CM5 : Noyau-image, Injection-surjection-bijection, Changement de bases

L3 UPSSITECH

Mercredi 15 septembre 2021

Objectifs de cette séance

- Savoir exprimer les ***noyau*** et ***image***
  - d'une application linéaire,
  - ou d'une matrice.
- Savoir déterminer si une application linéaire est ***injective***, ***surjective***, ***bijective***.
- Savoir effectuer des ***changements de base*** pour exprimer la matrice d'une application linéaire dans d'autres bases que les bases canoniques.

Hypothèses de la section

- E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ;
- $\dim(E) = n$, $\dim(F) = m$;
- $\mathcal{E} = \left\{e_1, e_2, ..., e_n\right\}$ est une base de E et $\mathcal{F} = \left\{f_1, f_2, ..., f_m\right\}$ est une base de F.
- On note 0_E l'élément neutre de E et 0_F celui de F.

Noyau et image d'une application linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

Définition

- On appelle ***noyau de** f* et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est 0_F :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E : f(u) = 0_F\}.$$

  C'est un s.e.v. de E.

- On appelle ***image de** f* et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des images des éléments de E :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u) : u \in E\} = \{y \in F : \exists x \in E \text{ tels que } f(x) = y\}.$$

  C'est un s.e.v. de F.

Pratique ...

$\mathrm{Im}(f)$ est le s.e.v. engendré par les images d'une famille génératrice de E.

Exercice-méthode : noyau et image de l'application linéaire L

de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $L(x, y) = (x + y, y, x - y)$.

Théorème du rang

Pour une application linéaire f de E dans F, on a

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Remarque

Cette relation peut être vérifiée sur l'exemple précédent.

Définition

On appelle ***rang de*** f et on note $\mathrm{rang}(f)$ la dimension de l'image de f.

Noyau et image d'une matrice

Noyau d'une matrice

On appelle ***noyau de*** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et on note $\mathrm{Ker}(A)$ l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(A) = \{u \in \mathbb{R}^n : Au = 0_{\mathbb{R}^m}\}.$$

Image d'une matrice

On appelle ***image de*** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et on note $\mathrm{Im}(A)$ le s.e.v. engendré par les colonnes de A.

Soit f une application de E dans F, pas nécessairement linéaire.

Application injective, surjective, bijective

- $f : E \to F$ est dite ***injective*** si $f(u) = f(u') \Rightarrow u = u'$.
- $f : E \to F$ est dite ***surjective*** si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E par f.
- $f : E \to F$ est dite ***bijective*** si elle est à la fois injective et surjective.

Active quizz

...

Active quizz

...

Construisons une application injective g définie par $g(u) = u^2$:

Construisons une application surjective h définie par $h(u) = u^2$:

Si maintenant $f : E \to F$ est une application $\boxed{\text{linéaire}}$.

Application linéaire injective, surjective

- $f : E \to F$ linéaire est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- $f : E \to F$ linéaire est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Théorème

Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est injective ssi f est surjective.

Exercice-méthode : L est injective ? surjective ? bijective ?

Rappel : $L(x, y) = (x + y, y, x - y)$.

Matrice de changement de base

On considère $\mathcal{E}'$ une autre base de E.

Matrice de changement de base (ou matrice de passage)

On appelle ***matrice de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$*** la matrice P de taille n dont la colonne j contient les composantes de e'_j dans la base $\mathcal{E}$.

Remarque

P est en fait la matrice de l'identité relativement aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$.

Conséquence importante

Si P est la matrice de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$, on a $P = [I]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}$ et donc

$$P[v]_{\mathcal{E}'} = [v]_{\mathcal{E}}$$

Exercice-méthode : matrice de passage

On considère $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{E}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Que vaut la matrice P de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$? et Q la matrice de changement de base de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$? Calculer PQ.

On considère aussi une autre base $\mathcal{F}'$ de F.

Théorème de changement de base

Si on note

- M la matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$,
- P la matrice de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$
- et Q la matrice de changement de base de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$,

alors la matrice M' représentative de f relativement aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ est donnée par

$$[f]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{F}'} = M' = Q^{-1}MP = [I]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[I]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}}.$$

Un dessin récapitulatif

Exercice-méthode : matrice dans les bases canoniques

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + z \end{pmatrix}.$$

Quelle est la matrice M_0 représentative de f relativement aux bases canoniques ?

Exercice-méthode : changement de base 1

Rappel : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + z \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{F}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{E}'$ une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{E}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Quelle est $M_1 = [f]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{F}}$, la matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}$?

Exercice-méthode : changement de base 1 (suite)

Exercice-méthode : changement de base 2

Rappel : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + z \end{pmatrix}$.
On note $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}'$ une base de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{F}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Quelle est $M_2 = [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}'}$, la matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}'$?

Exercice-méthode : changement de base 2 (suite)

Exercice-méthode : changement de base 3

Rappel : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + z \end{pmatrix}.$$

Quelle est $M_3 = [f]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{F}'}$, la matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$?

Exercice-méthode : changement de base 3 (suite)