Correction annale 2018-2019

Exercice 1

On cherche à résoudre le système linéaire $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 2y(t) + 4z(t) \\ y'(t) = -2x(t) - 2z(t) \\ z'(t) = -x(t) - y(t) - z(t) \end{cases}$

1. **Ecrire le système sous forme matricielle du type :** $X' = A.X \overset{donc}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2. **Montrer que la matrice A peut s'écrire sous la forme PDP^{-1} avec D diagonale.**

On calcule les valeurs propres de A

$$\begin{aligned}
\psi_A(p) &= \det(pI - A) = \det\left(\begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} p-4 & -2 & -4 \\ 2 & p & 2 \\ 1 & 1 & p+1 \end{bmatrix} \\
&= (p-4)(p(p+1)-2) - 2(-2(p+1)+4) + 1(-4+4p) \\
&= (p-4)(p^2+p-2) + 4p - 4 - 4 + 4p \\
&= p^3 - 3p^2 + 2p \\
&= p(p-1)(p-2)
\end{aligned}$$

A a 3 valeurs propres distinctes : $\boxed{\lambda_1 = 0}$, $\boxed{\lambda_2 = 1}$, $\boxed{\lambda_3 = 2}$. C'est une condition suffisante de diagonisabilité.

Donc il existe $P_{ensemble}$ et $D_{diagonale}$ telles que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$ et $P = [x_0 \quad x_1 \quad x_2]$ (base de vecteurs propres)

3. **Déterminer de telles matrices D et P sans calculer P^{-1}.**

On détermine une base de vecteur propre $\{x_0, x_1, x_2\}$

$$\left.\begin{aligned}
\ker(0I - A) &= \ker\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \overset{donc}{\Longrightarrow} x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\ker(1I - A) &= \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \overset{donc}{\Longrightarrow} x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\ker(2I - A) &= \ker\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \ker\left(\begin{bmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \overset{donc}{\Longrightarrow} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \boxed{P = [x_0 \quad x_1 \quad x_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

4. **Poser un changement de base et trouver l'ensemble des solutions de ce système.**

On pose $\begin{cases} X = PU \\ \dot{X} = P\dot{U} \\ U = P^{-1}X \end{cases} \overset{donc}{\Longrightarrow} \boxed{\dot{X} = AX = PDP^{-1}X} \Leftrightarrow P\dot{U} = PDU \Leftrightarrow \dot{U} = DU$

$$\overset{donc}{\Longrightarrow} U = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{u} = 0 \\ \dot{v} = 1v \\ \dot{w} = 2w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = e^{0}u(0) \\ v(t) = e^{t}v(0) \\ w(t) = e^{2t}w(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(t) = 1u(0) \\ v(t) = e^{t}v(0) \\ w(t) = e^{2t}w(0) \end{cases} \xrightarrow{\boxed{\dot{X} = PDP^{-1}X}} \boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & e^{t} & \\ & & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}}$$

5. **(Bonus) Calculer** P^{-1}

$$\begin{aligned}
\psi_p(x) &= \det(xI - P) = \det\left(\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= (x-1)(x(x-2)-1) + (x-2) \\
&= (x-1)(x^2-2x-1) + (x-2) \\
&= x^3 - 3x^2 + 2x - 1
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Cayley Hamilton : $P^3 - 3P^2 + 2P - I = 0 \Leftrightarrow P(P^2 - 3P + 2I) = I$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

Exercice 2

Soit un E espace vectoriel de dimension 3 muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$. Soit une base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de E telle que

$$\begin{cases} \langle v_1, v_1\rangle = 2 & \langle v_1, v_2\rangle = 0 & \langle v_1, v_3\rangle = 1 \\ & \langle v_2, v_2\rangle = 1 & \langle v_2, v_3\rangle = 0 \\ & & \langle v_3, v_3\rangle = 2 \end{cases}$$

1. **Déterminer la matrice M de produit scalaire sur la base B.** $\Rightarrow M = \left[\langle v_{i(ligne)}, v_{j(colonne)}\rangle\right] \overset{donc}{\Longrightarrow} \boxed{M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(symétrique)}}$

2. **Vérifier que M est bien définie positive (i.e. toutes ses valeurs propres sont strictement positives).**

Montrons que toutes les valeurs propres λ_i de M sont > 0

$$\psi_M(p) = \det(pI - M) = \det\begin{bmatrix} p-2 & 0 & -1 \\ 0 & p-1 & 0 \\ -1 & 0 & p-2 \end{bmatrix} = (p-2)^2(p-1) - (p-1) = (p-1)(p^2 - 4p + 3) = (p-1)^2(p-3)$$

Les valeurs propres de M sont $\boxed{\lambda_1 = 1}$ (double) et $\boxed{\lambda_2 = 3}$. Donc M est bien $\boxed{symétrique}$, $\boxed{définie}$, $\boxed{positive}$.

3. **Proposer un changement de base vers une base orthogonale.**

A partir de la base canonique $\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ on définit $v_1 = u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{0}{1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ soit la base orthogonale $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

4. **Proposer une base orthonormée.**

Soit la base orthonormée $\{w_1, w_2, w_3\}$ avec $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \frac{v_1}{\sqrt{\langle v_1, v_1\rangle}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}$, $w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|_2} = \frac{v_3}{\sqrt{v_3^T M v_3}} = \frac{v_3}{\sqrt{3/2}} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\0\\\sqrt{2/3}\end{pmatrix}$

Exercice 3

Soit F l'endomorphisme de l'ensemble des matrices $\mathbb{R}^{2\times 2}$ défini par : $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b & a \\ c & d \end{bmatrix}$

1. **Montrer que F est une symétrie.**

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ quelconque, $F \circ F(M) = F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = M \overset{donc}{\Longrightarrow} F \circ F = I_d$ alors F est une $\boxed{symétrie}$ de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

2. **Trouver une base de vecteur propres pour décrire la symétrie F.**

Les vecteurs propres d'une *symétrie* sont 1 et -1

- Vecteur propre pour 1 : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ car leurs images pour F sont elles-mêmes
- Vecteur propre pour -1 : $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ car leurs images pour F sont leurs opposées

Ces 4 matrices forment une famille libre de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, donc elles forment une base de vecteur propre.

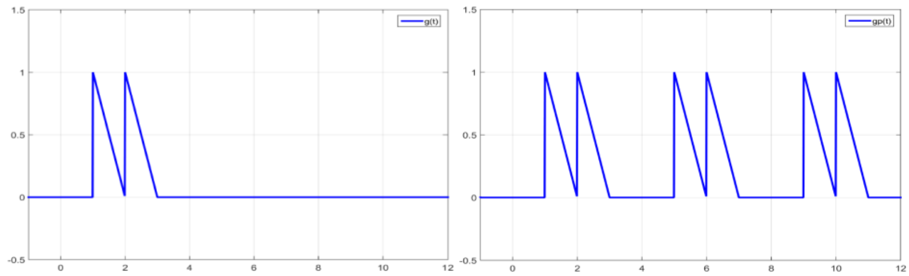
3. **Soit G l'endomorphisme de l'ensemble des matrices $\mathbb{R}^{2\times 2}$ défini par $G\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b & d \\ -a & c \end{bmatrix}$.**
Trouver un polynôme annulateur de G et en déduire les valeurs propres possible de G.

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ quelconque $G(M) = \begin{bmatrix} b & d \\ -a & c \end{bmatrix}$, $G \circ G(M) = \begin{bmatrix} d & c \\ -b & -a \end{bmatrix}$, $G \circ G \circ G(M) = \begin{bmatrix} c & -a \\ -d & -b \end{bmatrix}$, $G \circ G \circ G \circ G(M) = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = -M$. Donc $x \to x^4 + 1$ est un polynôme annulateur de G. Ses valeurs propres font donc partie des racines de ce polynôme : $\left\{e^{\frac{i\pi}{4}}.e^{-\frac{k\pi}{2}}\right\}$

4. **Construire l'application inverse G^{-1} à partir de G.** $\Rightarrow G \circ G \circ G \circ G = -id \overset{donc}{\Longrightarrow} G \circ (-G \circ G \circ G) = id \begin{cases} G^{-1} : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -c & a \\ d & b \end{bmatrix} \end{cases}$

Exercice 4

Soit la fonction g représentée ci-dessous



1. Exprimer la fonction g à l'aide de la fonction indicatrice $\mathbb{1}$.

$$\overset{\forall t\in\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \boxed{g(t) = (2-t)\mathbb{1}_{[1,2]}(t) + (3-t)\mathbb{1}_{[2,3]}(t)}$$

$$\xrightarrow{Expression\ en\ H\ et\ \delta} \boxed{g = H*\delta_1 - H*H*\delta_1 + H*\delta_2 + H*H*\delta_3}$$

2. Calculer la transformée de Fourier de g, en détaillant la méthode choisie.

Méthode du calcul direct

$$\begin{aligned}
\hat{g}(f) &= \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2i\pi ft}dt \\
&= \int_1^2 (2-t)e^{-2i\pi ft}dt + \int_2^3 (3-t)e^{-2i\pi ft}dt \\
&= \left[(2-t)\frac{e^{-2i\pi ft}}{-2i\pi f}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{-1}{-2i\pi f}e^{-2i\pi ft}dt + \left[(3-t)\frac{e^{-2i\pi ft}}{-2i\pi f}\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{-1}{-2i\pi f}e^{-2i\pi ft}dt \\
&= \frac{1}{2i\pi f}\left(e^{-2i\pi f} + e^{-4i\pi f}\right) - \left[\frac{1}{(2i\pi f)^2}e^{-2i\pi ft}\right]_1^3 \\
&= \boxed{\frac{1}{2i\pi f}\left(e^{-2i\pi f} + e^{-4i\pi f}\right) + \frac{1}{(2i\pi f)^2}\left(e^{-2i\pi f} - e^{-6i\pi f}\right)}
\end{aligned}$$

Méthode algébrique

$$g = H*\delta_1 - H*H*\delta_1 + H*\delta_2 + H*H*\delta_3$$

D'après les propriétés de la transformée de Fourier (**linéarité**, **convolution**, **retard**, **transformée de Fourier de H**)

$$\overset{\forall f\in\mathbb{R}}{\Longrightarrow} \hat{g}(f) = \frac{1}{2i\pi f} \cdot e^{-2i\pi f1} - \left(\frac{1}{2i\pi f}\right)^2 \cdot e^{-2i\pi f1} + \frac{1}{2i\pi f} \cdot e^{-2i\pi f2} + \left(\frac{1}{2i\pi f}\right)^2 \cdot e^{-2i\pi f3}$$

On considère à présent la fonction g_p périodique représentée ci-dessous.

3. Exprimer la fonction g_p par rapport à la fonction g et préciser sa période.

Comme g_p est la périodisation (période $T = 4$) de g alors $\boxed{g_p = g * Ш_4 = g * \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_{kT}\right)}$

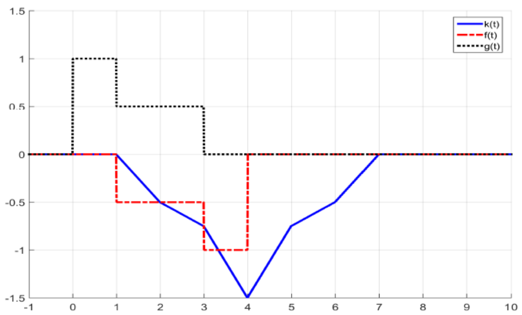
4. Calculer le spectre $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de g_p en détaillant la méthode choisie.

En utilisant les résultats précédents

$$\overset{\forall k\in\mathbb{Z}}{\Longrightarrow} c_k = \frac{1}{4}\int_0^4 g_p(t)e^{-2i\pi\frac{k}{4}t}dt = \frac{1}{4}\int_0^4 g(t)e^{-2i\pi\frac{k}{4}t}dt = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2i\pi\frac{k}{4}t}dt = \frac{1}{4}\hat{g}\left(\frac{k}{4}\right) = \boxed{\frac{2}{i\pi k}\left(e^{-i\pi\frac{k}{2}} + e^{i\pi k}\right) + \left(\frac{2}{i\pi k}\right)^2\left(-e^{-i\pi\frac{k}{2}} + e^{-3i\pi\frac{k}{2}}\right)}$$

Exercice 5

On considère 3 fonctions k, f, et g représentées ci-dessous



1. Exprimer f, g et k avec la fonction de Heaviside H et les distributions de Dirac δ_a.

$$\boxed{f = -\frac{1}{2}H * \delta_1 - \frac{1}{2}H * \delta_3 + H * \delta_4}$$

$$\boxed{g = H - \frac{1}{2}H * \delta_1 - \frac{1}{2}H * \delta_3}$$

$$\boxed{k = -\frac{1}{2}H * H * \delta_1 + \frac{1}{4}H * H * \delta_2 - \frac{1}{2}H * H * \delta_3 + \frac{3}{2}H * H * \delta_4 - \frac{1}{2}H * H * \delta_5 + \frac{1}{4}H * H * \delta_6 - \frac{1}{2}H * H * \delta_7}$$

2. Exprimer la dérivée de k avec la fonction de Heaviside H et les distributions de Dirac δ_a.

$k = H * k'$ car k est nulle en $-\infty$ donc

$$\boxed{k' = -\frac{1}{2}H * \delta_1 + \frac{1}{4}H * \delta_2 - \frac{1}{2}H * \delta_3 + \frac{3}{2}H * \delta_4 - \frac{1}{2}H * \delta_5 + \frac{1}{4}H * \delta_6 - \frac{1}{2}H * \delta_7}$$

3. En déduire la transformée de Laplace de f, de g et de k.

D'après les propriétés de la transformée de Laplace (**linéarité**, **convolution**, **retard**, **transformée de Laplace de H**)

$$F(p) = -\frac{1}{2}\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p}e^{-3p} + \frac{1}{p}e^{-4p} = \boxed{\frac{1}{2p}(-e^{-p} - e^{-3p} + 2e^{-4p})}$$

$$G(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p}e^{-3p} = \boxed{\frac{1}{2p}(2 - e^{-p} - e^{-3p})}$$

$$K(p) = -\frac{1}{2}\frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{4}\frac{1}{p^2}e^{-2p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2}e^{-3p} + \frac{3}{2}\frac{1}{p^2}e^{-4p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2}e^{-5p} + \frac{1}{4}\frac{1}{p^2}e^{-6p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2}e^{-7p}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4p^2}(-2e^{-p} + e^{-2p} - 2e^{-3p} + 6e^{-4p} - 2e^{-5p} + e^{-6p} - 2e^{-7p})}$$

4. Montrer que k est le produit de convolution de f et de g.

Pour montrer que $k = f * g$, on montre que $K(p) = F(p)G(p)$

$$F(p)G(p) = \left(\frac{1}{2p}\right)^2 (-e^{-p} - e^{-3p} + 2e^{-4p})(2 - e^{-p} - e^{-3p})$$

$$= \frac{1}{4p^2}(-2e^{-p} + e^{-2p} + e^{-4p} - 2e^{-3p} + e^{-4p} + e^{-6p} + 4e^{-4p} - 2e^{-5p} - 2e^{-7p})$$

$$= \boxed{\frac{1}{4p^2}(-2e^{-p} + e^{-2p} - 2e^{-3p} + 6e^{-4p} - 2e^{-5p} + e^{-6p} - 2e^{-7p}) = K(p) \rightarrow CQFD}$$