Mathématiques - UPSSITECH 20 Octobre 2017 - Correction

Exercice 1. (2 pts)

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2\, e^{i\pi/3}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/12},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{4} = \frac{(1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3}))}{4}.$$

Exercice 2. (2 pts) Le dénominateur de la fraction rationnelle est de degré 3 et son numérateur de degré 0. Nous avons donc

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x-1)} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

Pour calculer c, on multiplie les deux membres de l'égalité par $(x-1)^2$, et après simplification, on pose $x = 1$. On obtient $c = 1/2$. Pour calculer a, on multiplie les deux membres de l'égalité par $(x+1)$, et après simplification, on pose $x = -1$. On obtient $a = 1/4$. Il reste à identifier b que l'on peut calculer en posant $x = 0$, ce qui donne

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}\,|_{x=0} = \frac{1/4}{(x+1)}\,|_{x=0} + \frac{b}{(x-1)}\,|_{x=0} + \frac{1/2}{(x-1)^2}\,|_{x=0}\ ,$$

soit $b = -1/4$.

Exercice 3. (2 pts) La règle de d'Alembert conduit à

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1+1}{k+1} = 1.$$

Le rayon de convergence, qui est l'inverse de cette limite, est donc égal à 1. À l'intérieur du disque de centre 0 et de rayon 1, nous avons

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2} x^k = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}\right).$$

Mais

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1\right).$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2} x^k = \frac{1}{2(1-x)^2}.$$

Exercice 4. (2 pts) La règle de d'Alembert conduit à

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)+\ln(1+2/n)}{\ln(n)+\ln(1+3/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln(1+2/n)/\ln(n)}{1+\ln(1+3/n)/\ln(n)} = 1.$$

Le rayon de convergence est donc égal à 1. Pour la deuxième série, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{2^n} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^4} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} = 2.$$

Le rayon de convergence est donc égal à 1/2.

Exercice 5. (2 pts) En posant $u = t^2 + 1$, nous avons

$$\int_1^x \frac{t}{t^2+1} dt = \int_2^{x^2+1} \frac{1}{2u} du = \frac{1}{2}(\ln(x^2+1) - \ln(2).$$

Comme $\lim_{x\to\infty} \ln(x^2+1) = \infty$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty \frac{t}{t^2+1} dt$ est égale à $+\infty$, elle diverge.

(2 pts)

$$\int_0^x t \sin 2t \, dt = -\frac{1}{2} \left[t \cos(2t)\right]_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{2} \int_0^x \cos 2t \, dt = -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

Exercice 6. (1 pt) De la définition de E, il découle que $(x, y, z) \in E$ si et seulement si

$$(x, y, z) = (x, y, -3x - 4y) = x(1, 0, -3) + y(0, 1, -4).$$

E est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de $(1, 0, -3)$ et $(0, 1, -4)$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Ces deux vecteurs étant linéairement indépendants, la famille $\big((1, 0, -3), (0, 1, -4)\big)$ est une base de E.

Exercice 7. (2 pts) Nous avons

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Calculons le déterminant de cette matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1.$$

Le déterminant étant non nul, la matrice de L est inversible et L est une bijection de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

Exercice 8. (3 pts) Les solutions réelles de l'équation homogène $y'(t) + 2y(t) = 0$ sont

$$y(t) = K e^{-2t}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

On recherche donc les solutions de l'équation non homogènes sous la forme

$$z(t) = (at + b) e^{2t}.$$

Nous avons

$$z'(t) = a\,e^{2t} + 2(at+b)\,e^{2t} \quad \text{et} \quad z'(t) + 2z(t) = (4at + 4b + a)\,e^{2t}.$$

Pour que z vérifie l'équation non homogène, nous choisissons a et b tels que

$$4a = 1 \quad \text{et} \quad 4b + a = 0.$$

Les solutions réelles de l'équation non homogène $y'(t) + 2y(t) = t\,e^{2t}$ sont

$$y(t) = \left(\frac{t}{4} - \frac{1}{16}\right) e^{2t} + K\,e^{-2t}.$$

Pour avoir $y(0) = 0$, nous choisissons $K = \frac{1}{16}$. La solution recherchée est donc $y(t) = \left(\frac{t}{4} - \frac{1}{16}\right) e^{2t} + \frac{1}{16}\,e^{-2t}$.

Exercice 9. (2 pts) L'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r - 3 = (r-3)(r+1).$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle est donc

$$\{a\,e^{3t} + b\,e^{-t} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}.$$