UNIVERSITÉ PAUL SABATIER **FSI/UPSSITECH**

EXAMEN DE COMMANDE DE ROBOTS – 2ASRI

1° session – Lundi 9 Décembre 2019

Durée 1h30 – Tous documents de Cours, TD, TP autorisés

Tablettes et téléphones mobiles interdits

COMMANDE EN COUPLE D'UN ROBOT MANIPULATEUR RPP

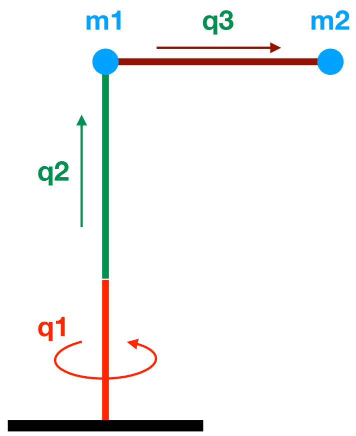

FIGURE 1 – Robot étudié

On souhaite asservir en position un robot RPP de façon que son organe terminal suive une trajectoire opérationnelle (chemin géométrique et loi horaire) définie à l'avance. Le vecteur des coordonnées généralisées est $(q_1, q_2, q_3)^T$, avec q_1 la rotation de la liaison L_1 autour de l'axe vertical (comptée positivement dans le sens anti-horaire), q_2 la translation de la liaison L_2 le long de l'axe vertical (comptée positivement vers le haut), q_3 la translation de la liaison L_3 le long de l'axe horizontal (comptée positivement vers l'extérieur). On caractérise la dynamique du robot par l'inertie J du corps en rotation et par deux masses m_1, m_2 respectivement positionnées en un point intermédiaire et en l'organe terminal (Figure 1).

On envisage *une commande en couple*. On se place dans l'hypothèse où les signaux de commande u_1, u_2, u_3 délivrés par le contrôleur sont, à une constante multiplicative près, les couples délivrés par les moteurs reliés aux liaisons. On admet ainsi que pour chaque $k^{\text{ème}}$ axe moteur, la commande u_k engendre le couple moteur $\gamma_{m,k} = K_c u_k$, avec $K_c > 0$ donné. En adoptant la notation vectorielle $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ et $\gamma_m = (\gamma_{m,1}, \gamma_{m,2}, \gamma_{m,3})^T$, il vient :

$$\gamma_m(t) = K_c u(t), \text{ avec } K_c > 0. \tag{1}$$

Des réducteurs sont placés entre les axes moteurs et les axes des liaisons. Ils admettent le même rapport $r \in]0; 1[$. Le vecteur $q = (q_1, q_2, q_3)^T$ regroupe les positions des liaisons, causées par le vecteur des couples $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ transmis à celles-ci via les réducteurs. Le vecteur $q_m = (q_{m,1}, q_{m,2}, q_{m,3})^T$ regroupe les positions des axes moteurs. Les équations suivantes sont en vigueur :

$$\text{[Lien entre les couples moteurs sur les actionneurs et ceux transmis aux liaisons]} : \ \gamma(t) = r^{-1}\gamma_m(t)\,; \tag{2}$$

$$\text{[Modèle Dynamique Direct]} : \ D(q(t))\ddot{q}(t) + b(q(t), \dot{q}(t)) + g(q(t)) = \gamma(t)\,; \tag{3}$$

$$\text{[Lien entre les positions des actionneurs et les positions des liaisons]} : \ q_m(t) = r^{-1}q(t). \tag{4}$$

Le robot et ses actionneurs peuvent par conséquent être représentés par un schéma-bloc exprimant les relations de causalité suivantes :

$$u \xrightarrow{\text{Gain } K_c \ (1)} \gamma_m \xrightarrow{\text{Gain } r^{-1} \ (2)} \gamma \xrightarrow{\text{Modèle Dynamique Direct } (3)} (q, \dot{q}) \xrightarrow{\text{Gain } r^{-1} \ (4)} (q_m, \dot{q}_m)$$

La synthèse du contrôleur du robot s'appuie sur le modèle complet équivalent à (1)–(2)–(3)–(4) :

$$r^2 D(q(t))\ddot{q}_m(t) + rb(q(t), \dot{q}(t)) + rg(q(t)) = K_c u(t). \tag{5}$$

On donne en outre les expressions suivantes de $D(q)$, $b(q, \dot{q})$ et $g(q)$ (en omettant les dépendances de $q, \dot{q}$ par rapport à t afin de ne pas surcharger les notations) :

$$D(q) = H + L(q), \text{ où } H := \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} \text{ et } L(q) := \begin{pmatrix} m_2 q_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,; \tag{6}$$

$$b(q, \dot{q}) := \begin{pmatrix} 2m_2 q_3 \dot{q}_3 \dot{q}_1 \\ 0 \\ -m_2 q_3 \dot{q}_1^2 \end{pmatrix}\,; \quad g(q) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ (m_1 + m_2)g \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } g \text{ l'accélération gravitationnelle.} \tag{7}$$

La définition de la tâche que doit effectuer l'organe terminal est exprimée par le fait que les positions $(q_1(t), q_2(t), q_3(t))^T$ des liaisons doivent être régulées à des consignes données $(q_1^*(t), q_2^*(t), q_3^*(t))^T$ constantes.

1. Montrer que pour chaque $k^{\text{ème}}$ axe, le modèle (5) du système en boucle ouverte complet se réécrit sous la forme équivalente

$$r^2 H_k \ddot{q}_{m,k}(t) + r g_k(q) + r w_k(q_m(t), \dot{q}_m(t), \ddot{q}_m(t)) = K_c u_k(t), \tag{8}$$

en précisant, pour chaque k, les expressions de la constante H_k et des fonctions $g_k(q), w_k(q_m, \dot{q}_m, \ddot{q}_m)$.

Que vaut w_k lorsque le robot admet une configuration constante ?

On décide d'utiliser le modèle simplifié suivant pour l'asservissement de chaque $k^{\text{ème}}$ axe :

$$r^2 H_k \ddot{q}_{m,k}(t) + r g_k(t) = K_c u_k(t), \text{ avec } g_k(t) = \text{constante } g_k \text{ définie en (7).} \tag{9}$$

Disposant des mesures de la position $q_{m,k}$ et de la vitesse $\omega_{m,k} = \dot{q}_{m,k}$ de l'actionneur correspondant, on se propose de mettre en place une commande décentralisée de la forme (avec les notations classiques pour les transformées de Laplace des signaux temporels)

$$U_k(p) = M_k(Q^\star_{m,k}(p) - Q_{m,k}(p)) - N_k \Omega_{m,k}(p), \; k = 1, 2, 3, \tag{10}$$

où $\Omega_{m,k}(p)$ désigne la transformée de $\omega_{m,k} = \dot{q}_{m,k}$ et $Q^\star_{m,k}(p)$ désigne la transformée de la consigne $q^\star_{m,k}(t) = r^{-1} q^\star_k(t)$ du $k^{\text{ème}}$ actionneur.

2. Dessiner le schéma-bloc du système (9). On rappelle que son entrée de commande est $u_k(t)$, le signal $v_k(t) = g_k(t) = g_k$ constitue une entrée de perturbation, et $q_{m,k}(t)$ constitue sa sortie.
3. Dessiner le schéma-bloc du contrôleur (10), et interconnecter les deux schémas-blocs.
4. Établir la relation qui unit la consigne $Q^\star_{m,k}(p)$, la perturbation $V_k(p) = \frac{g_k}{p}$ et la sortie $Q_{m,k}(p)$.
5. Déterminer à quelles conditions sur M_k, N_k la boucle fermée est stable.
6. Sous réserve que la boucle fermée soit stable, calculer l'erreur de position.
7. Proposer une méthode de synthèse des coefficients M_k, N_k assurant *au moins* l'absence de dépassement lorsque (10) est connecté à (9), en argumentant le choix effectué.

Une réflexion qualitative sur la pertinence de la commande décentralisée (10) synthétisée ci-dessus est nécessaire, préalablement à son application sur le modèle non linéaire exact (5) du système non linéaire couplé à commander.

8. Pourquoi le comportement transitoire de l'axe 1 ne sera-t-il pas satisfaisant ?
   Comment la méthode de synthèse des gains M_1, N_1 pourrait-elle être modifiée à peu de frais pour éviter le problème ?
9. Comment formuler la synthèse d'un contrôleur PID sur l'axe 2 de façon à réaliser un positionnement sans erreur ? *Seule la formulation du problème (*i.e.*, la définition des équations permettant d'obtenir les gains du PID et non leur résolution) est demandée.*

La tâche que doit effectuer l'organe terminal consiste à permettre à $(q_1(t), q_2(t), q_3(t))^T$ de suivre des consignes données $(q_1^*(t), q_2^*(t), q_3^*(t))^T$ variables dans le temps.

10. Compléter l'ensemble des trois contrôleurs proportionnels dérivés (10), pour $k = 1, 2, 3$, par une action feedforward centralisée permettant la réalisation approximative de la tâche, en développant autant que possible les calculs.
11. Discuter les avantages et inconvénients de la solution proposée.