Équations Différentielles Ordinaires à coefficients constants - ordre 1

Exercice 1 Résoudre les équations du premier ordre suivantes :

1. $y'(x) - 4y(x) = (x+1)e^x, \quad y(0) = 1,$
2. $y'(x) - 4y(x) = (x+1)e^{4x}, \quad y(0) = 1,$
3. $y'(x) - 4y(x) = \sin(2x+\pi), \quad y(0) = 1.$

Solution de l'exercice 1

1. La solution est $y(x) = \dfrac{13}{9}e^{4x} - \dfrac{1}{9}(3x+4)e^x.$
2. La solution est $y(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+2x+2)e^{4x}.$
3. La solution est $y(x) = \dfrac{9}{10}e^{4x} + \dfrac{1}{10}(2\sin(2x) + \cos(2x)).$

Exercice 2 En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer toutes les solutions de l'équation

$$y'(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}.$$

Solution de l'exercice 2

Les solutions s'écrivent $\Big(C + \ln(|x+1|)\Big)e^{-x}$ avec C une constante réelle.

Équations Différentielles Ordinaires à coefficients constants - ordre 2

Exercice 3 Résoudre les EDO suivantes :

1. $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = (x+3), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$
2. $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = (x+3)e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$
3. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^2e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$
4. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \cos(x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$
5. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x\cos(2x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$
6. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x\sin(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

Solution de l'exercice 3

1. La solution est $y(x) = \dfrac{4}{3}e^{-x} + \dfrac{11}{12}e^{2x} - \dfrac{1}{4}(2x+5).$
2. La solution est $y(x) = \dfrac{19}{27}e^{2x} + \Big(\dfrac{8}{27} - \dfrac{10}{9}x - \dfrac{1}{6}x^2\Big)e^{-x}.$
3. La solution est $y(x) = \Big(\dfrac{1}{12}x^4 - x + 1\Big)e^x.$
4. La solution est $y(x) = \Big(1 - \dfrac{1}{2}x\Big)e^x - \dfrac{1}{2}\sin(x).$

5. La solution est $y(x) = \Big(\dfrac{1}{3}\cos(x) + 2\sin(x) - \dfrac{1}{3}\cos(2x)\Big)e^x$.
6. La solution est $y(x) = \dfrac{1}{2}\Big(5\sin(x) - x\cos(x)\Big)e^x$.

Exercice 4 Déterminer l'ensemble des solutions des EDO suivantes :

1. $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 3\sin(x)$,
2. $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^2$,
3. $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = xe^x$,
4. $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x}\sin^2(x)$.

Solution de l'exercice 4

1. Les solutions sont de la forme
$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + \frac{3}{10}\Big(\cos(x) - 3\sin(x)\Big),$$
avec C_1 et C_2 des constantes réelles.
2. Les solutions sont de la forme
$$y(x) = (C_1x + C_2)e^x + (x^2 + 4x + 6),$$
avec C_1 et C_2 des constantes réelles.
3. Les solutions sont de la forme
$$y(x) = (C_1\cos(x) + C_2\sin(x))e^x + xe^x,$$
avec C_1 et C_2 des constantes réelles.
4. Les solutions sont de la forme
$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{-x} + \frac{1}{4}x^2e^{-x} + \frac{1}{8}\cos(2x)e^{-x},$$
avec C_1 et C_2 des constantes réelles.