ÉTUDE SIMULÉE DE LA LOCALISATION D'UN ROBOT IMMOBILE DANS UNE CARTE

Cette manipulation de Travaux Pratiques a pour but d'illustrer des notions et techniques élémentaires d'estimation stochastique sur l'étude simulée d'un problème de localisation 2D statique en robotique.

Dans l'ensemble du sujet, $\mathbb{I}$, 0 et $\mathbb{O}$ désignent respectivement la matrice identité, tout vecteur constitué de zéros et toute matrice constituée de zéros. Leurs dimensions ne sont pas explicitées lorsqu'elles découlent du contexte. La notation blkdiag$(A_1,\ldots,A_N)$ désigne la matrice bloc-diagonale constituée de l'assemblage de $A_1,\ldots,A_N$. L'opérateur de transposition est noté ^{T}. Enfin, $\mathsf{x}\sim\mathcal{G}(\bar{x},P)$ signifie que la variable aléatoire x suit la loi normale dont la moyenne est le vecteur $\bar{x}$ et dont la matrice de covariance est la matrice définie positive P.

POSITION DU PROBLÈME

On considère un monde plan. Celui-ci est muni du repère de référence $\mathcal{F}_0=(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$, dont les axes $\vec{x}_0,\vec{y}_0$ sont respectivement orientés vers l'Est et vers le Nord. Une carte est disponible, constituée d'amers ponctuels $M_1,\ldots,M_L$ en nombre L donné et disposés en des positions absolues (i.e., exprimées dans $\mathcal{F}_0$) connues $m_l=(u^l,v^l)^T, l=1,\ldots,L$. Un robot ponctuel R est placé en une position absolue (i.e., exprimée dans $\mathcal{F}_0$) inconnue, caractérisée par le vecteur caché $x=(u,v)^T$.

La perception de chaque $l^{\text{ème}}$ amer M_l relativement au robot R constitue le vecteur z_l. La superposition $(z_1^T,\ldots,z_L^T)^T$ de toutes les observations effectuées constitue le vecteur de mesure z. L'objectif est bien sûr d'estimer le vecteur $x\in\mathbb{R}^2$ sur la base de $z\in\mathbb{R}^{2L}$. On suppose ne disposer d'aucune connaissance a priori sur x préalablement à l'obtention de z. L'incertitude entâchant z est caractérisée de manière probabiliste : ainsi, si ω désigne le résultat de l'expérience aléatoire en cours, alors $z=\mathsf{Z}(\omega)$ est la réalisation du vecteur aléatoire de mesure $\mathsf{Z}=(\mathsf{Z}_1^T,\ldots,\mathsf{Z}_L^T)^T$ lié à x par le modèle d'observation $p_{\mathsf{Z}|x}(z|x)$. Ce modèle est décrit par l'équation de mesure à bruits additifs Gaussiens suivante :

$$\mathsf{Z}=h(x)+\mathsf{V}\,;\ h(.)\text{ fonction donnée}\,;\ \mathsf{V}\sim\mathcal{G}(\bar{v},C_v)\,;\ \bar{v},C_v\text{ donnés.}\tag{1}$$

Divers modèles exprimant le lien entre x caché, $\{u^l,v^l\}_{l=1,\ldots,L}$ connus et Z seront explicités. Divers schémas d'estimation seront considérés, qu'il s'agira d'analyser soigneusement.

On fournit la fonction MATLAB `simulationDonnees.m`, dont le prototype est décrit Figure 1. Cette fonction permet de simuler une expérience aléatoire. Par conséquent, elle renvoie le vecteur de mesure z, stocké dans `Z`, potentiellement différent lors de chacun de ses appels. Elle retourne également le nombre d'amers L (stocké dans `L`), des matrices potentiellement utiles, $\bar{v},C_v$ (respectivement stockés dans `bar_v`,`C_v`) ainsi que le vecteur x (stocké dans `X`, déterministe caché). Il convient de préciser que si l'expérience était menée sur un robot réel, alors la vérité terrain `X` ne serait pas accessible (sauf à utiliser un système de capture de mouvement par exemple) et `bar_v`,`C_v` devraient être élaborés séparément (en caractérisant les capteurs embarqués sur le robot). On fournit également la fonction `ellipse`, qui,

```
function [Z,L,m,H,Hfull,bar_v,C_v,x] = simulationDonnees(cas_d_etude,plot_p);
%SIMULATIONDONNEES
%  Simulation d'une expérience
%  Syntaxe d'appel :  [Z,L,m,H,Hfull,bar_v,C_v,x] = simulationDonnees(cas_d_etude,plot_p);
%
%  Entrée :
%  . cas_d_etude : index de la section considérée dans le sujet
%  . plot_p : si égal à 1, alors produit un affichage, sinon rien
%
%  Sorties :
%  . Z : réalisation de la variable aléatoire de mesure (2Lx1)
%  . L : nombre d'amers 2D
%  . m : vecteur des positions des amers (2Lx1)
%  . H,Hfull : matrices potentiellement utiles...
%  -> et comme ceci est de la simulation, sont également accessibles
%     . bar_v,C_v : espérance et covariance du bruit de mesure additif Gaussien (2Lx1,2Lx2L)
%     . x         : vecteur de paramètres caché (2x1)
```

Figure 1 – Prototype de `simulationDonnees.m`

```
function h = ellipse(mx,Px,color)
%ELLIPSE
%  Trace l'ellipse contenant 99% des réalisations d'une variable aléatoire
%  Gaussienne 2D de moyenne mx et de covariance Px.
```

Figure 2 – Prototype de `ellipse.m`

selon le prototype reporté Figure 2, permet de tracer l'ensemble de volume minimal dans lequel se réalise avec une probabilité de 99% une variable aléatoire Gaussienne bivariée de moyenne et matrice de covariance données.

TRAVAIL DEMANDÉ

Cas d'étude 1 – Fonction $h(.)$ affine, bruits indépendants identiquement distribués

L'équation de mesure (1) satisfait

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_L(x))^T, \text{ avec } \forall l \in \{1, \dots, L\},\ h_l(x) = m_l - x = \begin{pmatrix} \overrightarrow{RM_l}.\vec{x}_0 \\ \overrightarrow{RM_l}.\vec{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_l - u \\ v_l - v \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\bar{v} = 0,\ C_v = \sigma^2 \mathbb{I} \text{ avec } \sigma \text{ donné.} \quad (3)$$

1. Invoquer séquentiellement `simulationDonnees.m` de façon à exécuter un nombre N suffisamment élevé d'expériences aléatoires. Stocker les réalisations (ou « échantillons ») de Z obtenues sur ces expériences. Noter la valeur de σ.
2. Visualiser graphiquement :
   (a) les distributions empiriques des échantillons des sous-vecteurs Z_l, $l = 1, \dots, L$;
   (b) leur cohérence avec les lois théoriques des Z_l, $l = 1, \dots, L$;
   (c) la distribution empirique des positions absolues (i.e., dans $\mathcal{F}_0$) des amers pouvant être établie sur la base des échantillons de Z si on suppose ponctuellement que x est donné.

On décide d'estimer x caché au moyen de l'estimateur

$$\hat{\mathsf{X}} = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} \mathsf{Y}_l,\ \mathsf{Y}_l = m_l - \mathsf{Z}_l. \tag{4}$$

3. Calcul théorique – Montrer que $\hat{\mathsf{X}}$ est Gaussien. Calculer son biais théorique, ainsi que sa matrice de covariance. Déduire les statistiques du vecteur erreur d'estimation, ainsi que la valeur de l'erreur quadratique moyenne.
4. Sur une expérience, produire un estimé $\hat{x}$ de x. Tracer autour de $\hat{x}$ un ellipse de confiance dans lequel x doit théoriquement se trouver avec une probabilité de 99 %. Vérifier la plausibilité du résultat.
5. Par exploitation des échantillons de Z sur plusieurs résultats d'expériences, visualiser la distribution empirique des estimés $\hat{x}$ de x. Vérifier qu'elle est cohérente avec la loi théorique de $\hat{\mathsf{X}}$.

Cas d'étude 2 – Fonction $h(.)$ affine, bruits mutuellement indépendants mais non identiquement distribués

L'équation de mesure (1) satisfait

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_L(x))^T,\ \text{avec}\ \forall l \in \{1, \dots, L\},\ h_l(x) = m_l - x = \begin{pmatrix} \overrightarrow{RM_l}.\vec{x}_0 \\ \overrightarrow{RM_l}.\vec{y}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_l - u \\ v_l - v \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\bar{v} = 0,\ C_v = \text{blkdiag}(C_{v1}, \dots, C_{vL}),\ \text{avec}\ C_{v1}, \dots, C_{vL}\ \text{donnés.} \tag{6}$$

6. Invoquer séquentiellement `simulationDonnees.m` de façon à exécuter un nombre N suffisamment élevé d'expériences aléatoires. Stocker les réalisations (ou « échantillons ») de Z obtenues sur ces expériences.
7. Visualiser graphiquement la distribution empirique des positions absolues (i.e., dans $\mathcal{F}_0$) des amers pouvant être établie sur la base des échantillons de Z si on suppose ponctuellement que x est donné.

On décide d'estimer x caché au moyen de l'estimateur $\hat{\mathsf{X}}$ défini dans la section précédente en (4) ainsi que par l'estimé du maximum de vraisemblance $\hat{\mathsf{X}}_{\text{MLE}}$.

8. Calcul théorique – Établir l'expression de $\hat{\mathsf{X}}_{\text{MLE}}$. Montrer que $\hat{\mathsf{X}}$ et $\hat{\mathsf{X}}_{\text{MLE}}$ sont tous deux Gaussiens. Calculer leurs biais théoriques et matrices de covariance. Déduire pour chacun d'eux les statistiques du vecteur erreur d'estimation, ainsi que la valeur de l'erreur quadratique moyenne. La matrice de covariance de $\hat{\mathsf{X}}_{\text{MLE}}$ sera notée $\text{Cov}_{\hat{\mathsf{X}}_{\text{MLE}}}$.
9. Sur une expérience, produire des estimés $\hat{x}$ et $\hat{x}_{\text{MLE}}$ de x. Tracer autour de chacun d'eux un ellipse de confiance dans lequel x doit théoriquement se trouver avec une probabilité de 99 %. Vérifier la plausibilité du résultat.
10. Par exploitation des échantillons de Z sur plusieurs résultats d'expériences, visualiser les distributions empiriques des estimés respectifs $\hat{x}$ et $\hat{x}_{\text{MLE}}$ de x. Vérifier qu'elles sont cohérentes avec les lois théoriques de $\hat{\mathsf{X}}$ et $\hat{\mathsf{X}}_{\text{MLE}}$.

Les bruits associés aux perceptions des différents amers par le robot étant mutuellement indépendants, on montre qu'on peut implémenter un calcul équivalent à l'estimé du maximum de vraisemblance $\hat{x}_{\text{MLE}}$ consistant en l'assimilation récursive (séquentielle) de chaque observation $y_l = \mathsf{Y}_l(\omega)$. La démarche consiste à produire la séquence des estimés $\overset{\circ}{x}^{(1)},\ldots,\overset{\circ}{x}^{(L)}$ et matrices de covariances $P^{(1)},\ldots,P^{(L)}$ définis comme suit, avec $H = \mathbb{I}_{2x2}$.

$$
\begin{aligned}
&\text{Initialisation} & \overset{\circ}{x}^{(1)} &= y_1 && (7)\\
& & P^{(1)} &= C_{v1} && (8)\\
&\forall l \in \{2,\ldots,L\}, & K^{(l)} &= P^{(l-1)}H^T\left(C_{vl} + HP^{(l-1)}H^T\right)^{-1} && (9)\\
& & \overset{\circ}{x}^{(l)} &= \overset{\circ}{x}^{(l-1)} + K^{(l)}(y_l - H\overset{\circ}{x}^{(l-1)}) && (10)\\
& & P^{(l)} &= P^{(l-1)} - K^{(l)}HP^{(l-1)} && (11)\\
&\text{Estimé/Covariance finaux} & \hat{x}_{\text{MLE}} &= \overset{\circ}{x}^{(L)} && (12)\\
& & \text{Cov}_{\hat{\mathsf{X}}_{\text{MLE}}} &= P^{(L)} && (13)
\end{aligned}
$$

11. Implémenter le calcul. Vérifier le bon fonctionnement.
12. Que se passerait-il si les bruits associés aux perceptions des différents amers par le robot n'étaient pas mutuellement indépendants ? (invoquer par exemple `simulationDonnees` avec l'argument `cas_d_etude` fixé à 0)

Cas d'étude 3 – Fonction $h(.)$ non linéaire

L'équation de mesure (1) satisfait

$$h(x) = (h_1(x),\ldots,h_L(x))^T,\ \text{avec } \forall l \in \{1,\ldots,L\},\ h_l(x) = \begin{pmatrix} \|RM_l\| \\ \widehat{\vec{x}_0, \overrightarrow{RM_l}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(u_l-u)^2+(v_l-v)^2} \\ \text{atan2}(v_l-v, u_l-v) \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\bar{v} = 0,\ C_v \text{ donnés.} \quad (15)$$

11. Invoquer séquentiellement `simulationDonnees.m` de façon à exécuter un nombre N suffisamment élevé d'expériences aléatoires. Stocker les réalisations (ou « échantillons ») de Z obtenues sur ces expériences.
12. Visualiser graphiquement la distribution empirique des positions absolues (i.e., dans $\mathcal{F}_0$) des amers pouvant être établie sur la base des échantillons de Z si on suppose ponctuellement que x est donné.

On décide d'estimer x caché au moyen de l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\mathsf{X}}_{\text{MLE}}$.

13. Calcul théorique – Établir l'expression du problème d'optimisation permettant le calcul de l'estimé du maximum de vraisemblance $\hat{x}_{\text{MLE}}$ sur la base du vecteur z. Développer l'algorithme de Gauss-Newton permettant sa résolution.
14. Procéder à l'implémentation de l'algorithme de Gauss-Newton. Tracer autour de l'estimé $\hat{x}_{\text{MLE}}$ obtenu un ellipse de confiance dans lequel x doit se trouver *approximativement* avec une probabilité de 99 %. Vérifier la plausibilité.