TD1-Définitions, statique et efforts de liaison

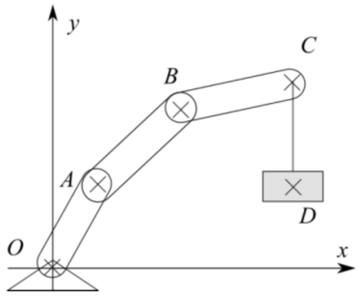
1 Exercice 1 : Moments & Vecteurs

On s'intéresse à un bras robotisé destiné à soulever une charge de masse m. Le bras est constitué de trois morceaux de longueur :

$$OA = l_1$$
$$AB = l_2$$
$$BC = l_3$$
$$CD = d$$

Les morceaux du bras ne sont pas forcément alignés avec les axes (Ox) ou (Oy), ainsi on notera les angles suivants :

$$\alpha_1 = \widehat{\overrightarrow{OA}.\vec{x}}$$
$$\alpha_2 = \widehat{\overrightarrow{AB}.\vec{x}}$$
$$\alpha_3 = \widehat{\overrightarrow{BC}.\vec{x}}$$



1. Déterminez le moment du poids de la charge sur le point D

$$\overrightarrow{M_{D,\vec{P}}} = \overrightarrow{DD} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix} \overset{donc}{\Longrightarrow} \boxed{\overrightarrow{M_{D,\vec{P}}} = \vec{0}}$$

2. Déterminez le moment du poids de la charge sur le point C

$$\overrightarrow{M_{C,\vec{P}}} = \overrightarrow{CD} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix}0\\d\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix} \overset{donc}{\Longrightarrow} \boxed{\overrightarrow{M_{C,\vec{P}}} = \vec{0}}$$

3. Déterminez le moment du poids de la charge sur le point B

$$\overrightarrow{M_{B,\vec{P}}} = \overrightarrow{BD} \wedge \vec{P} = \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \wedge \vec{P} = \left(\begin{pmatrix}l_3\cos\alpha_3\\l_3\sin\alpha_3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\d\\0\end{pmatrix}\right) \wedge \begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}l_3\cos\alpha_3\\l_3\sin\alpha_3 + d\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-mgl_3\cos\alpha_3\end{pmatrix}$$
$$\overset{donc}{\Longrightarrow} \boxed{\overrightarrow{M_{B,\vec{P}}} = -mgl_3\cos\alpha_3\,.\vec{z}}$$

4. Déterminez le moment du poids de la charge sur le point A

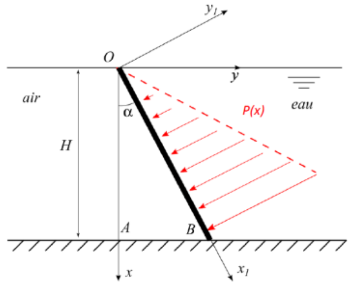
$$\overrightarrow{M_{A,\vec{P}}} = \overrightarrow{AD} \wedge \vec{P} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \wedge \vec{P} = \left(\begin{pmatrix}l_2\cos\alpha_2\\l_2\sin\alpha_2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}l_3\cos\alpha_3\\l_3\sin\alpha_3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\d\\0\end{pmatrix}\right) \wedge \begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}l_2\cos\alpha_2 + l_3\cos\alpha_3\\l_2\sin\alpha_2 + l_3\sin\alpha_3 + d\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-mg(l_2\cos\alpha_2 + l_3\cos\alpha_3)\end{pmatrix}$$
$$\overset{donc}{\Longrightarrow} \boxed{\overrightarrow{M_{A,\vec{P}}} = -mg(l_2\cos\alpha_2 + l_3\cos\alpha_3).\vec{z}}$$

5. Déterminez le moment du poids de la charge sur le point O

$$\overrightarrow{M_{O,\vec{P}}} = \overrightarrow{OD} \wedge \vec{P} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \wedge \vec{P} = \left(\begin{pmatrix}l_1\cos\alpha_1\\l_1\sin\alpha_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}l_2\cos\alpha_2\\l_2\sin\alpha_2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}l_3\cos\alpha_3\\l_3\sin\alpha_3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\d\\0\end{pmatrix}\right) \wedge \begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}l_1\cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_2 + l_3\cos\alpha_3\\l_1\cos\alpha_1 + l_2\sin\alpha_2 + l_3\sin\alpha_3 + d\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-mg(l_1\cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_2 + l_3\cos\alpha_3)\end{pmatrix}$$
$$\overset{donc}{\Longrightarrow} \boxed{\overrightarrow{M_{O,\vec{P}}} = -mg(l_1\cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_2 + l_3\cos\alpha_3).\vec{z}}$$

2 Exercice 2 : Résultante & Moments

On s'intéresse à un canal en béton. La paroi latérale du canal est inclinée d'un angle α avec la gravité (portée par l'axe $\vec{x}$. On notera b la longueur de la paroi selon l'axe $\vec{z}$.
On définit le repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$ lié à la gravité et le repère $(O, \vec{x_1}, \vec{y_1})$ lié la paroi du canal.
Sur cette paroi seule l'eau exerce un effort qui résulte de l'effet de la pression de l'eau.
La pression de l'eau est donnée par $\boxed{P(x) = \rho_e g x}$. Où ρ_e est la masse volumique de l'eau, g l'intensité de la gravité et x la coordonnée verticale. On voit que la pression, et donc que la force exercée par la pression, varie selon la profondeur de l'eau (voir le schéma ci-dessus). On parle alors d'effort réparti. L'élément de force exercée par l'eau est donné par la relation $d\vec{f} = -P(x)dS.\vec{y_1}$



La force de pression est « normale », c'est à dire perpendiculaire, à la paroi. Ici c'est le vecteur $\vec{y_1}$.

1. **Déterminez la résultante des efforts de pression**

$$\vec{F} = \int_S d\vec{f} = \int_S -P(x)dS.\vec{y_1} = \int_S -\rho_e g x dS.\vec{y_1}$$

On sait que $dS = b dx_1$. Il va falloir exprimer x_1 par rapport à x soit $x = x_1 \cos\alpha$ donc $x_1 = \frac{x}{\cos\alpha}$ et $dx_1 = \frac{dx}{\cos\alpha}$

$$\vec{F} = -\rho_e g \int_S x b dx_1.\vec{y_1} = \frac{-\rho_e g b}{\cos\alpha}\int_0^H x dx = \frac{-\rho_e g b}{\cos\alpha}\frac{H^2}{2}.\vec{y_1} = -\rho_e g S \frac{H}{2}.\vec{y_1}$$

$$S = b \times L = b\frac{H}{\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{H}{L} \Leftrightarrow L = H\cos\alpha$$

2. **Calculez le point d'application de la résultante des forces de pressions**

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{M_O(\vec{F})} &= \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} \\ \overrightarrow{M_O(d\vec{f})} &= \int_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{f}\end{aligned}\right\} On\ veut\ que\ \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{f}$$

On cherche les grandeurs

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_{1p} \\ y_{1p} \\ z_{1p} \end{pmatrix} \xRightarrow[z_{1p}=0]{y_{1p}=0} \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_{1p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(O,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})} \quad \left| \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_e g S\frac{H}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \right| \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \left| \quad d\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_e g x S \\ 0 \end{pmatrix}\right.$$

On détermine $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}$ et $\int_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{f}$ indépendamment et on vérifie que $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{f}$

$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} x_{1p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_e g S\frac{H}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_{1p}\rho_e g S\frac{H}{2} \end{pmatrix} = -x_{1p}\rho_e g S\frac{H}{2}.\vec{z} \xRightarrow{S=b\frac{H}{\cos\alpha}} \boxed{\frac{-x_{1p}\rho_e g b H^2}{2\cos\alpha}.\vec{z}}$$

$$\int_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{f} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_e g x S \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_{1p}\rho_e g x S \end{pmatrix} = \int_S -x_{1p}\rho_e g x dS.\vec{z} = \int_0^L -x_{1p}\rho_e g x d b x_1.\vec{z} \xRightarrow{L=\frac{H}{\cos\alpha}} -\rho_e g b\int_0^H \frac{x}{\cos\alpha} x \frac{dx}{\cos\alpha}.\vec{z}$$

$$= -\rho_e g b\frac{1}{\cos^2\alpha}\int_0^H x^2 dx.\vec{z} = -\rho_e g b\frac{1}{\cos\alpha}\frac{1}{3}[x^3]_0^H.\vec{z} = \boxed{-\rho_e g b\frac{1}{\cos\alpha}\frac{H^3}{3}.\vec{z}}$$

On voulait $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{f}$ selon $\vec{z}$

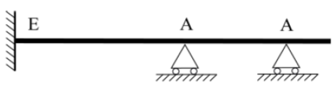
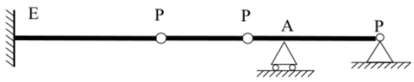
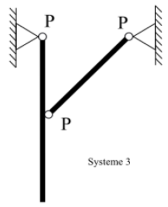
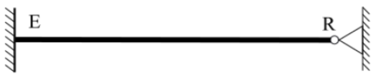
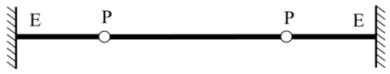
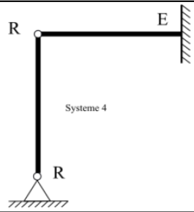
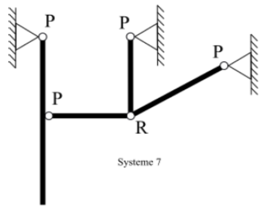
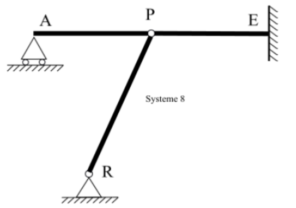
$$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{f}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{-x_{1p}\rho_e g b H^2}{2\cos\alpha}} = \boxed{\frac{-\rho_e g b H^3}{3\cos\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_{1p} = \frac{2}{3}\frac{H}{\cos\alpha}}$$

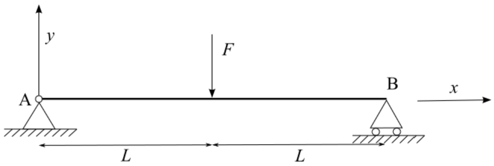
3 Exercice 3 : Nature des systèmes

Déterminez la nature des systèmes ci-dessous. On rappelle que $\boxed{H = n_i - n_e}$

		
$n_i = 1_{enc} + 2_{app}$ $= (3) + (2 \times 1) = 5$ $n_e = 1_{barre} = 3$ $H = 5 - 3 = 2 > 0 \rightarrow \boxed{hyperstatique}$	$n_i = 1_{enc} + 3_{art} + 1_{app}$ $= (3) + (3 \times 2) + (1) = 10$ $n_e = 3_{barres} = 3 \times 3 = 9$ $H = 10 - 9 = 1 > 0 \rightarrow \boxed{hyperstatique}$	$n_i = 3_{art}$ $= (3 \times 2) = 6$ $n_e = 2_{barres} = 3 \times 2 = 6$ $H = 6 - 6 = 0 \rightarrow \boxed{isostatique}$
		
$n_i = 1_{enc} + 1_{art} = (3) + (2) = 5$ $n_e = 1_{barre} = 3$ $H = 5 - 3 = 2 > 0 \rightarrow \boxed{hyperstatique}$	$n_i = 2_{enc} + 2_{art}$ $= (2 \times 3) + (2 \times 2) = 10$ $n_e = 3_{barres} = 3 \times 3 = 9$ $H = 10 - 9 = 1 > 0 \rightarrow \boxed{hyperstatique}$	$n_i = 1_{enc} + 2_{art}$ $= (3) + (2 \times 2) = 7$ $n_e = 2_{barres} = 2 \times 3 = 6$ $H = 7 - 6 = 1 > 0$ $\rightarrow \boxed{hyperstatique}$
		
$n_i = 5_{art} = 5 \times 2 = 10$ $n_e = 4_{barres} = 4 \times 3 = 12$ $H = 10 - 12 = -2 < 0 \rightarrow \boxed{Hypostatique}$	$n_i = 1_{enc} + 2_{art} + 1_{app}$ $= (3) + (2 \times 2) + (1) = 8$ $n_e = 2_{barres} = 2 \times 3 = 6$ $H = 8 - 6 = 0 \rightarrow \boxed{hyperstatique}$	

4 Exercice 4 : Efforts de liaisons – Effort ponctuel

On étudie une poutre liée au bâti en A par un pivot et reposant sur un appui simple au point B. La longueur de la poutre est $2L$ et au milieu de la poutre nous appliquons une force d'intensité F.



1. **Déterminez la nature du système.**

$$n_i = 1_{art} + 1_{piv} = (2) + (1) = 3$$
$$n_e = 1_{barre} = 3$$
$$H = n_i - n_e = 3 - 3 = 0 \rightarrow \boxed{Isostatique} \rightarrow Système\ soluble$$

2. **Calculez les efforts de liaisons (réactions du bâti sur la poutre).**

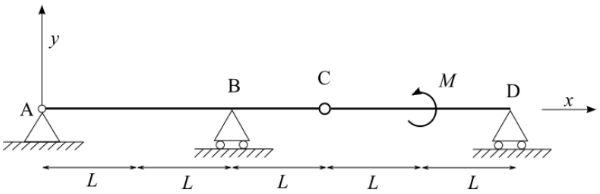
Soit $1_{art}\begin{cases} x_A \\ y_A \end{cases}$ et $1_{piv}\{y_B$

On applique le PFS

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow x_A.\vec{x} + y_A.\vec{y} + y_B.\vec{y} - F.\vec{y} = \vec{0}$$
$$\xRightarrow{\text{Projection sur } \vec{x}} \boxed{x_A = 0}$$
$$\xRightarrow{\text{Projection sur } \vec{y}} y_A + y_B - F = 0$$
$$\sum \vec{M} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{M_{A,\overrightarrow{y_B}}} + \overrightarrow{M_{A,\vec{F}}} = \vec{0}$$
$$\xRightarrow{bras\ de\ levier} 2Ly_B - LF = 0 \xRightarrow{donc} \boxed{y_B = \frac{F}{2}} \xRightarrow{y_A + y_B - F = 0} \boxed{y_A = \frac{F}{2}}$$

5 Exercice 5 : Efforts de liaisons – Moment ponctuel

On étude le système ci-dessous pour lequel un moment ponctuel est appliqué.



1. **Déterminez la nature du système.**

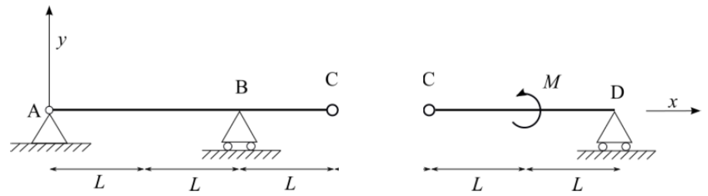
$$n_i = 2_{art} + 2_{piv} = (2 \times 2) + (2 \times 1) = 6$$
$$n_e = 2_{barre} = 3 \times 3$$
$$H = n_i - n_e = 3 - 3 = 0 \rightarrow \boxed{Isostatique} \rightarrow Système\ soluble$$

2. **Calculez les efforts de liaisons.**

Soit les inconnues suivantes : | $1_{art}\begin{cases} x_A \\ y_A \end{cases}$ | $1_{piv}\{y_B$ | $1_{art}\begin{cases} x_C \\ y_C \end{cases}$ | $1_{piv}\{y_D$

On applique le PFS : $\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow (x_A + x_C).\vec{x} + (y_A + y_B + y_C + y_D).\vec{y} = \vec{0}$

On doit isoler les deux barres :



$$\xRightarrow{\sum \vec{F}=\vec{0}} (x_A + x_{C1}).\vec{x} + (y_A + y_B + y_{C1}).\vec{y} = \vec{0}$$

$$\xRightarrow{\sum \vec{M_A}=\vec{0}} \overrightarrow{M_{A,\vec{y_A}}} + \overrightarrow{M_{A,\vec{y_B}}} + \overrightarrow{M_{A,\vec{y_{C1}}}} = \vec{0}$$

$$\xRightarrow{\overrightarrow{M_{A,\vec{y_A}}}=\vec{0}} 2Ly_B + 3Ly_{C1} = 0$$

$$\xRightarrow{\sum \vec{F}=\vec{0}} (x_{C2}).\vec{x} + (y_{C2} + y_D).\vec{y} = \vec{0} \xRightarrow{donc} \boxed{x_{C2} = 0}$$

$$\xRightarrow{\sum \vec{M_C}=\vec{0}} \overrightarrow{M_{C,\vec{y_{C2}}}} + \overrightarrow{M_{C,\vec{y_D}}} + M = \vec{0}$$

$$\xRightarrow{\overrightarrow{M_{C,\vec{y_{C2}}}}=\vec{0}} 2Ly_D + M = 0 \xRightarrow{donc} \boxed{y_D = -\frac{M}{2L}}$$

$$\xRightarrow{y_{C2}+y_D=0} y_{C2} = -y_D \xRightarrow{donc} \boxed{y_{C2} = \frac{M}{2L}}$$

Via le principe d'action réaction on sait que : $x_{C1} = -x_{C2}$ et $y_{C1} = -y_{C2}$ ainsi :

$$x_{C2} = -x_{C1} \xRightarrow{donc} \boxed{x_{C1} = 0}$$

$$y_{C2} = -y_{C1} \xRightarrow{donc} \boxed{y_{C1} = -\frac{M}{2L}}$$

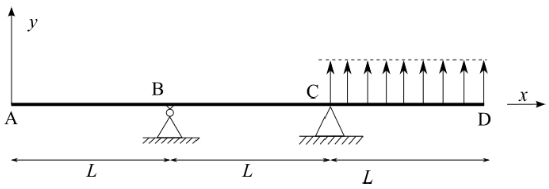
Puis on finit de calculer les dernières inconnues :

$$\xRightarrow{x_A + x_{C1} = 0} \boxed{x_A = 0}$$

$$\xRightarrow{2Ly_B + 3Ly_{C1} = 0} y_B = -\frac{3Ly_{C1}}{2L} = -\frac{3L\left(-\frac{M}{2L}\right)}{2L} = \frac{\frac{3M}{2}}{2L} \xRightarrow{donc} \boxed{y_B = \frac{3M}{4L}}$$

6 Exercice 6 : Efforts de liaisons – Efforts répartis

Calculez les efforts de liaisons pour les deux systèmes isostatiques ci-dessous. On notera ρ la densité de force par unité de longueur telle que $\rho = F/L$.



Système 1 : Comme l'effort réparti est uniforme alors on peut considérer que la résultante $\vec{F}$ se situe à $\frac{L}{2}$ de C (et à $\frac{L}{2}$ de D)

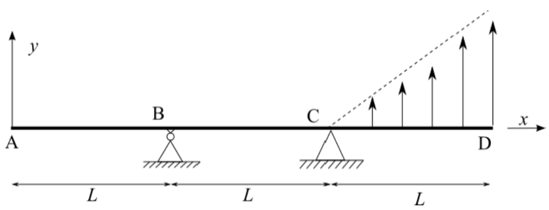
On applique le PFS sur la barre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow (x_B).\vec{x} + (y_B + y_C + F).\vec{y} = \vec{0} \xRightarrow{soit} (x_B).\vec{x} + (y_B + y_C + \rho L).\vec{y} \xRightarrow{donc} \boxed{x_B = 0}$$

$$\sum \overrightarrow{M_C}.\vec{z} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{M_{C,\vec{y_B}}} + \overrightarrow{M_{C,\vec{y_C}}} + \overrightarrow{M_{B,\vec{F}}} = \vec{0}$$

$$\xRightarrow{\overrightarrow{M_{C,\vec{y_C}}}=\vec{0}} - Ly_B + \frac{L}{2}\rho L = 0 \xRightarrow{donc} \boxed{y_B = \frac{\rho L}{2} = \frac{F}{2}}$$

$$\xRightarrow{y_B + y_C + F = 0} y_C = -\frac{F}{2} - F \xRightarrow{donc} \boxed{y_C = -\frac{3F}{2}}$$



Système 2 : Comme l'effort réparti varie de manière constante alors on peut considérer que la résultante $\vec{F}$ se situe à $\frac{2L}{3}$ de C et à $\frac{L}{3}$ de D

On applique le PFS sur la barre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \rightarrow (x_B).\vec{x} + (y_B + y_C + F).\vec{y} = \vec{0} \xRightarrow{soit} (x_B).\vec{x} + (y_B + y_C + \rho L).\vec{y} \xRightarrow{donc} \boxed{x_B = 0}$$

$$\sum \overrightarrow{M_C}.\vec{z} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{M_{C,\vec{y_B}}} + \overrightarrow{M_{C,\vec{y_C}}} + \overrightarrow{M_{B,\vec{F}}} = \vec{0}$$

$$\xRightarrow{\overrightarrow{M_{C,\vec{y_C}}}=\vec{0}} - Ly_B + \frac{2L}{3}\rho L = 0 \xRightarrow{donc} \boxed{y_B = \frac{2\rho L}{3} = \frac{2F}{3}}$$

$$\xRightarrow{y_B + y_C + F = 0} y_C = -\frac{2F}{3} - F \xRightarrow{donc} \boxed{y_C = -\frac{5F}{3}}$$