CHAPITRE 1

# MODÉLISATION DES SYSTÈMES PAR REPRÉSENTATION D'ÉTAT

Viviane CADENAT
Enseignant - chercheur à l'UPS
LAAS - CNRS
cadenat@laas.fr





## Sommaire

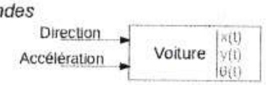




## Introduction

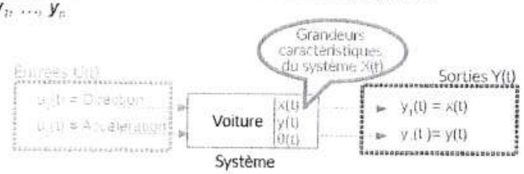
Section 1.1

- Notions de base
  - **Système**
    - Définition : *tout procédé évoluant en fonction du temps sous l'action d'entrées de commande notées $u_1, u_2, \dots, u_m$.*
    - Exemple : *Voiture*
      - *Système évoluant sous l'action de 2 commandes*
      - *Représentation graphique → schéma-bloc*




    - *Un système est équipé de* ***capteurs***
      - *Renseignent sur « ce qui se passe dans le système »*
      - *On appelle '**sortie**' l'ensemble des informations fournies par les capteurs : $y_1, \dots, y_n$*

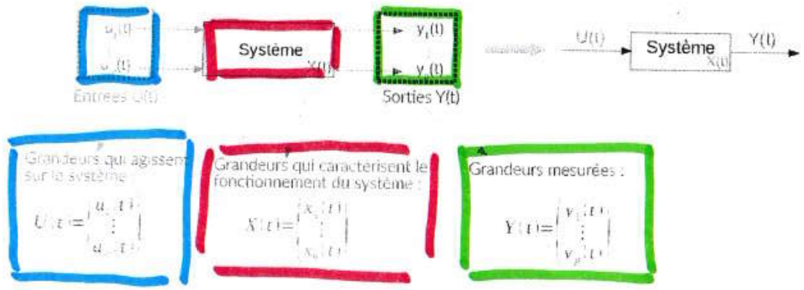
Les grandeurs caractéristiques ne sont pas toutes forcément mesurées ou mesurables






## Introduction

- Notions de base
  - **Système**
    - Définition affinée : *tout procédé évoluant au cours du temps sous l'action de ses entrées de commande et produisant des sorties.*
    - Représentation graphique : *schéma-bloc*



# Introduction

Section 1

modèle interne | modèle externe

"Paquet cadeau ouvert" $u(t)$ → SYSTÈME [$X(t)$] → $Y(t)$ | $U(t)$ → SYSTÈME → $Y(t)$ "Paquet cadeau fermé"

Représentation d'état | Équation différentielle E/S ou fonction transfert

- Notions de base
  - **Modèle**
    - Définition : *Représentation mathématique d'un système*
      - ***Approximation de la réalité*** → *Attention à la fidélité*
      - → *Outil privilégié : équations différentielles*
      - → *Représentation graphique : schéma-bloc*

U(t) → Modèle → $Y_M(t)$

- Bruits sur les capteurs et les actionneurs
- Éléments perturbateurs ~~de la réalité~~ (non linéarité)

- *3 types de modèles :*

+ complet
- *Représentation d'état* → ***Modèle interne*** **(fait intervenir X(t))**
- *Équation différentielle entrée/sortie*
- *Fonction de transfert*

- complet

→ ***Modèles E/S ou externe (X(t) n'est plus 'visible').***

exemple : $f(t)<0$ $f(t)>0$ par déterminer la variation fine d'une valeur | évolution | grandeur caractéristique



# Focus sur la représentation d'état

Section 2.1

- Un modèle temporel en deux parties

**Une équation** différentielle

$$\dot{X}(t)=f(X(t),U(t))$$

- Appelée '**Équation d'état**'
- Reflète la dynamique du système → ***évolution des grandeurs caractéristiques*** *X(t) sous l'action des commandes U(t)*
- X(t) est appelé '**état**' du système

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}$$ *où $x_i(t)$ est appelée **variable d'état***

**Une équation** algébrique

$$Y(t)=g(X(t),U(t))$$

- Appelée '**Équation de sortie**'
- Reflète la manière dont les sorties sont produites à partir de X(t) → la relation dépend de ce que l'on mesure
- On peut mesurer tout ou partie de l'état

$$Y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ \vdots \\ y_p(t)\end{pmatrix} \quad U(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ \vdots \\ u_m(t)\end{pmatrix}$$

***NB 1 :*** *Le choix des variables d'état est laissé à la discrétion de celui qui modélise. Elles ont souvent un sens physique mais ce n'est pas obligatoire. Elles peuvent être mesurées ou non. Elles doivent être **indépendantes** et **en nombre minimal**.*

***NB 2 :*** *Plus formellement : les variables d'état sont des grandeurs nécessaires et suffisantes pour décrire le système telles que leur connaissance à l'instant $t_0$ et celle de u(t) permettent de déterminer **de manière unique** l'état X(t) et la sortie Y(t) pour tout $t \geq t_0$ → Elles permettent donc de prédire le comportement futur du système en fonction de ses entrées.*



# Focus sur la représentation d'état

- Un modèle temporel en deux parties
  - Structure générale d'une représentation d'état

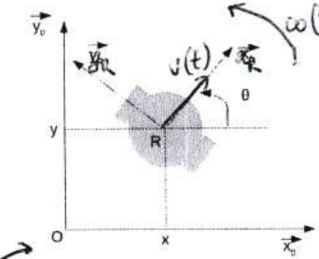
$$\dot{X}(t)=f(X(t),U(t)) \quad Y(t)=g(X(t),U(t))$$ où f et g dépendent du système considéré

Quel état ? Quelles valeurs caractéristiques ?

Pos/$R_0$ $=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$

Orientation/$R_0$ : on défini un repère $R_R$ lié $\Theta=(\vec{x_0},\vec{x_R})$

  - Un exemple : le robot mobile




*Question :* quelle est la représentation d'état du robot ?

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}v\cos\theta\\ v\sin\theta\\ \omega\end{pmatrix}=f(X(t),U(t))$$

$$Y=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=g(X(t))$$

NB : f est non linéaire ici

Ainsi on défini $X(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ \theta(t)\end{pmatrix}$

Étape suivante : Trouver comment évolue $X(t)$ sous l'action des commandes

$R(\vec{y_0},\vec{x_0})$ est le repère monde, le repère à travers lequel on représente tout



# Focus sur la représentation d'état

- Un modèle temporel en deux parties
  - Et si f et g sont linéaires par rapport à X et U ?

→ **Système linéaire** $\dot{X}(t)=f(X(t),U(t))$, $Y(t)=g(X(t),U(t))$ ➡ $\dot{X}(t)=AX(t)+BU(t)$, $Y(t)=CX(t)+DU(t)$

Dimensions des matrices X : (n,1) U : (m,1) Y : (p,1) ➡ A : (n,n) B : (n,m) C : (p,n) D : (p,m)

→ Un peu de vocabulaire
- A : Matrice dynamique (ou d'état)
- B : Matrice de commande (ou d'entrée)
- C : Matrice de sortie (ou d'observation)
- D : Matrice de transmission directe (souvent nulle)
- Si A, B, C, D sont constantes, le système est dit '*invariant*'.
- Ordre du système : Nombre n de variables d'état

NB : Sauf mention contraire, on ne considérera ici que des systèmes linéaires invariants mono-entrée/mono-sortie → m=1, p=1

→ Ici 2 commandes $v(t)$ = vitesse linéaire du robot, $\omega(t)$ vitesse angulaire du robot

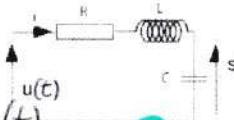
→ $v(t)=\begin{pmatrix}v(t)\\ \omega(t)\end{pmatrix}$

# Focus sur la représentation d'état

Une seule entrée de commande ici → système mono-entrée

- Un modèle temporel en deux parties
  - ➢ Un exemple « linéaire » : un circuit électronique

$u(t)$ = tension d'entrée du circuit = Entrée de commande du système




*Question 1 :* quelle est la représentation d'état du robot ?

$$\dot{X}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1/C\\ -1/L & -R/L\end{pmatrix}X(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1/L\end{pmatrix}U(t)$$

$$Y(t)=C\,X(t)$$

NB : C dépend des capteurs disponibles

$$X(t)=\begin{pmatrix}s(t)\\ i(t)\end{pmatrix}$$

$$\dot{X}(t)=\underbrace{A}_{(2,2)}\underbrace{X(t)}_{(2,1)}+\underbrace{B}_{(2,1)}\underbrace{u(t)}_{(1,1)}$$

$(2,1)$

1 $u(t)-s(t)=u_R(t)+u_L(t) = Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}$

2 $i(t)=C\dot{s}(t)$ avec $\dot{s}(t)=\frac{ds(t)}{dt}$

$$\rightarrow \dot{X}(t)=\begin{pmatrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{pmatrix}X(t)+\begin{pmatrix}\cdot\\ \cdot\end{pmatrix}u(t)$$

$$\rightarrow \dot{X}(t)=\begin{pmatrix}\dot{s}(t)\\ \frac{di(t)}{dt}\end{pmatrix}$$

*Question 2 :* Pourrait-on trouver une autre représentation d'état ?

⚠ L'ordre du système = n = 2 = Nb var d'état

1 → $\dot{s}(t)=1/C\; i(t)$

2 → $\frac{di(t)}{dt}=\frac{1}{L}u(t)-\frac{1}{L}s(t)-\frac{R}{L}i(t)$

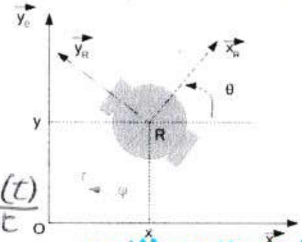
$$\dot{X}(t)=\begin{pmatrix}\dot{s}(t)\\ \frac{di(t)}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{C}i(t)\\ \frac{1}{L}u(t)-\frac{1}{L}s(t)-\frac{R}{L}i(t)\end{pmatrix}$$

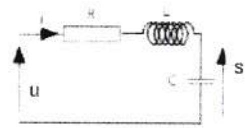
(voir ci-après)



# Focus sur la représentation d'état

- Un modèle temporel en deux parties
  - ➢ Combien de représentations d'état peut-on déterminer pour représenter un même système ?




$X_1(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\\ \theta(t)\end{pmatrix}$ position avec des coordonnées cartésiennes ; orientation / rotation avec des coordonnées cartésiennes

$\rightarrow X_2(t)=\begin{pmatrix}r(t)\\ \varphi(t)\\ \theta(t)\end{pmatrix}$ position avec des coordonnées cylindriques ; orientation avec des coordonnées cylindriques

$X_1(t)=\begin{pmatrix}s(t)\\ i(t)\end{pmatrix} \longrightarrow X_2(t)=\begin{pmatrix}s(t)\\ \dot{s}(t)\end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \dot{X}_2(t)=\begin{pmatrix}\dot{s}(t)\\ \ddot{s}(t)\end{pmatrix}$

2 : $i(t)=C\dot{s}(t)$ donc $\dot{i}(t)=C\ddot{s}(t)$

ainsi dans 1 : $u(t)-s(t)=RC\dot{s}(t)+LC\ddot{s}(t)$

donc : $u(t)=LC\ddot{s}(t)+RC\dot{s}(t)+s(t)$, équa diff E/S

(voir ci-après)



# Focus sur la représentation d'état

- Un modèle temporel en deux parties
  - ➢ Combien de représentations d'état peut-on déterminer pour représenter un même système ?
    - Il existe une infinité de représentations d'état pour un même système
    - Pour passer d'une définition de l'état à une autre, on utilise une **matrice de passage M inversible***
      - → **on effectue un changement de base**
      - → **M est aussi appelée matrice de changement de base**
    - 3 bases intéressantes
      - **Base diagonale**
      - **Base compagne de commande (CC)**
      - **Base compagne d'observation (CO)**

* Remarque : X(t) appartient à un espace vectoriel de dimension n appelé classiquement 'espace d'état'. Les variables d'état sont linéairement indépendantes (cf. slide 5) → elles forment donc une base de l'espace d'état et définissent les axes de cet espace.



# Focus sur la représentation d'état

- Changement de base
  - ➢ Impact sur la représentation d'état

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=A\,X(t)+BU(t)\\ Y(t)=C\,X(t)+DU(t)\end{cases}$$

Système dans la base initiale

$X(t)=T\tilde{X}(t)$ → T : matrice de passage

$$\begin{cases}\dot{\tilde{X}}(t)=\tilde{A}\tilde{X}(t)+\tilde{B}U(t)\\ Y(t)=\tilde{C}\tilde{X}(t)+\tilde{D}U(t)\end{cases}$$

$\tilde{A}=T^{-1}AT \quad \tilde{C}=CT$

$\tilde{B}=T^{-1}B \quad \tilde{D}=D$

Y et U ne changent pas !

- ➢ Rappels (cf. cours de math)
  - Polynôme caractéristique de A : $det(A-\lambda I)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0$
  - Valeurs propres de A : racines du polynôme caractéristique
  - Toutes les matrices de la forme $T^{-1}AT$ ont le même polynôme caractéristique
  - A et Ã sont des **matrices semblables**

$V_i$ est un vecteur propre de A ssi $AV_i = \lambda_i V_i$
chaque vecteur propre $V_i$ est associé à 1 vecteur propre de A
" " " est connu à 1 constante près (cf TD)



# Focus sur la représentation d'état

- Changement de base
  - Base diagonale
    - Matrice de passage $T = [V_1 \ \ldots \ V_n]$
      - $V_i$ : vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_i$
      - Par définition (cf. cours math) : $A V_i = \lambda_i V_i$
    - Structure

$$\begin{cases} \dot{X}_d(t) = A_d X_d(t) + B_d U(t) \\ Y(t) = C_d X_d(t) + DU(t) \end{cases}$$

    - Forme particulière de $A_d$

$$A_d = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad B_d = T^{-1}B \qquad C_d = CT$$

Valeurs propres de A



# Focus sur la représentation d'état

- Changement de base
  - Base compagne de commande
    - Matrice de passage $M_{cc} = [M_1 \ \ldots \ M_n]$

$$M_n = B \qquad M_{n-j} = \left(A^j + a_{n-1}A^{j-1} + \ldots + a_{n-j}I\right)B$$

    - Structure

$$\begin{cases} \dot{X}_{cc}(t) = A_{cc} X_{cc}(t) + B_{cc} U(t) \\ Y(t) = C_{cc} X_{cc}(t) + DU(t) \end{cases}$$

    - Forme particulière de $A_{cc}$ et $B_{cc}$

$$A_{cc} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \ldots 0 \\ \ddots \\ 0 \ldots 1 \end{matrix} \\ \hline -a_0 & \ldots \quad -a_{n-1} \end{array}\right) \qquad B_{cc} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_{cc} = CM_{cc}$$

Coefficients du polynôme caractéristique de A



# Focus sur la représentation d'état

- Changement de base
  - Base compagne d'observation
    - Matrice de passage $P = [P_1 \ \ldots \ P_n]$ et $M_{co} = P^{-T}$

$$P_1 = C^T \qquad P_j = \left(A^{T^{j-1}} + a_{n-1}A^{T^{j-2}} + \ldots + a_1 I\right)C^T$$

    - Structure

$$\begin{cases} \dot{X}_{co}(t) = A_{co} X_{co}(t) + B_{co} U(t) \\ Y(t) = C_{co} X_{co}(t) + DU(t) \end{cases}$$

    - Forme particulière de $A_{co}$ et $C_{co}$

$$A_{co} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} -a_{n-1} \\ \vdots \\ -a_0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \ldots 0 \\ \ddots \\ 0 \ldots 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & \ldots \quad 0 \end{array}\right) \qquad C_{co} = [0 \ \ldots \ 0 \ \ 1] \qquad B_{co} = M_{co}^{-1}B$$

Coefficients du polynôme caractéristique de A



# Focus sur la représentation d'état

Section 2.3

- La solution de l'équation d'état ou comment trouver X(t) ?
  - Équation d'état : $\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$
  - Solution :

Matrice de transition d'état

$$X(t) = \underbrace{e^{At}X(0)}_{\text{Régime libre}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau}_{\text{Régime forcé}}$$

  - Calcul de exp(At) (cf. cours math)
    - **Attention** : *exp(At) est l'exponentielle d'une matrice carrée qui n'est pas égale à l'exponentielle de chaque terme de la matrice !*
    - Exploiter la base diagonale

$$A_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow e^{A_d t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \longrightarrow e^{At} = T\ e^{A_d t}\,T^{-1}$$

    - Théorème de Sylvester (cf. cours math) → calcul de f(A)
    - Numériquement : sous matlab, utiliser expm et non exp.

# Analyse dans l'espace d'état



## Stabilité

*Intuitivement : le système diverge-t-il ?*

### Définition :

- Stabilité au sens « entrée bornée / sortie bornée » (EBSB ou BIBO)

  → Un système est stable si, lorsqu'il est excité par une entrée bornée, il produit une sortie bornée.

  → Un système est instable si, lorsqu'il est excité par une entrée bornée, il produit une sortie non bornée.

### Critère mathématique

- Un système est stable au sens EBSB ssi **toutes les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle strictement négative.**
- Pourquoi ?
  - Sortie du système dépend de ses modes et donc des valeurs propres de A (vp) → cf. TD1 :

    $$Y(t) = 2/3\,\boxed{e^{-t}} + 16/21\,\boxed{e^{-7t}} + 12/21 \rightarrow 2 \text{ vp} : \lambda_1 = -1 \text{ et } \lambda_2 = -7$$

  - La sortie ne peut se stabiliser que si les exponentielles → 0 quand t → ∞



# Analyse dans l'espace d'état



## Commandabilité

*Intuitivement : Capacité d'un système à voir son comportement dynamique évoluer sous l'action de sa commande.*

### Définition

- Une variable d'état $x_i(t)$ est commandable ssi, **quel que soit $x_i(t_0)$, il existe** une commande u(t) permettant de transférer $x_i(t)$ de sa valeur initiale $x_i(t_0)$ à une valeur finale $x_i(t_f)$ **en un temps $t_f$ fini**.
- Si cela est vrai pour toutes les variables d'état du système, alors celui-ci est commandable.

### Critères mathématiques

| Base quelconque | Base diagonale | Base compagne de commande |
|---|---|---|
| 1/ Matrice de commandabilité $\mathcal{C} = [B \;\; AB \;\; \dots \;\; A^{n-1}B]$ <br> 2/ Système commandable ssi $Rg(\mathcal{C}) = n$ ou $n = \dim(X)$ | Le système est commandable ssi aucune ligne de B n'est nulle. | Le système est commandable par construction. |



# Analyse dans l'espace d'état



## Observabilité

*Intuitivement : possibilité de déterminer l'état du système à partir des mesures de sa sortie.*

### Définition

- Une variable d'état $x_i(t)$ est observable ssi, en mesurant la sortie y(t) sur un intervalle de temps $[t_0, t_f]$ **fini,** il est possible de déterminer la valeur initiale de l'état $x_i(t_0)$.
- Si cela est vrai pour toutes les variables d'état du système, alors celui-ci est observable.

### Critères mathématiques

NB : observable ≠ mesurable

| Base quelconque | Base diagonale | Base compagne d'observation |
|---|---|---|
| 1/ Matrice d'observabilité $\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ <br> 2/ Système observable ssi $Rg(\mathcal{O}) = n$ ou $n = \dim(X)$ | Le système est observable ssi aucune colonne de C n'est nulle. | Le système est observable par construction. |

- Representation d'état en 2 parties

1 partie représente l'évolution de $X(t)$ sous l'action de $U(t)$

↳ Dynamique du système

↳ Equadiff $\dot{X}(t) = F(X(t), U(t))$ ← équation d'état

↳ état du système

1 partie qui représente la mesure

$Y(t) = g(X(t), U(t))$

↳ équation de sortie

↳ équation d'observation

Voiture = 3 grandeurs caractéristiques $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$ évoluent

Si l'action de 2 entrées $U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ — Direction — Accélération

2 mesure avec 1 GPS $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ← $x_1(t)$, $x_2(t)$

- $\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ \frac{di(t)}{dt} \end{pmatrix}}_{\dot{X}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix}}_{B} u(t)$

Si on regarde maintenant les équations de sortie on aura

$Y(t) = $
- $i(t)$ si on branche un ampèremètre → $(0, 1)\begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \end{pmatrix} + 0\,u(t)$
- $s(t)$ si on branche un voltmètre → $(1, 0)\begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \end{pmatrix} + 0\,u(t)$
- $\begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \end{pmatrix}$ si les 2 → $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} X(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{D} u(t)$

- Or : $\dot{X}(t) = F(X(t), U(t))$

↳ Ici il faut donc trouver la dérivée de $x(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$ en fonction de $X(t)$ et de $U(t)$

↳ $\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v(t)\cos(\theta(t)) \\ v(t)\sin(\theta(t)) \\ \omega(t) \end{pmatrix}}_{F(X(t), U(t))}$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \overset{n}{A} X(t) + \overset{m}{B} U(t) \\ \underbrace{Y(t)}_{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_p(t) \end{pmatrix}} = \overset{p}{C} \underbrace{X(t)}_{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}} + \overset{m}{D} U(t) \end{cases}$$

avec $A, B, C, D$ sont des matrices

↳ $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}$

~~Robot mobile~~ - Ainsi $\dot{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ \ddot{s}(t) \end{pmatrix}$ et $\ddot{s}(t) = \frac{1}{LC}u(t) - \frac{1}{LC}s(t) - \frac{R}{L}\dot{s}(t)$

soit $\dot{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \dot{s}(t) \\ \ddot{s}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{pmatrix} u(t)$

$\dot{X}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{RC} \\ -\frac{R}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ R/L \end{pmatrix} u(t)$ et $X_1(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}}^{M_{12}} X_2(t)$ avec

$X_2(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(t) \\ 1/C\; i(t) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/C \end{pmatrix}}^{M_{21}} \overbrace{\begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \end{pmatrix}}^{X_1(t)} \Rightarrow X_2(t) = M_{21} X_1(t)$

Toute matrice inversible permet de définir 1 état "équivalent" à l'état d'origine soit : $X_4(t) = \begin{pmatrix} 2s(t) + 3i(t) \\ 4s(t) + 5i(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} X_1(t) \Rightarrow$ mais n'a aucun sens physique

⚠ $X(t)$ = Ensemble de $n$ grandeurs caractéristiques indépendante et en nombre min

- $\underbrace{X(t)}_{(n,1)} = \underbrace{T}_{(n,n)} \underbrace{\tilde{X}(t)}$ avec $T$ matrice inversible (matrice carrée de det $\neq 0$)

$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{X}}(t) = \tilde{A}\tilde{X}(t) + \tilde{B}U(t) \\ Y(t) = \tilde{C}\tilde{X}(t) + \tilde{D}U(t) \end{cases}$

Question : Peut on trouver $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ et $\tilde{D}$ à partir de $A, B, C, D$, et $T$ ?

$X(t) = T\tilde{X}(t) \rightarrow \dot{X}(t) = T\dot{\tilde{X}}(t)$ donc $\begin{cases} T\dot{\tilde{X}}(t) = AT\tilde{X}(t) + BU(t) \\ Y(t) = CT\tilde{X}(t) + DU(t) \end{cases}$

donc $\dot{\tilde{X}}(t) = \boxed{\overset{\tilde{A}}{T^{-1}AT}}\,\tilde{X}(t) + \boxed{\overset{\tilde{B}}{T^{-1}B}}\,U(t)$

$Y(t) = \underbrace{\boxed{CT}}_{\tilde{C}}\,\tilde{X}(t) + \underbrace{\boxed{D}}_{\tilde{D}}\,U(t)$

Exemple : Calcul d'un polynôme caractéristique et de valeur propre $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) \rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

soit $\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda + 2) + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$

$a_2 = 1 \quad a_1 = 2 \quad a_0 = 1$

valeur propre annule le polynôme

→ caractéristique
$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0$
⇒ 1 valeur propre double $\boxed{\lambda = -1}$