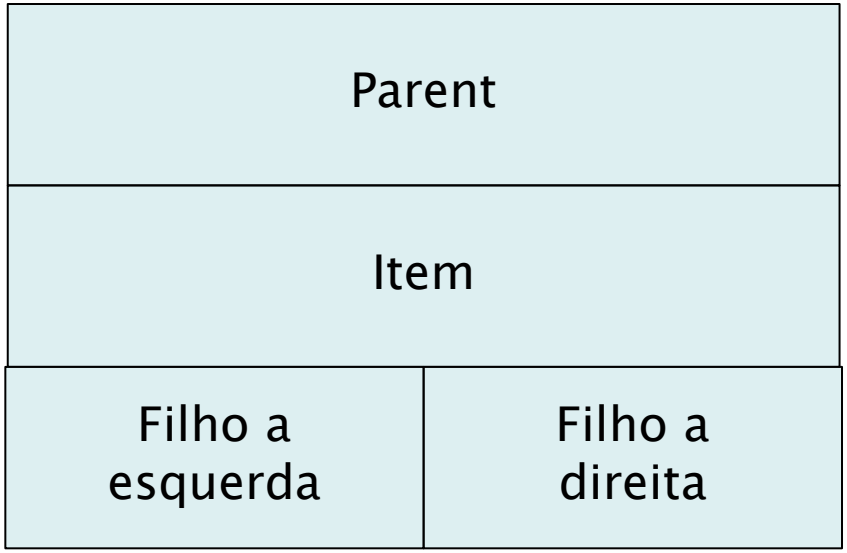

```
Class BinaryTreeNode {

        Object item;
        BinaryTreeNode parent;
        BinaryTreeNode left;
        BinaryTreeNode right;

}
```

Representando a Árvore

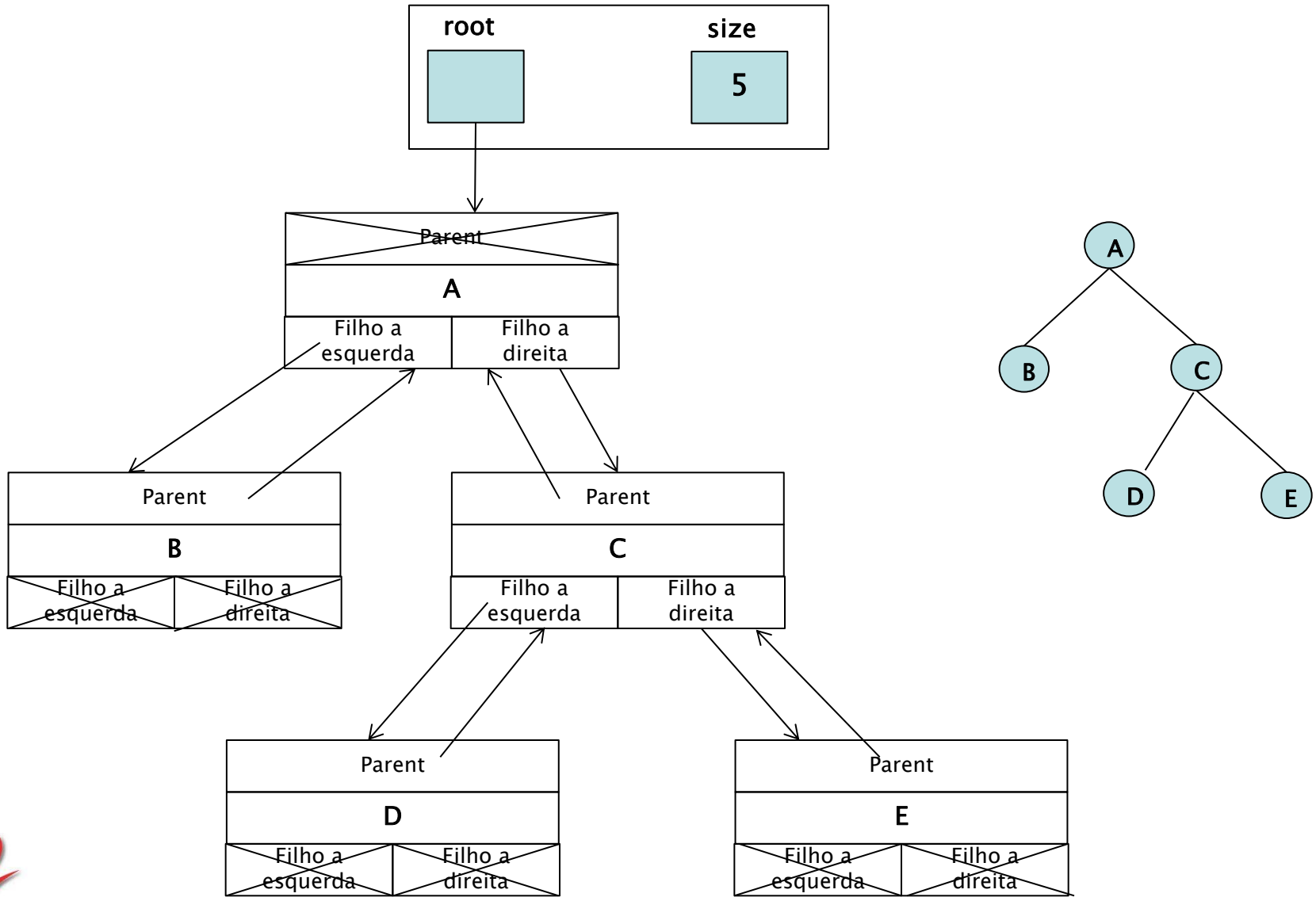



```
Class BinaryTree {

        BinaryTreeNode root;
        int size;

}
```

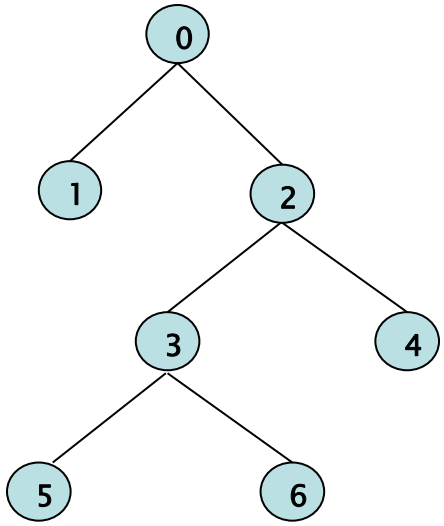
Representando Nó da árvore



Exemplo


root
size
5
Parent
A
Filho a esquerda
Filho a direita
Parent
B
Filho a esquerda
Filho a direita
Parent
C
Filho a esquerda
Filho a direita
Parent
D
Filho a esquerda
Filho a direita
Parent
E
Filho a esquerda
Filho a direita
A
B
C
D
E

Exemplo



```
public class BinaryTree {

        BinaryTreeNode root;
        int size;

        public BinaryTree() {

                this.root = null;
                this.size = 0;
        }

        public void insert_root(int valor) {

                BinaryTreeNode node = new BinaryTreeNode(valor);
                this.root = node;
                this.size = 1;

        }
```

```
    public BinaryTreeNode ret_Root() {
          return (this.root);
    }

    public int size() {
          return this.size;
    }

    public boolean isEmpty() {

          if (this.size == 0 )
                return true;
          else return false;
    }
}
```

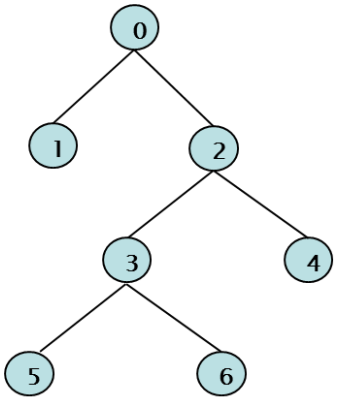
```
package uscs;

        public class BinaryTreeNode {

                int item;
                BinaryTreeNode parent;
                BinaryTreeNode left;
                BinaryTreeNode right;


        public BinaryTreeNode(int item) {

                this.item = item;
                this.parent = null;
                this.left = null;
                this.right = null;

}
```

```
public BinaryTreeNode left() {
        if (this.left == null)
                return null;
        else return this.left ;

}

public boolean  isLeft() {
        if (this.left == null)
                return false;
        else return true ;

}

public BinaryTreeNode right() {
        if (this.right == null)
                return null;
        else return this.right ;

}
```

```
public boolean  isRight() {
        if (this.right == null)
                return false;
        else return true ;

}

public void binaryPreorder() {

        System.out.println(this.item);
        if (this.isLeft())
                this.left.binaryPreorder();
        if (this.isRight())
                this.right.binaryPreorder();
}
```

```
    public void binaryPostorder() {


            if (this.isLeft())
                    this.left.binaryPostorder();
            if (this.isRight())
                    this.right.binaryPostorder();
            System.out.println(this.item);

    }

    public void binaryInorder() {


            if (this.isLeft())
                    this.left.binaryInorder();
            System.out.println(this.item);
            if (this.isRight())
                    this.right.binaryInorder();
    }

}
```

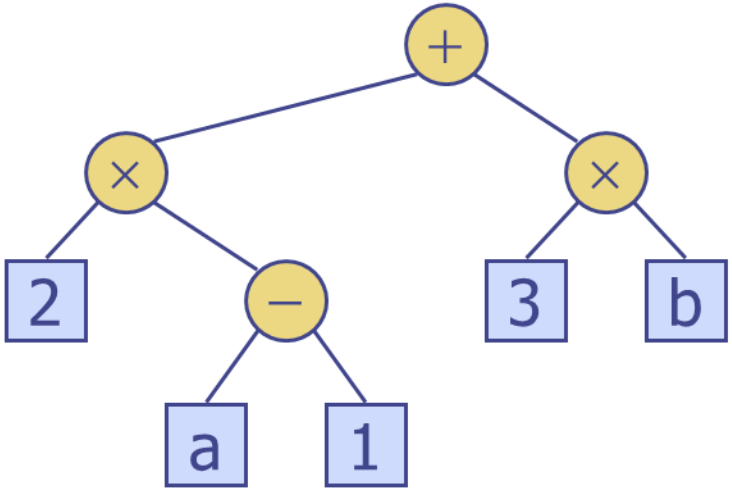
```
package uscs;

        public class Teste_BinaryTreeNode {

        public static void main(String[] args ) {

                BinaryTree x = new BinaryTree();
                x.insert_root(0);

                BinaryTreeNode no_1 = new BinaryTreeNode(1) ;
                BinaryTreeNode no_2 = new BinaryTreeNode(2) ;
                BinaryTreeNode no_3 = new BinaryTreeNode(3) ;
                BinaryTreeNode no_4 = new BinaryTreeNode(4) ;
                BinaryTreeNode no_5 = new BinaryTreeNode(5) ;
                BinaryTreeNode no_6 = new BinaryTreeNode(6) ;

                x.root.left = no_1;
                x.root.right = no_2;
                no_2.left = no_3;
                no_2.right = no_4;
                no_3.left = no_5;
                no_3.right = no_6;

                x.root.binaryPreorder();
                x.root.binaryPostorder();
                x.root.binaryInorder();

        }

}
```

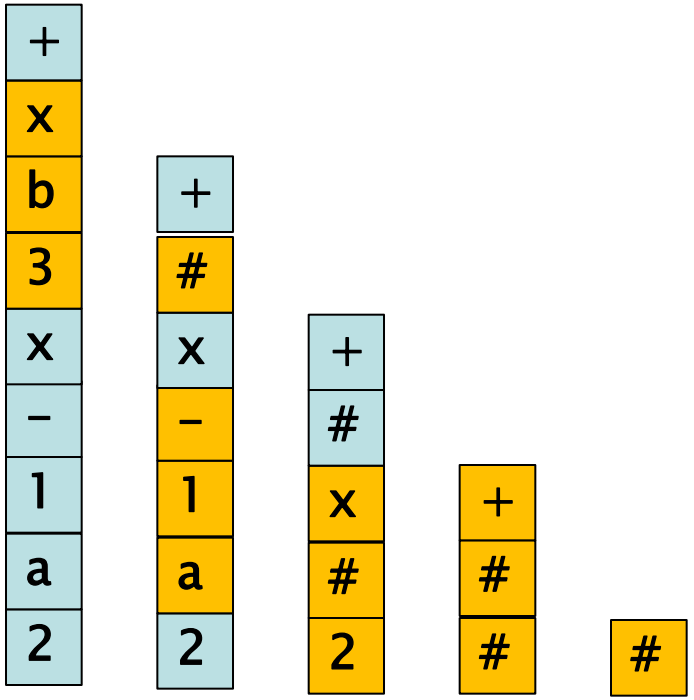


Árvore aritmética de expressões

- O método de travessia postorder pode ser usado para resolver o problema da avaliação de uma árvore de expressões.

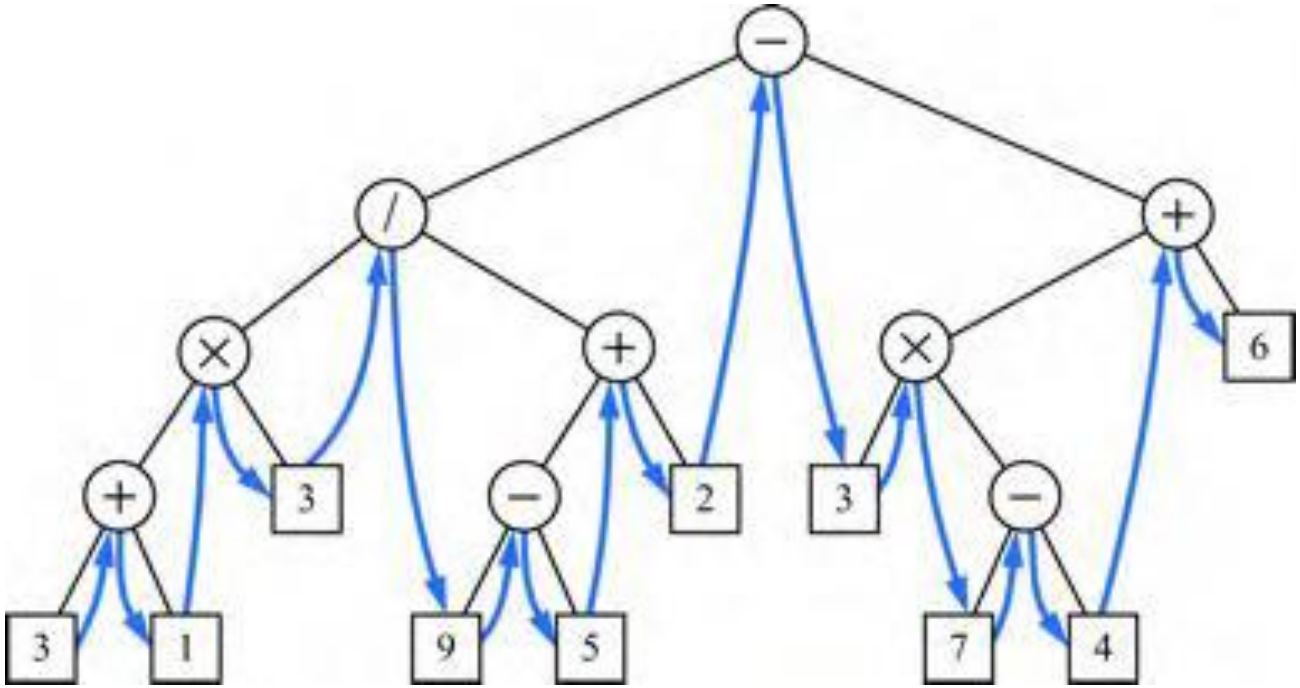
- A travessia **postorder** da árvore abaixo é dada por: 2 a 1 – x 3 b x +





Travessia Inorder

- Representa um método de travessia adicional válido para árvores binárias.
- Nesta travessia, visitamos um nó entre as chamadas recursivas das subárvores esquerda e direita.



FIM