TD 6 : Analyse spectrale

Exercice 1 : Analyse spectrale par TFD

Soit le signal $x_0(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$. On cherche à étudier la représentation fréquentielle de ce signal sur un ordinateur. Pour cela, on en prélève $N = 1024$ échantillons à la fréquence $F_e = 1$ MHz (période $T_e = \frac{1}{F_e}$) : $x_1[n] = x_0(nT_e)$, $n = 0 \ldots N-1$.

I Représentation fréquentielle du signal échantillonné

1. Calculer et tracer la transformée de Fourier de $x_0(t)$.
2. Calculer la transformée de Fourier de $x_1[n]$. L'écrire sous la forme :
$$\widehat{x}_1(f) = \frac{A_0}{2}[\widehat{w}_r(f - f_0) + \widehat{w}_r(f + f_0)].$$
A quoi correspond la fonction $\widehat{w}_r(f)$?
3. Calculer les fréquences pour lesquelles $\widehat{w}_r(f)$ s'annule. En déduire la largeur de son lobe principal et de ses lobes secondaires. Calculer approximativement le rapport des amplitudes du lobe principal et du premier lobe secondaire de $\widehat{w}_r(f)$.
4. Tracer $\widehat{x}_1(f)$ pour $f_0 = 100$ kHz sur une échelle de fréquence de $-F_e$ à F_e.

On considère par la suite que f_0, F_e et N sont tels que $\widehat{w}_r(f - f_0)$ et $\widehat{w}_r(f + f_0)$ ne se chevauchent pas.

II Transformée de Fourier Discrète du signal échantillonné

On ne peut malheureusement pas calculer numériquement la Transformée de Fourier d'un signal quelconque. En revanche, on peut toujours calculer la TFD (Transformée de Fourier Discrète) d'un ensemble d'échantillons de ce signal.

1. Calculer la Transformée de Fourier Discrète $X_1[k]$ de $x_1[n]$ et faire le lien avec sa Transformée de Fourier $\widehat{x}_1(f)$.
2. Sous quelles conditions la TFD de $x_1[n]$ ne donne t-elle que des raies correspondant à la fréquence f_0 de la sinusoïde ? Quelle en est la signification dans le domaine temporel ?
3. Quelle est au contraire la situation la plus défavorable pour analyser la représentation fréquentielle de $x_0(t)$ à partir de sa TFD ?
4. Calculer l'erreur maximale commise sur la fréquence lorsqu'on observe la TFD de $x_1[n]$ pour représentation fréquentielle de $x_0(t)$ ainsi que l'erreur relative maximale sur son amplitude. Qu'advient-il de ces erreurs lorsque F_e augmente et lorsque N augmente ? Conclusions...
5. On décide de calculer la TFD de $x_1[n]$ sur $2N$ points au lieu de N. Pour cela, on prolonge le signal $x_1[n]$ de N zéros (*bourrage de zéros* ou *zero padding*). Quel est l'effet d'un tel prolongement au niveau de la représentation spectrale ? En déduire les nouvelles erreurs maximales en fréquence et en amplitude. Une telle opération est-elle préférable à l'analyse du signal par TFD à partir de $2N$ échantillons ?

6. On relie la résolution spectrale de l'analyse à la capacité à pouvoir distinguer deux sinusoïdes de fréquences proches. Déduire de ce qui précède quelle la distance minimale entre les fréquences permettant de distinguer les sinusoïdes... La technique du *zero padding* modifie-t-elle la résolution de l'analyse ?

III Fenêtre de Hanning

On calcule le signal $x_2[n]$ en multipliant les échantillons de $x_1[n]$ par la « *fenêtre de Hanning* » $w_h[n] = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi n/(N-1)))$.

1. Quel est l'effet de la multiplication de l'échantillon temporel d'ordre n par $e^{2j\pi nb}$?
2. En déduire que la Transformée de Fourier de $x_2[n]$ a la même forme que $\widehat{x}_1(f)$ en prenant en compte la fonction $\widehat{w}_h(f)$ au lieu de $\widehat{w}_r(f)$.
3. Calculer les fréquences pour lesquelles $\widehat{w}_h(f)$ s'annule (N étant élevé, on peut considérer que $N \approx N-1$). En déduire la largeur du lobe principal et des lobes secondaires.

On pourrait montrer que pour N grand devant γ (réel) et $N \approx N-1$: $|\widehat{w}_h(\gamma \frac{F_e}{N})| \approx \frac{N}{2\pi} \frac{|\sin(\gamma\pi)|}{|\gamma(\gamma^2-1)|}$.

4. Calculer l'erreur relative maximale commise sur l'amplitude lorsqu'on observe la TFD de $x_2[n]$ pour représentation fréquentielle de $x_0(t)$.
5. Si on calcule la TFD de $x_2[n]$ sur $2N$ points au lieu de N (*zero padding*) que devient cette erreur relative maximale sur l'amplitude.
6. Si l'on gagne en précision sur l'amplitude grâce à l'utilisation d'une telle fenêtre de pondération, sur quel point l'analyse est elle plus délicate ?

TDS
Filtres
Numériques

TDS exercice 1

$H_1 : s[n]\ \frac{1}{2}(e[n] + e[n-1])$

① Est il causal ?

Définition : la sortie a un instant n dépend uniquement des évènements en entrée ~~et en sortie~~ aux instants $\leq n \Rightarrow H_1$ est causal !

② Calculer $e[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow s[n]$

Etape 1 : Calculer $h[n]$

Etape 2 : Calculer $H(z)$

Etape 3 : $\hat{h}(f)$

TD6
Analyse
spectrale

Exercice 1 : Analyse spectrale par TFD

① Calculer et tracer la TF de $x_0(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

DSF : $\frac{A}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right) = \frac{A}{2}\left(e^{2j\pi f_0 t} + e^{-2j\pi f_0 t}\right)$

② Calculer la TF de $x_1[n]$

$x_1[n] = \begin{cases} x(nTe) \text{ pour } n = 0 \ldots N-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Tps discret} \\ \text{Non périodique (durée finie)} \end{cases}$

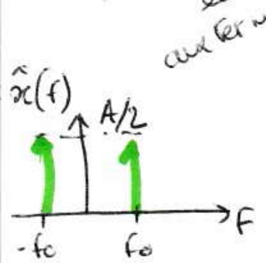
TFSD

$\hat{x}_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]\, e^{-2j\pi n f/Fe} = \sum_{n=0}^{N-1} A\cos(2\pi f_0/Fe)\, e^{-2j\pi n f/Fe}$

on transfère le cos grâce aux formules d'Euler

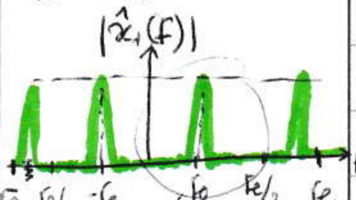
$= A \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{2j\pi n f_0/Fe} + e^{-2j\pi n f_0/Fe}}{2}\, e^{-2j\pi n f/Fe}$

$= \frac{A}{2}\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi n(f-f_0)/Fe} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi n(f+f_0)/Fe}\right)$

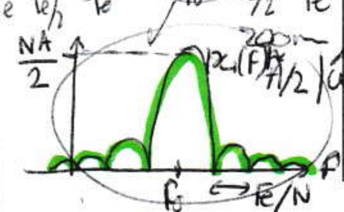


$= \frac{A}{2}\left(\hat{\omega}_r(f-f_0) + \hat{\omega}_r(f+f_0)\right)$ avec $\omega_r(f) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2j\pi f/Fe}$

$\hat{\omega}_r(f)$ correspondant a la TFSD de $\mathbb{1}_{\{0,N-1\}}[n]$



$|\hat{\omega}_r(f)| = \left|\frac{\sin(\pi N f/Fe)}{\sin(\pi f/Fe)}\right|$ (TD4 Exo 1 Q2)



$|x_1(f)| = A/2\, |\hat{\omega}_r(f-f_0)|$ $= 0$ pour f multiple de Fe/N

$\rightarrow \hat{\omega}_r(0) = N$

TD6 Analyse spectrale (suite)

① $\hat{x}(f) = \frac{A}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)$

$\hat{x}_1(f) = \frac{A}{2}\left(\hat{\omega}_r(f-f_0) + \omega_r(f+f_0)\right)$

TFD : $X_1[k] = \hat{x}_1\left(\frac{k F_e}{N}\right)$ (voir cours)

Traitement du signal

②

③

si $f_0 = \left(k_0 + \frac{1}{2}\right)\frac{F_e}{N}$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$

pire cas

il nous reste que la fréquence souhaitée

⇒ on a bien réalisé notre étude spectrale / analyse spectrale si $f_0 = \frac{k_0 F_e}{N}$ avec $k_0 \in \mathbb{N}$

cas favorable

④ Erreur max en fréquence

$$\boxed{\Delta f = \frac{F_e}{2N}}$$

Pour réduire Δf il suffit

→ d'augmenter N (le nombre d'échantillons)

→ Diminuer Fe (Mais respecter Shanon $F_e > 2f_0$)

Erreur relative max en Amplitude

$$\Delta A = \frac{NA/2 - A/2\,|\hat{\omega}(F_e/2N)|}{NA/2}$$

cas favorable → $NA/2$; pire cas → $A/2\,|\hat{\omega}(F_e/2N)|$

$$\Delta A = 1 - \frac{1}{N}\left|\hat{\omega}\left(\frac{F_e}{2N}\right)\right| = 1 - \frac{1}{N}\left|\frac{\sin\left(\pi N \frac{F_e}{2N} / F_e\right)}{\sin\left(\pi \frac{F_e}{2N} / F_e\right)}\right| = 1 - \frac{1}{N}\,\frac{1}{\sin(\pi/2N)}$$

$$\Delta A \approx 1 - \frac{1}{N}\,\frac{1}{\pi/2N} = 1 - \frac{2}{\pi} = 36\,\%$$

(par N grand)

Paramètres pour l'analyse

- **zero padding** (au moins d'un facteur 2)
- Fenêtre de pondération
  - $\omega[n] = 0$ pour $n < 0$ et $n \geq N$
  - $\omega[n] \Rightarrow$ Hanning, Blackman
  - ⇒ lobes secondaires plus faibles