Graphes

Chap 4: Flots et Réseaux de transport

Florence Bannay

L3 - UPSSITECH – Université Paul Sabatier

2020-2021

Intro

Les problèmes de flots et réseaux de transport

- Thème : Organiser de façon optimale sous contraintes, les mouvements d'un bien dans un réseau.
  - structurer le réseau
  - dimensionner le réseau
  - organiser la circulation
- Problème du flot maximal : faire circuler la plus grande quantité entre deux points du réseau sans excéder les capacités des arcs.
- Beaucoup d'applications :
  - réseau réel (routier/maritime/aérien/de communication) : création d'itinéraires de délestage, taxis de la Marne (septembre 1914), traffic maritime/aerien...
  - réseau de contraintes : affectation tâches-machines, pb des provisions, mine à ciel ouvert (open-pit mining), fermeture maximale, pb de la sélection...

I. Cycles, Flux et Flots

Définition (Chemin, Chaîne dans un graphe ORIENTÉ (X, U))

Chemin : suite d'au moins 2 sommets $(s_1, \dots s_p)$ t.q. $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, (s_i, s_{i+1}) est un arc ($\in U$). Un chemin représenté par séquence d'arcs.

Chaîne : suite d'au moins 2 sommets $(s_1, \dots s_p)$ t.q. $\forall i \in [\![1, p-1]\!]$, (s_i, s_{i+1}) ou (s_{i+1}, s_i) est un arc ($\in U$).

- *simple : si arcs tous différents,*
- *élémentaires : si sommets tous différents.*
- *longueur= nombre d'arcs.*

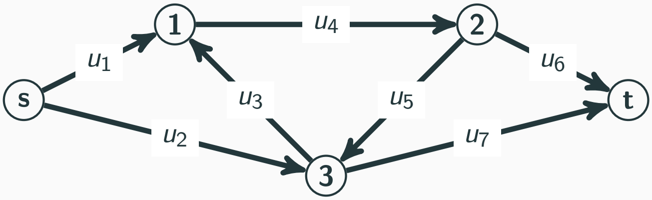
Vecteur cycle

Définition (Vecteur cycle dans G avec m arcs : $u_1, \ldots, u_m$)

- *Cycle μ chaîne* **simple** *dont extrémités coincident.*
- *Vecteur cycle associé à cycle μ : $\vec{\mu} = (\mu^1, \ldots, \mu^m)$ de $\mathbb{Z}^m$ t.q.*

  $$\forall i \in [\![1, m]\!], \mu^i = \begin{cases} 0 & \text{si l'arc } u_i \text{ n'apparaît pas dans le cycle } \mu \\ 1 & \text{si l'arc } u_i \text{ est utilisé dans le sens de } \mu \\ -1 & \text{si l'arc } u_i \text{ est utilisé dans le sens opposé à } \mu \end{cases}$$

Exercice 1



Remplissez le tableau suivant avec un exemple pour chaque chose :

chemin simple et élémentaire :	chemin non simple et non élémentaire :
chemin simple et non élémentaire :	chaîne simple :
chaîne non simple :	cycle élémentaire :
cycle non élémentaire :	vecteur cycle :

Cocycle

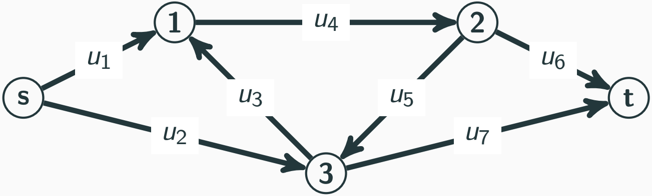
Définition (Cocycle de A dans $G = (X, U)$)

Soit A : ensemble de sommets, on note :

- $\omega^+(A) = \{(x, y) \in U | x \in A, y \notin A\}$ *: arcs sortants de A*
- $\omega^-(A) = \{(x, y) \in U | x \notin A, y \in A\}$ *: arcs entrants en A*
- $\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$

Si $\omega(A)$ est non vide il est appelé cocycle de A.

Exercice 2



Remplissez le tableau suivant :

$\omega^+(\{s,1\})$:	$\omega^-(\{s,1\}$:	$\omega(\{s,1\})$:
$\omega^+(\{s\})$:	$\omega^-(\{s\}$:	$\omega(\{s\})$:
$\omega^+(\{1,3,t\})$:	$\omega^-(\{1,3,t\}$:	$\omega(\{1,3,t\})$:
$\omega^+(\{1,2,3,t\})$:	$\omega^-(\{1,2,3,t\}$:	$\omega(\{1,2,3,t\})$:

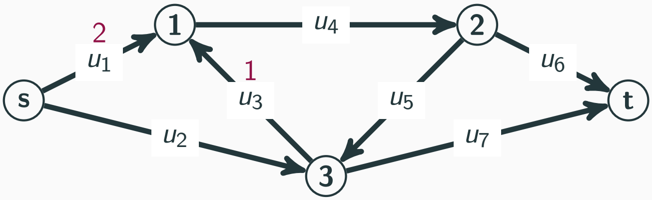
Définition (Flot)

Un flot *sur un graphe est un vecteur* $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ *de* $\mathbb{Z}^m$ *qui vérifie*

$$\forall x \in X, \sum_{u_i \in \omega^-(\{x\})} \varphi(u_i) = \sum_{u_i \in \omega^+(\{x\})} \varphi(u_i) \quad \textit{(loi de Kirchhoff)}$$

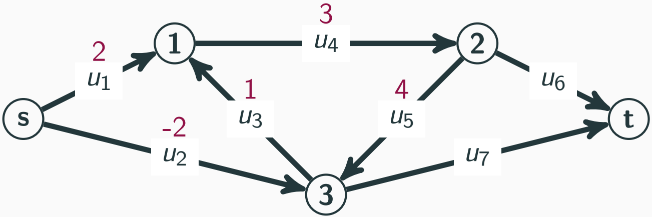
$\varphi^i = \varphi(u_i)$ *est le* flux *dans l'arc* u_i *: quantité qui circule sur* u_i

Kirchhoff : en tout sommet, somme flux entrants = somme flux sortants.



Supposons que le flot φ a un flux de 2 sur u_1 et 1 sur u_3, quel flux doit-il avoir sur u_4 ? et sur u_2 ?

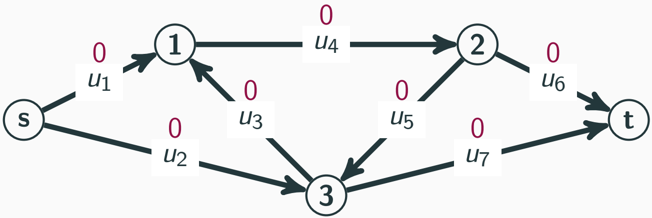
Exercice 4



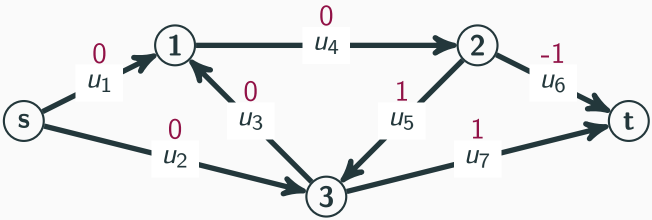
On a maintenant $\varphi(u_1) = 2$, $\varphi(u_2) = -2$, $\varphi(u_3) = 1$, et $\varphi(u_4) = 3$. On pose $\varphi(u_5) = 4$. Quels flux peut-on mettre sur u_6 et u_7 ? Écrivez le flot φ.

Le flot nul

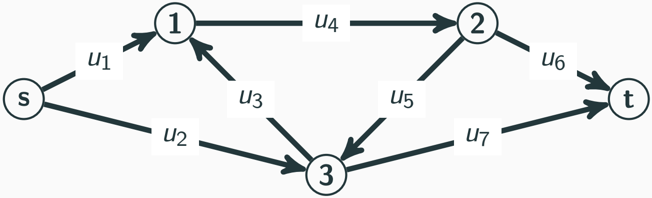
Le flot nul $(0, 0, \ldots, 0)$ est un flot sur tout graphe !



Son vecteur cycle est $\vec{\mu_1} = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 1)$



Le vecteur cycle $\vec{\mu_1} = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 1)$ est un flot.



- Le vecteur $\varphi = (2, -2, 1, 3, 4, -1, 1)$ est un flot sur ce graphe.
- Le vecteur cycle $\vec{\mu_1} = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 1)$ aussi
- Soit $v = 2\varphi - 4\vec{\mu_1}$ (combinaison linéaire)
- Décrivez v, est-ce un flot ?

Propriété

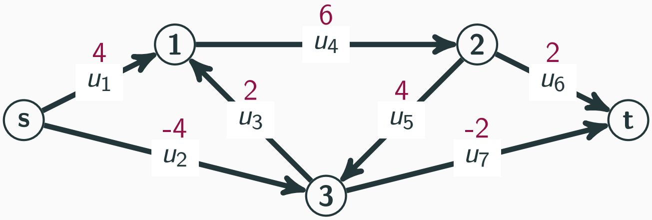
1. *Le vecteur nul de* $\mathbb{Z}^m$ *est un flot sur tout graphe* G *(dit "flot nul")*
2. *Tout vecteur cycle de* G *est un flot sur* G
3. *Toute combinaison linéaire de flots sur* G *définit un flot sur* G

Propriété

φ *est un flot sur* G *ssi*

$$\forall \emptyset \subset A \subset X, \sum_{u \in \omega^-(A)} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi(u) \quad \textit{(loi de Kirchhoff généralisée)}$$

Exercice 6



On considère le vecteur $v = (4, -4, 2, 6, 4, 2, -2)$. Remplissez le tableau :

	$\sum_{u \in \omega^+(A)} v(u)$	$\sum_{u \in \omega^-(A)} v(u)$
$A = \{s, 1\}$		
$A = \{s\}$		
$A = \{1, 3, t\}$		
$A = \{1, 2, 3, t\}$		

II. Flots compatibles dans un Réseau de transport

Définition (réseau de transport)

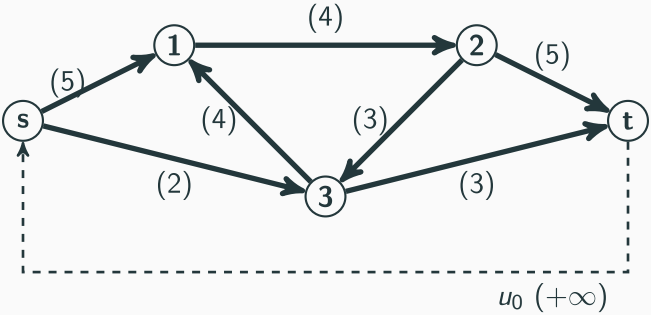
Un réseau de transport est un graphe orienté connexe $R = (X, U = \{u_1, \dots u_m\})$ *avec*

- *un sommet sans prédecesseur appelé entrée noté* s $(\Gamma^-(s) = \emptyset)$
- *un sommet sans successeur appelé sortie noté* t $(\Gamma^+(t) = \emptyset)$
- *une application capa* : $U \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *qui à chaque arc* u *associe sa capacité* $capa(u) \geq 0$.

On ajoute un arc fictif $u_0 = (t, s)$ *avec capa infinie appelé arc de retour.*

Exemple

Soit le réseau suivant avec les capacités indiquées entre parenthèses.



C'est un réseau de transport.

⚠ Capacités viennent du monde réel (ne vérifient pas forcément Kirchhoff)

Flot compatible sur un réseau de transport

Définition (flot compatible sur réseau $R = (X, U = \{u_1, \ldots, u_m\}))$

C'est un vecteur φ de $\mathbb{Z}^{m+1}$ t.q. :

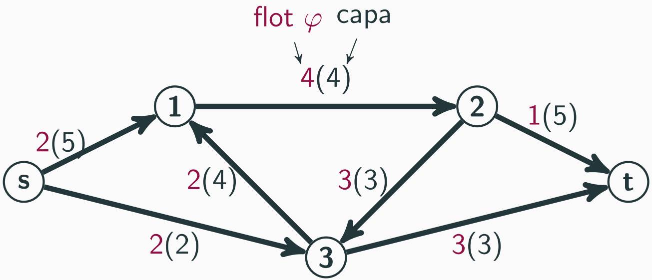
- φ : *flot sur* $R \cup \{u_0\}$: $\forall x \in X, \sum_{u \in \omega^+(\{x\})} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^-(\{x\})} \varphi(u)$ *(Loi de Kirchhoff)*
- φ : *compatible avec capacités* : $\forall u \in U, \quad 0 \leq \varphi(u) \leq capa(u)$

Définition (Valeur du flot)

$$v(\varphi) = \underbrace{\varphi(u_0)}_{\text{flux sur arc de retour}} = \underbrace{\sum_{u \in \omega^+(\{s\})} \varphi(u)}_{\text{somme des flux sortant de } s} = \underbrace{\sum_{u \in \omega^-(\{t\})} \varphi(u)}_{\text{somme des flux arrivant en } t}$$

- Si $\varphi(u) = c(u)$: u est saturé.
- Flot de valeur max : maximise $v(\varphi)$ parmi tous les flots compatibles

Exercice 7



Est-ce un flot compatible, quelle est sa valeur ? Y-a-t'il des arcs saturés ? si oui lesquels ?

III. Théorème de la coupe

Coupe dans réseau de transport (X, U) d'entrée s de sortie t

Définition (Coupe)

Une coupe cp séparant s et t est une partition des sommets en deux :

$$cp = (A, \quad X \setminus A) \text{ tel que } A \subset X, s \in A \text{ et } t \notin A$$

Définition (arcs de la coupe)

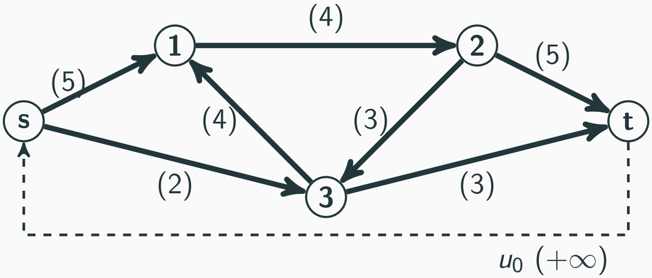
Les arcs de la coupe $cp = (A, X \setminus A)$
sont les arcs de $\omega^+(A)$ *: c'est-à-dire les arcs sortants de* A

Définition (capacité d'une coupe)

La capacité d'une coupe cp est la somme des capacités des arcs de cp

$$capa(cp) = \sum_{u \in \omega^+(A)} capa(u)$$

Exercice 8



Complétez le tableau en créant les coupes $cp = (A, X \setminus A)$ pour chaque A :

	coupe cp	arcs de cp	capacité de cp
$A = \{s, 1\}$			
$A = \{s\}$			
$A = \{1, 3, t\}$			
$A = \{s, 1, 3, t\}$			

Théorème de la coupe (à montrer en travail personnel)

Remarque

Le retrait dans un réseau R de tous les arcs d'une coupe supprime tous les chemins de s à t.

Théorème (de la coupe)

Pour tout flot φ compatible sur R et pour toute coupe cp séparant s et t la valeur du flot est inférieure à la capacité de cette coupe :

$$v(\varphi) \leq capa(cp)$$

Calcul d'un flot Maximum : Principe de Ford-Fulkerson

Principe de marquage Ford-Fulkerson

- principe de marquage relatif à un flot compatible φ
- NB : si on n'a pas de flot compatible on peut choisir le flot nul.

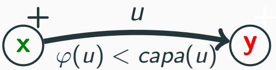
Définition (Marquage de Ford-Fulkerson)

On marque s puis

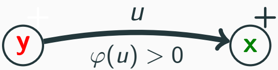
x étant marqué, y marquable depuis x ssi

- *y n'est pas marqué ET*
- $\begin{cases} \exists u = (x, y) \in R \text{ et } \varphi(u) < capa(u) & \textit{marquage direct} \quad \textit{OU} \\ \exists u = (y, x) \in R \text{ et } \varphi(u) > 0 & \textit{marquage indirect} \end{cases}$

marquage direct



marquage indirect



Principe de marquage de Ford-Fulkerson

- principe de marquage relatif à un flot compatible φ
- NB : si on n'a pas de flot compatible on peut choisir le flot nul.

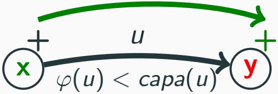
Définition (Marquage Ford-Fulkerson)

On marque s *puis*

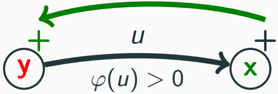
x *étant marqué,* y *marquable depuis* x *ssi*

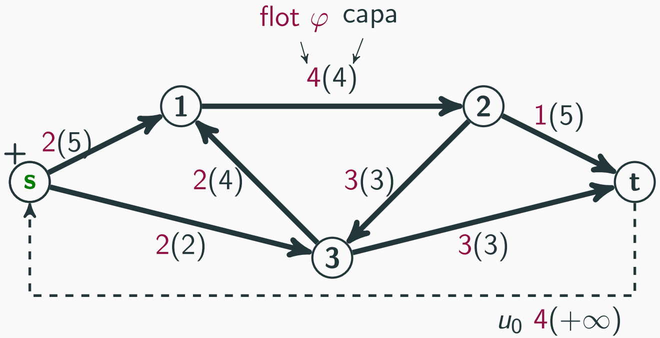
- y *n'est pas marqué ET*
- $\begin{cases} \exists u = (x, y) \in R \text{ et } \varphi(u) < capa(u) & \textit{marquage direct} \quad \textit{OU} \\ \exists u = (y, x) \in R \text{ et } \varphi(u) > 0 & \textit{marquage indirect} \end{cases}$

marquage direct



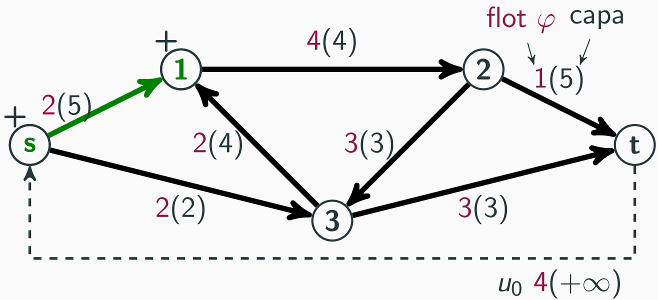
marquage indirect





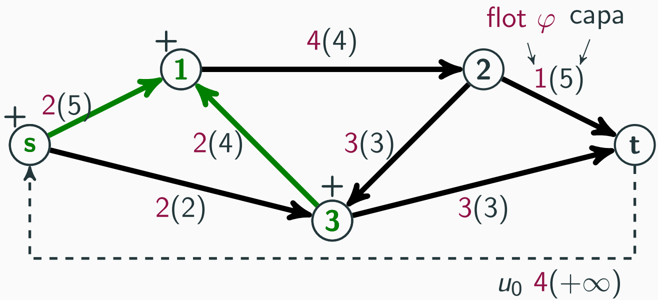
- On marque d'abord s.
- Depuis s, quels sommets peut-on marquer (en une seule étape) ?
- S'agit-il de marquages directs ou indirects ?

Exercice 10



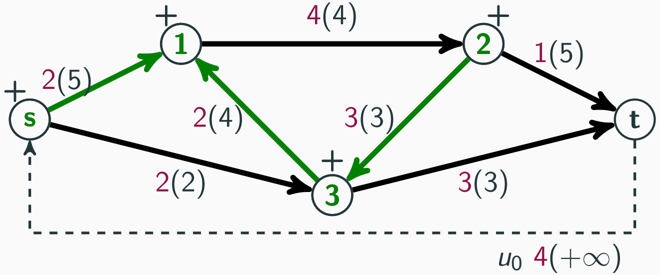
Quels sommets peut-on marquer (en une seule étape) maintenant ?

Exercice 11



Et maintenant (toujours en une seule étape) ?

Exercice 12



Et ensuite (en une seule étape) ?

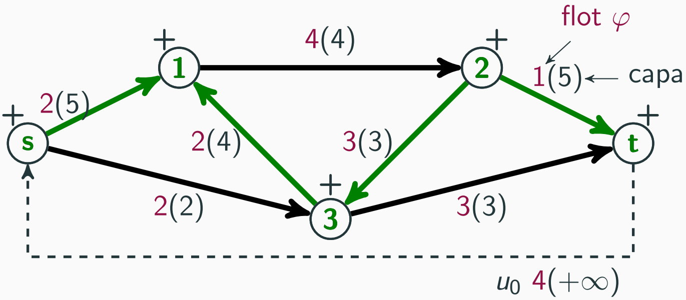
Fin du marquage

Propriété

Si à la fin de la procédure de marquage basée sur le flot φ

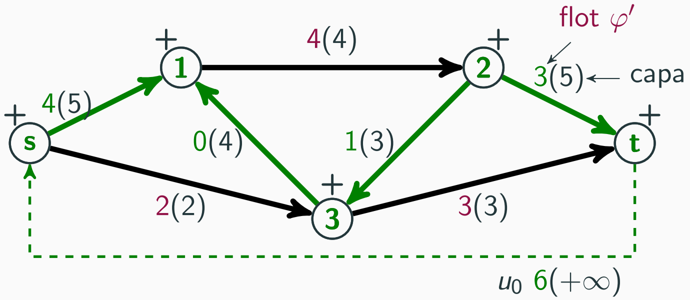
1. *on parvient à marquer* ***t*** *grâce à une chaîne* ***ch***
    - *alors on peut **augmenter** la valeur du flot*
    - *ch est appelée **chaîne augmentante***
    - *soit* $ch^+ =$ *arcs de ch utilisés pour marquage direct,*
    - *soit* $ch^- =$ *arcs de ch utilisés pour marquage indirect,*
    - $k = \min(\min_{u \in ch^+} capa(u) - \varphi(u), \min_{u \in ch^-(u)} \varphi(u))$
    - $\varphi' = \varphi + k\vec{\mu}$ *où* $\mu =$ *cycle* $(ch + u_0)$
        - *augmentation de k sur* ch^+ *et* u_0
        - *diminution de k sur arcs de* ch^-
2. *on ne parvient pas à marquer t alors **flot maximum***

Exercice 13



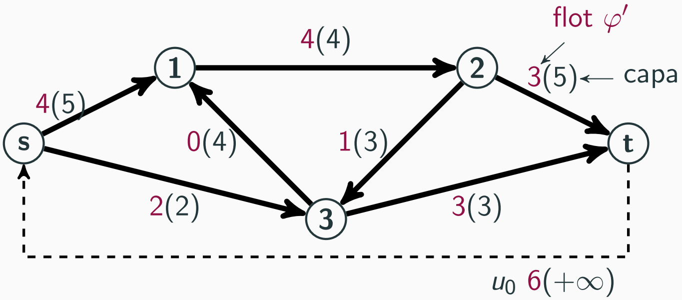
- Donnez la chaîne augmentante *ch* correspondant au marquage :
- Quels sont les arcs de ch^+ ?
- Quels sont les arcs de ch^- ?
- Combien vaut k ?

Exercice 14

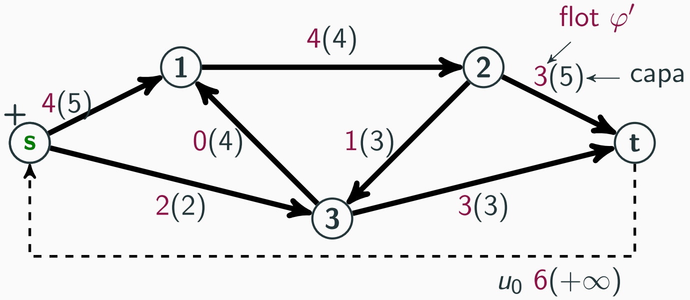


- $\varphi' = \varphi + 2.(s132ts)$, valeur : $v(\varphi') = 6$
- Pourquoi φ' est-il un flot ? pourquoi est-il compatible ?

Exercice 15



- Comment savoir si le flot φ' est maximum ?



- On marque s.
- Quels sommets peut-on marquer depuis s en faisant un marquage complet exhaustif ?

Théorème du flot maximum (Ford Fulkerson 1957)

Théorème

Soit F l'ensemble des flots compatibles et K l'ensemble des coupes dans un réseau de transport,

$$\max_{\varphi \in F} v(\varphi) = \min_{cp \in K} capa(cp)$$

La valeur maximum du flot est égale à la capacité minimum d'une coupe.

Complexité : polynomiale

- Dinic en 1970, puis Edmond et Karp en 1972 ont montré que
  - si recherche des chemins de s à t en largeur d'abord (plus courts chemins en nombre d'arcs).
  - alors Ford Fulkerson polynomial en $O(n.m^2)$
- Complexité réduite par Dinic et Karzamov en 1974 $O(n^3)$.
- Complexité encore réduite par Orlin en 2013 $O(nm)$:
  - structures de données plus performantes (arbres dynamiques)
  - "compactification" de graphes.

Autres notions à propos des flots

- Graphes d'écart (hors programme 2020-2021)
- Flots sur des réseaux avec capacités et coûts de transport. (hors programme 2020-2021)