Représentations d'état, changements de base et solutions de l'équation de l'état
TD – UPSSITECH SRI 1e année

Modélisation d'un système de réservoirs d'eau

Considérons le système représenté ci-contre, constitué de deux bacs cylindriques B_1 et B_2, reliés par une restriction R_3 et comportant des fuites de restriction R_1 et R_2. $R_1 = 2\ h/m^2$, $R_2 = 4\ h/m^2$, et $R_3 = 1 h/m^2$ sont modélisés par des résistances à l'écoulement. On note Q_1, Q_2 et Q_3 les débits de fuite correspondants. $S_1 = 0.5\ m^2$ et $S_2 = 0.25\ m^2$ sont les surfaces de base des réservoirs.
Le réservoir 1 est alimenté par une pompe électrique de débit $Q(t)$. On désigne par h_1 et h_2 les hauteurs d'eau dans les bacs B_1 et B_2. Un capteur de niveau permet de mesurer la hauteur d'eau dans le bac B_2.

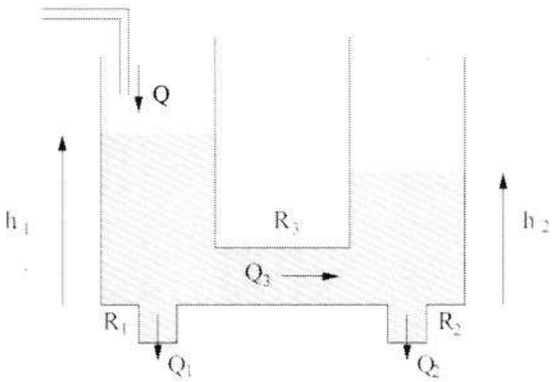


FIGURE 1 – Système de bacs d'eau.

1. Etablir une représentation d'état de ce système de bacs d'eau. Pour cela :
   (a) Donner les entrée(s) et sortie(s) de ce système.
   (b) Choisir un vecteur d'état.
   (c) Ecrire les variations de volume de liquide $\dot{V}_i$ dans les deux bacs B_i, sachant que : $Q_1(t) = \frac{h_1(t)}{R_1}$, $Q_2(t) = \frac{h_2(t)}{R_2}$, et que $Q_3(t) = \frac{h_1(t)-h_2(t)}{R_3}$.
2. Mettre successivement le système sous forme diagonale, compagne de commande, et compagne d'observation.
3. Le système est soumis à un échelon de commande $u(t) = 0.5\ m^3/h$ et possède comme conditions initiales $h_{10} = 1\ m$ et $h_{20} = 2\ m$.
   (a) Calculer la solution de l'équation d'état dans la base diagonale puis dans la base initiale. Ces solutions ont-elles un sens physique ?
   (b) Pour chaque solution obtenue :
      i. Analyser l'évolution des deux variables d'état.
      ii. Calculer la sortie correspondante.
      iii. Conclure.

1 (a) (b) • 2 variables d'état $h_1(t) \Rightarrow$ et $h_2(t) \Rightarrow$ $X(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$

• Entrée de commande $Q(t)$

• Sortie(s) → Ce qui est mesurée $Y(t) = h_2(t)$

1 (c) But : Trouver la RE (Représentation d'état) $\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$

Equation de sortie : $Y(t) = h_2(t)$

$\Rightarrow Y(t) = \underbrace{(0 \;\; 1)}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}}$ et $D = 0$

Equation d'état $\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{pmatrix}$ → Variation hauteur d'eau dans le bac 1 → Variation hauteur d'eau dans le bac 2

Bac 1 : Variation de $\underbrace{\text{volume d'eau}}_{\dot{V}_1}$ dans le bac 1

$\Rightarrow \dot{V}_1(t) = \sum$ Débits entrants $- \sum$ Débits sortants $= Q(t) - (Q_1(t) + Q_3(t))$

Bac 2 : même chose pour le bac 2

$\Rightarrow \dot{V}_2(t) = Q_3(t) - Q_2(t)$

Ainsi : $\dot{V}_1(t) = Q(t) - \frac{h_1(t)}{R_1(t)} - \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_3}$ et $\dot{V}_2(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_3} - \frac{h_2(t)}{R_2}$

$V_1(t) \to h_1(t)$ | $V_2(t) \to h_2(t)$

2 bacs cylindriques avec S_x la section du bac "x"

$V_1(t) = S_1 h_1(t)$ | $V_2(t) = S_2 h_2(t)$

$\dot{V}_1(t) = S_1 \dot{h}_1(t)$ | $\dot{V}_2(t) = S_2 \dot{h}_2(t)$

donc

$\dot{h}_1(t) = \frac{1}{S_1} Q(t) - \frac{h_1(t)}{S_1 R_1} - \frac{h_1(t) - h_2(t)}{S_1 R_1}$

$= \frac{1}{S_1} Q(t) \underbrace{- \frac{1}{S_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)}_{a} h_1(t) + \frac{1}{S_1 R_3} h_2(t)$

$\dot{h}_2(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_3 S_2} - \frac{h_2(t)}{S_2 R_2}$

$= \frac{1}{R_3 S_2} h_1(t) \underbrace{- \frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)}_{b} h_2(t)$

$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{pmatrix} = AX(t) + BU(t) = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{S_1 R_3} \\ \frac{1}{R_3 S_2} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{pmatrix} Q(t)$

NB : On aurait pu prendre comme variable d'état : $V_1(t)$ et $V_2(t)$

$\left.\begin{matrix} V_1(t) = S_1 h_1(t) \\ V_2(t) = S_2 h_2(t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow X_2(t) = \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}}_{\text{matrice de passage}} \underbrace{\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}}_{X(t)}$

2 3 changements de base

Ici base initiale définie par $h_1(t)$ et $h_2(t)$

base diagonale : Ici $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ est de dim $(2,2) \to n = 2$

$\Rightarrow T = (V_1, V_2)$ avec V_i vecteurs propres de A

NB : Chaque vecteurs propres V_i est associé à une valeur propre λ_i

↳ V_1 associé à λ_1 et V_2 associé à λ_2

→ $\boxed{\text{3 étapes}}$: (a) Calcul du polynome caractéristique de $A \to \varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

(b) Calcul des valeurs propres de A → Racines de $\varphi(\lambda)$

(c) Déduction des valeurs propres → $AV_i = \lambda_i V_i$

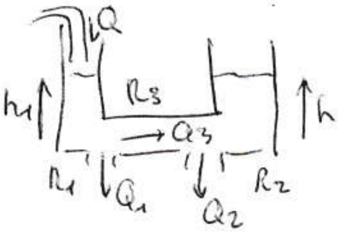
Etape (a) $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) \to A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 4 & -5-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = (\lambda + 3)(\lambda + 5) - 8 = \lambda^2 + 8\lambda + 7$

Etape (b) : Racine évidente $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -7$ (on peut aussi calculer le Δ)

Etape (c) V_1 associé à $\lambda_1 \Rightarrow AV_1 = \lambda_1 V_1$ avec $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} -3x_1 + 2y_1 = -x_1 \\ 4x_1 - 5y_1 = -y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2y_1 = 0 \to x_1 = y_1 \\ 4x_1 - 4y_1 = 0 \to x_1 = y_1 \end{cases}$



① RE → ⓐ E/S → 2 variable d'état $\begin{vmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{vmatrix}\Big\} X(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$

ⓑ choisir vecteur d'état → Entrée de commande $Q(t)$

ⓔ Sortie(s) → ce qui est mesuré → $Y(t) = h_2(t)$

ⓒ On sait que $Q_1(t) = \frac{h_1(t)}{R_1}$, $Q_2 = \frac{h_2(t)}{R_2}$ et $Q_3(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_3}$

Ecrire les variation de volume $\dot{V}_i$ des 2 bacs B_i

↳ $\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$ Eq de sortie → $Y(t) = \underbrace{(0\ 1)}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}}_{X(t)}$ et $D = 0$

Eq d'état $\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{pmatrix}$ → variation de h d'eau dans le bac 1 → variation de h ——— 2

↳ bac 1 → $\dot{V}_1(t) = \sum$ débits entrant $- \sum$ débit sortants $= Q(t) - (Q_1(t) + Q_3(t))$

↳ bac 2 → $\dot{V}_2(t) =$ ——— $= Q_3(t) - Q_2(t)$

$\dot{V}_1(t) = Q(t) - \frac{h_1(t)}{R_1} - \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_3}$ $\qquad$ $\dot{V}_2(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_3} - \frac{h_2(t)}{R_2}$

$V_1(t) \to h_1(t)$ $\qquad$ $V_2(t) \to h_2(t)$

2 bacs cyl avec S la surface du bac "x"

$V_1(t) = S_1 h_1(t)$ $\qquad$ $V_2(t) = S_2 h_2(t)$

$\dot{V}_1(t) = S_1 \dot{h}_1(t)$ $\qquad$ $\dot{V}_2(t) = S_2 \dot{h}_2(t)$

$\dot{h}_1(t) = \frac{1}{S_1} Q(t) - \frac{h_1(t)}{R_1} - \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_3}$ $\qquad$ $\dot{h}_2(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_3 S_2} - \frac{h_2(t)}{S_2 R_2}$

$= \frac{1}{S_1} Q(t) - \underbrace{\frac{1}{S_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)}_{a} h_1(t) + \frac{1}{S_1 R_3} h_2(t)$ $\qquad$ $= \frac{1}{R_3 S_2} h_1(t) - \underbrace{\frac{1}{S_2}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)}_{b} h_2(t)$

Au final $\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{pmatrix} = AX(t) + BU(t) = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{S_1 R_3} \\ \frac{1}{R_3 S_2} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{pmatrix} Q(t)$

② 3 changement de base

Mettre système sous forme diagonale, compagne de com et compagne d'observation

↳ ici base init définie par $h_1(t)$ et $h_2(t)$

base diagonale : ici $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ est de dim $(2,2) \to n = 2$

⇒ $T = (V_1\ V_2)$ avec V_i vecteur propre de A

NB chaque $\vec{v_p}$ v_i est associé a une valeur propre λ_i → V_1 associé à λ_1, V_2 associé à λ_2

Etapes ⓐ Calcul du polynome caractéristique de A → $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

ⓑ Calcul des valeurs propres de A → Racines de $\varphi(\lambda)$

ⓒ ~~Calcul~~ Déduction des valeurs propre → $AV_i = \lambda_i V_i$

ⓐ $\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) \to A - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 4 & -5-\lambda \end{pmatrix} \to \det(A - \lambda I) = (\lambda+3)(\lambda+5) - 8 = \lambda^2 + 8\lambda + 7$

ⓑ Racine evidente $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -7$ (on peut calculer Δ) $\quad 8^2 - 4 \times 1 \times 7 = 64 - 28 = 36$

$\frac{-8+6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$\frac{-8-6}{2} = \frac{-14}{2} = -7$

ⓒ V_1 associé à λ_1 ⇒ $AV_1 = \lambda_1 V_1$ avec $V_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} -3x_1 + 2y_1 = -x_1 \\ 4x_1 - 3y_1 = -y_1 \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} -2x_1 + 2y_1 = 0 \to x_1 = y_1 \\ 4x_1 - 4y_1 = 0 \to x_1 = y_1 \end{cases}$

On pose $x_1 = 1$ ⇒ y_1 ⇒ $V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à λ_2 : $AV_2 = \lambda_2 V_2 \to V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$ ⇒ $x_2 = 1$ ⇒ $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

⇒ Matrice de passage diag : $T = (V_1 V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Forme CC ; M_{cc} a n colonne M_i ⇒ $n = 2$ puisque $\dim(A) = (2,2)$

$M_{cc} = (M_1\ M_2)$ avec $M_2 = B$

$M_1 = M_{n-j} = (A^1 + a_{n-1} A^{1-1}) B = (A + a_1 I) B$

$1 = 2 - 1 \qquad 2 \qquad A^0 = I$

↳ Coef du poly carac de A → $\psi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \underset{a_2 = 1}{\lambda^2} + \underset{a_1}{8\lambda} + \underset{a_0}{7}$

$M_1 = \left[\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right] B = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

⇒ $M_{cc} = (M_1\ M_2) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

$M_{cc} = (M_1\ M_2\ M_3)$ avec $M_3 = B$

TD1 : Changement de base et solution de l'équation d'état (suite) Page 2

⇒ on pose : $x_1 = 1 \Rightarrow y_1 \Rightarrow V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à λ_2 : $AV_2 = \lambda_2 V_2 \rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

→ Matrice de passage diagonale : $T = (V_1 V_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

NB : $X(t) = T X_d(t)$

$X_d(t) = T^{-1} X(t)$

$$\begin{pmatrix} x_{d_1}(t) \\ x_{d_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_{d_1}(t) &= \tfrac{2}{3} h_1(t) + \tfrac{1}{3} h_2(t) \\ x_{d_2}(t) &= \tfrac{1}{3} h_1(t) - \tfrac{1}{3} h_2(t) \end{aligned}$$

Forme CC : Focus sur le calcul de M_{cc}. M_{cc} a n colonnes M_i

⇒ $n = 2$ puisque $\dim(A) = (2,2)$

⇒ $M_{cc} = (M_1 M_2)$ avec $M_2 = B$

$M_{1} = \cancel{M_{2-j}}\ M_{n-j} = (A^1 + a_{n-1} A^{1-1}) B = (A + a_1 I) B$

$= 2 - 1$

$A^0 = I$

↳ Coefficiant du polynôme caractéristique de A

$n = 3$

$M_{cc} = (M_1 M_2 M_3)$

↳ $M_2 = M_{3-1}$

$M_1 = M_{3-2}$

$\Psi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \underset{a_1}{8}\lambda + \underset{a_0}{7}$

$a_2 = 1$

$$M_1 = \left[\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \right] B = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{cc} = (M_1 M_2) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{CC} = (M_1\ M_2\ M_3)$ $M_3 = B$

Base CO : $n = 2 \Rightarrow P = (P_1 P_2)$ $\quad P_1 = C^T = (0, 1)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P_1 \to C^T$

$P_2 = \left((A^T)^{2-1} + a_{2-1} \underbrace{(A^T)^{2-2}}_{(A^T)^0 = I} \right) C^T$

↳ matrice identité

$P_2 = (A^T + a_1 I) C^T = (A^T + 8I) C^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

↳ Coefficiant du polynome caractéristique de A

$P = (P_1 P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$M_{CO} = P^{-T} = (P^{-1})^T = (P^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Reprise du Cour p. 16 | Focus sur la représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) \end{cases}$$ avec $X(t)$ grandeurs caractéristiques du système

But : Trouver $X(t)$ à partir de la représentation d'état

⇒ Résoudre l'eq d'état ⇒ il faut résoudre

1 équation différentielle du 1er ordre à coefficiants constants

↳ Δ $X(t)$ est 1 valeur ⇒ Attention aux dimensions

Même méthode avec un scalaire : $\dot{X}(t) - AX(t) = Bu(t)$ ⇒ on résout en 2 étapes

E1 ⇒ Sol homogène : $\dot{X}(t) = AX(t) \Rightarrow X_{hom}(t) = e^{At} \underbrace{X(0)}_{\text{valeur initiale de } X(t)}$

E2 ⇒ Sol avec 2nd membre → méthode de la variation de la constante → $X_M(t)$

Res ⇒ Sol de l'eq diff : $X(t) = X_{hom}(t) + X_M(t)$

Calcul de la solution de l'équation d'état dans la base diago

$$X_d(t) = \underbrace{e^{A_d t} X_d(0)}_{R\ libre} + \underbrace{\int_0^t e^{A_d(t-\tau)} B_d U(\tau)\, d\tau}_{R\ forcé}$$

$U(t) = u_0 = 0{,}5\ m^3/\ell$

$X(0) = \begin{pmatrix} h_1(0) \\ h_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (m)$

$\rightarrow$ R libre : $e^{A_d t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-7t} \end{pmatrix}$ puisque $A_d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ diago

$X_d(0) \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = X(0)$

Base d'origine $X(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$ // diago

$X(t) \xleftrightarrow{T} X_d(t)$, $X(t) = T X_d(t) \Rightarrow X_d(t) = T^{-1} X(t) \Rightarrow X_d(0) = T^{-1} X(0) = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ R libre $= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-7t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3\, e^{-t} \\ -1/3\, e^{-7t} \end{pmatrix}$

variable d'intégration

$\Rightarrow$ R Forcé $= \left(R_F(t) = \int_0^t e^{A_d t} e^{-A_d \tau} B_d u_0\, d\tau = e^{A_d t} \int_0^t e^{-A_d \tau} \right) B_d u_0$

car ne dépend pas de la variable d'intégration (τ)

$= -e^{A_d t} A_d^{-1} \left[e^{-A_d \tau} \right]_0^t B_d u_0 \Rightarrow \boxed{R_F(t) = -e^{A_d t} A_d^{-1} (e^{-A_d t} - I) B_d u_0}$

Exceptionnellement A_d^{-1} et $e^{A_d t}$ peuvent être commuté ainsi : $R_F(t) = -A_d^{-1} \{ e^{A_d t} (e^{-A_d t} - I) B_d u_0$

$\Rightarrow R_F(t) = -A_d^{-1} (I - e^{A_d t}) B_d u_0 = A_d^{-1} (e^{A_d t} - I) B_d u_0 = \begin{pmatrix} 2/3\,(1 - e^{-t}) \\ \frac{1}{21}(1 - e^{-7t}) \end{pmatrix}$

$X(t) = \begin{pmatrix} 4/3\, e^{-t} \\ -1/3\, e^{-7t} \end{pmatrix} + R_F(t) = \begin{pmatrix} 2/3\, e^{-t} + 2/3 \\ -8/21\, e^{-7t} + 1/21 \end{pmatrix}$ $x_{d1}(t)$ $x_{d2}(t)$

$A_d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \rightarrow e^{A_d t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-7t} \end{pmatrix}$ $e_{\lambda_1}(t)$ $e_{\lambda_2}(t)$

$h_1(t) = 2/3\, e^{-t} - 8/21\, e^{-7t} + 15/21$

Hauteur d'eau finale : $\rightarrow$ Bac 1 : $h_{1eq} = \lim_{t \to +\infty} h_1(t) \Rightarrow \boxed{h_{1eq} = 15/21} = 0{,}71\ m$

$\rightarrow$ Bac 2 : $h_{2eq} = \lim_{t \to +\infty} h_2(t) \Rightarrow \boxed{h_{2eq} = 12/21} = 0{,}57\ m$

Régime permanent = régime atteint lorsque le système est stabilisé (l'effet des modes a disparu)

Régime transitoire = régime pendant lequel le sujet évolue

$\boxed{\text{Analyser un système}}$: Trouver les propriétés caractéristiques de ce système
- Stabilité / Commandabilité / Observabilité

① Stabilité

$\frac{h_2(t)}{V(t)} = 2/3\, \underbrace{e^{-t}}_{\to 0} + \frac{16}{21} \underbrace{e^{-7t}}_{\to 0} + \frac{12}{21}$, $\lim_{t \to \infty} h_2(t)$ $e^{(-2+2i)t}, e^{(-2-2i)t}$ $\quad \lambda_1 = -2 + 2i$, $\lambda_2 = -2 - 2i$

($e^{-t} \to e^{\lambda_1 t}$, $e^{-7t} \to e^{\lambda_2 t}$)

② Commandabilité : $u(t)$ permet-il d'agir sur chaque variable d'état ?

Critère de commande dans la base diagonale $\begin{pmatrix} \dot{x}_{d1} \\ \dot{x}_{d2} \end{pmatrix} = \dot{X}_d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} X_d + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t)$

$\dot{x}_{d1} = -x_{d1}(t) + b_1 u(t)$

$\dot{x}_{d2} = -x_{d2}(t) + b_2 . u(t)$

Commandabilité dans 1 base quelconque
↳ Ex : Retour au sujet

$\dot{X} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$

$\mathcal{C} = (B \;\; AB \;\; A^{n-1}B)$ avec $n = \dim(X)$

Ici : $n = 2 \Rightarrow \underbrace{\mathcal{C} = (B \;\; AB)}_{\text{Matrice de comm}}$ $B = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$ $AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}}$

$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Critère : Syst comm SSI $Rg(\mathcal{C}) = 2$, ici $\mathcal{C}$ est 1 matrice carrée de dim 2

$\Rightarrow$ son rang sera égal à 2 SSI $\det(\mathcal{C}) \neq 0$

Ici $\det(\mathcal{C}) = 2 \times 8 - 0(-6) = 16 \neq 0 \Rightarrow Rg(\mathcal{C}) = 2 \Rightarrow$ Syst commandable

— p. 19 du doc

Exemple bac d'eau $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ $C = (0 \;\; 1)$

Base quelconque $\Rightarrow$ Matrice d'observabilité $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

$n = \dim(X) \rightarrow$ ici : $n = 2$ puisque $X = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

Matrice d'observabilité $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$ avec $C = (0 \;\; 1)$

$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow C \\ \leftarrow A \end{matrix}$ $CA = (4 \;\; -5)$

→ On vérifie le rang : $Rg(\mathcal{O}) \leq 2$, le rang de $\mathcal{O} = 2$ SSI $\det \mathcal{O} \neq 0$. Ici $\det \mathcal{O} = -4 \neq 0 \Rightarrow Rg(\mathcal{O}) = 2$
$\Rightarrow$ Système observable

Vérif observabilité pour la base diago $A_d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ $C_d = (1 \;\; -2)$

Aucune colonne de C_d n'est $= 0 \Rightarrow$ ~~sujet~~ système observable

Chapitre 2 : La représentation d'état et les autres modèles

Introduction

Modèle E/S → Relation entre u et s faisant intervenir leurs dérivées

$u - s = Ri + L\dfrac{di}{dt}$

$i = C\dot{s} \Rightarrow \dfrac{di}{dt} = C\ddot{s}$

$u - s = RC\dot{s} + LC\ddot{s}$

$\underbrace{u(t) = LC\ddot{s} + RC\dot{s} + s(t)}$

Equa diff relie l'entrée à la sortie s(t) et ses dérivées

NB : $\underbrace{\text{1 seule equa diff d'ordre 2}}_{\text{UNIQUE}} \neq$ Eq d'état $= \underbrace{\text{2 eq diff d'ordre 1}}_{\exists \text{ 1 infinité}}$

FT = se déduit avec la TL

$u(t)$, $U(p)$ → [$G(p)$] → $y(t)$, $Y(p)$

$U(p) = \mathcal{L}(u(t))$ $Y(p) = \mathcal{L}(y(t))$

$G(p) = \dfrac{Y(p)}{U(p)}$

$Y(p) = G(p)\,U(p)$

$\underbrace{\mathcal{L}(u(t))}_{U(p)} = \mathcal{L}(LC\ddot{s}(t) + RC\dot{s}(t) + s(t))$
$= LC\,\mathcal{L}(\ddot{s}(t)) + RC\,\mathcal{L}(\dot{s}(t)) + \mathcal{L}\,s(t)$

$\mathcal{L}(\dot{s}(t)) = pS(p) - s(0)$ ← valeur initiale de $s(t)$ = Tension aux bornes de condensateur

$\mathcal{L}(\ddot{s}(t)) = p^2S(p) - ps(0) - \dot{s}(0)$ ← valeur initiale de $\dot{s}(t)$

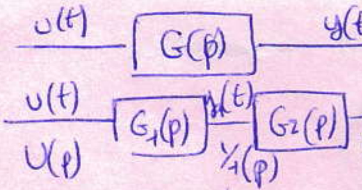
$U(p) = LC(p^2S(p) - ps(0) - \dot{s}(0)) + RC(pS(p) - s(0)) + S(p)$

$= (LCp^2 + RCp + 1)S(p) - \underbrace{[(LCp + RC)s(0) + LC\dot{s}(0)]}_{H_0}$

$= (LCp^2 + RCp + 1)\,S(p) - H_0(p)$

$S(p) = \underbrace{\dfrac{1}{LCp^2 + RCp + 1}}_{G(p)} U(p) + \dfrac{1}{LCp^2 + RCp + 1} H_0(p)$

Régime forcé   Régime libre



$$Y(p) = G_2(p)\,Y_1(p) = \overbrace{G_2(p)\,G_1(p)}^{G(p)}\,U(p)$$

$\hookrightarrow Y_1(p) = G_1(p)\,U(p)$

Relation entre les modèles

De "RE" à "FT" on prend la TL de l'eq d'état à CI = 0

⚠ X(t) Vecteur de dim n

$$\mathcal{L}(\dot{X}(t)) = \mathcal{L}(AX(t) + BX(t)) = A\,\mathcal{L}(X(t)) + B\,\mathcal{L}(U(t))$$

$$pX(p) - \underbrace{X(0)} = AX(p) + BU(p)$$

Valeur initiale de l'état } supposée nulle puisqu'on calcule la FT

$$pX(p) = AX(p) + BU(p)$$

$$pX(p) - \underset{n\times n}{A}X(p) = BU(p)$$

$$(pI_{n\times n} - A)X(p) = BU(p)$$

$$X(p) = (pI - A)^{-1}BU(p)$$

$$\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(CX(t) + DU(t))$$

$$Y(p) = CX(p) + DU(p)$$

$$Y(p) = C(pI - A)^{-1}BU(p) + DU(p)$$

$$= \underbrace{\left(C(pI - A)^{-1}B + D\right)}_{G(p)}U(p)$$

⚠ les valeurs ~~particul~~ propre de A = pôles de la FT

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(pI - A)}\,\underbrace{\mathrm{Cof}^T(pI - A)}_{\text{Matrice des cofacteurs}}$$

Pol carac de A

FT → RE : 2 bases à privilégier | Base CC | Base CO
↓
Pas de calcul

NB : Passer de la base diago est possible mais cela nécessite plus de calculs
⇒ Décomposer $Y(p) = G(p)U(p)$ en éléments simples, chaque éléments simple étant ensuite un état

⚠ $a_n = 1$! $m < n$. Ordre des coeffs dans B_{co} et B_{cc}

ED → RE ⇒ Privilégier la forme CO

⚠ $a_n = 1$ $m < n$. Ordre des coeffs dans B_{co}

Hiérarchie entre les modèles

Modèle interne RE $\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$ Modèles temporels

Modèle E/S ED d'ordre n

FT → CI = 0 RForcé

⊕ complet

⊖ complet

voir schéma p. 11

But ① Trouver la représentation d'état du système complexe d'entrée $U(t)$ et de sortie $Y(t)$

② Trouver l'équation différentielle (ED) d'ordre n de ce ~~sujet~~ système

③ Trouver la fonction de transfert (FT) du système

① Trouver la représentation d'état

1.1 ~~Trouver~~ Définir $X(t)$

$\left(\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}\right)$ On associe 1 variable d'état à la sortie Y de chaque bloc $X_i(p) = Y_i(p)$ où $i = \{1, 2, 3, 4\}$ d'où $x_i(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_4(t) \end{pmatrix}$ autrement dit

$X_1(p) = \mathcal{L}(x_1(t)) = G_1(p)U(p)$ où $U(p) = \mathcal{L}(u(t))$, $G_1(p)$ = FT du système ① $= \frac{1{,}5}{p+1} U(p)$

$\vdots$

$X_4(p) = \mathcal{L}(x_4(t))$

Mais comment trouver $\dot{x}_1(t)$? $\Rightarrow (p+1)X_1(p) = 1{,}5\,U(p)$

$\Leftrightarrow pX_1(p) + X_1(p) = 1{,}5\,U(p) \overset{TL^{-1}}{\Longrightarrow} \dot{x}_1(t) + x_1(t) = 1{,}5\,u(t)$

$\Leftrightarrow \boxed{\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - 1{,}5\,u(t)}$

Même chose pour $X_2(p)$

$X_2(p) = \mathcal{L}(x_2(t)) = G_2(p)U(p) = \frac{0{,}5}{p-1} U(p)$

$\Rightarrow (p-1)X_2(p) = 0{,}5\,U(p) \overset{TL^{-1}}{\Longrightarrow} \dot{x}_2(t) - x_2(t) = 0{,}5\,u(t)$

$\Leftrightarrow \boxed{\dot{x}_2(t) = -x_2(t) - 0{,}5\,u(t)}$

Même chose pour $X_3(p)$ mais on rappelle que $X_3(p)$ se base sur $\underbrace{X_1(p) - X_2(p)}_{V(p)}$ soit :

$X_3(p) = \mathcal{L}(x_3(t)) = G_3(p)V(p) = \frac{1}{p-2}\left(X_1(p) - X_2(p)\right)$

$\Rightarrow (p-2)X_3(p) = X_1(p) - X_2(p) \overset{TL^{-1}}{\Longrightarrow} \dot{x}_3(t) - 2x_3(t) = x_1(t) - x_2(t)$

$\Leftrightarrow \boxed{\dot{x}_3(t) = +2x_3(t) + x_1(t) - x_2(t)}$

Même chose que $X_3(p)$ pour $X_4(p)$

$X_4(p) = \mathcal{L}(x_4(t)) = G_4(p)V(p) = \frac{1}{p+3}\left(X_1(p) - X_2(p)\right)$

$\Rightarrow (p+3)X_4(p) = X_1(p) - X_2(p) \overset{TL^{-1}}{\Longrightarrow} \dot{x}_4(t) + 3x_4(t) = x_1(t) - x_2(t)$

$\Leftrightarrow \boxed{\dot{x}_4(t) = -3x_4(t) + x_1(t) - x_2(t)}$

$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → $Y(p) = 0{,}2X_3(p) + 0{,}8X_4(p) \Rightarrow y(t) = 0{,}2x_3(t) + 0{,}8x_4(t)$

$= (0\ 0\ 0{,}2\ 0{,}8)X(t)$

$\boxed{\text{Ordre du syst = Nb var état = 4}}$

② L'ED d'ordre n :

$$\begin{cases} Y(p) = \left[0{,}2\, G_3(p) + 0{,}8\, G_4(p)\right] V(p) = \left[\frac{0{,}2}{p-2} + \frac{0{,}8}{p+3}\right] V(p) = \frac{p-1}{(p-2)(p+3)} V(p) = \boxed{\frac{p-1}{p^2+p-6} V(p)} \\ V(p) = X_1(p) - X_2(p) = \left[G_1(p) - G_2(p)\right] U(p) = \boxed{\frac{p-2}{p^2-1} U(p)} \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} Y(p) = \frac{p-1}{p^2+p-6} V(p) \Leftrightarrow (p^2+p-6)\, Y(p) = (p-1) V(p) \overset{TL^{-1}}{\Rightarrow} \ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6\, y(t) = \dot{v}(t) - v(t) \quad (1) \\ V(p) = \frac{p-2}{p^2-1} U(p) \Leftrightarrow (p^2-1) V(p) = (p-2) V(p) \overset{TL^{-1}}{\Rightarrow} \ddot{v}(t) - v(t) = \dot{u}(t) - 2u(t) \quad (2) \end{cases}$$

On dérive (1) : $\dddot{y}(t) + \ddot{y}(t) - 6\dot{y}(t) = \ddot{v}(t) - \dot{v}(t) = v(t) - \dot{v}(t) + \dot{u}(t) - 2\dot{u}(t) = -\left[\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t)\right] + \dot{u}(t) - 2u(t)$

Avec (2) : $\ddot{v}(t) = v(t) + \dot{u}(t) - 2u(t) = \cancel{\ddot{v}(t) - v(t) + 2\dot{u}(t) - 2u(t)}$

$\dddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) - 5\dot{y}(t) - 6y(t) = \dot{u}(t) - 2u(t)$

Ordre 3 ⇒ Ordre ED < Ordre de la RE

Conclusion : On a perdu de l'information

$(p^3 + 2p^2 - 5p - 6)\, Y(p) = (p-2)\, U(p)$

$(p-2)(p+3)(p+1)\, Y(p) = (p-2)\, U(p)$

⇒ Entre la RE et l'ED on a perdu un pôle $p=1$ ⇒ du point de vue de l'ED le 2e sous système "disparait"

③ Fonction de transfert (FT)

$$\begin{cases} \boxed{Y(p) = \frac{p-1}{(p-2)(p+3)} \boxed{V(p)}} \\ V(p) = \frac{p-2}{p^2-1} U(p) = \boxed{\frac{p-2}{(p-1)(p+1)} U(p)} \end{cases} \quad \boxed{Y(p) = \frac{\cancel{p-2}}{\cancel{(p-1)}(p+1)} \frac{\cancel{p-1}}{\cancel{(p-2)}(p+3)} U(p)} = \frac{1}{(p+1)(p+3)} U(p) \Rightarrow \text{ORDRE } 2$$

⇒ on a perdu 2 pôles $p=1$ et $p=2$

⇒ Hiérarchie

RE	⊕ complet
ED ordre n	↓
FT	⊖ complet

(Page 4) $\underset{0\quad t}{\uparrow \delta(t)}$ $Y(t) = Ce^{At}X(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)} B\underset{\uparrow}{u(\tau)}\,d\tau + Du(t)$

On remplace ici par l'expression considérer par $u(t)$

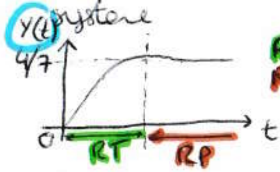
(Rappel TD1)
$u(t) = U_0 = 0{,}5\ m^3/h = cste$; $X(0) = \begin{pmatrix} h_1(0) \\ h_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$X_0(t)$

$X(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}$

$y(t) = h_2(t)$

⇒ On a calculé la réponse indicielle du système



RT : régime transitoire
RP : régime permanent

(Page 5) $U(p) \longrightarrow \boxed{G(p)} \longrightarrow Y(p)$ $\quad u(t) = \ldots \xrightarrow{\text{Table des Transformées de Laplace}} U(p) = \mathcal{L}(u(t)) \Rightarrow Y(p) = \underbrace{G(p)U(p)}_{\text{Expression simple}}$

On note que si l'expression est simple on utilise la Table des transformées de Laplace sinon on décompose en élément simple puis on utilise la Table des transformées de Laplace

Retour à l'exemple des Bacs d'eau

→ Calcul de la fonction de transfert (FT) du système de bacs → En utilisant la forme (CC) ou (CO), la FT s'écrit : $G(p) = \frac{8}{p^2+8p+7} = \frac{8}{(p+1)(p+7)}$

→ Réponse impulsionnelle : $u(t) = \delta(t) \longrightarrow U(p) = \mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

$$Y(p) = G(p) \rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p))$$

NB : la ~~remarque~~ réponse impulsionnelle = TL inverse de $G(p)$

→ Réponse indicielle : $u(t) = U_0 = 0{,}5\ m^3/h$ | NB : CI = 0 ↳ Bacs vides au début de l'expression

- $u(t) = U_0 \longrightarrow U(p) = \frac{U_0}{p} = \frac{0{,}5}{p}$
- $\underbrace{Y(p)}_{\text{R forcé}} = G(p)U(p) = \frac{8}{(p+1)(p+7)}\frac{U_0}{p} = \frac{8U_0}{p(p+1)(p+7)}$ la sortie dépend aussi des pôles de l'entrée

$= \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+7}$

effet entrée — effet des pôles du système

avec $A = \frac{8U_0}{7} = \frac{4}{7}$
$B = -\frac{8}{6}U_0 = -\frac{2}{3}$
$C = \frac{4}{21}U_0 = \frac{2}{21}$

$Y(p) = \left[\frac{8/7}{p} - \frac{4/3}{p+1} + \frac{4/21}{p+7}\right]U_0$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) = \frac{8}{7}U_0\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{4}{3}U_0\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) + \frac{4}{21}U_0\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+7}\right)$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+a}\right) = e^{-at} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) = e^{-t} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+7}\right) = e^{-7t}$ $\quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = e^{0t} = 1$

MODES DU SYSTÈME — **MODES DE L'ENTRÉE**

$y(t) = \underbrace{-\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{21}e^{-7t}}_{RT} + \underbrace{\frac{4}{7}}_{RP}$ (à condition initiale nulles)

On remarque qu'à condition initiale nulle les coefficient diffère que les résultats de la page 4

→ **stabilité rapidité**

(:=)

Rapidité $\begin{cases} \text{Temps d'accélération} \rightarrow \text{temps de montée} \\ \text{Temps de stabilisation} \rightarrow \text{temps de réponse} \end{cases}$

$Y(p) = G(p)U(p) \quad U(p) = \frac{U_0\omega}{p^2+\omega^2} = \mathcal{L}(U_0\sin(\omega t))$

$= G(p)\frac{U_0\omega}{(p+j\omega)(p-j\omega)} \qquad = \frac{U_0\omega}{(p+j\omega)(p-j\omega)}$

↳ $y(t)$ = RT fonction des ~~entrées~~ modes du système
+ RT fonction des modes des entrées

→ AU RP : il ne reste que les modes de l'entrée → $e^{j\omega t}, e^{-j\omega t}$

$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$

⇒ Ces 2 modes vont faire osciller le système à la même pulsation ω que l'entrée

$\omega = 2\pi f$ ← fréquence du signal (Hz)
↳ rad/s

$f = 1/T$ ← période (s)

$u(t) = U_0\sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{G(p)} \longrightarrow y(t)$

$y(t) = \underset{\substack{\text{amplitude du signal } y(t)}}{y_0(\omega)}\sin(\omega t + \underset{\text{phase}}{\varphi(\omega)})$ (Preuve slide 15)

amplification/réduction de la sortie

On montre (cf slide 15) que $y_0(\omega) = |G(j\omega)|U_0$
$\varphi(\omega) = Arg(G(j\omega))$

NB : $G(j\omega) = G(p)|_{p=j\omega}$

Ex : $G(p) = \frac{1}{p^2+7p+8}$
↳ $G(j\omega) = \frac{8}{p^2+7j\omega+8}$

$\omega = 2\pi f$ ← freq du signal
rad/s
$f = \frac{1}{T}$ ← période (s)

$u(t) = U_0\sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{G(p)} \longrightarrow y(t)$

Réponse freq $= G(j\omega) = |G(j\omega)|\,e^{j\varphi(\omega)}$