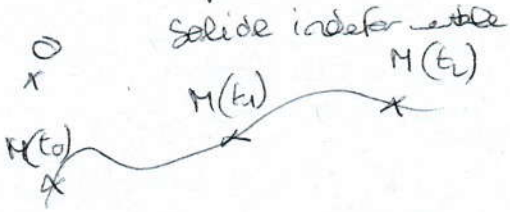
(C4) Cinématique

~~Objectifs~~ : Définition : partie de la méca permettant l'étude des mvment des corps indépendamment de ~~s~~ leurs causes

~~Grandeurs~~ : Tout mvmt nécessite un solide S et un référentiel R

Point de vue Lagrangien : décrire le mvmt avec un observateur qui se déplace ou pas

Solide indéformable



fonction du point M

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} f(x_0, y_0, z_0) \\ g(x_0, y_0, z_0, t) \\ h(x_0, y_0, z_0, t) \end{bmatrix}$$

vitesse = variation de la position (dérivée)

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial g}{\partial t} \\ \frac{\partial h}{\partial t} \end{bmatrix}$$

$f(x) \overset{\text{dérivée}}{\Rightarrow} \frac{df(x)}{dx}$ si on a $g(x, y, z, t)$

les dérivées partielles

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial t}$ $\quad g = \frac{x^2 + 2yz}{\cos t}$ $\quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2x}{\cos t}$

Point de vue Eulérien : quantifier des déformation (~)

Quel point de vue choisir ? ⇒ Lagrangien

↳ les lois physiques, décrire les mvmt des obj. non déformable, mais complexe pour les objets déformables

⇒ Eulérien

↳ Plus intuitif utilise des outils math, utilisé pour la déformation des matériaux solide ou fluide

Etude cinématique ⇒ évoluer dans le temps $\quad \Delta t = t_2 - t_1 \equiv$ durée entre les instants

trajectoire = ensemble des positions prise par un point au cour du temps par rapport a un référentiel

Position d'un solide : Soit à un instant t dans un repère orthonormé $R(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

↳ Normé = 1

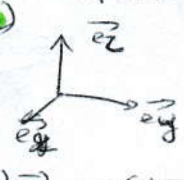
↳ othogonaux (perpendiculaire dans l'espace)

$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x}, y\vec{e_y}, z\vec{e_z}$

$x = \overrightarrow{OM}\,\vec{e_x}$

$y = \overrightarrow{OM}\,\vec{e_y}$

$z = \overrightarrow{OM}\,\vec{e_z}$



$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e_x} + y(t)\vec{e_y} + z(t)\vec{e_z}$$

Vitesse d'un solide : variation de position dans un repère orthonormé $R(O, \vec{e_x} \dots)$

$$\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \quad \text{soit } \vec{V}(M/R) = \left(\frac{d}{dt}(x(t)\vec{e_x} + \dots z(t)\vec{e_z}\right)_R = \left(\frac{d}{dt}(x(t)\vec{e_x}\right)_R + (\dots)_R + (\dots)_R$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{e_x} + x\left(\frac{d\vec{e_x}}{dt}\right)_R + \dots + \dots$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \frac{dx}{dt}\vec{e_x} + \frac{dy}{dt}\vec{e_y} + \frac{dz}{dt}\vec{e_z}}$$

Accélération

$$\vec{a}(M/R) = \left(\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right)_R \quad \vec{V}(M/R') \quad \vec{a}(M/R) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e_z}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\vec{e_x} + \dots + \dots\right)$$

Dérivée d'un vecteur $\left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R'} + \Omega(R'/R) \wedge \overrightarrow{AB}$

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{e_x'}}{dt}\right)_R = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{e_x'}} \quad \boxed{\left(\frac{d\vec{e_y}}{dt}\right)_R = \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{e_y}} \quad \boxed{\left(\frac{d\vec{e_z}}{dt}\right)_R = \Omega(R'/R) \wedge \vec{e_z}}$$

Composition des vitesses

2 repères : fixe $R(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$
mobile $R'(O, \vec{e_x'}, \vec{e_y'}, \vec{e_z'})$

(R) $\vec{e_z}$, $\vec{e_x}$, O, $\vec{e_y}$ (R') O', $\vec{e_z'}$, $\vec{e_x'}$, $\vec{e_y'}$, $\times M$

$$\vec{V}(M/R) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R$$

vitesse de O' dans le référentiel R

$\vec{V}(O'/R)$ d'où $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(O'/R) + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_R$

(Info : $\left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R \equiv \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R$)

On a $\left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M}$

vitesse d'entraînement

donc $\Rightarrow \vec{V_e}(M/R) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R'} + \vec{V}(O'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M}$

vitesse absolue

$$\boxed{V_a(M) = V_R(M) + V_e(M)}$$

Composition des accélérations

Même conf que les vitesses

accélération d'entraînement du point O' dans R

$$\left(\frac{d\vec{V}(O'/R)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d^2\vec{OO'}}{dt}\right)_R = \vec{a}(O'/R)$$

accélération relative dans R' notée $\vec{a_r}(M)$

$$\left(\frac{d\vec{V_r}(M)}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{V_r}(M)}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM}$$

accélération

$$\left(\frac{d(\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M})}{dt}\right)_R = (\ldots)$$

$$= \frac{d(\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM})}{dt} = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right)_R$$

Rappel : On veut dériver $\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM}$ dans l'espace R

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM}\right)_R = \left(\frac{d\vec{\Omega}(R'/R)}{dt}\right)_R \wedge \vec{OM}$$

$$+ \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R$$

$$\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R = \underbrace{\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R}_{\vec{V}(M/R)} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM} \quad \text{donc} \left(\frac{d\vec{\Omega} \wedge \vec{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R \wedge \vec{O'M} +$$

$$\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{V}(M/R') + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}\right) = \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}(M/R') + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$$

a relative

$$\vec{a}(M/R) = \vec{a_r}(M)$$
$$+ \vec{a}(O'/R) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OM})$$
$$+ 2\vec{\Omega}(R'/R) \wedge V_r \ (\ldots)$$

relative

coriolis