Chapitre 4. Flots et réseaux de transport

Les problèmes que l'on va aborder dans ce chapitre consistent à organiser de façon optimale sous diverses contraintes, les mouvements de certaines quantités d'un bien dans un réseau. Étant donné un réseau aux arcs valués par des capacités, le problème du flot maximal consiste à faire circuler le plus grande quantité possible entre deux points du réseau sans excéder les capacités des arcs.
Applications :
- création d'itinéraires de délestage.
- organisation du traffic maritime
- structuration et dimensionnement optimal d'un réseau de communication ...

I Flux et flots

Soit $G = (\{x_1, \dots x_n\}, \{u_1, \dots u_m\})$ un graphe orienté.

Définition 1 (Flot) *Un* flot *sur un graphe est un vecteur* $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ *de* $\mathbb{R}^m$ *tel que le nombre* $\varphi^i = \varphi(u_i)$ *est appelé* flux *dans l'arc* u_i *et qui vérifie la* loi de Kirchhoff *ou* loi de conservation du flux *en chaque sommet du graphe :*

$$\forall x \in X, \sum_{u \in \omega^-(\{x\})} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^+(\{x\})} \varphi(u) \qquad \textit{(loi de Kirchhoff)}$$

Le flux φ^i dans l'arc u_i peut être assimilé à la quantité de véhicules (de liquide, d'information) parcourant l'arc u_i dans le sens de son orientation si $\varphi_i > 0$ ou dans le sens inverse si $\varphi_i < 0$. La loi de Kirchhoff impose qu'en tout sommet le flux entrant soit égal au flux sortant.

Propriété 1

- *Toute combinaison linéaire de flot sur G définit un flot sur G*
- *Le vecteur nul de $\mathbb{R}^m$ est un flot sur tout graphe G (dit "flot nul")*
- *Tout vecteur cycle de G est un flot sur G*

II Réseau de transport, Flot compatible, Problème du flot maximum dans un réseau

Définition 2 (réseau de transport) *Un* réseau de transport *est un graphe orienté connexe* $R = (X, U = \{u_1, \dots u_m\})$ *avec*

- *un sommet sans prédecesseur appelé* entrée *(ou source) noté s ($\Gamma^-(s) = \emptyset$)*
- *et un sommet sans suivant appelé* sortie *(ou puits) noté t ($\Gamma^+(t) = \emptyset$)*
- *et une application $c : U \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ qui à chaque arc u associe sa capacité $c(u) \geq 0$.*

On y adjoint un arc u_0 (fictif) $u_0 = (t, s)$ de capacité infinie qui sera appelé arc de retour*.*

Définition 3 (flot compatible) *Un* flot compatible *ou encore* réalisable *est un vecteur φ de $\mathbb{R}^{m+1}$ (en comptant l'arc de retour) tel que :*

- *φ est un flot sur $(X, U \cup \{u_0\})$: $\forall x \in X$, $\sum_{u \in \omega^+(\{x\})} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^-(\{x\})} \varphi(u)$*
- *φ est compatible avec les capacités : $\forall u \in U \cup \{u_0\}, \quad 0 \leq \varphi(u) \leq c(u)$*
- *la* valeur *du flot est le flux qui traverse l'arc de retour ou encore le flux sortant de la source ou encore le flux arrivant à la sortie : $\varphi(u_0) = \sum_{u \in \omega^+(s)} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^-(t)} \varphi(u)$*

Si $\varphi(u) = c(u)$ on dit que l'arc u est *saturé*. Un flot est dit de *valeur maximale* s'il maximise cette valeur $v(\varphi)$ dans l'ensemble de tous les flots réalisables (un tel flot n'est pas nécessairement unique).

Remarque *Un tel flot existe toujours, un algorithme permettant d'obtenir un tel flot lorsque les capacités sont des rationnels est décrit dans le paragraphe suivant.*

II.1 Théorème du flot maximum et de la coupe minimum

Définition 4 *Étant donné un ensemble de sommets $A \neq \emptyset$ et $A \subset X$, on désigne par $\omega^+(A)$ l'ensemble des arcs incidents à A vers l'extérieur (sortants), i.e., $\omega^+(A) = \{(x, y) \in U \mid x \in A \text{ et } y \notin A\}$, et par $\omega^-(A)$ l'ensemble des arcs incidents à A vers l'intérieur (entrants) i.e., $\omega^-(A) = \{(x, y) \in U \mid x \notin A \text{ et } y \in A\}$, et l'on pose $\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$. Si $\omega(A)$ est non vide il est appelé* cocycle *de A.*

Définition 5 (coupe) *Une* coupe *séparant s et t est une partition de l'ensemble des sommets en deux sous-ensembles A et B ($A \cup B = X, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$) telle que $s \in A$, $t \in B$.*
L'ensemble des arcs de la coupe *est noté $\omega^+(A)$ (appelé co-cycle sortant de A). Par définition, $\omega^+(A) = \{(i, j) \in U \mid i \in A, j \in X \setminus A\}$).*
La capacité *$\mathcal{C}$ de la coupe est la somme des capacités des arcs de la coupe : $\mathcal{C}(\omega^+(A)) = \sum_{u \in \omega^+(A)} c(u)$.*

Remarque *Le retrait dans un réseau R de tous les arcs d'une coupe supprime tous les chemins de s à t.*

Propriété 2 (Théorème de la coupe) *Pour tout flot φ compatible sur R et pour toute coupe $\omega^+(A)$ séparant s et t la valeur du flot est inférieure à la capacité de cette coupe :*

$$\varphi(u_0) \leq \mathcal{C}(\omega^+(A)) = \sum_{u \in \omega^+(A)} c(u)$$

Ceci est vrai pour toute coupe donc même quand on considère une coupe de capacité minimale. Puisque c'est vrai aussi pour tout flot compatible, c'est vrai pour un flot de valeur maximum.

II.2 Algorithme de Ford-Fulkerson

L'algorithme de Ford-Fulkerson (1955) [1] utilise un principe de marquage relatif à un flot compatible φ. On peut prendre comme flot compatible le flot nul si on n'a pas mieux.

Définition 6 (Principe de marquage de Ford-Fulkerson) *On marque l'entrée s du réseau, puis*
x étant un sommet marqué , y est marquable à partir de x ssi

$$y \text{ n'est pas marqué et } \begin{cases} \exists u = (x, y) \in R \text{ et } \varphi(u) < c(u) & \text{marquage direct} \\ \exists u = (y, x) \neq u_0 \in R \text{ et } \varphi(u) > 0 & \text{marquage indirect} \end{cases}$$

Propriété 3 *Si à la fin de la procédure de marquage*

1. *on parvient à marquer la sortie t du réseau alors on peut augmenter la valeur du flot d'une valeur ε calculée comme suit : Soit ν la chaîne (de s à t) ayant permis de marquer t, et soit ν^+, les arcs de ν participant aux marquages directs et ν^- aux marquages indirects. $\varepsilon = \min(\min_{u \in \nu^+}(c(u) - \varphi(u)), \min_{u \in \nu^-} \varphi(u))$. Le nouveau flot est obtenu en augmentant les flux des arcs de ν^+ et en diminuant les flux des arcs de ν^- de ε.*
2. *on ne parvient pas à marquer la sortie alors le flot est maximum*

Références

[1] L. Ford and D. Fulkerson. A simplex algorithm finding maximal networks flows and an application to the hitchock problem. *Rand Report Rand Corporation*, dec 1955.