Étude de l'asservissement de position d'un moteur

Les liaisons des bras manipulateurs sont souvent mises en mouvement par des moteurs à courant continu. Une étape de modélisation permet d'établir le schéma-bloc ci-après (cf. figure 3) où seul le moteur est considéré[1]. On notera ici $K_m = 4800$ le gain du moteur, $T_1 = 1.6$ et $T_2 = 0.05$ les constantes de temps mécanique et électrique. Le moteur est commandé par une tension d'entrée notée $u(t)$. Il est aussi équipé de deux capteurs : une génératrice tachymétrique et un codeur qui fournissent respectivement sa vitesse de rotation $\Omega(t)$ et la position de l'arbre moteur (i.e., son angle de rotation) $\theta(t)$.

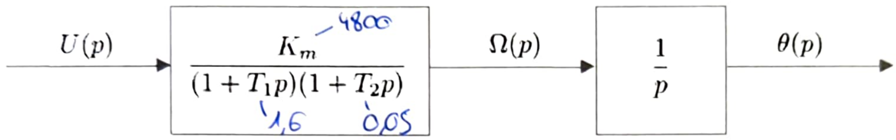

FIGURE 1 – Schéma-bloc du moteur.

L'objectif est de suivre exactement une consigne θ^* constante donnée avec un temps de réponse d'environ 3s en autorisant un dépassement maximum de 10%.

1 Analyse du système seul

1. Déterminer la fonction de transfert $G_0(p)$ entre l'entrée $u(t)$ du moteur et la vitesse de rotation $\Omega(t)$ et la définir sous matlab avec la fonction `tf`. Donner les pôles (`pole`), les zéros (`zero`) et le gain statique (`dcgain`). Quel est le comportement attendu du système (stabilité, oscillations, etc.) ?

   Tracer la réponse indicielle à l'aide de la fonction `step`. Est-elle cohérente avec les conjectures précédentes ?
2. Définir maintenant les fonctions de transfert suivantes : $G_1(p) = \frac{K_m}{1+T_1p}$ et $G_2(p) = \frac{K_m}{1+T_2p}$. Donner le gain statique, les pôles et les zéros de chacune d'entre elles.

   Tracer maintenant chaque réponse indicielle et la superposer avec la réponse indicielle de $G_0(p)$. Que constatez-vous ? Expliquer.
3. Donner la fonction de transfert entre $\theta(p)$ et $U(p)$. Étudier la stabilité. Tracer la réponse indicielle.
4. Conclure quant à la nécessité (ou non) de mettre en place une commande.

2 Mise en place d'une commande proportionnelle

On souhaite mettre en place une commande proportionnelle. On notera K est le gain à fixer pour satisfaire les performances souhaitées. La fonction de transfert du moteur entre $u(t)$ et $\theta(t)$ est supposée ici définie par $G_1(p)/p$.

1. Rappeler le principe de la commande proportionnelle. Dessiner un schéma-bloc de l'asservissement souhaité. S'agit-il d'un retour d'état ou d'un retour de sortie ?

   Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte.

1. La structure mécanique du robot n'est pas prise en compte ici, ces aspects étant traités dans la suite de l'UE.

2. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée. La mettre sous forme canonique et déterminer les expressions de l'amortissement ξ et de la pulsation naturelle ω_n. Préciser également le gain statique. Que déduisez-vous ?
   Sur quel(s) paramètre(s) le gain K permet-il d'agir ? Conclusion.
3. Sans calcul, que pouvez-conclure sur les erreurs de position et de vitesse ?
4. Tracer le lieu des racines de l'asservissement pour K variant de 0 à l'infini (fonction `rlocus`). Repérez les points de départ et d'arrivée du lieu. Orientez ce dernier dans le sens des valeurs de K croissantes et faites apparaître les points importants. Quelles conclusions en tirez-vous ?
5. Proposer une valeur de K permettant d'obtenir un dépassement d'environ 10% (fonction `sgrid`). Retrouver ce résultat par le calcul. Vérifier votre analyse en simulant la réponse indicielle de l'asservissement pour certaines valeurs de K.
6. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée à l'aide de la fonction `minreal` de matlab. Tracer la réponse indicielle de l'asservissement (fonction `step`). A l'aide de la commande `damp`, vérifier l'amortissement et la pulsation naturelle de l'asservissement. Que concluez-vous ?
7. Tracer maintenant la réponse à une rampe et évaluer l'erreur en vitesse. Conclure.

3 Mise en place d'une contre-réaction tachymétrique

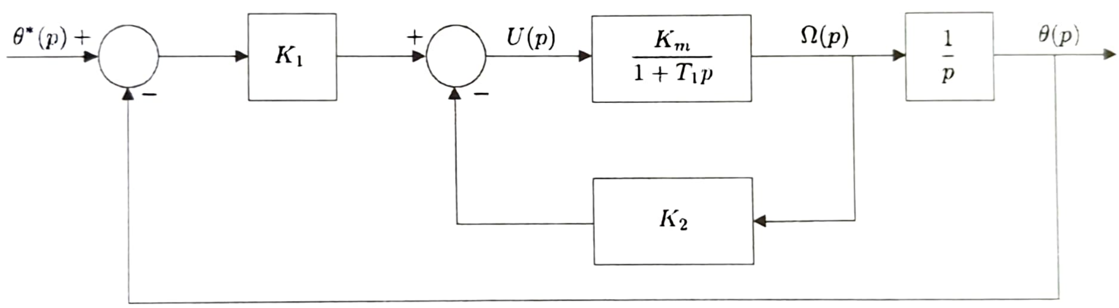

FIGURE 2 – Asservissement intégrant une contre-réaction tachymétrique.

1. Que remarquez-vous ?
2. Calculer la fonction de transfert de la boucle interne. L'écrire sous la forme :

$$G_{tach}(p) = \frac{K_0}{p(1+\tau p)}$$

   en précisant les expressions de K_0 et τ.
3. Redessiner le schéma-bloc précédent en faisant apparaître explicitement $G_{tach}(p)$.
4. En déduire la fonction de transfert de l'asservissement $F(p) = \frac{\theta^*(p)}{\theta(p)}$. Déterminer les expressions de l'amortissement ξ et de la pulsation naturelle ω_n. Sur quel(s) paramètre(s) agissent K_1 et K_2 ?
5. Déterminer les valeurs de ces deux gains permettant de satisfaire le cahier des charges. Tracer la réponse indicielle et la réponse à une rampe de l'asservissement. Vérifier que le cahier des charges est respecté.
6. Pour la valeur de K_1 ainsi déterminée, tracer le lieu des racines de l'asservissement lorsque le gain K_2 varie de 0 à l'infini. Conclure quant à l'effet de K_2.
7. Comment évoluent les erreurs de position et de vitesse avec ces deux gains ?

4 Pour aller plus loin

4.1 Contre-réaction tachymétrique et retour d'état

On souhaite maintenant comparer les structures de commande par contre-réaction tachymétrique et le retour d'état évoqué en cours. La représentation d'état du moteur est définie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K_m}{T_1} \end{pmatrix} U(t) \\ \\ Y(t) = X(t) \end{cases} \tag{1}$$

où $X(t) = (\theta(t) \quad \Omega(t))^T$ est l'état du moteur.

1. Rappeler le schéma-bloc de principe d'un retour d'état et la loi de commande associée.
2. Écrire la loi de commande $U(t)$ dans le cas de la contre-réaction tachymétrique. Comparer sa structure à celle du retour d'état. Conclure.
3. A l'aide de la fonction `acker` fournie dans matlab, calculer le gain du retour d'état permettant d'obtenir les mêmes pôles que ceux calculés précédemment.
   Simuler la réponse indicielle de l'asservissement. Conclure.
   Proposer une solution permettant d'améliorer l'erreur de position constatée.

4.2 Réjection de perturbation

On considère maintenant qu'une perturbation intervient sur la commande. Cette perturbation est supposée constante et égale à $d_0 = 1e-4$. L'asservissement correspondant peut être visualisé sur la figure suivante :

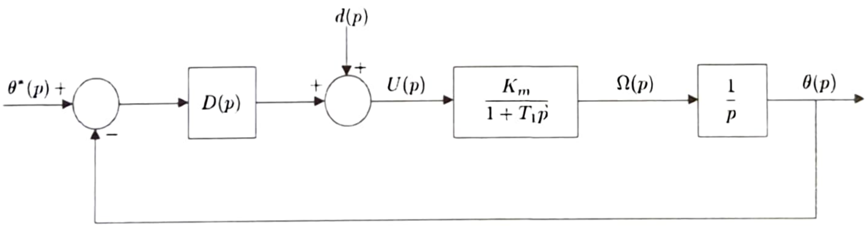

FIGURE 3 – Schéma-bloc de l'asservissement en présence d'une perturbation.

1. Montrer que $\theta(p) = \theta_{pert}(p) + \theta_{bf}(p)$. $\theta_{pert}(p)$ et $\theta_{bf}(p)$ sont deux termes à définir dépendant de la perturbation et de la consigne.
2. On considère d'abord que $D(p) = K_p$ où K_p est défini par la valeur du gain obtenue à la question 2.5. A l'aide de matlab, visualiser la réponse indicielle de $\theta_{pert}(p)$ et $\theta_{bf}(p)$. En utilisant simulink, tracer aussi celle de l'asservissement. Conclure quant à l'effet de la perturbation.
3. On se propose maintenant de rejeter la perturbation. Pour cela, on modifie le correcteur de la manière suivante :

$$D(p) = K_p(1 + \frac{1}{T_i p})$$

où K_p conserve la valeur précédente et T_i est à déterminer. De quel type de correcteur s'agit-il ?

4. On propose de fixer $T_i = 500$. Justifier cette valeur. Que se passe-t-il si T_i augmente ou diminue ?
5. Que se passe-t-il si l'on place $D(p)$ après le second sommateur (juste avant le système) ? On pourra déterminer l'erreur de position obtenue dans ce cas.
6. Simuler la réponse indicielle de la fonction de transfert en boucle fermée $\theta^*(p)/\theta(p)$. Vérifier que la perturbation est bien rejetée.