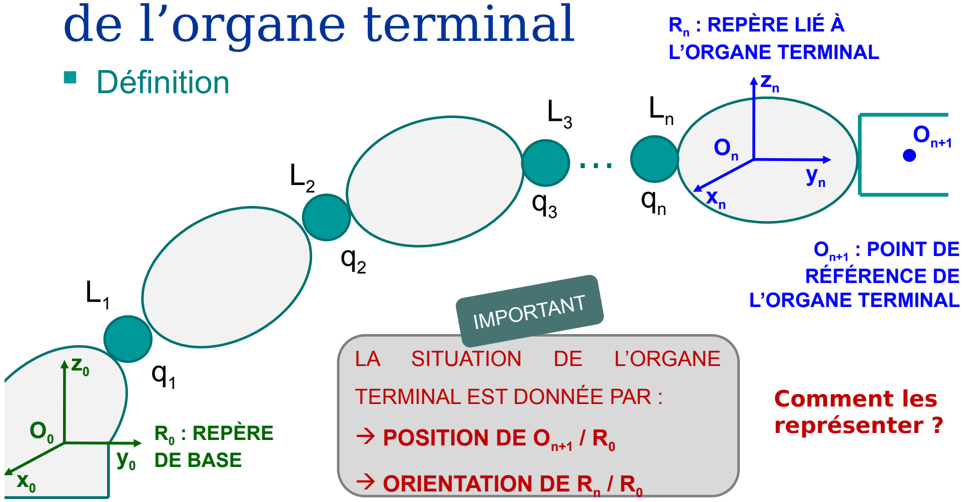
OUTILS FONDAMENTAUX

POUR LA ROBOTIQUE

Viviane CADENAT.
Enseignant-chercheur à l'UPS.
LAAS-CNRS, équipe Robotique, action, perception.

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Définition



IMPORTANT

LA SITUATION DE L'ORGANE TERMINAL EST DONNÉE PAR :

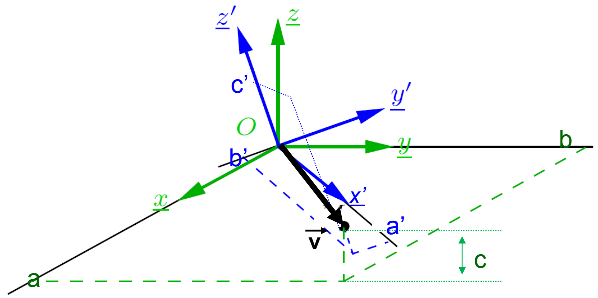
→ POSITION DE O_{n+1} / R_0

→ ORIENTATION DE R_n / R_0

Comment les représenter ?

Matrices de transformation

- Rotation seule → Changement de base
  - Deux repères orthonormés directs R(*O,x,y,z*) et R'(*O,x',y',z'*) (même origine)
  - Un vecteur $\vec{v}$ de composantes (a,b,c) dans R et (a',b',c') dans R'



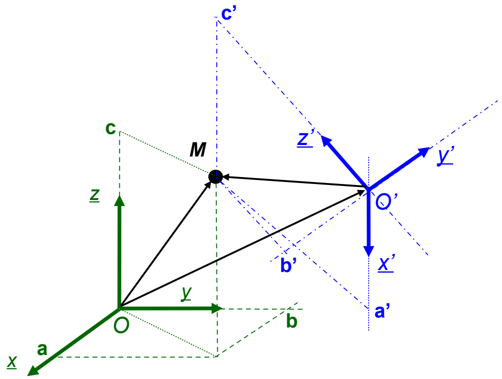
IMPORTANT

LA MATRICE DE ROTATION DONNE LA RELATION ENTRE $\vec{v}_{(R)}$ et $\vec{v}_{(R')}$

$$\vec{v}_{(R)} = R\,\vec{v}_{(R')}$$

Matrices de transformation

- Rotation + translation → Changement de repère
  - Deux repères orthonormés directs R(*O,x,y,z*) et R'(*O',x',y',z'*) (origines différentes)
  - Un point de coordonnées (a,b,c) dans R et (a',b',c') dans R'



IMPORTANT

PRISE EN COMPTE DU CHANGEMENT DE POSITION ET D'ORIENTATION

$$\vec{OM}_{(R)} = \vec{OO'}_{(R)} + R\,\vec{O'M}_{(R')}$$

Matrices de transformation

- Matrice de passage homogène
  - Définition

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{R} & \mathbf{P} = \overrightarrow{\mathbf{OO'}}_{(R)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

IMPORTANT

Fournit une première information de situation de R' par rapport à R

  - Expression des *coordonnées homogènes* d'un point M

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overrightarrow{OM}_{(R)} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Coordonnées homogènes de M dans R}} = T \underbrace{\begin{pmatrix} \overrightarrow{O'M}_{(R')} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Coordonnées homogènes de M dans R'}}$$

Matrice de transformation

- Matrice de passage homogène
  - Définition

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathbf{R} & \mathbf{P} = \overrightarrow{\mathbf{OO'}}_{(R)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

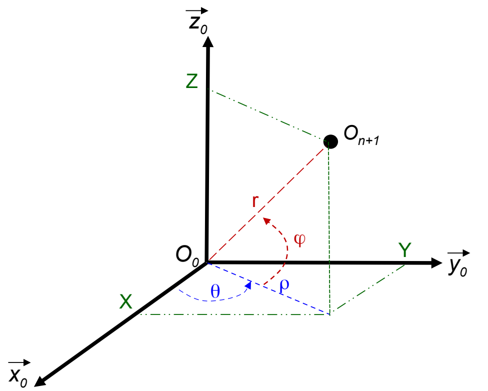
IMPORTANT

Fournit une première information de situation de R' par rapport à R

  - Unification des différents cas possibles :
    - Si rotation seule, P est nul et R définit la rotation effectuée
    - Si translation seule, R = Id et P non nul définit la translation effectuée
    - Si rotation et translation, R ≠ Id et P non nul

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de la position



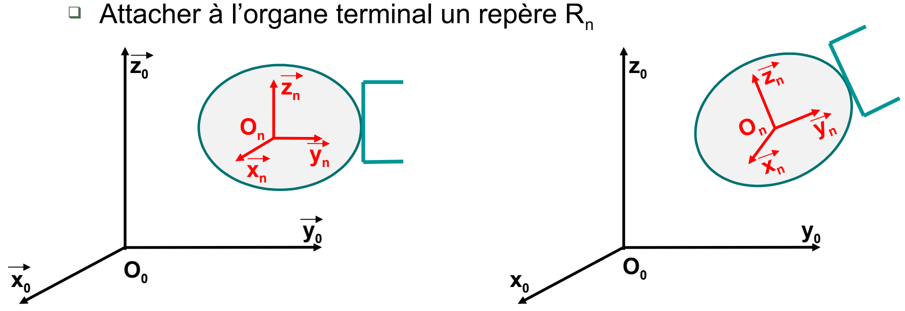
IMPORTANT

- **Coordonnées cartésiennes**
  $\rightarrow \vec{x}_p = (X\ Y\ Z)^T$
- **Coordonnées cylindriques**
  $\rightarrow \vec{x}_p = (\rho\ \ \theta\ Z)^T$
- **Coordonnées sphériques**
  $\rightarrow \vec{x}_p = (r\ \theta\ \varphi)^T$

ON PEUT DÉDUIRE LES COORDONNÉES CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES.

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - Attacher à l'organe terminal un repère R_n



⇒ L'orientation est donnée par les vecteurs de R_n / Repère fixe (ici R_0)

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - Première paramétrisation :
    - Composantes de $\vec{x}_n$, $\vec{y}_n$, $\vec{z}_n$ dans R_0

      → Matrice de rotation R_{0n}

      → Cosinus directeurs complets / partiels → 6 ou 9 paramètres
  - Autres solutions **→ ne sont calculables qu'à partir de R_{0n}**
    - **Systèmes de trois angles :**

      → Angles de Bryant, Angles d'Euler, ...

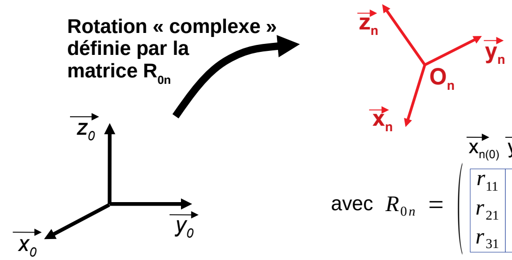
      → Représentation minimale → Problème de singularités
    - **1 axe de rotation $\vec{r}$ et 1 angle θ**

      → Quaternions (se déduisent de $\vec{r}$ et θ)

      → Représentation non minimale → Pas de singularité

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**



avec $R_{0n} = \begin{array}{ccc} \vec{x}_{n(0)} & \vec{y}_{n(0)} & \vec{z}_{n(0)} \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ **connue**

Question : Peut-on décomposer cette rotation « complexe » en trois rotations « simples » ?

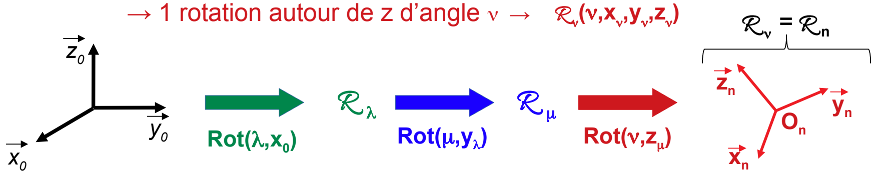
Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - **Idée :** Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »
    - **Angles de Bryant (ou angles de Cardan) → $X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$**

      → 1 rotation autour de x d'angle λ → $\mathcal{R}_\lambda(\lambda, x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$

      → 1 rotation autour de y d'angle μ → $\mathcal{R}_\mu(\mu, x_\mu, y_\mu, z_\mu)$

      → 1 rotation autour de z d'angle ν → $\mathcal{R}_\nu(\nu, x_\nu, y_\nu, z_\nu)$



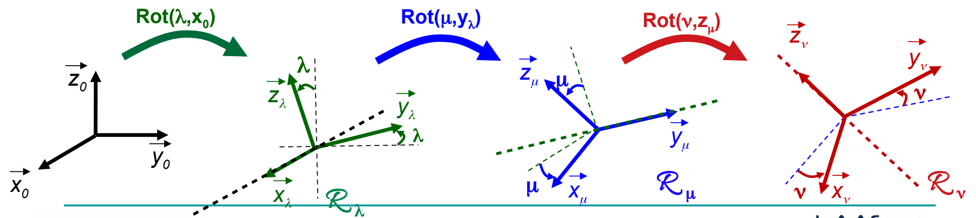
Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - **Angles de Bryant (ou angles de Cardan) → $X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$**

      → 1 rotation autour de x_λ → $\mathcal{R}_\lambda(\lambda, x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$

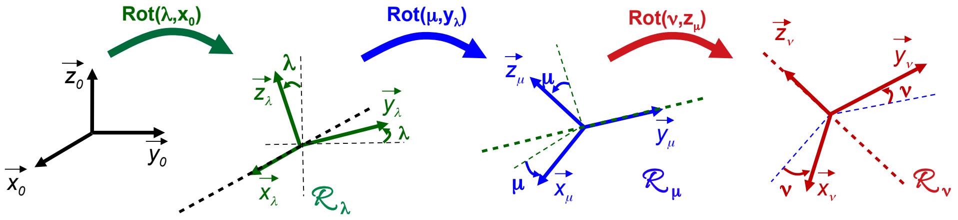
      → 1 rotation autour de y_μ → $\mathcal{R}_\mu(\mu, x_\mu, y_\mu, z_\mu)$

      → 1 rotation autour de z_ν → $\mathcal{R}_\nu(\nu, x_\nu, y_\nu, z_\nu)$



Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - **Angles de Bryant (ou angles de Cardan) → $X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$**



$$R_{0,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & -\sin\lambda \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \quad R_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & \sin\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\mu & 0 & \cos\mu \end{pmatrix} \quad R_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} \cos\nu & -\sin\nu & 0 \\ \sin\nu & \cos\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - **Angles de Bryant (ou angles de Cardan) → $X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$**

$$R_{0,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & -\sin\lambda \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix} \quad R_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \cos\mu & 0 & \sin\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\mu & 0 & \cos\mu \end{pmatrix} \quad R_{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} \cos\nu & -\sin\nu & 0 \\ \sin\nu & \cos\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} cos\mu cos\nu & -cos\mu sin\nu & sin\mu \\ sin\lambda sin\mu cos\nu + cos\lambda sin\nu & -sin\lambda sin\mu sin\nu + cos\lambda cos\nu & -sin\lambda cos\mu \\ -cos\lambda sin\mu cos\nu + sin\lambda sin\nu & cos\lambda sin\mu sin\nu + sin\lambda cos\nu & cos\lambda cos\mu \end{pmatrix}$$

→ **Les valeurs de λ, μ, ν sont obtenues en identifiant les éléments de R et $R_{0n} = [r_{ij}]$**

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - **Angles de Bryant (ou angles de Cardan) → $X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$**

$$\begin{aligned} &Si \quad r_{13} \neq \pm 1 \quad alors \\ &\lambda = Atan2(-r_{23}, r_{33}) \\ &\mu = \arcsin(r_{13}) \\ &\nu = Atan2(-r_{12}, r_{11}) \end{aligned}$$

Hors singularité

$$\begin{aligned} &Si \quad r_{13} = \pm 1 \quad alors \\ &\mu = \pm \frac{\pi}{2} \\ &r_{13}\lambda + \nu = Atan2(-r_{21}, r_{22}) \end{aligned}$$

Singularité : λ et ν ne peuvent pas être calculés indépendamment

→ **Choix arbitraire**

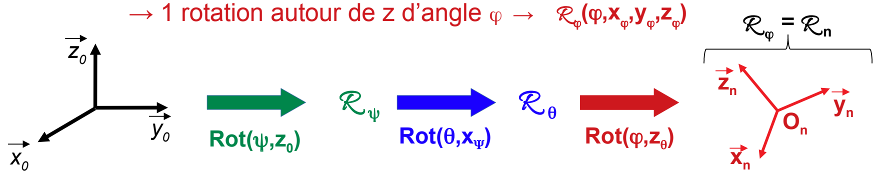
Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - **Idée :** Décomposer la rotation « complexe » effectuée par l'organe terminal en trois rotations « simples »
    - **Angles d'Euler → $X_R = (\psi, \theta, \varphi)^T$**

      → 1 rotation autour de z d'angle ψ → $\mathcal{R}_\psi(\psi, x_\psi, y_\psi, z_\psi)$

      → 1 rotation autour de x d'angle θ → $\mathcal{R}_\theta(\theta, x_\theta, y_\theta, z_\theta)$

      → 1 rotation autour de z d'angle φ → $\mathcal{R}_\varphi(\varphi, x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi)$



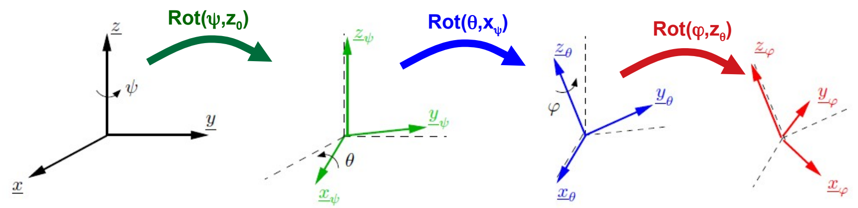
Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - **Angles d'Euler** → $X_R = (\psi,\ \theta,\ \varphi)^T$

→ 1 rotation autour de z d'angle ψ → $\mathcal{R}_\psi(\psi, x_\psi, y_\psi, z_\psi)$

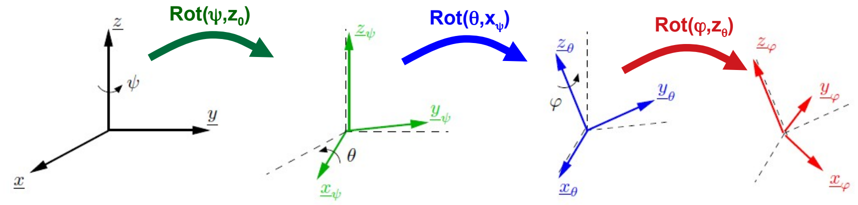
→ 1 rotation autour de x d'angle θ → $\mathcal{R}_\theta(\theta, x_\theta, y_\theta, z_\theta)$

→ 1 rotation autour de z d'angle φ → $\mathcal{R}_\varphi(\varphi, x_\varphi, y_\varphi, z_\varphi)$



Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - **Angles d'Euler** → $X_R = (\psi,\ \theta,\ \varphi)^T$



$$\boxed{R_{0,\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \boxed{R_{\psi,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \quad \boxed{R_{\theta,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - **Angles d'Euler** → $X_R = (\psi,\ \theta,\ \varphi)^T$

$$R_{0,\psi} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_{\psi,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad R_{\theta,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ sin\theta sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

→ **Les valeurs de ψ, θ, φ sont obtenues en identifiant les éléments de R et $R_{0n} = [r_{ij}]$**

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation
  - **Systèmes de trois angles**
    - **Angles d'Euler** → $X_R = (\psi,\ \theta,\ \varphi)^T$

$$Si \quad r_{33} \neq \pm 1 \quad alors$$
$$\psi = Atan2(r_{13}, -r_{23})$$
$$\theta = \arccos(r_{33})$$
$$\varphi = Atan2(r_{31}, r_{32})$$

Hors singularité

$$Si \quad r_{33} = \pm 1 \quad alors$$
$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$$
$$r_{33}\varphi + \psi = Atan2(r_{21}, r_{11})$$

Singularité : φ et ψ ne peuvent pas être calculés indépendamment

→ **choix arbitraire**

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation : Bilan
  - **Si on connaît $R_{0n} = [r_{ij}]$ on peut calculer x_R**
    - **Représentations minimales → Attention aux singularités !**

	Angles de Bryant → $X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$	Angles d'Euler → $X_R = (\psi, \theta, \varphi)^T$
Hors singularité	$Si \quad r_{13} \neq \pm 1 \quad alors$ $\lambda = Atan2(-r_{23}, r_{33})$ $\mu = \arcsin(r_{13})$ $\nu = Atan2(-r_{12}, r_{11})$	$Si \quad r_{33} \neq \pm 1 \quad alors$ $\psi = Atan2(r_{13}, -r_{23})$ $\theta = \arccos(r_{33})$ $\varphi = Atan2(r_{31}, r_{32})$
En singularité	$Si \quad r_{13} = \pm 1 \quad alors$ $\mu = \pm \frac{\pi}{2}$ $r_{13}\lambda + \nu = Atan2(-r_{21}, r_{22})$	$Si \quad r_{33} = \pm 1 \quad alors$ $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ $r_{33}\varphi + \psi = Atan2(r_{21}, r_{11})$

Représentation de la situation de l'organe terminal

- Représentation de l'orientation : Bilan
  - **Si l'on connaît x_R , on peut aussi calculer R_{0n}**
    - **Angles de Bryant → $X_R = (\lambda, \mu, \nu)^T$**

$$R_{0n}(\lambda,\mu,\nu) = \begin{pmatrix} cos\mu cos\nu & -cos\mu sin\nu & sin\mu \\ sin\lambda sin\mu cos\nu + cos\lambda sin\nu & -sin\lambda sin\mu sin\nu + cos\lambda cos\nu & -sin\lambda cos\mu \\ -cos\lambda sin\mu cos\nu + sin\lambda sin\nu & cos\lambda sin\mu sin\nu + sin\lambda cos\nu & cos\lambda cos\mu \end{pmatrix}$$

- **Angles d'Euler → $X_R = (\psi, \theta, \varphi)^T$**

$$R_{0n}(\psi,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\theta \\ sin\theta sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}$$