FICHE MEMO DU COURS ESPACE D'ETAT
Seul document autorisé pour l'examen

On considère un système linéaire stationnaire d'ordre n, mono-entrée, mono-sortie, décrit par son équation d'état et son équation de sortie :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \end{cases}$$

Notons $\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ le polynôme caractéristique de A.
La fonction de transfert s'écrit : $F(p) = C(pI - A)^{-1}B$

1 Solution de l'équation d'état et changement de base

- **Solution de l'équation d'état** $X(t) = \exp\left(A(t - t_0)\right) X(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp\left(A(t - \tau)\right) Bu(\tau)d\tau$
- **Mise sous forme compagne de commande :**

$$A_{cc} = M_{cc}^{-1}AM_{cc} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{cc} = M_{cc}^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  La matrice de passage $M_{cc} = (M_1, \ldots, M_n)$ est définie par :
  $M_n = B$, et pour $k = 1, \ldots, n-1$, $M_{n-k} = (A^k + a_{n-1}A^{k-1} + \ldots + a_{n-k}I)B$.

- **Mise sous forme compagne d'observation :**

$$A_{co} = M_{co}^{-1}AM_{co} = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ -a_1 & & & \ldots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_{co} = CM_{co} = (1, 0, \ldots, 0)$$

  La matrice de passage M_{co} est obtenue à partir de $P = (P_1, \ldots, P_n) = ({M_{co}}^{-1})^T$, où $P_1 = C^T$, et pour $k = 2, \ldots, n$, $P_k = \left((A^T)^{k-1} + a_{n-1}(A^T)^{k-2} + \ldots + a_{n-k+1}I\right) C^T$.

2 Mise sous forme d'état

- **A partir de la fonction de transfert :** $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_o + b_1p + \ldots + b_mp^m}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0}$ $(m < n)$
  Forme compagne de commande pour A et B conduit à :

$$C = (b_0, b_1, ..., b_m, 0, ..., 0)$$

- **A partir de l'équation différentielle :**

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1\dot{y} + a_0y = b_mu^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + b_1\dot{u} + b_0u$$

  Forme compagne d'observation pour A et C conduit à : $B = (0, \ldots, 0, b_m, \ldots, b_1, b_0)^T$

3 Analyse dans l'espace d'état

- **Critères de commandabilité pour le système** (A, B, C) **:**
  - *Critère de Kalman :* $Rg(B \;\; AB \;\; \ldots A^{n-1}B) = n$
  - *Critère pour A diagonale :* toutes les lignes de B doivent être non nulles
- **Critères d'observabilité pour le système** (A, B, C) **:**
  - *Critère de Kalman :* $Rg(C^T \;\; A^TC^T \;\; \ldots {A^{n-1}}^T C^T)^T = n$
  - *Critère pour A diagonale :* toutes les colonnes de C doivent être non nulles.