Chapitre 1. Graphes orientés et non-orientés

I Graphes orientés : définitions

Définition 1 (graphe orienté) *Un graphe orienté G est un couple (X, U) où*

- *X est un ensemble fini de* sommets $X = \{x_i, i = 1..n\}$*, n fini (le nombre de sommets n est appelé l'*ordre *du graphe)*
- *U est un ensemble de couples de sommets de $X \times X$, appelés* arcs.

Étant donné un arc $u = (x_i, x_j) \in U$, x_i est appelée origine *de u (ou* extrémité initiale*) et x_j est l'*extremité terminale *de u.*
Si $x_i = x_j$ alors l'arc est une boucle.

Définition 2 (Graphe simple) *Un graphe orienté est* simple *s'il ne contient pas de boucles.*

Définition 3 (Graphe partiel (strict)) *Soit $G = (X, U)$ un graphe, le graphe $G' = (X, U')$ avec $U' \subset U$ est un graphe partiel de G.*

Définition 4 (Sous-graphe (strict)) *Soit $G = (X, U)$ un graphe, le graphe $G_{X'} = (X', U_{X'})$ avec $X' \subset X$ et $U_{X'} = \{(x_i, x_j) \in U | x_i, x_j \in X'\}$ est un sous-graphe de G engendré par X'.*

On peut également définir un sous-graphe partiel (sous-graphe dans lequel on élimine des arcs).

Définition 5 (Dictionnaire d'un graphe) *On appelle* successeur *d'un sommet x, tout sommet y tel que $(x, y) \in U$. Le* prédecesseur *d'un sommet x est un sommet y tel que $(y, x) \in U$. L'ensemble des successeurs d'un sommet x est noté $\Gamma^+(x)$, l'ensemble de ses prédecesseurs $\Gamma^-(x)$. $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$ est l'ensemble des* voisins *de x. Un sommet qui n'a pas de voisin est un sommet* isolé.
Le degré sortant $d^+(x)$ (resp. entrant $d^-(x)$) de x est le nombre d'arcs d'origine x (resp d'extrémité). Le degré de x est $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$.
Les sources *d'un graphe sont les sommets de degré entrant nul ($d^-(x) = 0$), les* puits *sont ceux de degré sortant nul ($d^+(x) = 0$).*
Le dictionnaire d'un graphe *est soit un tableau qui à chaque sommet fait correspondre ses successeurs :* $\begin{array}{c|c} x_i & \Gamma^+(x_i) \\ \hline & \end{array}$ *soit un tableau qui à chaque sommet fait correspondre ses prédecesseurs :* $\begin{array}{c|c} x_i & \Gamma^-(x_i) \\ \hline & \end{array}$.

Propriété 1 *Soit* $G = (X, U)$ *un graphe orienté,* $\sum_{x \in X} d(x) = 2 \times |U|$.

Définition 6 (Matrice d'adjacence) *La* matrice d'adjacence *associée à un graphe (pas forcément simple) ou* matrice booléeene *est une matrice* $n \times n$ *(n étant le nombre de sommets) dont les termes sont* $a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ (x_i, x_j) \in U \\ 0 & sinon \end{cases}$

Définition 7 (Chemin-Circuit) *Soit* $G = (X, U)$ *un graphe orienté. Un* chemin *reliant deux sommets (pas forcément distincts) a (origine) et b (extrémité) est une séquence d'arcs* $(u_1, \ldots u_p)$ *avec* $p \geq 1$ *tel qu'il existe une suite de sommets* $(s_1, \ldots s_{p+1})$ *avec* $s_1 = a$ *et* $s_{p+1} = b$ *de façon à ce qu'un sommet extrémité d'un arc soit l'origine du suivant, c'est à dire* $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $(s_i, s_{i+1}) = u_i$.
Un chemin est dit simple *si ses arcs sont tous différents. La* longueur *ou* cardinalité *d'un chemin est son nombre d'arcs (p, par définition, un chemin de longueur 0 n'existe pas.)*
Un circuit *est un chemin simple dont les deux extrémités coincident.*
Un chemin est élémentaire *si tous les sommets sont distincts (sauf eventuellement* $s_1 = s_{p+1}$ *(circuit élémentaire)).*

Remarque *Un chemin élémentaire est simple (mais pas l'inverse).*

II Concepts non orientés

Définition 8 (Graphe non orienté) *Un graphe non orienté G est un couple* (X, U)*, où*
- X *est un ensemble fini de* sommets $X = \{x_i, i = 1..n\}$,
- U *est un ensemble d'*arêtes *de* G*, une arête* $u \in U$ *symbolise un lien non dirigé entre deux sommets. Soient* x_i *et* x_j *deux sommets, les couples* (x_i, x_j) *et* (x_j, x_i) *représentent la même arête dont* x_i *et* x_j *sont les* extrémités.

Définition 9 (Graphe non orienté complet, Clique et Stable) *Un graphe* ***simple*** *non orienté est* complet *s'il existe une arête entre deux sommets quelconques. Une* clique *est un sous-graphe complet. Un* stable *est un ensemble de sommets tel que deux sommets distincts ne sont pas adjacents.*

Attention les concepts non-orientés s'appliquent dans des graphes orientés ou non-orientés :
- chaque fois qu'on applique un concept non-orienté à un graphe orienté on l'applique en omettant les orientations des arcs.
- certains concepts orientés peuvent s'appliquer à un graphe non-orienté en ajoutant une orientation dans les deux sens aux arêtes.

Définition 10 (Chaîne et cycle) *Soit* $G = (X, U)$ *un graphe orienté ou non. Une chaîne est une* séquence d'arcs ou d'arêtes $(u_1, \ldots u_{p-1})$ *de* U *reliant deux sommets (pas forcément distincts)* s_1 *(origine) et* s_p *(extrémité) avec* $p > 1$ *tel qu'il existe une suite de sommets*

$(s_1, \dots s_p)$ *avec* $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, s_i *et* s_{i+1} *sont reliés dans* U *par* u_i *(sans tenir compte de son orientation si* G *est orienté) par un arc de cette* chaîne*.*
Une chaîne est simple *si elle ne contient pas deux fois le même arc.*
Un cycle *est défini par l'ensemble des arcs d'une chaîne simple dont les extrémités coïncident.*
Une chaîne est élémentaire *si elle ne contient pas deux fois le même sommet (sauf éventuellement* $x = y$ *(cycle élémentaire)).*

Remarque *Un chemin est une chaîne dont tous les arcs sont orientés dans le même sens.*

Remarque *Attention la notion de chemin ou de circuit n'existe pas dans un graphe non-orienté.*

Définition 11 (Coloration et Nombre chromatique) *Une coloration de* G *est une fonction associant à tout sommet de* G *une couleur, généralement un élément de l'ensemble d'indices des couleurs* $\{1, 2, ..., n\}$*, telle que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur (où* n *est le nombre de sommets du graphe). Le nombre minimum de couleur pour obtenir une coloration de* G *est appelé le* nombre chromatique *de* G*.*

Remarque *Une coloration de* G *correspond à une partition de ses sommets en stables.*

Définition 12 (Composantes connexes ou s-connexes) *Soit* $G = (X, U)$ *un graphe orienté ou non. La relation binaire* R *sur* X *(dite relation de connexité) définie par* $(x, y) \in R \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ ou} \\ \text{il existe une chaîne entre } x \text{ et } y \end{cases}$ *est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).*
Les classes d'équivalence $X_1, \dots X_p$ $(1 \leq p \leq |X|)$ *de la relation de connexité sont les composantes connexes de* G*.*

On appelle également composantes connexes de G les sous-graphes G_{X_i} engendrées par les ensembles de sommets X_i.
Un graphe est dit *connexe* s'il ne possède qu'une composante connexe, c'est-à-dire que deux sommets distincts quelconques sont reliés par une chaîne ; les sous-graphes G_{X_i} sont connexes.

III Parcours

Définition 13 (Descendants et ascendants) *On dit que* y *est un descendant de* x *s'il existe un chemin de* x *à* y *ou si* $x = y$*. On dit que* y *est un ascendant de* x *s'il existe un chemin de* y *à* x *ou* $y = x$*. On note* $D(x)$ *et* $A(x)$ *les ensembles respectifs de descendants et d'ascendants du sommet* x*.*

Définition 14 (racine) *Un sommet* x *est racine d'un graphe* $G = (X, U)$ *ssi tous les sommets du graphe (sauf éventuellement* x*) sont des descendants de* x *(il existe un chemin de* x *vers tout autre sommet)*

Remarque $\Gamma^+(x) \subseteq D(x)$ *et* $\Gamma^-(x) \subseteq A(x)$.

La liste des descendants d'un sommet i_0 dans un graphe $G = (X, U)$ peut être obtenue par un parcours en largeur ou en profondeur d'abord.

Définition 15 (parcours en largeur d'abord (BFS))

Algorithme 1 : Parcours en largeur d'abord (BFS)

```
Données : G : un graphe connexe orienté. i0 : sommet de G
Variables : La liste OUVERT : sommets en attente d'être traités
            La liste FERMÉ : sommets déjà traités
            i : sommet courant
OUVERT ← (i0) ; FERMÉ ← ()
tant que OUVERT n'est pas vide faire
    soit i le premier élément d'OUVERT
    si i n'est pas dans FERMÉ alors
        mettre les successeurs de i qui ∉ FERMÉ en fin d'OUVERT (en mémorisant que i est
          leur père et en supprimant les répétitions)
        effectuer le traitement pour i
        mettre i dans FERMÉ
    supprimer i d'OUVERT
```

Le parcours des sommets en profondeur d'abord à partir d'un sommet consiste à selectionner le premier descendant puis réitérer le processus sur son premier descendant jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de descendants à ce moment là on considère le deuxième descendant de l'avant dernier sommet.

Définition 16 (parcours en profondeur d'abord (DFS)) *La liste des sommets obtenus par un parcours en profondeur d'abord à partir d'un sommet i_0 d'un graphe $G = (X, U)$ est obtenue par le même algorithme en remplaçant "fin" par "tête" ("mettre les successeurs* en tête *d'OUVERT").*
On ajoute les informations[1] date de pré-visite $d(x)$ *(ou début de traitement) et* post-visite $f(x)$ *(ou fin de traitement) à chaque sommet. $d(x)$ est la date à laquelle on a découvert x pour la première fois, $f(x)$ est la date à laquelle on a fini d'explorer tous les descendants de x (c'est-à-dire quand on le supprime d'OUVERT).*

IV Forte-Connexité, graphe réduit (concepts orientés)

Définition 17 (Composantes fortement connexes ou f-connexes) *Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. La relation binaire R_f sur X définie par :*

$$(x, y) \in R_f \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \ \textit{ou} \\ \textit{il existe une chemin de } x \textit{ vers } y \textit{ et un chemin de } y \textit{ vers } x \end{cases}$$

est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).

1. Si le graphe est sans-circuit, le classement des sommets selon les dates de post-visite croissant donne un tri topologique du graphe (en le dessinant linéairement dans cet ordre, alors tous les arcs sont orientés de gauche à droite).

Les classes d'équivalence $X_1, \dots X_p$ ($1 \leq p \leq |X|$) de la relation de forte connexité sont les composantes fortement connexes de G.

Un graphe est fortement connexe s'il n'a qu'une seule composante fortement connexe, c'est-à-dire qu'il existe un chemin entre deux sommets distincts quelconques.

Définition 18 (Graphe réduit) *Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté, le graphe réduit $G_R = (X_R, U_R)$ est défini par*

- $X_R = \{X_i, i = 1...p | X_i \text{ est une composante f-connexe de } G\}$ *et*
- $U_R = \{(X_i, X_j) | X_i, X_j \in X_R,\ X_i \neq X_j \text{ et } \exists x \in X_i, \exists y \in X_j, (x, y) \in U\}$

Propriété 2 *$\forall x \in X$, la composante fortement-connexe $\overline{x}$ de x est telle que $\overline{x} = D(x) \cap A(x)$.*

Propriété 3 *Soit G un graphe, l'algorithme de Kosaraju permet de calculer les composantes fortement-connexe en seulement deux parcours en profondeur.*
L'algorithme opère en deux étapes :

- *exécuter l'algorithme de parcours en profondeur des successeurs sur G (en recommançant depuis un sommet non atteint tant qu'il en reste, noter les dates post-fixes) ;*
- *exécuter l'algorithme de parcours en profondeur des prédécesseurs sur G, en explorant les sommets dans l'ordre décroissant des dates post-fixe données par le premier parcours en profondeur.*
- *Les graphes produits par le 2e parcours sont les composantes f-connexes de G.*

Propriété 4 *Un graphe réduit est sans-circuit.*