TD3-Dynamique

1 Exercice 1

1. Déterminer les équations horaires du centre d'inertie du sauteur

Données :

$$V_D = \frac{27m}{s}$$
$$\alpha_D = 60° = \frac{\pi}{3}$$
$$y_D = 50m$$
$$x_D = 0$$

On applique le PFD

$$PFD \to \sum_i \vec{F_i} = m\vec{a}$$
$$\vec{P} = m\vec{a} \to -mg\overrightarrow{e_y} = m\vec{a} \to \vec{a} = -g\overrightarrow{e_y}$$
$$\vec{V} = \int \vec{a}dt = -gt\overrightarrow{e_y} + V_{Dx}\overrightarrow{e_x} + V_{Dy}\overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{OM} = \int \vec{V}dt = -\frac{1}{2}gt^2\overrightarrow{e_y} + V_{Dx}t\overrightarrow{e_x} + V_{Dy}t\overrightarrow{e_y} + x_D\overrightarrow{e_x} + y_D\overrightarrow{e_y}$$
$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = V_{Dx}t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{Dy}t + 50 \end{cases}$$
$$\cos\alpha_D = \frac{V_{Dx}}{V_D} \to V_{Dx} = V_D\cos\alpha_D = \frac{27}{2}$$
$$\sin\alpha_D = \frac{V_{Dy}}{V_D} \to V_{Dy} = V_D\sin\alpha_D = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$
$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x(t) = V_D\cos\alpha_D\, t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_D\sin\alpha_D\, t + y_D \end{cases}$$
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}; \vec{a}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} avec\ a_x = 0\ et\ a_y = -g$$

On sait que

$$V_x = \int a_x dt = cte_1 = V_D\cos\alpha_D$$
$$V_y = \int a_y dt = cte_2 = -gt + cte_2$$

On sait que à $t = 0$ on a

$$\overrightarrow{V_D}\begin{pmatrix} V_D\cos\alpha_D \\ V_D\sin\alpha_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cte_1 \\ cte_2 \end{pmatrix}$$

2. En déduire la trajectoire du sauteur

On rappelle que la trajectoire correspond à l'ensemble des points parcourus par M. On se doit alors d'exprimer $y(x)$

$$x = V_D\cos\alpha_D\, t \to t = \frac{x}{V_D\cos\alpha_D}$$
$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V_D\cos\alpha_D}\right)^2 + V_D\sin\alpha_D\left(\frac{x}{V_D\cos\alpha_D}\right) + y_D$$
$$y(x) = -\frac{g}{2V_D^2\cos^2\alpha_D}x^2 + \tan\alpha_D + y_D$$

3. Est-ce que le skieur passe les sapins situés $x_S = 20m$ et $y_S = 40m$?

On prend $x = 20m$ dans $y(x)$ et on prend $g = 10m.s^{-2}$

$$y(20) = -\frac{10}{2\times 27^2\times\cos^2 60}\times 20^2 + \tan 60 + 50 = 73m\ (a\ la\ calculatrice)$$

Finalement comme $73 > y_S = 40$ le skieur passera au-dessus des sapins.

4. Donner l'expression de la distance parcourue par le sauteur ?

Il faut calculer la distance parcourue.

Pour $y(x) = 0$ soit :

$$-\frac{1}{2}\frac{g}{V_D^2\cos^2\alpha_D}x^2 + \tan\alpha_D\, x + y_D = 0$$
$$\Delta = \tan^2 60 - 4\left(-\frac{1}{2}\frac{10}{27^2\cos^2 60}\right)50 = \cdots$$
$$(a\ finir)$$

Finalement $x \approx 84m$

2 Exercice 2 : Pendule simple

1. Donner l'expression des forces qui s'exercent sur le pendule.

Soit deux forces

- $\vec{P} = m\vec{g}$ le poids de la masse m
- $\vec{T} = -T\overrightarrow{e_r}$ la tension du fil exercé par la masse m

2. Calculer la vitesse et l'accélération du point M dans le repère $R(\vec{x},\vec{y})$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$.

Par définition on rappelle que :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} + \Omega_{R',R}\wedge\vec{A}}$$

Dans notre cas $\vec{A} = \overrightarrow{e_r}$ alors :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_{R'} + \Omega_{R',R}\wedge\overrightarrow{e_r} \xRightarrow{\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_{R'}=0} \left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_R = \boxed{\Omega_{R',R}\wedge\overrightarrow{e_r} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_z}\wedge\overrightarrow{e_r} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}}$$

Finalement $\overrightarrow{V_{M,R}} = l\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

Ainsi pour l'accélération on a :

$$\overrightarrow{a_{M,R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{M,R}}}{dt}\right)_R = -l\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\theta} + l\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$$

Car par définition : $\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\right)_R = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}}$

En appliquant le PFD on a :

$$PFD \to \sum_i \vec{F_i} = \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$\xRightarrow{sur\ \overrightarrow{e_r}} mg\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2$$
$$\xRightarrow{sur\ \overrightarrow{e_\theta}} mg\sin\theta - T = -ml\ddot{\theta}$$

On sait que :

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}$$
$$\overrightarrow{e_v} = -\sin\theta\,\vec{x} + \cos\theta\,\vec{y}$$
$$\vec{x} = \cos\theta\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$
$$\vec{y} = \sin\theta\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\overrightarrow{e_\theta}$$