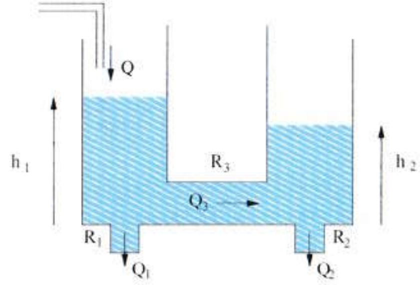
CHANGEMENTS DE BASE ET SOLUTION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT

TD1

Partie 1

Modélisation du système de bacs



$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{R_3 S_1} \\ \frac{1}{R_3 S_2} & b \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{pmatrix} U(t) \\ Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) \end{cases}$$

$$a = \frac{-1}{S_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) \qquad b = \frac{-1}{S_2}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

<u>*Application numérique*</u>

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} U(t) \\ Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} X(t) \end{cases}$$

Partie 2

Changements de base

- Changements de base : rappels

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) \\ Y(t) = C X(t) + D U(t) \end{cases}$$

Système dans la base initiale

$$X(t) = T \tilde{X}(t)$$

T : matrice de passage

$$\tilde{A} = T^{-1} A T \qquad \tilde{C} = CT$$
$$\tilde{B} = T^{-1} B \qquad \tilde{D} = D$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}(t) = \tilde{A} \tilde{X}(t) + \tilde{B} U(t) \\ Y(t) = \tilde{C} \tilde{X}(t) + \tilde{D} U(t) \end{cases}$$

Système dans la nouvelle base

- Base diagonale

$T = \begin{pmatrix} V_1 & \dots & V_n \end{pmatrix}$ avec $A V_i = \lambda_i V_i$

V_i : vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i

$$A_d = T^{-1} A T \qquad B_d = T^{-1} B \qquad C_d = CT$$

Valeurs propres de A

$$\begin{cases} \dot{X}_d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} X_d + \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} U(t) \\ Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} X(t) \end{cases}$$

Changements de base

- Base compagne de commande

$$M_{cc} = \begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_n \end{pmatrix} \qquad M_n = B$$
$$M_{n-j} = \left(A^j + a_{n-1} A^{j-1} + \dots + a_{n-j} I\right) B$$

$$A_{cc} = M_{cc}^{-1} A M_{cc} \qquad B_{cc} = M_{cc}^{-1} B \qquad C_{cc} = C M_{cc}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_{cc} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ \boxed{-1 \quad -8} \end{pmatrix} X_{cc} + \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} U(t) \\ Y(t) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \end{pmatrix} X_{cc}(t) \end{cases}$$

Coeff. du polynôme caractéristique de A

- Base compagne d'observation

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & \dots & P_n \end{pmatrix} \quad et \quad M_{co} = P^{-T}$$
$$P_1 = C^T$$
$$P_j = \left(A^{T^{j-1}} + a_{n-1} A^{T^{j-2}} + \dots + \cancel{a_1} I\right) C^T$$

a_{n-j+1} I

$$A_{co} = M_{co}^{-1} A M_{co} \qquad B_{co} = M_{co}^{-1} B \qquad C_{co} = C M_{co}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_{co} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -8 \\ -7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} X_{co} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} U(t) \\ Y(t) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} X_{co}(t) \end{cases}$$

Partie 3

Solution de l'équation d'état

BASE DIAGONALE

Ne dépend que de la valeur propre -1

$$X_d(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\boxed{e^{-t}} - \frac{2}{3}\left(\boxed{e^{-t}} - 1\right) \\ \frac{-1}{3}\boxed{e^{-7t}} - \frac{1}{21}\left(\boxed{e^{-7t}} - 1\right) \end{pmatrix}$$

Ne dépend que de la valeur propre -7

Chaque variable d'état ne dépend que d'une seule valeur propre → *découplage*

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} X_d(t)$$

$$\Rightarrow Y(t) = \frac{2}{3}\boxed{e^{-t}} + \frac{16}{21}\boxed{e^{-7t}} + \frac{12}{21}$$

BASE INITIALE

$$X(t) = T\ X_d(t)$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\boxed{e^{-t}} - \frac{8}{21}\boxed{e^{-7t}} + \frac{15}{21} \\ \frac{2}{3}\boxed{e^{-t}} + \frac{16}{21}\boxed{e^{-7t}} + \frac{12}{21} \end{pmatrix}$$

Les variables d'état dépendent des deux valeurs propres → *Pas de découplage*

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} X_d(t)$$

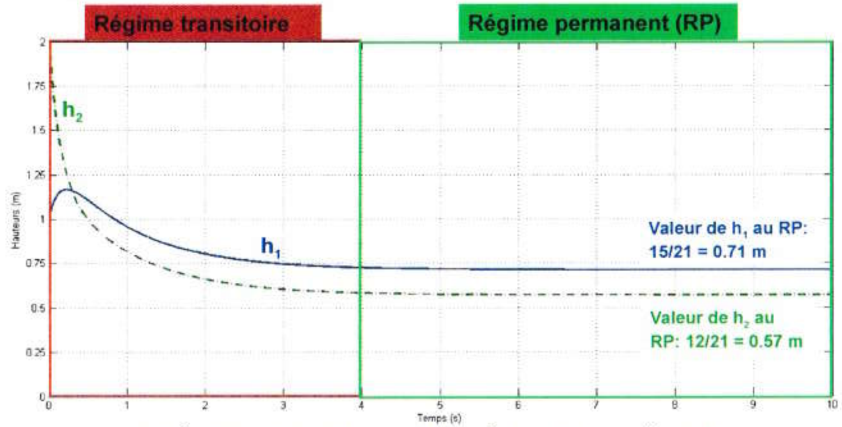
$$\Rightarrow Y(t) = \frac{2}{3}\boxed{e^{-t}} + \frac{16}{21}\boxed{e^{-7t}} + \frac{12}{21}$$

Modes du système

⇒ *Les modes (et donc les valeurs propres) « font » la stabilité et la rapidité du système.*

Solution de l'équation d'état

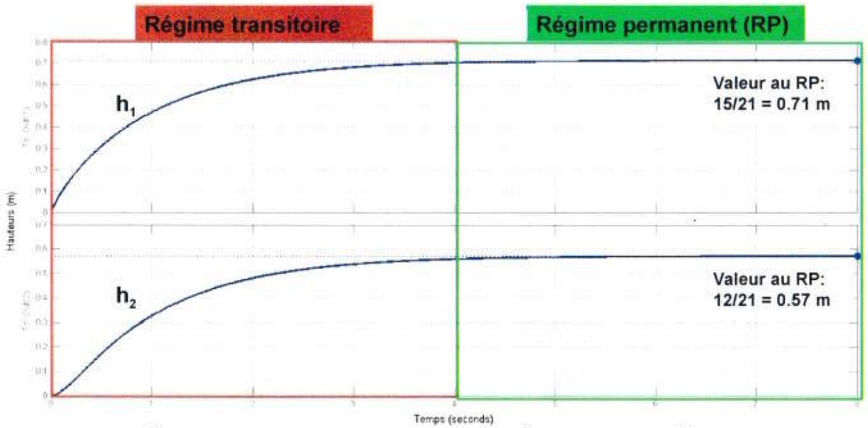
- Résultats de simulation (pour les conditions initiales choisies)



LES RÉSERVOIRS SE VIDENT JUSQU'À ATTEINDRE L'ÉQUILIBRE

Solution de l'équation d'état

- Résultats de simulation (à conditions initiales nulles)



LES RÉSERVOIRS SE REMPLISSENT JUSQU'À ATTEINDRE L'ÉQUILIBRE

Solution de l'équation d'état

Au régime permanent: il y a <u>équilibre ⇒ stabilité</u>