Deuxième contrôle continu (durée 1h30)

Documents autorisés : 2 feuilles A4 recto-verso.
Barème donné à titre indicatif. *Les réponses non justifiées ne seront pas notées.*

1 Chemins optimums (6 points)

Soit G un graphe à 7 sommets dont les arcs (x, y) sont pondérés par p_{xy} décrit ci-dessous :

sommet x	a	b	c	d	e	f	g
$y \in \Gamma^+(x)$	b,f,g	c	d,e		d	e	b,c,e,f
p_{xy}	5,2,1	2	5,1		3	7	3,7,9,3

1. (**3 pts**) Calculez les chemins ai-minimaux dans le graphe G ci-dessous. Vous décrirez le déroulement de l'algorithme dans un tableau puis dessinerez l'arborescence des chemins ai-minimaux sur laquelle vous mentionnerez les distances de a à chaque sommet.
2. (**1 pt**) Donnez le plus long chemin en termes de nombre d'arcs qui a une origine différente de a et qui est garanti minimal par le résultat de Dijkstra et grâce au principe de Bellman (tout chemin extrait d'un chemin minimal est minimal), donnez son poids.
3. (**2 pts**) L'arborescence obtenue est-elle un arbre couvrant de poids minimum ?

2 Dijkstra et poids quelconques (3 pts)

Nous savons que l'algorithme de Dijkstra ne peut fonctionner que sur un graphe valué positivement alors que Bellman-Kalaba peut lui, être utilisé avec des arcs valués de façon quelconque.
Soit $G = (X, U)$ un graphe valué par une pondération p quelconque sur chaque arc, on note p_{xy} la pondération associée à l'arc (x, y). On décide de faire la procédure suivante :

— On pose $m = \min_{(x,y)\in U} p_{xy}$
— On construit $G' = (X, U)$ identique au graphe G mais pondéré par $p'_{xy} = p_{xy} - m$

Pour les 3 questions suivantes, si la réponse est oui faîtes la démonstration sinon donnez un contre-exemple.

1. (**1 pt**) Peut-on montrer que G' est pondéré avec une pondération positive ou nulle sur chaque arc ?
2. (**1 pt**) Peut-on montrer que tout chemin minimal de G' est un chemin minimal de G ?
3. (**1 pt**) Peut-on montrer que Dijkstra appliqué à G' donnera une arborescence de chemins qui sont minimaux aussi dans G ?

3 Problème d'ordonnancement (5 points)

Lors de la construction d'une maison, on distingue 12 travaux distincts :

Tâche	Libellé de la tâche	Durée	Tâches à terminer avant
A	gros oeuvre	8	/
B	charpentes	2	A
C	toiture	1	B, A
D	plomberie	4	A
E	électricité	2	A
F	ravalement	3	A,B, C,D
G	fenêtre	1	A,B
H	aménagements extérieurs	1	C,D,E
I	plâtres	2	A, C,D,E,G
J	sols	2	D,E,G,I
K	peintures	3	I
L	emménagement	1	toutes les tâches

1. (**1 pt**) Y a-t-il des contraintes de précédence (données dans la dernière colonne du tableau) qui sont redondantes ? si oui donnez un exemple sinon prouvez-le.
2. (**2 pts**) Modélisez la situation à l'aide d'un graphe et déterminer la durée minimale du projet.
3. (**2 pts**) Indiquez sur votre graphe les dates de début au plus tôt et au plus tard de chaque tâche permettant de garantir cette durée optimale.

4 Problème de flots (6 points)

Le serveur S est connecté à la machine T par un réseau avec les noeuds A, B, C et D. Les capacités des débits maximums des connexions entre les noeuds sont données dans le tableau suivant (en Mbit/s). Les connexions sont orientées des sommets en ligne vers les sommets en colonne. Les cases vides signifient qu'il n'y a pas de connexion directe entre les noeuds. Les temps de passage dans les noeuds sont négligeables.

	A	B	C	D	T
S	2	6	1		
A		3		1	
B			2		5
C				6	
D	3				7

1. (**1 pt**) Dessinez le réseau. Est-ce un réseau de transport ?
2. (**1 pt**) L'utilisateur de la machine T télécharge un très grand fichier du serveur S. On veut trouver quelle répartition des paquets sur les connexions permettra de maximiser le débit. Expliquer le lien avec la recherche d'un flot dans ce réseau. Quel type de flot recherche-t-on ?
3. (**3 pts**) Trouvez un flot maximum en décrivant les chaînes augmentantes utilisées ainsi que les augmentations réalisées à chaque étape. Vous préciserez le nom de l'algorithme utilisé, vous prouverez que le flot est maximal.
4. (**1 pt**) Proposez une connexion dont l'augmentation de capacité permettrait d'augmenter le débit.