Mathématiques - UPSSITECH 18 octobre 2019

Examen mise à niveau - 1h30

L'utilisation des calculatrices, téléphones, tablettes ou ordinateurs est interdite.
Aucun document n'est autorisé.
Le barème est indicatif et susceptible d'être légèrement ajusté.
Les questions marquées d'une étoile sont indépendantes des précédentes.

1. *(1 pt)* Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ de $z^4 = -16i$.

2. *(5 pts)*

   (a) Quelle est la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{t^4-1}$?

   (b) Calculer $I_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^4-1}dt$.

   (c) (*) Notons $I_2 = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^4-1}dx$.

   En utilisant le changement de variable $t = \cos(x)$, montrer que $I_2 = I_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   (d) En exploitant la définition d'intégrale généralisée, étudier la convergence de :

   $$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{t^4-1}dt.$$

3. *(9 pts)* On considère l'application linéaire

   $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+z-4t, x+y+t, 3x+2y+2z-5t). \end{array}$$

   (a) Donner une base et la dimension du noyau de f ? Cette application est-elle injective ?

   (b) f est-elle surjective ?

   (c) (*) Donner A, la matrice représentative de f relativement aux bases canoniques.

   (d) (*) Notons $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (-2,-1,2)$ et $a_3 = (1,2,3)$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ formée des vecteurs a_1, a_2 et a_3 est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (e) (*) Donner la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{F}$.

   (f) Calculer l'inverse de P.

   (g) En déduire B, la matrice représentative de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et à la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$.

4. *(3 pts)*

   (a) Calculer $I_4(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^x t\ln(2t)dt$ par intégration par partie.

   (b) En déduire la solution de l'équation différentielle suivante :

   $$y'(x) - 3y(x) = x\ln(2x)e^{3x} \quad \text{et} \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

5. *(2 pts)* Résoudre l'équation différentielle

   $$(E) \qquad y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x.$$