Partie 1 – Nombres Complexes

Exercice 1

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{2-i}, \quad z_2 = \frac{1}{i}, \quad z_3 = z_1\, z_2, \quad z_4 = \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

$$z_6 = 1+i, \quad z_7 = \sqrt{3}+i, \quad z_8 = \frac{z_6}{z_7}.$$

Solution de l'exercice 1

1. $z_1 = \dfrac{1}{2-i} = \dfrac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{2+i}{5} = \dfrac{2}{5} + i\dfrac{1}{5}.$
   En procédant de manière analogue, on obtient

$$z_2 = -i, \qquad z_3 = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}, \qquad z_4 = -\frac{1}{5} + i\frac{2}{5}.$$

2. Pour chercher la forme exponentielle d'un complexe, on commence par calculer son module : $|z_6| = \sqrt{2}$. Ensuite on factorise ce complexe par son module : $z_6 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Il reste à identifier un angle θ dont le cosinus vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et le sinus vaut $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ici, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ convient. On a donc $z_6 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
   En procédant de manière analogue, on obtient $z_7 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
   Pour l'expression de z_8, il suffit d'utiliser les expressions trouver ci-dessus :

$$z_8 = \frac{z_6}{z_7} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Exercice 2

Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ des équations suivantes :

1. *a*) $Z^2 + Z + 1 = 0$, *b*) $z^4 + z^2 + 1 = 0$;
2. *a*) $z^4 = -2i$, *b*) $z^3 = -1$, *c*) $z^n = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
3. $z^3 - 2z + 1 = 0$.

Solution de l'exercice 2

1. *a*) En utilisant les techniques habituelles de recherche des racines d'un polynôme de degré 2, on obtient les deux solutions suivantes de $Z^2 + Z + 1 = 0$:

$$Z_1 = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i2\pi/3} \text{ et } Z_2 = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i2\pi/3}.$$

   b) Pour résoudre $z^4 + z^2 + 1 = 0$, on pose $Z = z^2$. En utilisant les solutions trouvées précédemment, on doit résoudre $z^2 = Z_1$ et $z^2 = Z_2$. On aboutit aux quatre solutions suivantes :

$$z_1 = e^{i\pi/3}, z_2 = -e^{i\pi/3} \text{ et } z_3 = e^{-i\pi/3}, z_4 = -e^{-i\pi/3}.$$

2. *a*) On commence par écrire $-2i$ sous forme exponentielle : $-2i = 2e^{i3\pi/2}$. Ensuite, on cherche z sous forme exponentielle également : $z = \rho e^{i\theta}$. L'équation $z^4 = -2i$ s'écrit alors

$$\rho^4 e^{i4\theta} = 2e^{i3\pi/2},$$

qui conduit à l'équation en module $\rho^4 = 2$ et l'équation en argument $4\theta = \dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$. La seule solution positive de l'equation en module est $\rho = \sqrt{\sqrt{2}}$ et l'équation en argument s'écrit encore $\theta = \dfrac{3\pi}{8}\ \left[\dfrac{2\pi}{4}\right]$. Les 4 solutions de l'équation

$$z^4 = -2i$$

sont donc :

$$\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{8}}, \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{7\pi}{8}}, \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{11\pi}{8}}, \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\frac{15\pi}{8}}.$$

b) En procédent comme ci-dessus, comme $-1 = e^{i\pi}$, les solutions de $z^3 = -1$ sont

$$z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}.$$

c) De même, comme $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\pi/4}$, les solutions de $z^n = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sont

$$z_k = e^{i\frac{(1+8k)\pi}{4n}}, k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}.$$

3. On doit commencer par chercher une solution évidente r (traditionnellement on cherche parmi 0, 1, 2, -1, -2) de $z^3 - 2z + 1 = 0$, puis on factorise par le polynôme $z - r$. Ici, on a $z^3 - 2z + 1 = (z-1)(z^2 + z - 1)$. Il ne reste plus qu'à chercher les racines du polynôme de degré 2 : $z^2 + z - 1$. Finalement, les solutions de $z^3 - 2z + 1 = 0$ sont

$$z_1 = 1, z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } z_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Partie 2 – Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 3 Effectuer la division de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

1. $A(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + 1, \quad B(x) = x^2 + 3x + 1;$
2. $A(x) = 6x^5 - 7x^4 + 1, \quad B(x) = x^2 - 2x + 1.$

Solution de l'exercice 3

1. $A(x) = B(x)(x^2 - 4x + 14) + (-38x - 13);$
2. $A(x) = B(x)(6x^3 + 5x^2 + 4x + 3) + (2x - 2);$

Exercice 4 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(x) = \frac{6}{x(x-1)(x+2)}, \qquad F_3(x) = \frac{x^3+1}{x(x^2+1)}, \qquad F_5(x) = \frac{x^4+1}{x^2+x+1},$$
$$F_2(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}, \qquad F_4(x) = \frac{3}{x^3-1},$$

Solution de l'exercice 4

$$F_1(x) = \frac{-3}{x} + \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)},$$

$$F_2(x) = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{-2}{x+1},$$

$$F_3(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{-x-1}{(x^2+1)},$$

$$F_4(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{-x-2}{x^2+x+1},$$

$$F_5(x) = x^2 - x + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Pour vous entrainer ...

Exercice 5 Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

$$z_9 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_{10} = i.$$

Solution de l'exercice 5

$z_9 = e^{i\pi/2}$ et $z_{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/12}$.

Exercice 6 Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ des équations suivantes :

1. $z^4 = -1, \quad z^3 = -27i$;
2. $z^2 - z + 1 = 0$.

Solution de l'exercice 6

1. Les solutions de $z^4 = -1$ sont
$$e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{4}}, \quad e^{i\frac{7\pi}{4}},$$
et celles de $z^3 = -27i$ sont
$$3e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad 3e^{i\frac{7\pi}{6}}, \quad 3e^{i\frac{11\pi}{6}}.$$
2. Les deux solutions de $z^2 - z + 1 = 0$ sont $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 7 Effectuer la division de $A(x) = x^5 + 2x^3 - 3x - 2$ par $B(x) = x^3 + x + 1$.

Solution de l'exercice 7

$A(x) = B(x)(x^2+1) + (-x^2 - 4x - 3)$.

Exercice 8 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F_6(x) = \frac{1}{(x-2)(x^2+1)}, \quad F_7(x) = \frac{2x-1}{x^4-1}, \quad F_8(x) = \frac{2x^5 + 5x^4 + 33x^3 + 54x^2 + 162x + 81}{x^2(x^2+9)^2}.$$

Solution de l'exercice 8

Tous calculs faits, on obtient

$$\begin{aligned}
F_6(x) &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1}\right), \\
F_7(x) &= \frac{1}{3(x-1)} + \frac{3}{4(x+1)} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x^2+1}\right), \\
F_8(x) &= \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{3x}{(x^2+9)^2} + 4\frac{4}{x^2+9}.
\end{aligned}$$