CM2 - Intégration

I. Fonctions usuelles et propriétés

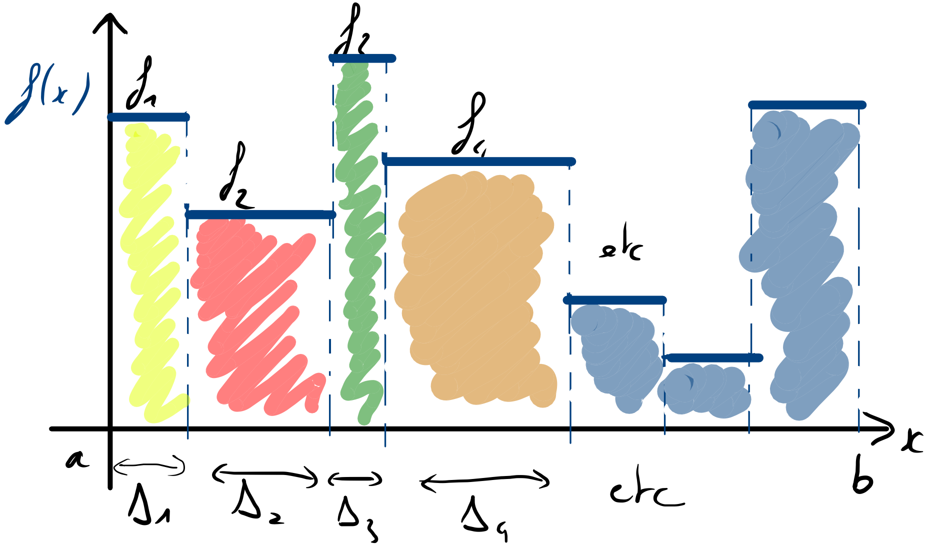
Fonctions usuelles, intervalle de définition, continuité, dérivabilité, limites classiques, etc.
-> Non traité, mais notions à connaîtres absolument. Se référer au poly sur mon site, ou sur toute ressources traitant des fonctions.

II. Intégrale de Riemann

Sketch de la définition de l'intégrale de Riemann.

Fonction en escaliers :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum f_k \Delta_k$$



CM2 - Intégration

I. Fonctions usuelles et propriétés

Fonctions usuelles, intervalle de définition, continuité, dérivabilité, limites classiques, etc.
-> Non traité, mais notions à connaîtres absolument. Se référer au poly sur mon site, ou sur toute ressources traitant des fonctions.

II. Intégrale de Riemann

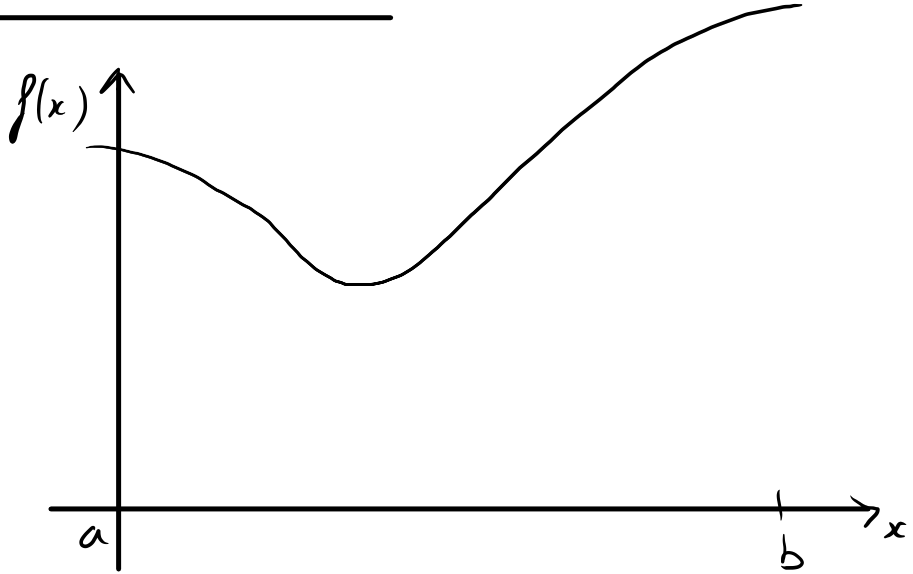
Sketch de la définition de l'intégrale de Riemann.

Fonction en escaliers :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum f_k \times \Delta_k$$

Fonction f "quelconque" (cont. par morceaux)

$$\int_a^b f(x) = ?$$



CM2 - Intégration

I. Fonctions usuelles et propriétés

Fonctions usuelles, intervalle de définition, continuité, dérivabilité, limites classiques, etc.
-> Non traité, mais notions à connaîtres absolument. Se référer au poly sur mon site, ou sur toute ressources traitant des fonctions.

II. Intégrale de Riemann

Sketch de la définition de l'intégrale de Riemann.

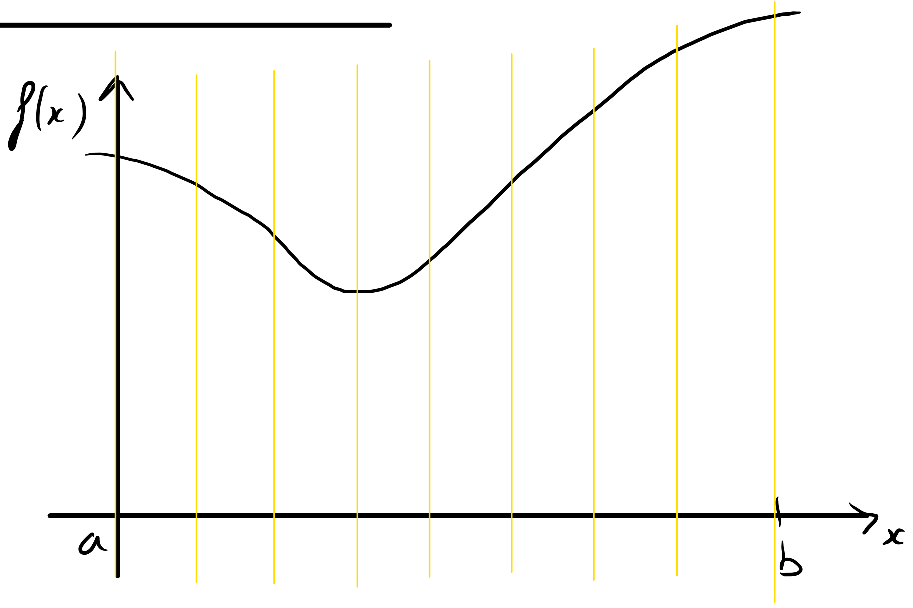
Fonction en escaliers :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum f_k \times \Delta_k$$

Fonction f "quelconque" (cont. par morceaux)

$$\int_a^b f(x) = ?$$

Subdivision de $[a,b]$



CM2 - Intégration

I. Fonctions usuelles et propriétés

Fonctions usuelles, intervalle de définition, continuité, dérivabilité, limites classiques, etc.
-> Non traité, mais notions à connaîtres absolument. Se référer au poly sur mon site, ou sur toute ressources traitant des fonctions.

II. Intégrale de Riemann

Sketch de la définition de l'intégrale de Riemann.

Fonction en escaliers :

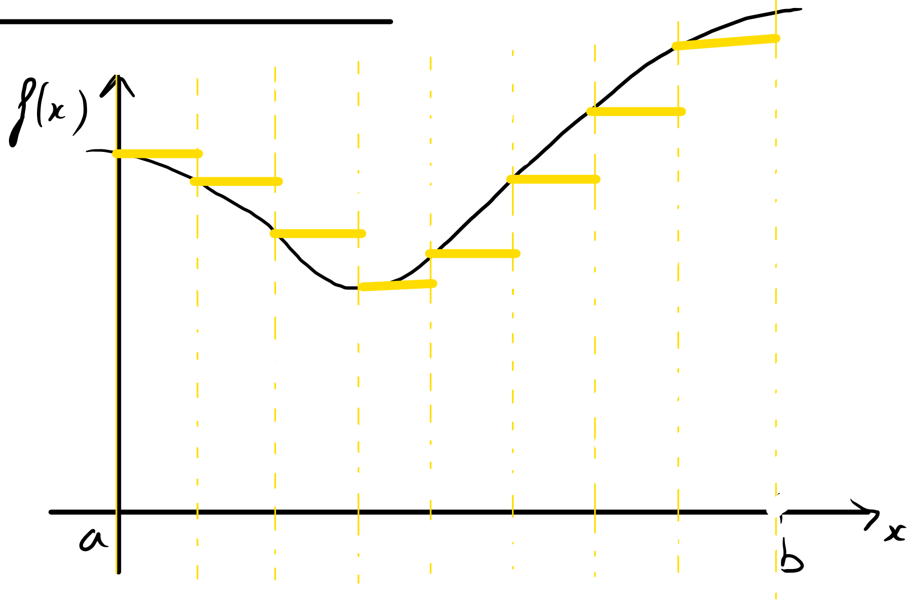
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum f_k \times \Delta_k$$

Fonction f "quelconque" (cont. par morceaux)

$$\int_a^b f(x) = ?$$

Subdivision de $[a,b]$

→ encadrement de f par des escaliers



CM2 - Intégration

I. Fonctions usuelles et propriétés

Fonctions usuelles, intervalle de définition, continuité, dérivabilité, limites classiques, etc.
-> Non traité, mais notions à connaîtres absolument. Se référer au poly sur mon site, ou sur toute ressources traitant des fonctions.

II. Intégrale de Riemann

Sketch de la définition de l'intégrale de Riemann.

Fonction en escaliers :

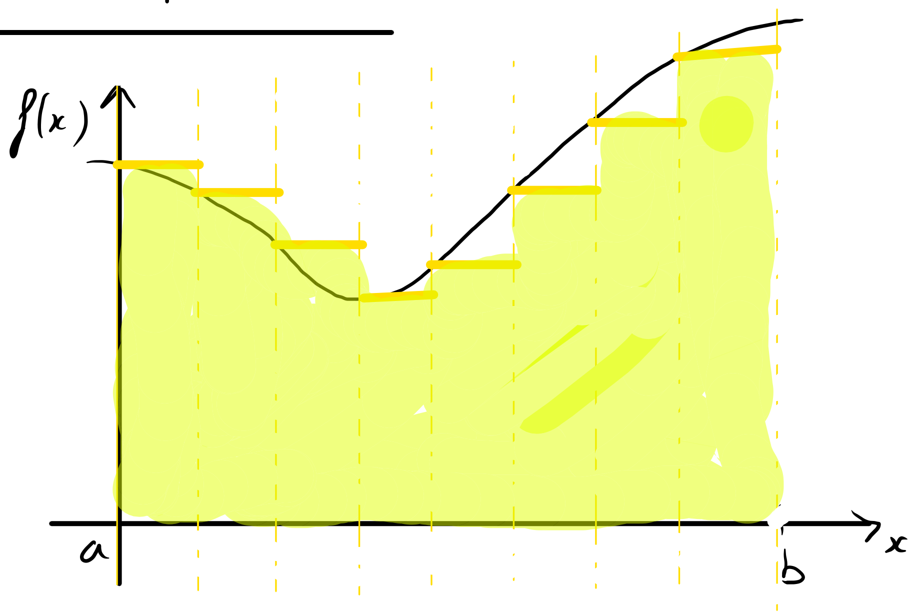
$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum f_k \times \Delta_k$$

Fonction f "quelconque" (cont. par morceaux)

$$\int_a^b f(x) = \ ?$$

Subdivision de $[a,b]$

→ encadrement de f par des escaliers



CM2 - Intégration

I. Fonctions usuelles et propriétés

Fonctions usuelles, intervalle de définition, continuité, dérivabilité, limites classiques, etc.
-> Non traité, mais notions à connaîtres absolument. Se référer au poly sur mon site, ou sur toute ressources traitant des fonctions.

II. Intégrale de Riemann

Sketch de la définition de l'intégrale de Riemann.

Fonction en escaliers :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum f_k \times \Delta_k$$

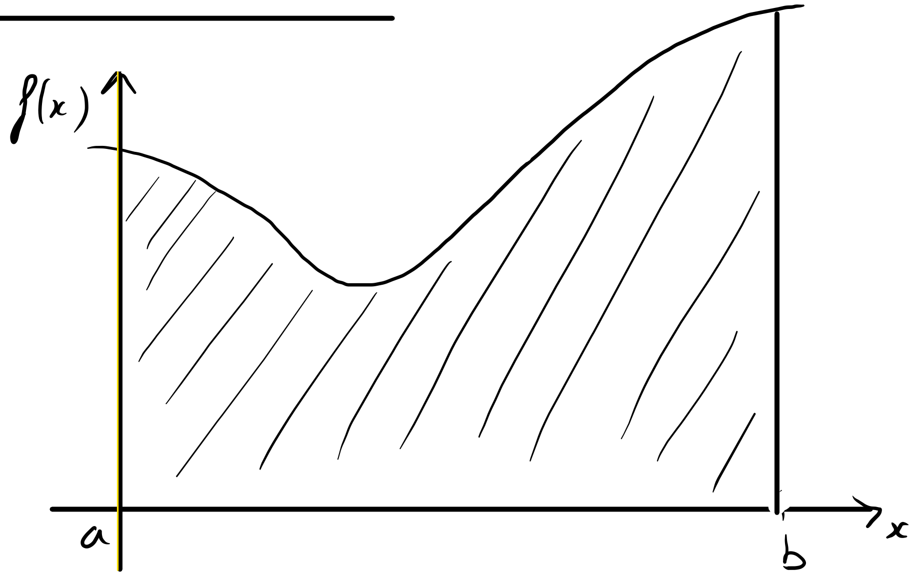
Fonction f "quelconque" (cont. par morceaux)

$$\int_a^b f(x) = ?$$

Subdivision de $[a,b]$

→ encadrement de f par des escaliers

→ Passage à la limite ($\Delta x \to 0$)



Théorème : Toute fonction continue par morceaux sur $I \subset \mathbb{R}$ est intégrable sur tout intervalle fermé de I.

De plus, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(Chasles)

Théorème : Toute fonction continue par morceaux sur $I \subset \mathbb{R}$ est intégrable sur tout intervalle fermé de I.

De plus, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(Chasles)

Théorème - Définition

Soit f continue sur I. Alors, la fonction :

$$F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(z)\,dz$$

est une fonction dérivable sur I et on $F(a) = 0$. (et $F'(x) = f(x)$)

$F(x)$ est appelée primitive de $f(x)$ nulle en a.

Enfin, on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) := \left[F(x)\right]_a^b$$

démo ? Chasles

Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$\int f(x)dx$	valable pour $x \in \ldots$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Primitives des fonctions usuelles (suite)

$f(x)$	$\int f(x)dx$	valable pour $x \in \ldots$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\text{argsinh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\text{argcosh}(x)$	$]1,\infty[$

$\left(e^{u(x)}\right)'$

$\left(\ln(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$\left(u(x)\right)^{n\,\prime}$

$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

Exemples d'utilisation

- Primitives de :

$$\int \frac{1}{x-a}\begin{matrix}u'\\ u\end{matrix}\,dx = \ln|x-a| + k$$

$$\int \frac{1}{3x-a} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-\frac{a}{3}}\begin{matrix}u'\\ u\end{matrix}$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|x-\frac{a}{3}\right| + k$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}\begin{matrix}u'(x)\\ u(x)^k\end{matrix} = \int \overset{u' \quad u^{-k}}{(x-a)^{-k}}$$

$$= \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + k$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+1)} \overset{DES}{=} \int \frac{1/2}{x-1} + \int \frac{-1/2}{x+1}$$

$$= \ldots$$

Exemples d'utilisation

- Primitives de :

$$\int 2x\, e^{x^2+1}\, dx = \left[e^{x^2+1} \right]$$

$u' e^{u(x)}$

$$\int \frac{1}{x} \cos(\ln x)\, dx \quad (\text{sur } \mathbb{R}^+)$$

$u' \cos(u(x))$

$= \sin|\ln x| + k$

III. Intégration par parties

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$\downarrow \int$

$$[uv] = \int u'v + \int uv'$$

$$\boxed{\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'}$$

Exemples d'utilisation

- Primitives de :

$$\int 2x\, e^{x^2+1}\, dx = \left[e^{x^2+1} \right]$$

$u'\, e^{u(x)}$

$$\int \frac{1}{x} \cos(\ln x)\, dx \quad (\text{sur } \mathbb{R}^+)$$

$u' \cos(u(x))$

$= \sin|\ln x| + k$

III. Intégration par parties

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\downarrow \int$$

$$[uv] = \int u'v + \int uv'$$

$$\boxed{\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'}$$

Choix de u et v ?

$$\begin{cases} v = \text{Arcos/arcsin} \\ \quad\;\; \text{Log} \\ \quad\;\; \text{Pol} \\ \quad\;\; \text{Exp} \\ \quad\;\; \text{Sin} \\ u' = \text{le reste} \end{cases}$$

ex (TD)

Exo : $\int_a^b 1 \cdot \ln t$ $\quad \begin{cases} v = \ln t \\ u' = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} v' = \frac{1}{t} \\ u = t \end{cases}$

$$= \left[t \ln t \right]_a^b - \int_a^b t \cdot \frac{1}{t} \, dt$$

$$= \left[t \ln t \right]_a^b - \int_a^b 1 = \ldots$$

IV. Changement de variables

Formulation classique :

$y = \varphi(x)$, $\varphi \in \mathcal{C}^1$

Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

Inconvénients : il faut identifier dans l'$\int$ en x une expression

qui peut être un $\varphi'(x)$.

Formulation compatible avec $\mathbb{R}^n$

$\int_a^b f(x)\,dx = ?$ $\qquad \varphi : y \longmapsto x = \varphi(y)$

new old

Alors : φ bijection $\mathcal{C}^1$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(y))\cdot\varphi'(y)\,dy}$$

$\varphi^{-1}(a)$:
$\varphi^{-1}(b)$: $\Bigg\}$ expression des bornes en variable y

Exo : $\displaystyle\int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx \quad \Big| \; x = \sin t$

Exo

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$\int \frac{2x+1}{3x^2+x+1}\,dx =$$