# Annale 2015 Traitement du signal

## 1 Exercice 1 : Filtre moyenneur

Soit le filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{T_0} 1_{[0,T_0]}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_0} \; si \; t \in [0, T_0[ \\ 0 \; sinon \end{cases}$

### 1. Ce filtre est-il stable ? Justifiez cotre réponse.

Pour rappel un filtre est stable si $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \pm\infty$. (En gros s'il diverge)

Comme ici $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^{T_0} |h(t)| dt = 1 < +\infty$ donc le filtre est stable.

### 2. Calculer l'expression du signal de sortie $s(t)$ lorsque l'on place en entrée le signal $e(t)$. Pourquoi peut on appeler ce filtre un filtre moyenneur ?

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e(t-\tau) d\tau = \int_0^{T_0} h(\tau) e(t-\tau) d\tau = \int_0^{T_0} \frac{1}{T_0} e(t-\tau) d\tau = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e(t-\tau) d\tau$$

On intègre sur $[0, T_0[$ et ensuite on divise par $T_0 \rightarrow$ on effectue la moyenne

### 3. Calculer la sortie de ce filtre lorsque l'on place en entrée un signal sinusoïdal de fréquence multiple de $f_0 = \frac{1}{T_0}$ : $e(t) = A\cos(2\pi n f_0 t + \varphi)$ pour $n$ entier positif et $A$ et $\varphi$ quelconques.

$$\begin{aligned}
s(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A\cos(2\pi n f_0 (t-\tau) + \varphi)\, d\tau &= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{e^{2j\pi n f_0 (t-\tau)} e^{j\phi} + e^{-2j\pi n f_0 (t-\tau)} e^{j\phi}}{2} d\tau \\
&= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{e^{2j\pi n f_0 (t)} e^{2j\pi n f_0 (-\tau)} e^{j\phi} + e^{-2j\pi n f_0 (t)} e^{2j\pi n f_0 (+\tau)} e^{j\phi}}{2} d\tau \\
&= \frac{A}{2T_0} \left( e^{2j\pi n f_0 (t)} e^{j\phi} \int_0^{T_0} e^{2j\pi n f_0 (-\tau)} d\tau + e^{-2j\pi n f_0 (t)} e^{j\phi} \int_0^{T_0} e^{2j\pi n f_0 (+\tau)} d\tau \right) \\
&= \frac{A}{2T_0} \left( e^{2j\pi n f_0 (t)} e^{j\phi} \left[ \frac{e^{2j\pi n f_0 (-\tau)}}{-2j\pi n f_0} \right]_0^{T_0} \right) + \frac{A}{2T_0} \left( e^{-2j\pi n f_0 (t)} e^{j\phi} \left[ \frac{e^{2j\pi n f_0 (+\tau)}}{+2j\pi n f_0} \right]_0^{T_0} \right) \\
&= \frac{A e^{2j\pi n f_0 (t)} e^{j\phi}}{2T_0(-2j\pi n f_0)} \left( \left[ e^{2j\pi n f_0 (-\tau)} \right]_0^{T_0} \right) + \frac{A e^{-2j\pi n f_0 (t)} e^{j\phi}}{2T_0(+2j\pi n f_0)} \left( \left[ e^{2j\pi n f_0 (+\tau)} \right]_0^{T_0} \right) \\
&= \frac{A e^{2j\pi n f_0 (t)} e^{j\phi}}{-4T_0 j\pi n f_0} \left( e^{2j\pi n f_0 (-T_0)} - 1 \right) + \frac{A e^{-2j\pi n f_0 (t)} e^{j\phi}}{4T_0 j\pi n f_0} \left( e^{2j\pi n f_0 (+T_0)} - 1 \right) \\
&= \frac{A e^{j\phi}}{4T_0 j\pi n f_0} \left( -e^{2j\pi n f_0 (t)+\phi} \left( e^{2j\pi n f_0 (-T_0)} - 1 \right) + e^{-2j\pi n f_0 (t)+\phi} \left( e^{2j\pi n f_0 (+T_0)} - 1 \right) \right) \\
&= \frac{A e^{j\phi}}{4T_0 j\pi n f_0} \left( \left( -e^{2j\pi n f_0 (t-T_0)+\phi} + e^{2j\pi n f_0 (t)+\phi} \right) + \left( e^{-2j\pi n f_0 (t-T_0)+\phi} - e^{2j\pi n f_0 (t)+\phi} \right) \right)
\end{aligned}$$

En sachant que $f_0 = \frac{1}{T_0}$ simplifie -> utiliser $1 - e^{\alpha j} = e^{-\frac{j\alpha}{2}} \left( e^{\frac{j\alpha}{2}} - e^{-\frac{j\alpha}{2}} \right)$

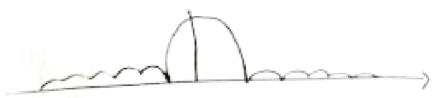
### 4. Calculer la réponse en fréquence $\hat{h}(f)$ de ce filtre. Tracer $|\hat{h}(f)|$. A quel type de filtre correspond-il ?

$$\hat{h}(f) = \frac{1}{T_0} 1_{[0,T_0[(t)} \rightarrow propriété \; de \; réciprocité$$

$$\begin{aligned}
\hat{h}(f) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-2j\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \left[ \frac{e^{-2j\pi n f_0 t}}{-2j\pi n f_0} \right]_0^{T_0} &= \frac{1}{\pi n f_0 T_0} \left( \frac{e^{-2j\pi n f_0 T_0} - 1}{-2j} \right) \\
&= \frac{1}{\pi n f_0 T_0} \left( \frac{1 - e^{-2j\pi n f_0 T_0}}{2j} \right) \xRightarrow{1 - e^{\alpha j} = e^{-\frac{j\alpha}{2}} \left( e^{\frac{j\alpha}{2}} - e^{-\frac{j\alpha}{2}} \right)} \frac{1}{\pi n f_0 T_0} \left( \frac{e^{-j\pi n f_0 T_0} \left( e^{j\pi n f_0 T_0} - e^{-j\pi n f_0 T_0} \right)}{2j} \right) \\
&= \frac{e^{-j\pi n f_0 T_0} \sin(\pi n f_0 T_0)}{\pi n f_0 T_0} \xRightarrow{\mathrm{sinc}(\pi n f_0 T_0) = \frac{\sin(\pi n f_0 T_0)}{\pi n f_0 T_0}} = e^{-j\pi n f_0 T_0} \mathrm{sinc}(\pi n f_0 T_0)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\hat{h}(f) = e^{-j\pi n f_0 T_0} \mathrm{sinc}(\pi n f_0 T_0)}$

et $\boxed{|\hat{h}(f)| = |\mathrm{sinc}(\pi n f_0 T_0)|}$ soit un filtre passe bas



**5. Pouvez-vous faire le lien entre l'expression de $\hat{h}(f)$ et la réponse à la question 3 ?**

**6. Calculer la fonction de transfert $H(p)$ de ce filtre. Cette fonction de transfert a-t-elle une forme classique telle que celles utilisées en cours et TD ?**

$$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-p\tau}d\tau = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{-pt}dt = \frac{1}{T_0}\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{T_0} = \boxed{\frac{1}{-pT_0}\left(e^{T_0 p} - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{-pT_0}e^{-\frac{T_0 t}{2}}\left(e^{-\frac{T_0 t}{2}} - e^{\frac{T_0 t}{2}}\right) = \frac{e^{\frac{T_0 t}{2}}}{pT_0}2j\sin\left(-\frac{T_0 p}{2}\right)$$

Forme non classique, difficile de voir les pôles et zéros mais reste cohérant avec q5.

A partir de ce filtre analogique $H$, on construit le filtre numérique $G$ par échantillonnage et troncature de sa réponse impulsionnelle avec une période d'échantillonnage de $T_e = \frac{T_0}{N}$.

**7. Donner l'expression de la réponse impulsionnelle $g[n]$ de ce filtre numérique.**

$$g[n] = \left(h(t).w_{T_e}(t)\right).\omega[n]\ avec\ \omega[n] \to 1\ entre\ \{-p,p\}$$

**8. Calculer sa réponse en fréquence $\hat{g}(f)$. Tracer $|\hat{g}(f)|$. Quel est le lien entre $\hat{h}(f)$ et $\hat{g}(f)$ ?**

$$g[n] = \left(\hat{h}(f) * T_e w_{\frac{1}{T_e}}(f)\right) * \hat{\omega}(f)\ avec\ \hat{\omega}(f)\ sinus\ cardinal\ car\ porte\ entre\ \{-p,p\}$$

## 2 Exercice 2 : Echantillonnage d'un signal bande étroite

Soit le signal analogique $x_1(t)$ dont le spectre est schématisé Fig. 1. On va effectuer une suite de traitements sur ce signal que vous allez devoir décrire brièvement.

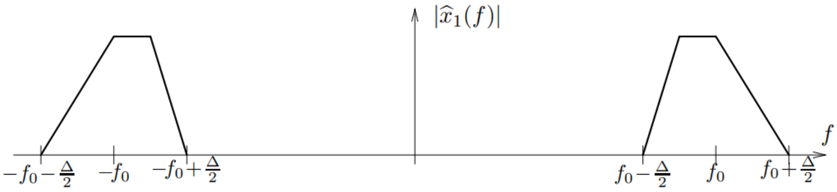



Fig. 1 Représentation fréquentielle du signal $x_1$.

**1. Quel traitement doit-on effectuer sur le signal $x_1$ pour obtenir le signal $x_2$ dont le spectre est schématisé Fig. 2 ? Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence.**

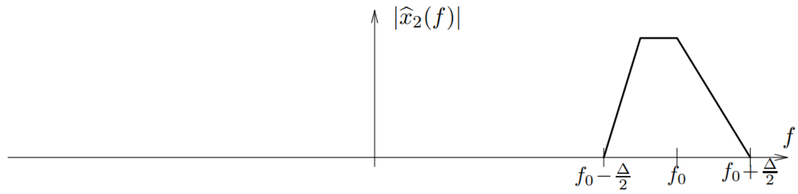
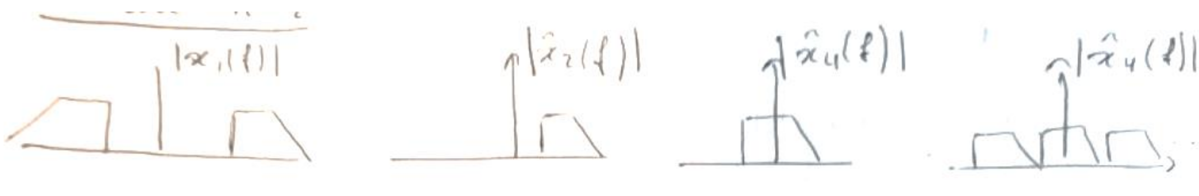



Fig. 2 Représentation fréquentielle du signal $x_2$.



En fréquence → passe bande décalée autour non pas de zéro mais de $f_0$ (pour cela on le multiplie toujours en fréquence par un Dirac pour décaler le signal fréquentiel) (Vu en TP)

En temporel → les multiplications sont des produits de convolutions, une porte est un $\text{sinc}$ et le Dirac un $\cos$

$$En\ fréquence \rightarrow \hat{x}_2(f) = \hat{x}_1(f).\left(1_{\left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right]}(f).\delta(f-f_0)\right)$$
$$En\ temporel \rightarrow x_2(t) = x_1(t) * (\Delta \,\text{sinc}(t\Delta) * e^{2j\pi f_0 t})$$

2. **Pourquoi peut-on affirmer que le signal $x_2$ n'est pas un signal à valeurs réelles ? Justifier votre réponse.**

$\hat{x}_2(f)$ n'est pas paire → $x_2(t)$ n'est pas paire, → $x_2(t)$ n'est pas à valeurs réelles

3. **Quel traitement doit-on effectuer sur le signal $x_2$ pour obtenir le signal $x_3$ dont le spectre est schématisé Fig. 3 ? Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence.**

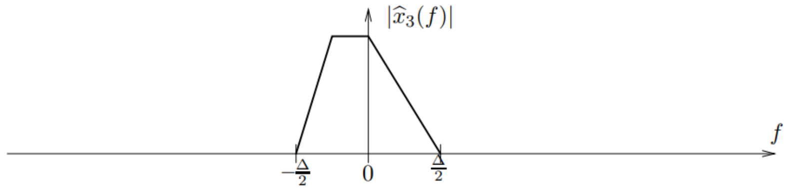



Fig. 3 Représentation fréquentielle du signal $x_3$.

On décale le signal en fréquence

$$En\ fréquence \rightarrow \hat{x}_3(f) = \hat{x}_2(f+f_0) = \hat{x}_2(f) * \delta(f+f_0)$$
$$En\ temporel \rightarrow x_3(t) = x_2(t).e^{-2j\pi f_0 t}$$

4. **Quel traitement doit-on effectuer sur le signal $x_3$ pour obtenir le signal $x_4$ dont le spectre est schématisé Fig. 4 ? Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence.**

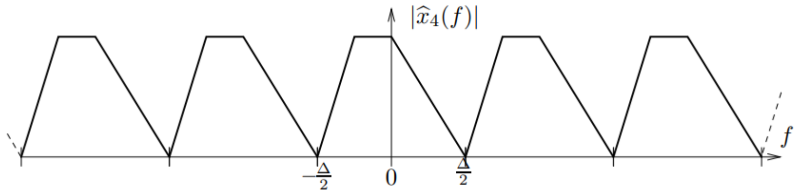



Fig. 4 Représentation fréquentielle du signal $x_4$.

On convolue en fréquence par un peigne de Dirac

$$En\ fréquence \rightarrow \hat{x}_4(f) = \hat{x}_3(f) * \widehat{w}_{\frac{1}{T}}(f)$$
$$En\ temporel \rightarrow x_4(t) = x_3(t).w_T(t)$$

On s'intéresse maintenant au traitement inverse permettant de revenir du signal $x_4$ au signal $x_1$.

5. **Peut-on revenir du signal $x_4$ au signal $x_3$ ? Si oui, quel traitement doit-on effectuer ? Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence.**

$$En\ fréquence \rightarrow \hat{x}_3(f) = \hat{x}_4(f).1_{\left[-\frac{\Delta}{2},\frac{\Delta}{2}\right]}(f)$$
$$En\ temporel \rightarrow x_3(t) = x_4(t) * \Delta \,\text{sinc}(t\Delta)$$

6. **Peut-on revenir du signal $x_3$ au signal $x_2$ ? Si oui, quel traitement doit-on effectuer ? Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence.**

$$En\ fréquence \rightarrow \hat{x}_2(f) = \hat{x}_3(f) * \delta(f - f_0)$$
$$En\ temporel \rightarrow x_2(t) = x_3(t).e^{2j\pi f_0 t}$$

7. **Démontrer que la transformée de Fourier du signal conjugué $y^*(t)$ est la transformée de Fourier du signal y retournée et conjuguée $\hat{y}^*(-f)$.**

$$TP\left(\overline{y(t)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y(t)} e^{2j\pi nft} dt$$

8. **Peut-on revenir du signal $x_2$ au signal $x_1$ ? Si oui, quel traitement doit-on effectuer ? Il faut faire attention au fait que le signal $x_1$ est un signal réel ! Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence.**

On va essayer de déduire une propriété générale du traitement précédent.

9. **Soit le signal réel analogique $x_1(t)$ de la Fig. 1 occupant une bande de fréquence $\Delta$ centrée autour de la fréquence $f_0$. D'après le théorème de Shannon, à quelle fréquence minimale peut-on l'échantillonner sans perte d'information ?**

Shannon → $f_e > 2f_m$ avec $f_m = f_0 + \frac{\Delta}{2} \rightarrow f_e > (2f_0 + \Delta)$

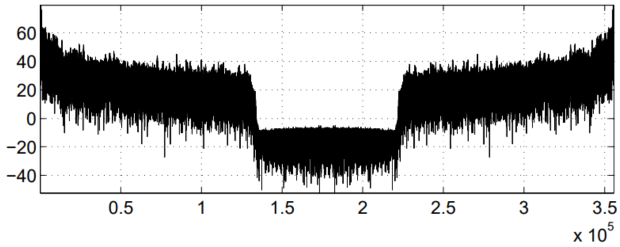
10. **En effectuant les opérations précédentes, en supposant que l'on connaisse la fréquence $f_0$, à quelle fréquence minimale peut-on échantillonner ce même signal sans perte d'information ?**

### 3 Exercice 3 : Séance de travaux pratiques

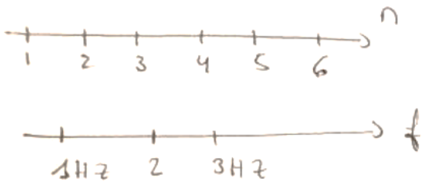
Lors de la séance de travaux pratiques, un étudiant a imprimé des figures qu'il a oublié de commenter. Vous allez l'aider pour cet exercice.

#### 3.1 Analyse d'un signal audio

L'étudiant a imprimé sur la figure ci-dessous la représentation fréquentielle en $dB$ d'un signal numérique, échantillonne à $44{,}1\ kHz$, correspondant à un extrait d'une chanson célèbre intitulé « alors on danse ».




1. **L'étudiant a tracé en abscisse le numéro de l'échantillon au lieu de la fréquence. Tracez l'axe des fréquences correspondant à ce spectre. Justifier votre réponse.**




$$t = n \times T_e \rightarrow \frac{1}{f} = n \times \frac{1}{f_e} \rightarrow \frac{1}{f} = \frac{n}{f_e} \rightarrow f = \frac{f_e}{n}$$

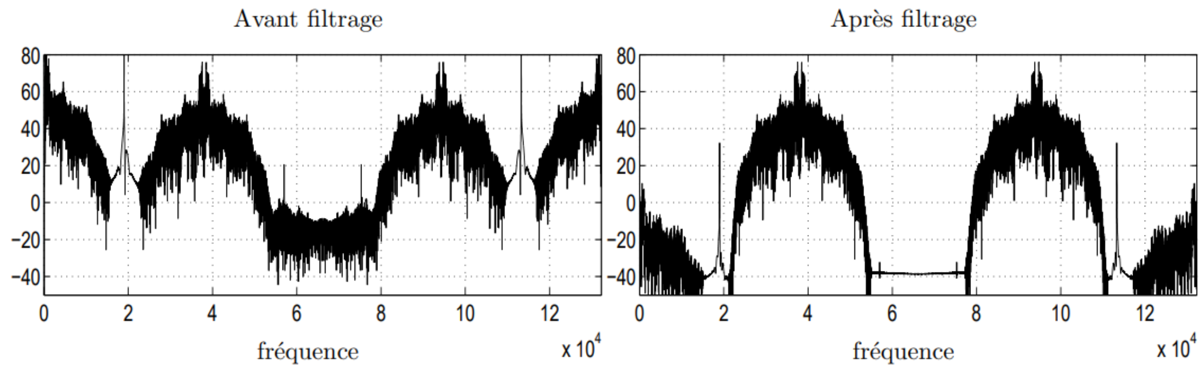
2. **Était-il possible d´échantillonner ce signal avec une fréquence d'échantillonnage plus faible sans perte d'information ? Si oui, à quelle fréquence (en gros) aurait-on pu l'échantillonner ? Justifier votre réponse.**

Faire avec Shannon $f_e > 2f_m$ mais je ne vois pas $f_m$

3. **Durant le TP, l'étudiant a écouté ce même signal audio quantifié avec un nombre $N$ variable de bits variant de $N = 12$ à $N = 1$. L'étudiant a écrit sur son brouillon : « Plus $N$ est faible, plus on perd en qualité du son. En particulier, plus $N$ est faible, moins on entend les sons aigus du signal. » Etes-vous d'accord avec ce qu'a écrit l'étudiant ? Justifier votre réponse.**

### 3.2 Filtrage d’un signal

L’étudiant a imprimé sur les figures ci-dessous la représentation fréquentielle (amplitude en $dB$ en fonction de la fréquence) d’un signal numérique avant et après filtrage du signal.




1. **A quelle fréquence ce signal a-t-il été échantillonné ? Justifier votre réponse.**

2. **Quel type de filtre a été appliqué au signal ? Préciser ses caractéristiques en fréquence et en amplitude**.

Passe bande de $0$ à $60\,000 Hz$ et $8000$ à $12000 Hz$ avec une amplitude $> 1$ car le signal est « allongé »