

# Les fonctions de la logique binaire

## Éléments de réalisation technologique

### 1. Introduction

Les fonctions logiques binaires peuvent être représentées par un réseau fabriqué à partir de plusieurs éléments de base dans une technologie considérée:

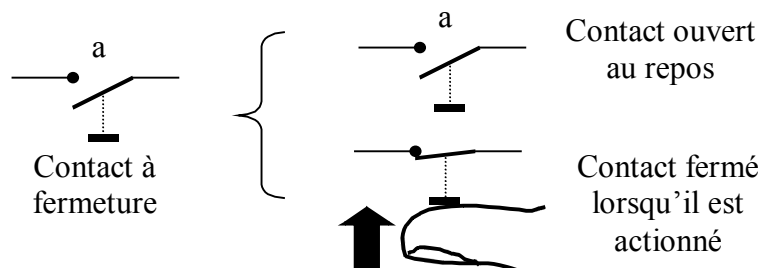
- électrique : réseau de contacts de relais électromagnétiques
- électronique: réseau de portes logiques (circuits intégrés)
- pneumatique et hydraulique : réseau de vérins, de cellules pneumatiques
- informatique : logique programmée, schéma et ligne de codes

### 2. Les réseaux électriques

#### 2.1 Les contacts électriques

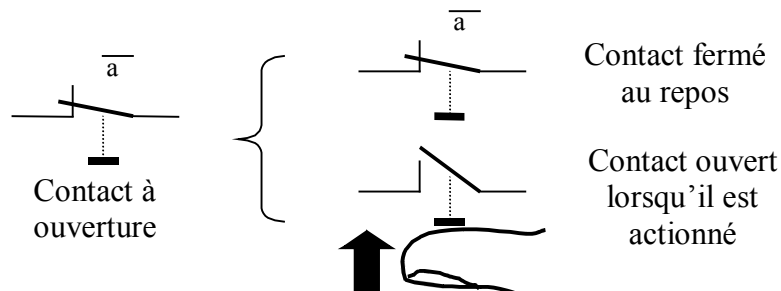
##### □ Contact à fermeture ou contact TRAVAIL

C'est un contact qui est normalement ouvert au repos et qui se ferme lorsqu'il est actionné. On désigne ce type de contact par une lettre « a » ...



##### □ Contact à ouverture ou contact REPOS

C'est un contact qui est normalement fermé au repos et qui s'ouvre lorsqu'il est actionné. On désigne ce type de contact par une lettre «  $\bar{a}$  », ...



## □ Contact à Relais électromagnétique

Le relais électromagnétique est constitué d'un électro-aimant et d'une barrette mobile qui joue le rôle de contact. Le schéma représenté ci-contre est un relais comportant deux contacts : un contact travail et un contact repos.

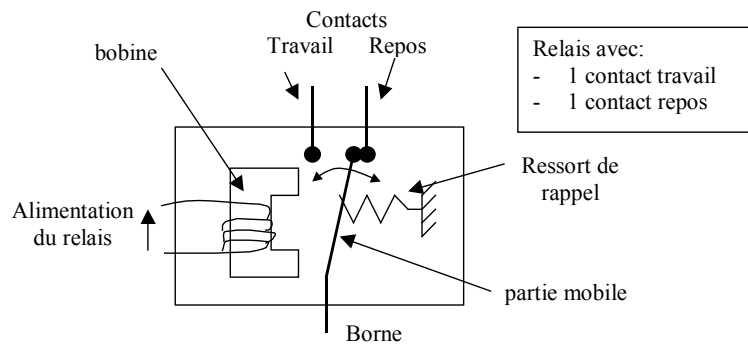
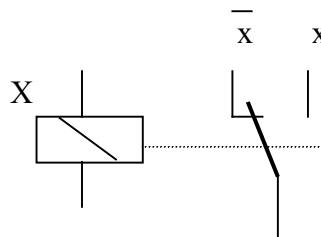


Schéma simplifié :

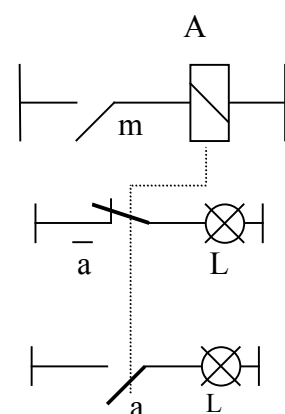


## 2.2 Etat logique d'un circuit électrique

- Un circuit est dit **passant** ou **fermé** lorsqu'un courant électrique circule dans ce circuit.
- Un circuit est dit **non passant** ou **ouvert** si le courant électrique ne peut circuler dans ce circuit.
- Un circuit électrique de **commutation** ne peut prendre que deux états logiques : l'état logique 0 (ou faux) ou l'état logique 1 (ou vrai) :
  - **Etat 0** : les récepteurs ne sont pas alimentés. Le circuit est ouvert. Pour les contacts, il y a absence d'action physique sur ceux-ci.
  - **Etat 1** : les récepteurs sont alimentés. Le circuit est fermé. Pour les contacts, il y a action physique sur ceux-ci.

- On représente par  $A$  l'état de la bobine d'un relais et par  $a$  &  $\bar{a}$  l'état de ses contacts:

- $A = 0$  : la bobine n'est pas alimentée (hors tension)
  - le contact travail est ouvert :  $a = 0$
  - le contact repos est fermé :  $\bar{a} = 1$
- $A = 1$  : la bobine est alimentée (sous tension)
  - le contact travail est fermé :  $a = 1$
  - le contact repos est ouvert :  $\bar{a} = 0$

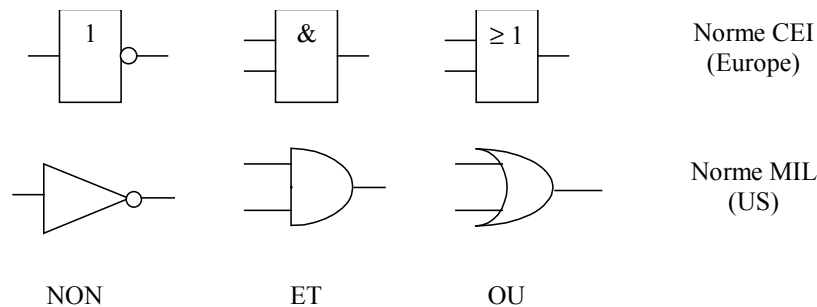


- Des éléments électriques en série réalise un ET
- Des éléments électriques en parallèle réalise un OU
- Le contact travail et le contact repos réalisent la variable logique et son complément

### 3. Les réseaux électroniques

- Les systèmes numériques (ordinateur,...) sont constitués d'un très grand nombre de composants qui contiennent chacun un certain nombre d'éléments différents. Ces éléments de base sont les portes logiques. Elles ont un nombre fixé d'entrées et réalisent une opération logique sur ces entrées.
- Un réseau de portes logiques réalisant une fonction logique est appelé logigramme.

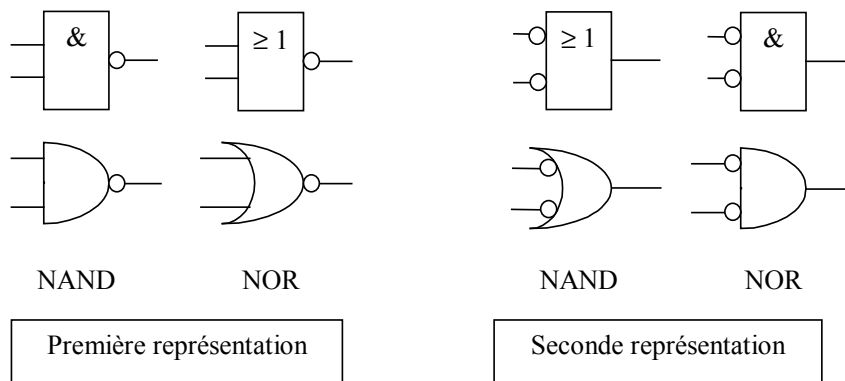
#### □ Représentation symbolique des portes logiques **NON**, **ET** & **OU**



**Remarque :** Les portes ayant plus de deux entrées sont représentées de la même façon. Il suffit d'ajouter autant de branches d'entrées que nécessaire

#### □ Représentation symbolique des portes logiques **NAND** , **NOR**

Rappel : théorème de De Morgan :  $\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$  &  $\overline{a+b} = \overline{a}.\overline{b}$



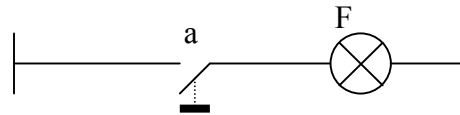
#### 3.1 Définition des fonctions logiques standards

Pour définir chacune des fonctions logiques, il est possible de donner une représentation :

- électrique : schéma développé,
- algébrique : équation,
- arithmétique : table de vérité
- littérale : définition
- logique : symbole logique (logigramme)
- chronologique : chronogramme

- Fonction **OUI**

- Schéma électrique :



- Equation :

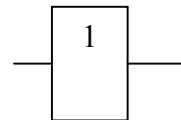
$$F = a$$

- Table de vérité :

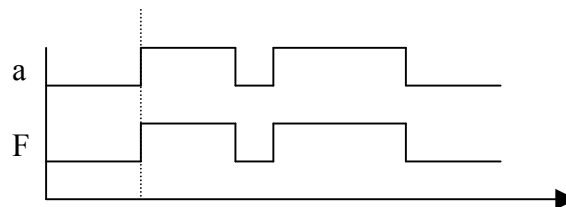
a	F
0	0
1	1

- Définition : La lampe F est montée en série avec le contact. Elle s'allume lorsque le contact « a » est actionné.

- Symbole logique :

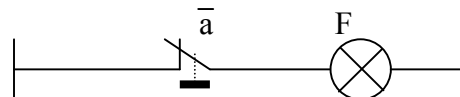


- Chronogramme :



- Fonction **NON (NOT)**

- Schéma électrique :



- Equation :

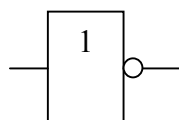
$$F = \bar{a}$$

- Table de vérité :

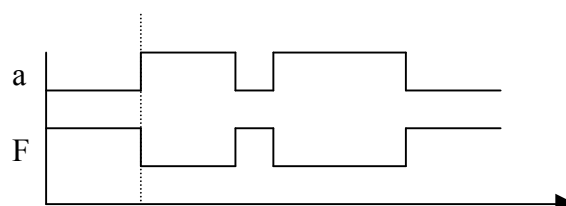
a	F
0	1
1	0

- Définition : La lampe F est montée en série avec le contact. Elle s'éteint lorsque le contact «  $\bar{a}$  » est actionné

- Symbole logique :

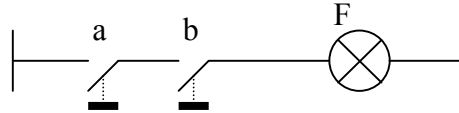


- Chronogramme :



- Fonction **ET (AND)**

- Schéma électrique :



- Equation :

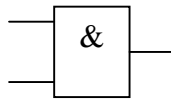
$$F = a \cdot b$$

- Table de vérité :

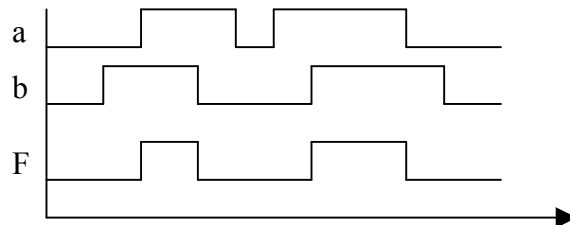
a	b	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Définition : La lampe F s'allume si on appuie sur « a » ET « b »

- Symbole logique :

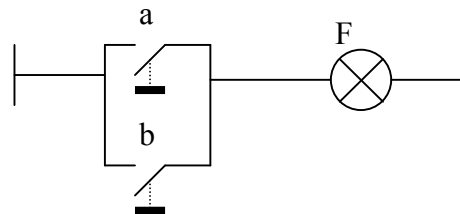


- Chronogramme :



- Fonction **OU (OR)**

- Schéma électrique :



- Equation :

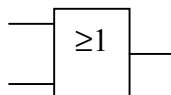
$$F = a + b$$

- Table de vérité :

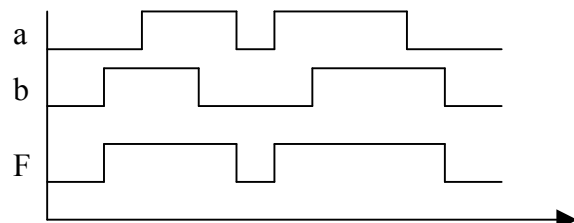
a	b	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- Définition : La lampe F s'allume si on appuie sur « a » OU « b » ou « a ET b »

- Symbole logique :



- Chronogramme :



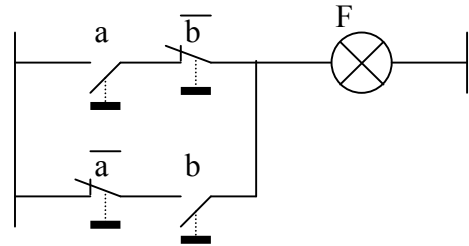
- Fonction **OU exclusif (XOR)**

- Schéma électrique :

- Equation :  $F = a \oplus b = \bar{a}b + a\bar{b}$

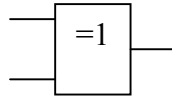
- Table de vérité :

a	b	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

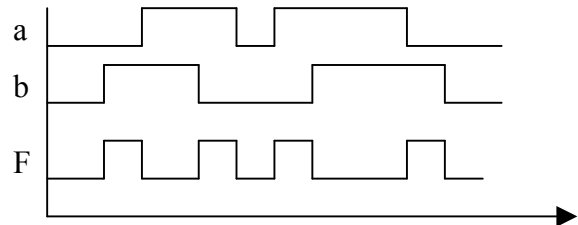


- Définition : La lampe F s'allume si on appuie sur « a » OU « b » mais pas les deux

- Symbole logique :



- Chronogramme :



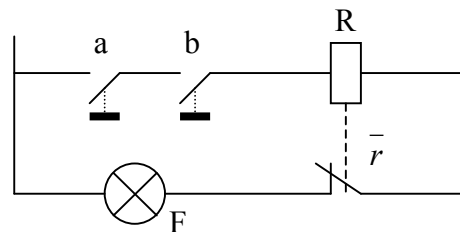
- Fonction **NON ET (NAND)**

- Schéma électrique :

- Equation :  $F = \overline{a.b}$

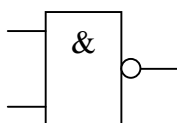
- Table de vérité :

a	b	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

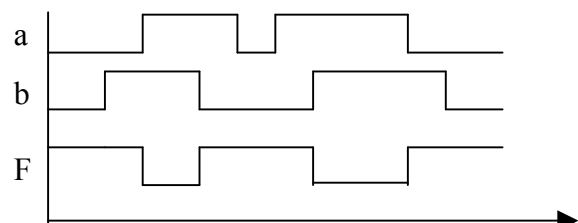


- Définition : Pour éteindre la lampe F , il faut appuyer sur « a » ET « b »

- Symbole logique :



Chronogramme



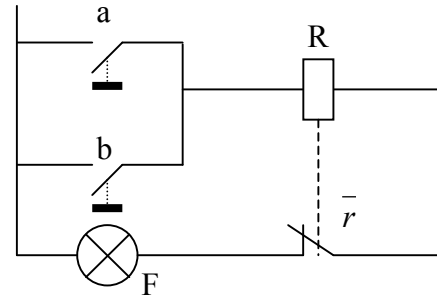
- Fonction **NON OU (NOR)**

- Schéma électrique :

- Equation :  $F = \overline{a + b}$

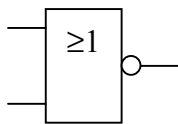
- Table de vérité :

a	b	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

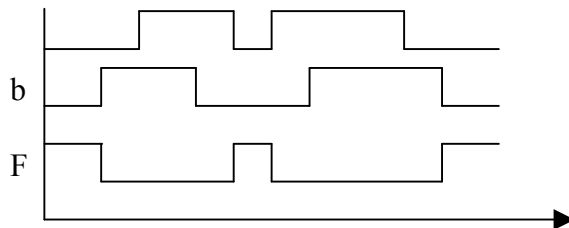


- Définition : La lampe F s'allume si rien n'est appuyé

- Symbole logique :



Chronogramme



## 4. Les propriétés de base de l'algèbre binaire

Il existe 3 opérateurs de base définis sur l'ensemble binaire  $S = \{0,1\}$  :

- L'opérateur **OU**, représenté par le signe '+' : Opération logique de somme
- L'opérateur **ET**, représenté par le signe '.' : Opération logique de produit
- L'opérateur **NON**, représenté par une barre '—': Opération logique de négation ou de complémentation

OU	ET	NON
$0 + 0 = 0$	$0 . 0 = 0$	$\bar{1} = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 . 1 = 0$	
$1 + 0 = 1$	$1 . 0 = 0$	$\bar{0} = 1$
$1 + 1 = 1$	$1 . 1 = 1$	

□ Définitions :

- la **somme** logique de a et b, noté **a + b**, réalise le OU entre deux variables logiques (a + b se lit « a ou b »). On parle aussi d'union logique.
- le **produit** logique de a et b, noté **a . b** (qu'on note aussi **ab**), réalise le ET entre deux variables logiques (a . b se lit « a et b »). On parle aussi d'intersection logique.
- le **complémentaire** de a, noté  $\bar{a}$ , réalise le NON de cette variable logique ( $\bar{a}$  se lit « a barre » ou « non a »)

Règles	Fonction OU	Fonction ET
Commutativité	$a + b = b + a$	$a . b = b . a$
Associativité	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a . (b . c) = (a . b) . c$
Distributivité	OU par rapport à ET : $a + (b . c) = (a + b) . (a + c)$	ET par rapport à OU : $a . (b + c) = (a . b) + (a . c)$
Élément neutre	$a + 0 = a$	$a . 1 = a$
Complémentaire	$a + \bar{a} = 1$	$a . \bar{a} = 0$
Forçage (absorbant)	$a + 1 = 1$	$a . 0 = 0$

*Règles de base*

Règles	Fonction OU	Fonction ET
Nihil Potence (Involution)	$\bar{\bar{a}} = a$	
Idem potence	$a + a = a$	$a . a = a$
Absorption 1	$a + ab = a$	$a(a + b) = a$
Absorption 2	$a + \bar{a}b = a + b$	$a(\bar{a} + b) = ab$
Consensus	$ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c$	$(a + b)(\bar{a} + c)(b + c) = (a + b)(\bar{a} + c)$
De Morgan	$\overline{a + b} = \bar{a} . \bar{b}$	$\overline{a . b} = \bar{a} + \bar{b}$

*Autres règles de l'algèbre binaire*

## 5. Simplification des fonction logiques

cf. cours Karnaugh