Examen d'Outils mathématiques - Session 2

Tous les documents personnels (imprimés et manuscrits) ainsi que les calculatrices sont autorisés. Rendre cet énoncé avec la copie. Durée 2 heures.

Exercice 1 : (4 pts + 1 pt)

On cherche à résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 4x(t)+2y(t)+4z(t) \\ y'(t) & = & -2x(t)-2z(t) \\ z'(t) & = & -x(t)-y(t)-z(t) \end{array}\right.$$

1. Écrire le système sous forme matricielle du type : $X' = A.X$
2. Montrer que la matrice A peut s'écrire sous la forme PDP^{-1} avec D diagonale.
3. Déterminer de telles matrices D et P sans calculer P^{-1}.
4. Poser un changement de base et trouver l'ensemble des solutions de ce système.
5. (Bonus) Calculer P^{-1}.

Exercice 2 : (4 pts)

Soit un E espace vectoriel de dimension 3 muni d'un produit scalaire $< \ , \ >$. Soit une base $B = \{v_1,v_2,v_3\}$ de E telle que :

$$\left\{\begin{array}{lll} <v_1,v_1>=2 & <v_1,v_2>=0 & <v_1,v_3>=1 \\ & <v_2,v_2>=1 & <v_2,v_3>=0 \\ & & <v_3,v_3>=2 \end{array}\right.$$

1. Déterminer la matrice M de produit scalaire sur la base B.
2. Vérifier que M est bien définie positive (i.e. toutes ses valeurs propres sont strictement positives).
3. Proposer un changement de base vers une base orthogonale.
4. Proposer une base orthonormée.

Exercice 3 : (4 pts)

Soit F l'endomorphisme de l'ensemble des matrices $\mathbb{R}^{2\times 2}$ défini par :

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b & a \\ c & d \end{bmatrix}$$

1. Montrer que F est une symétrie.
2. Trouver une base de vecteurs propres pour décrire la symétrie F.

Soit G l'endomorphisme de l'ensemble des matrices $\mathbb{R}^{2\times 2}$ défini par :

$$G\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b & d \\ -a & c \end{bmatrix}$$

3. Trouver un polynôme annulateur de G et en déduire les valeurs propres possibles de G.
4. Construire l'application inverse G^{-1} à partir de G.

Exercice 4 : (4 pts)

Soit la fonction g représentée sur la figure 1.

1. Exprimer la fonction g à l'aide de la fonction indicatrice $\mathbb{1}$.
2. Calculer la transformée de Fourier de g, en détaillant la méthode choisie.

On considère à présent la fonction g_p périodique représentée sur la figure 2.

3. Exprimer la fonction g_p par rapport à la fonction g et préciser sa période.
4. Calculer le spectre $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de g_p, en détaillant la méthode choisie.

Exercice 5 : (4 pts)

On considère trois fonctions k, f et g, représentées sur la figure 3.

1. Exprimer f, g et k avec la fonction de Heaviside H et les distributions de Dirac δ_a.
2. Exprimer la dérivée de k avec la fonction de Heaviside H et les distributions de Dirac δ_a.
3. En déduire la transformée de Laplace de f, de g et de k.
4. Montrer que k est le produit de convolution de f et de g.

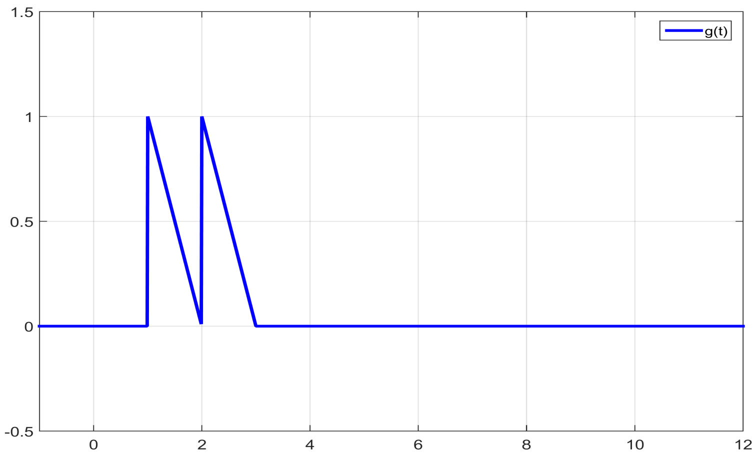

FIG. 1 – *Fonction g*

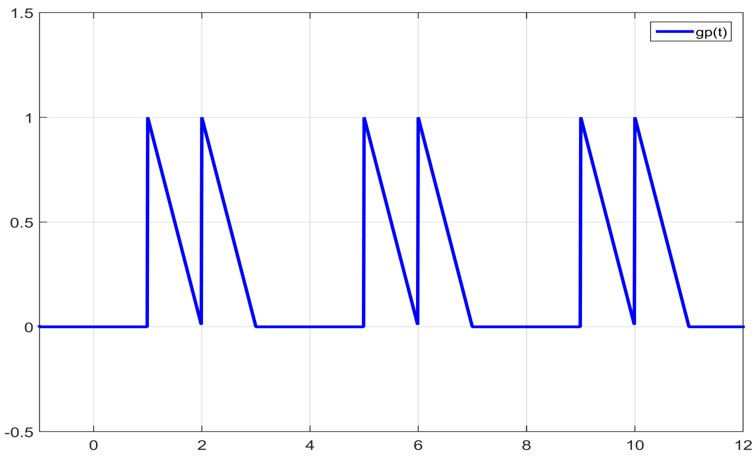

FIG. 2 – *Fonction g_p*

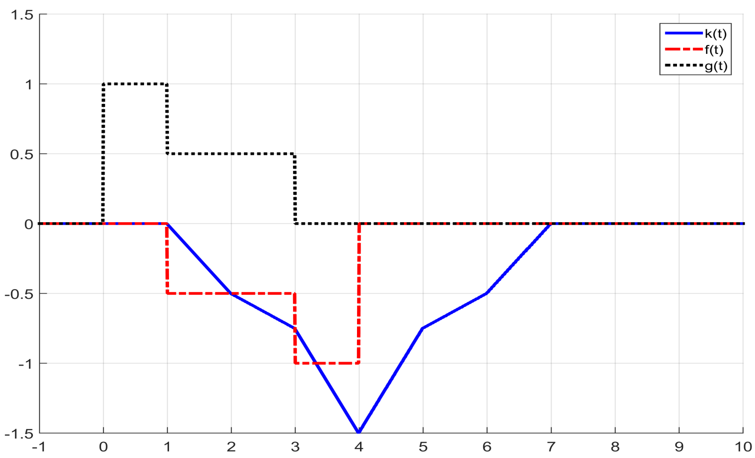

FIG. 3 – *Fonctions k, f et g*