TP4 – Analyse spectrale numérique des signaux

1 Présentation du TP

L'objectif de cette manipulation est d'illustrer les effets de l'utilisation de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) pour l'analyse spectrale des signaux numériques. Avant d'arriver en séance, vous devez impérativement avoir assimilé les notions théoriques concernant :

- les hypothèses sous-jacentes à l'utilisation de la Transformée de Fourier Discrète ;
- les calculs d'erreur en fréquence et d'erreur relative en amplitude dans l'analyse spectrale d'une sinusoïde par TFD ;
- les techniques de fenêtrage et de bourrage de zéros *(zero padding)*.

2 TFD d'une sinusoïde

On va étudier l'utilisation de la Transformée de Fourier Discrète et mettre en avant la précision que l'on peut obtenir d'un tel outil pour l'analyse spectrale d'une sinusoïde. Pour cela, on va calculer la TFD de $N = 100$ d'échantillons d'un signal sinusoïdal d'amplitude unité et de fréquence f_0 compris entre 90 et $100\ Hz$, échantillonner à $Fe = 1\ kHz$.

2.1 Rappeler l'expression de la représentation fréquentielle d'un signal sinusoïdal analogique d'amplitude unité et de fréquence f_0.

La représentation fréquentielle d'un signal sinusoïdal analogique d'amplitude unité et de fréquence f_0 est donnée par une impulsion de Dirac à la fréquence f_0 dans le spectre de Fourier. Mathématiquement, cela peut être exprimé comme suit :

$$\begin{cases} X(f) = 0\ si\ f \neq f_0 \\ X(f_0) = 1\ sinon \end{cases}$$

2.2 La fréquence d'échantillonnage choisie respecte-t-elle le théorème de Shannon ?

Le théorème de Shannon stipule que pour obtenir une représentation précise d'un signal continu, il faut échantillonner ce signal à une fréquence d'échantillonnage Fe qui est au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale présente dans le signal, c'est-à-dire $F_e \geq 2f_{max}$.

Dans notre cas, $f_{max} = 100\ Hz$, donc la fréquence d'échantillonnage de $1\ kHz$ respecte le théorème de Shannon.

Cette représentation est une fonction périodique (de période Fe) de la fréquence f, variable à valeur continue. La Transformée de Fourier Discrète utilisée en pratique est la représentation fréquentielle associée aux signaux à temps discrets périodique (de période N). Elle est de période N et dépend d'un indice entier k :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2i\pi\frac{nk}{N}}$$

2.8 Rappeler l'expression de la TFSD d'une sinusoïde échantillonnée de longueur N. Pourquoi est-il nécessaire de diviser le module de la TFSD par N pour retrouver l'amplitude du signal analogique original ?

L'expression de la Transformée de Fourier en série discrète (TFSD) d'une sinusoïde échantillonnée de longueur N est la suivante :

$$X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{2i\pi kn}{N}}$$

où $x[n]$ est la valeur de l'échantillon n du signal sinusoïdal, k est un indice entier représentant la fréquence discrète de la sinusoïde, et N est la longueur de la séquence d'échantillons.

Il est nécessaire de diviser le module de la TFSD par N pour retrouver l'amplitude du signal analogique original, car la TFSD représente l'amplitude de la sinusoïde en fonction de sa fréquence discrète. Pour obtenir l'amplitude du signal analogique original, il faut prendre en compte le fait que la fréquence discrète est une approximation de la fréquence réelle de la sinusoïde. Cette approximation est due au processus d'échantillonnage qui introduit des erreurs de quantification et de reconstruction du signal. Diviser le module de la TFSD par N permet de compenser pour ces erreurs et de retrouver l'amplitude du signal analogique original.

La relation entre la Transformée de Fourier Discrète (TFD) et la TFSD pour un signal de durée finie N est que la TFD est une version échantillonnée de la TFSD. En d'autres termes, la TFD peut être vue comme une approximation de la TFSD obtenue en échantillonnant la TFSD à des fréquences discrètes équidistantes. La TFD a une période de N et représente les fréquences discrètes du signal, tandis que la TFSD a une période de Fe (la fréquence d'échantillonnage) et représente les fréquences continues du signal.

2.9 Rappeler la relation entre la TFD et la TFSD pour un signal de durée finie N.

La formule permettant de passer de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) à la Transformée de Fourier en série discrète (TFSD) pour un signal de durée finie N est la suivante :

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{\frac{2i\pi kn}{N}}$$

où $X[k]$ est la valeur de la TFD à la fréquence discrète k, $x[n]$ est la valeur de l'échantillon n du signal à temps discret, et N est la longueur de la séquence d'échantillons. Cette formule représente la synthèse du signal à partir de ses composantes fréquentielles discrètes représentées par la TFD. En utilisant cette formule, on peut reconstruire le signal original à partir de sa TFD, ce qui permet de retrouver sa forme temporelle et son contenu fréquentiel.

3 Utilisation du zero padding

Pour mieux comprendre ce phénomène, on peut profiter de la technique du bourrage de zéros (zero padding), qui consiste à prolonger le signal étudié par des zéros avant d'en calculer sa TFD.

3.1 Rappeler la relation entre la TFD de ce nouveau signal de longueur $M > N$ (composé des N échantillons du signal suivis de $M - N$ zéros) et la TFSD du signal original ? En quoi un tel outil permet d'améliorer l'analyse spectrale par TFD ?

La relation entre la TFD de ce nouveau signal de longueur $M > N$, composé des N échantillons du signal suivis de $M - N$ zéros, et la TFSD (Transformée de Fourier en série) du signal original est que la TFD est égale à la TFSD échantillonnée en M points. Autrement dit, on peut considérer que le signal de longueur M est une interpolation du signal original.

En utilisant le bourrage de zéros, on augmente la résolution en fréquence de la TFD, car on augmente le nombre de points utilisés pour calculer la transformée. Cela permet d'obtenir une représentation plus précise de la partie spectrale du signal et de mieux discerner les différentes composantes fréquentielles présentes dans le signal. Cela peut être particulièrement utile pour les signaux dont les fréquences sont très proches les unes des autres ou pour lesquels on veut une représentation fine de la partie spectrale.

4 Utilisation d'une fenêtre de pondération

Afin d'obtenir une erreur plus faible en amplitude, on peut effectuer un fenêtrage (ou pondération) du signal temporel avant de calculer sa TFD. De façon implicite, nous avons considéré jusqu'alors une pondération du signal par une fenêtre rectangulaire lors de la troncature de la sinusoïde :

$$w_R[n] = \begin{cases} 1 \; pour \; n = 0 \ldots N - 1 \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

Il existe un grand nombre de fenêtre de pondération mais nous allons étudier ici uniquement le cas de la fenêtre de Hanning :

$$w_H[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right) \; pour \; n = 0 \ldots N - 1, \\ 0 \; sinon \end{cases}$$

4.1 Rappeler l'effet sur la TFSD de cette pondération par une fenêtre. En déduire l'effet sur la TFD et donc sur l'analyse spectrale effectuée.

Le fenêtrage par une fenêtre de pondération a pour effet de réduire les fuites de spectre causées par la discontinuité des signaux en temps fini, en atténuant les composantes de fréquence qui sont hors de la bande de la fenêtre.

En particulier, pour la fenêtre de Hanning, la pondération réduit les lobes latéraux de la réponse en fréquence de la TFSD par rapport à la fenêtre rectangulaire. Cela permet d'obtenir une meilleure résolution en fréquence et une meilleure précision en amplitude pour les composantes spectrales du signal.

4.2 Quelles sont les propriétés souhaitées pour une telle fenêtre ? En pratique, quels sont les inconvénients de l'utilisation d'une telle fenêtre ?

Une bonne fenêtre de pondération doit avoir une réponse en fréquence principale avec une largeur suffisamment étroite pour minimiser les lobes latéraux et une réponse en phase constante pour minimiser les distorsions temporelles. Elle doit également avoir une amplitude maximale proche de 1 pour minimiser l'amplitude des composantes spectrales du signal.

Cependant, l'utilisation de fenêtres de pondération peut également présenter des inconvénients. Elle peut réduire la résolution en fréquence et la sensibilité aux faibles amplitudes du signal. De plus, la forme de la fenêtre peut introduire des artefacts indésirables qui peuvent masquer les véritables composantes spectrales du signal.