Partie 1 – Calcul d'intégrales et de primitives

Exercice 1 Calculer les primitives suivantes :

$$a)\int \frac{1}{x-3}dx,\quad b)\int \frac{1}{(x-3)^2}dx,\quad c)\int \frac{1}{2x-3}dx,\quad d)\int \frac{1}{(2x-3)^3}dx,$$

$$e)\int \frac{1}{x^2+a^2}dx,\quad f)\int \cos(x)\sin^4(x)dx,\quad g)\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx,$$

$$h)\int x^2e^{x^3-18}dx,\quad i)\int \sin(x)e^{\cos(x)+1}dx,\quad j)\int \frac{1}{x\sqrt{\ln(2x)+1}}dx,$$

voire

$$k*)\int \frac{1}{x^2-x+17/4}dx,\quad l*)\int \tan^3(x)\,dx,\quad m*)\int \frac{1}{\tan^3(x)}\,dx.$$

Solution de l'exercice 1

$$a)\int \frac{1}{x-3}dx = \ln(|x-3|)+\text{Cte},$$

$$b)\int \frac{1}{(x-3)^2}dx = -\frac{1}{x-3}+\text{Cte},$$

$$c)\int \frac{1}{2x-3}dx = \frac{1}{2}\ln(|2x-3|)+\text{Cte},$$

$$d)\int \frac{1}{(2x-3)^3}dx = \frac{-1}{4}\frac{1}{(2x-3)^2}+\text{Cte},$$

$$e)\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+\text{Cte},$$

$$f)\int \cos(x)\sin^4(x)dx = \frac{1}{5}(\sin(x))^5+\text{Cte},$$

$$g)\int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx = \frac{1}{\cos(x)}+\text{Cte},$$

$$h)\int x^2e^{x^3-18}dx = \frac{1}{3}e^{x^3-18}+\text{Cte},$$

$$i)\int \sin(x)e^{\cos(x)+1}dx = -e^{\cos(x)+1}+\text{Cte},$$

$$j)\int \frac{1}{x\sqrt{\ln(2x)+1}}dx = 2\sqrt{\ln(2x)+1}+\text{Cte}.$$

On a aussi

$$k*)\int \frac{1}{x^2-x+17/4}dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)+\text{Cte},$$

$$l*)\int \tan^3(x)\,dx = \frac{1}{2\cos^2(x)}+\ln(|\cos(x)|)+\text{Cte},$$

$$m*)\int \frac{1}{\tan^3(x)}\,dx = -\frac{1}{2\sin^2(x)}-\ln(|\sin(x)|)+\text{Cte}$$

Exercice 2

1. En utilisant des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes

$$I_1(x)=\int_0^x t^2e^{3t}dt,\quad I_2(x)=\int_1^x t\sin(2t)dt,\quad I_3(x)=\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt,\quad I_4=\int_0^\pi \arctan(x)dx.$$

2. En utilisant la décomposition en éléments simples, calculer les intégrales suivantes

$$I_5=\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)(x^2+1)}.$$

3. En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$$I_6(x)=\int_0^x e^{\sqrt{t}}dt,\quad I_7=\int_1^\pi \frac{\cos(\ln(x))}{x}dx,$$

et

$$I_8=\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Pour cette dernière, on pourra essayer de poser $x=\cos(\theta)$.

Solution de l'exercice 2

$$I_1(x) = \frac{1}{27}\left((9x^2 - 6x + 2)e^{3x} - 2\right) \qquad I_3(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$$
$$I_2(x) = \frac{1}{4}(\sin(2x) - \sin(2) - 2x\cos(2x) + 2\cos(2)) \qquad I_4 = \pi\arctan(\pi) - \frac{1}{2}\ln(\pi^2 + 1)$$
$$I_5 = -\frac{1}{10}(\pi + 3\ln(2)) \qquad I_6(x) = 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$$
$$I_7 = \sin(\ln(\pi)) \qquad I_8 = \frac{\pi}{2}$$

Partie 2 – Initiation aux intégrales généralisées

Exercice 3 L'intégrale généralisée (pourquoi ?) suivante est-elle convergente ?

$$I_9 = \int_0^\infty \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx.$$

Solution de l'exercice 3

On revient à la définition en étudiant $J_9(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$. Via un changement de variable $u = (1 + e^x)$, on obtient

$$J_9(X) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^X},$$

dont la limite est $\frac{1}{2}$ lorsque X tend vers $+\infty$. L'intégrale I_9 est donc convergente.

Exercice 4 Étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes

$$p) \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx, \quad q) \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2}\,dx.$$

Solution de l'exercice 4

Pour $p)$, pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} \leq \dfrac{\sqrt{x^2}}{x^4} = \dfrac{1}{x^3}$. Comme $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ converge, il en va de même de l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}\,dx$.

Pour $q)$, on revient à la définition en étudiant $\displaystyle\int_0^X \frac{x}{(1+x)^2}\,dx$. Pour tout $X > 0$, cette dernière intégrale vaut

$$\int_0^X \frac{x}{(1+x)^2}\,dx = \ln(1+X) + \frac{1}{1+X} - 1,$$

dont la limite est $+\infty$ lorsque X tend vers $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2}\,dx$ est donc divergente.

Pour vous entraîner ...

Exercice 5

1. Par reconnaissance de forme, calculer

$$I_{10} = \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx, \quad I_{11} = \int_0^1 \frac{1}{9t^2+1}dt, \quad I_{12} = \int_0^1 (4t+3)^2dt, \quad I_{13}(x) = \int_0^x t^2e^{t^3}dt.$$

2. En utilisant des intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes

$$I_{14}(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}dt, \quad I_{15}(x) = \int_1^x t^2e^tdt.$$

3. En utilisant la décomposition en éléments simples, calculer l'intégrale suivante

$$I_{16} = \int_0^2 \frac{x^2}{(x-3)(x+1)}dx.$$

4. En utilisant un changement de variable, calculer l'intégrale suivante :

$$I_{17} = \int_0^2 \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})dx.$$

Solution de l'exercice 5

1. On a

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \frac{1}{3}\int_0^1 3x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{(1+x^3)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}\left(2^{3/2}-1\right)\\
I_{11} &= \int_0^1 \frac{1}{9t^2+1}dt = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3}{(3t)^2+1}dt = \frac{1}{3}\left[\arctan(3t)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\arctan(3)\\
I_{12} &= \int_0^1 (4t+3)^2dt = \frac{1}{4}\int_0^1 (4t+3)^2 4dt = \frac{1}{4}\left[\frac{(4t+3)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}(7^3-3^3)\frac{79}{3}\\
I_{13}(x) &= \int_0^x t^2e^{t^3}dt = \frac{1}{3}\int_0^x 3t^2e^{t^3}dt = \frac{1}{3}\left[e^{t^3}\right]_0^x = \frac{1}{3}(e^{x^3}-1)
\end{aligned}$$

2. Pour I_14, on considère $x > 0$. En primitivant $\frac{1}{t^2}$ et en dérivant $\ln(t)$, on obtient

$$I_{14}(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}dt = -\int_1^x \frac{-1}{t}\frac{1}{t}dt + \left[\frac{-1}{t}\ln(t)\right]_1^x = \left[\frac{-1}{t}(1+\ln(t))\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}(1+\ln(x))$$

Pour I_{15}, on dérive t^2 et on primitive e^t pour obtenir

$$I_{15}(x) = \int_1^x t^2e^tdt = -\int_1^x 2te^tdt + \left[t^2e^t\right]_1^x.$$

On recommence une IPP pour calculer la deuxième intégrale : en primitivant e^t et en dérivant $2t$, on aboutit à

$$I_{15}(x) = -\left(-\int_1^x 2e^tdt + \left[2te^t\right]_1^x\right) + \left[t^2e^t\right]_1^x = \left[(2-2t+t^2)e^t\right]_1^x = (2-2x+x^2)e^x - e.$$

3. On commence par réaliser la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{x^2}{(x-3)(x+1)}$:

$$\frac{x^2}{(x-3)(x+1)} = 1 + \frac{\frac{9}{4}}{x-3} - \frac{\frac{1}{4}}{x+1}.$$

On a donc

$$I_{16} = \left[x + \frac{9}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1|\right]_0^2 = 2 - \frac{1}{4}\ln(3) - \frac{9}{4}\ln(3) = 2 - \frac{5}{2}\ln(3).$$

4. Pour I_{16}, on commence par un changement de variable en posant $u = \sqrt{x}$. On a alors

$$I_{16} = \int_0^{\sqrt{2}} u\cos(u)2udu = 2\int_0^{\sqrt{2}} u^2\cos(u)du.$$

Puis on enchaîne avec deux intégrations par parties pour aboutir à

$$\begin{aligned} I_{16} &= 2\left(-\int_0^{\sqrt{2}} 2u\sin(u)du + \left[u^2\sin(u)\right]_0^{\sqrt{2}}\right) \\ &= -4\int_0^{\sqrt{2}} u\sin(u)du + 4\sin(\sqrt{2}) \\ &= -4\left(-\int_0^{\sqrt{2}}(-\cos(u))du + [u(-\cos(u))]_0^{\sqrt{2}}\right) + 4\sin(\sqrt{2}) \\ &= 4\left(-\sin(\sqrt{2}) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}) + \sin(\sqrt{2})\right) = 4\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Exercice 6 Calculer les primitives suivantes :

$$r)\ \int \frac{1}{x^2+4}dx, \quad s)\ \int \frac{1}{x\ \ln x}\,dx.$$

Solution de l'exercice 6

Pour $r)$ comme pour $s)$, on procède par reconnaissance de forme :

$$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{4}2\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \text{constante}.$$

et

$$\int \frac{1}{x\ \ln x}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln(x)| + \text{constante}.$$

Au passage, cette dernière intégrale n'est définie que pour les $x > 0$.

Exercice 7 Calculer les intégrales généralisées suivantes :

$$I_{18} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx, \quad I_{19} = \int_0^1 \ln x\,dx.$$

Solution de l'exercice 7

Pour I_{18}, les deux bornes sont à étudier de près. On découpe donc l'intervalle $[0,+\infty[$ en deux morceaux :

$$I_{18} = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$$

Pour la première intégrale, on revient à la définition et on utilise le changement de variable $u = \sqrt{x}$: pour un $a \in]0,1[$,

$$\int_a^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_{\sqrt{a}}^1 e^{-u} 2du = 2\left[-e^{-u}\right]_{\sqrt{a}}^1 = 2\left(e^{-\sqrt{a}} - \frac{1}{e}\right)$$

dont la limite lorsque $a \to 0$ est égale à $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$, donc finie.

En procédant de la même manière pour le second morceau de I_{18}, on a

$$\int_1^X \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\left[-e^{-u}\right]_1^X = 2\left(\frac{1}{e} - e^{-X}\right)$$

dont la limite lorsque $X \to +\infty$ est égale à $\frac{2}{e}$, donc finie.

L'intégrale I_{18} est donc convergente et sa valeur est 2.

Pour I_{19}, on revient à la définition en étudiant la limite lorsque a tend vers 0 de $\int_a^1 \ln x \, dx$. Par intégration par partie, on obtient

$$\int_a^1 \ln x \, dx = -\int_a^1 x \frac{1}{x} dx + [x \ln(x)]_a^1 = -(1-a) - a\ln(a)$$

dont la limite lorsque a tend vers 0 vaut -1. I_{19} est donc convergente et vaut -1.

Exercice 8 Étudier la convergence de l'intégrale généralisée suivante :

$$t) \int_1^\infty \frac{\cos(x^2)}{x^2+1} dx.$$

Solution de l'exercice 8

On procède par comparaison : on a pour tout x

$$0 \leq \left|\frac{\cos(x^2)}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1}.$$

Or $\int_1^X \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(X) - \frac{\pi}{4}$ dont la limite lorsque X tend vers ∞ est $\frac{\pi}{4}$. L'intégrale $\int_1^\infty \frac{\cos(x^2)}{x^2+1} dx$ est donc convergente.