Examen estimation

I/1 Indiquer en quoi diffèrent les cadres théoriques de l'estimation dite "classique" et de l'estimation Bayesienne

~~les cad~~ L'estimation classique se base sur des méthodes fréquentistes, en traitant les paramètres comme des valeurs fixes inconnues. En revanche, l'estimation bayesienne intègre des informations sur les paramètres, les considérant comme des variables aléatoires avec une distribution de probabilité

2\. Expliquer en langage simple ce que sont le biais et la covariance d'un estimateur

Cours
- biais : la valeur moyenne de l'écart entre le produit estimateur et la valeur caché
- convarience d'un estimateur : matrice caractérise la dispersion de l'estimateur autour de son propre esperence

ChatGbt
- biais : mesure la différence entre la valeur attendue de l'estimateur et la vraie valeur du paramètres
- convarience : évalue comment ses variations sont corrélés avec celles d'un autre estimateur, indiquant ainsi leur degrés de dependance

3- L'inégalité de Cramer-Rao établit une borne inférieur théorique pour la variance d'un estimateur non biaisée, montrant les limites de précision atteignables dans l'estimation du paramètres

Cours
4 - $p_\Theta(\theta)$ la densité de proba de la VA A, qui désigne une réalisation possible de A. $p_{\Theta|Z}(\theta|z)$ la densité de proba de la VA A conditionnellement à l'évènement « la variable aléatoire B s'est réalisé en la valeur b », qui désigne une réalisation possible de A

Chat
Gbt

4 - la loi $p_\Theta(\theta)$ de θ represente la connaissance préalable sur les valeurs possibles de θ avant l'observation des données Z
la loi $p_{\Theta|Z}(\theta|z)$ reflete la mise a jour de cette connaissance à la lumière des nouvelles données Z, fournissant ainsi une distribution de probabilité conditionnelle sur les valeurs possibles de θ après Observation

II / $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement independantes
$\Leftrightarrow p_{X_1 \dots X_N}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \dots p_{X_N}(x_n)$

a/ $$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{|2\pi P|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\bar{x})^T P^{-1}(x-\bar{x})\right)$$

$$p_x(x) = \frac{1}{|2\pi\sigma^2 \mathbb{1}_{N\times N}|} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1-m, \dots, x_n-m)\begin{pmatrix}\sigma^{-2} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (\sigma^{-1})^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-m\\ \vdots \\ x_n-m\end{pmatrix}\right)$$

c'est aussi, en vertu de l'independance

$$p_x(x) = \prod_{n=1}^{N} p_{X_n}(x_n) = \prod_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp - \frac{(x_n-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N \sigma^N} \prod_{n=1}^{N}\left[\exp\left(-\frac{(x_n-m)^2}{2\sigma^2}\right)\right]$$

$X \sim \mathcal{N}(\bar{x}, P)$ c/ a/ $X_1, \dots X_N$ centrées $\Leftrightarrow m_x = E_X[X] = 0$
$\bar{x} = 0$

b/ mutuellement independantes $\Leftrightarrow$ P est diagonale

c/ correlées sans etre linéairement dépendantes $\Leftrightarrow$ P n'est pas diagonale

d/ linéairement dependantes $\Leftrightarrow$ P est singulière aka elle n'est pas inversible

III/ $z_1, \dots, z_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(m, v = \sigma^2)$, $\begin{array}{l} m \text{ donné} \\ v \text{ inconnu} \end{array}$, $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix} = Z(\omega)$

où $Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{bmatrix}$ et $Z_1, \dots, Z_N$ sont indépendant, $\forall n$, $Z_n \sim \mathcal{N}(m, v)$

7/ $$\hat{V} = g(Z) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (z_n - m)^2$$

8/

a/ $\hat{V}$ n'est pas biaisé $\Leftrightarrow \forall v,\ \mathbb{E}[\hat{V}] = v$

$$\mathbb{E}[\hat{V} - v] = 0$$

b/ $$\mathbb{E}[(Z_n - m)^2] = \overset{\sigma^2 = v}{\cancel{\mathbb{E}[Z_n^2 + m^2 - 2 Z_n m]}} = \sigma^2$$

$$= \cancel{m^2 + \mathbb{E}[Z_n^2] - 2m\, \mathbb{E}[Z_n]}$$

$$= \cancel{m^2 + (v + v^2) - 2m\, v}$$

$$= \cancel{\mathbb{E}[(Z_n - m)(Z_n - m)]}$$

$$= \cancel{\mathbb{E}[(Z_n - m)]\ \mathbb{E}[(Z_n - m)]}$$

$$= \cancel{\sigma^2 \times \sigma^2 = \sigma^4}$$

c/ $$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}[(Z_n - m)^2] - v = \frac{1}{N}\left(\sum v\right) - v = 0$$

9/ $$X = \frac{N}{\sigma^2} \hat{V} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

8/ $$\mathrm{Var}(X) = \left(\frac{N}{\sigma^2}\right)^2 \mathrm{Var}(\hat{V}) = \left(\frac{N}{v}\right)^2 \mathrm{Var}(\hat{V})$$

$$\mathrm{Var}(\hat{V}) = \frac{v^2}{N^2} 2N = \frac{2v^2}{N}$$

...able sur

$\hat{v}$ est-il efficace ? $\quad Var\,\hat{v}(v) = \frac{2v^2}{N}$

$$p_{Z|v}(z|v) = \prod_{n=1}^{N} p_{z_n|v}(z_n|v)$$

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,v}\left[\exp\left(-\frac{(z_n-m)^2}{2v}\right)\right]$$

$$p_{Z|v}(z|v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N\, v^{N/2}}\left[\prod_{n=1}^{N}\exp\left(-\frac{(z_n-m)^2}{2v}\right)\right]$$

$$\ln p_{Z|v}(z|v) = \left(-\frac{N}{2}\ln 2\pi - \frac{N}{2}\ln v\right) + \left(\sum_{n=1}^{N} -\frac{(z_n-m)^2}{2v}\right)$$

$\ln 2\pi$

$$\ln p_{Z|v}(z|v) = \left(-\frac{N}{2}\ln 2\pi - \frac{N}{2}\ln v\right) + \left(-\frac{1}{2v}\sum_{n=1}^{N}(z_n-m)^2\right)$$

$\frac{N}{2}$

$$\frac{\partial \ln p_{Z|v}(z|v)}{\partial v} = -\frac{N}{2v} + \frac{1}{2v^2}\sum_{n=1}^{N}(z_n-m)^2$$

$$\frac{\partial^2 \ln p_{Z|v}(z|v)}{\partial v\,\partial v^T} = +\frac{N}{2v^2} - \frac{1}{v^3}\sum_{n=1}^{N}(z_n-m)^2$$

b) Lorsque N croît indéfiniment, l'estimateur $\hat{v}$ converge en probabilité vers la vraie valeur de la variance v.
Cela est dû à la loi des grands nombres, qui assure que la moyenne empirique converge vers l'espérance théorique lorsque la taille de l'échantillon devient grande

a/ Ecrire la loi $p_{Z|v}(z|v)$ et simplifier son expression en exploitant l'indépendance des composantes de Z

$$p_{Z|v}(z|v) = \prod_{n=1}^{N} p_{Z_n|v}(z_n|v) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}\, v^{\frac{N}{2}}} \left[\prod_{n=1}^{N} \exp\left(-\frac{(z_n - m)^2}{2v}\right) \right]$$

b/ $NLL(v:z) = -\ln p_{Z|v}(z|v) = \frac{N}{2}\ln(2\pi) + \frac{N}{2}\ln v + \frac{1}{2v}\sum (z_n -$

et $\hat{v}_{MLE} = \arg\min_{v} NLL(v:z)$

$= \arg\max_{v} p_{Z|v}(z|v)$

c/ La condition nécessaire de stationnarité sur $NLL(v:z)$ que doit satisfaire $\hat{v}_{MLE}$ et la développer. En déduire de $\hat{v}_{MLE}$ e[t] de $\hat{v}$ introduit en (1)

- v^* optimal $\Rightarrow$ $$\frac{\partial[-\ln p_{Z|v}(z|v)]}{\partial v} = 0$$

$$\frac{N}{2v^*} - \frac{1}{2v^{*2}} \sum_{n=1}^{N} (z_n - m)^2 = 0$$

$$v^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(z_n - m)^2$$

- Si de plus

$$\frac{\partial^2(-\ln p_{Z|v}(z|v))}{\partial v^2} = \frac{-N}{2v^{*2}} + \frac{1}{v^{*3}}\sum_{n=1}^{N}(z_n-m)^2 > 0$$

alors $\hat{v}_{MLE} = v^*$