TD 4 : Signaux et systèmes à temps discret

Exercice 1 : Représentation fréquentielles des signaux à temps discret

Calculer la représentation fréquentielles (et éventuellement la transformée en Z) des signaux suivants :

1. Kronecker : $\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. Porte de longueur L : $\mathbb{1}_{\{0,\dots,L-1\}}[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n < L, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
   En déduire la transformée en z de l'échelon.

3. Porte centrée : $\mathbb{1}_{\{-N,\dots,N\}}[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } -N \leq n \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

4. Sinusoïde de durée finie : $\mathbb{1}_{\{-N,\dots,N\}}[n].\cos(2\pi f_0 n T_e) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 n T_e) & \text{si } -N \leq n \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

5. Sinusoïde infinie : $x[n] = \cos(2\pi n f_0/F_e)$.
   Attention de bien distinguer le cas ou la sinusoïde est périodique ou non !

Exercice 2 : Filtres idéaux

1. Calculer le signal dont la transformée de Fourier est de période F_e définie par :
$$\widehat{x}(f) = \mathbb{1}_{[-f_0,f_0]}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in [-f_0, f_0], \text{ (avec } f_0 < F_e/2) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. En déduire le signal dont la transformée de Fourier est de période F_e définie par :
$$\widehat{y}(f) = \mathbb{1}_{[-f_1,-f_0]}(f) + \mathbb{1}_{[f_0,f_1]}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in [-f_1, -f_0] \cup [f_0, f_1], \\ 0 & \text{sinon, avec } f_0 < f_1 < F_e/2 \end{cases}$$

Exercice 3 : Transformée en z et domaine de convergence

1. Rappeler la transformée en z de l'échelon en précisant son domaine de convergence.
2. Calculer la transformée en z de $x[n] = -u[-n-1] = -\mathbb{1}_{\{-\infty,\dots,-1\}}[n] = \begin{cases} -1 & \text{si } n < 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$
   en précisant son domaine de convergence.
3. Que pouvez vous conclure sur l'unicité de la transformée en z d'un signal ?
4. Calculer la transformée en z de $x[n] = a^n u[n]$ pour $a \in \mathbb{C}$ en précisant son domaine de convergence.
5. Calculer la transformée en z de $y[n] = na^{n-1}u[n]$, en remarquant qu'il s'agit de la dérivée par rapport au paramètre a de $x[n]$.

Exercice 4 : FFT : un exemple d'algorithme rapide de calcul de la TFD

Un moyen d'obtenir un algorithme rapide (c'est-à-dire avec un coût de calcul réduit donc d'exécution plus rapide sur un processeur) pour calculer la TFD est de séparer les échantillons pairs et impairs des signaux et de calculer la TFD à partir des TFDs des signaux correspondants. Nous allons étudier cela plus en détail.

Soit un signal $y[n]$ de période N un nombre pair. En séparant les échantillons pairs et impairs, on construit les signaux $y_1[n] = y[2n]$ et $y_2[n] = y[2n+1]$ de période $\frac{N}{2}$.

1. Donner la relation entre la Transformation de Fourier Discrète $Y[k]$ (pour $k < \frac{N}{2}$) et celles de $y_1[n]$ et $y_2[n]$. De même pour $Y[k + \frac{N}{2}]$ (toujours pour $k < \frac{N}{2}$).
2. En déduire un moyen de calculer la Transformation de Fourier discrète d'un signal de période N par deux Transformations de Fourier discrètes de signaux de période $\frac{N}{2}$. Poursuivre le raisonnement jusqu'à calculer des TFD de signaux de longueur 2 dans le cas où N est une puissance de 2 : $N = 2^M$.
3. Calculer add(N) et mult(N) le nombre d'additions et de multiplications complexes nécessaires pour le calcul de la TFD d'un signal par le schéma précédent pour $N = 2^M$. Comparer au nombre d'opérations nécessaires si l'on utilise la définition de la TFD.

3. Etablir la relation entre $x_r(t)$ et $x_a(t)$ en faisant apparaître la valeur du signal x_a aux instants d'échantillonnage.

4. Tracer sur le schéma de la Fig. 2 la représentation temporelle du signal reconstruit à partir de celle du signal analogique original $x_a(t)$. Cette reconstruction vous paraît-elle satisfaisante ?

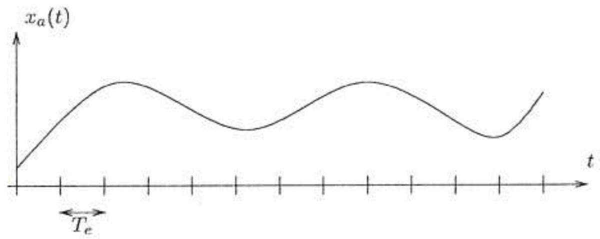


FIGURE 2 – Représentation temporelle du signal original et du signal reconstruit

5. Établir et interpréter la relation entre la transformée de Fourier $\widehat{x}_r(f)$ du signal reconstruit et la transformée $\widehat{x}_e(f)$ du signal échantillonné.
6. Tracer grossièrement sur le schéma de la Fig. 3 le spectre du signal reconstruit. Commenter...
7. Que faudrait-il faire pour retrouver exactement le signal analogique original à partir du signal analogique ainsi reconstruit ?

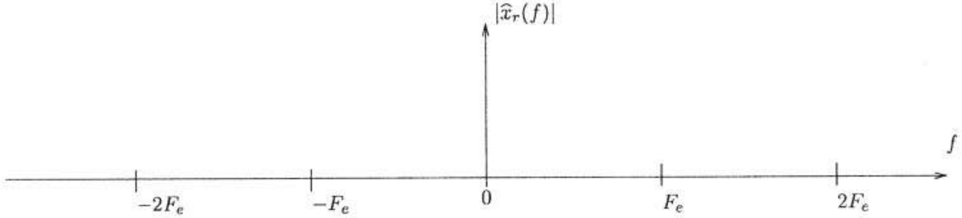


FIGURE 3 – Représentation fréquentielle du signal reconstruit

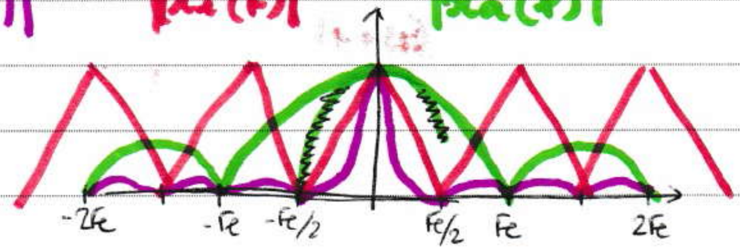
TD4
Filtrage

Exercice 3 (suite)

$x_r(t) = x_e(t) * \boxed{\mathbb{1}_{[0,Te[}(t)}$

$\hat{x}_r(f) = \hat{x}_e(f) \cdot \boxed{Te\ \text{sinc}(fTe)\, e^{-j\pi f Te}}$

$|\hat{x}_r(f)|$ $|\hat{x}_e(f)|$ $|\hat{x}_a(f)|$



Le signal reconstruit $x_R(t)$ n'est pas correct :
- les fréquences < Fe/2 ont été atténuées
- il reste des fréquences ≥ Fe/2

Pour retrouver le signal original $x_a(t)$ il faudrait filtrer le signal $x_r(t)$ par un filtre de réponse en fréquence $\hat{h}(f) = \frac{1}{Te\ \text{sinc}(fTe)} \mathbb{1}_{[-Fe/2, Fe/2]}(f)$

TD4
Filtrage

Exercice 1 : ~~Etude des filtres~~ Représentation fréquentielle des signaux à temps discret

~~$H_1 : s[n] = \frac{1}{2}(e[n] + e[n-1])$~~

~~Ce filtre est il causal ?~~ $\delta[n] \xrightarrow{TFSD} \hat{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-2j\pi n f/Fe}$

Rappel

① Kronecker : $d[n] = \begin{cases} 1 \text{ si } n=0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Rappel
$\boxed{\hat{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-2j\pi n f/Fe}}$

~~② Porte de longueur~~

donc $\hat{\delta}(f) = \delta[0]\, e^{-2j\pi n f/Fe} = 1$

Kronecker nulle sauf en 0 ⚠ ~~$\delta(0) = 1$~~ interdit
un dirac ne vaut pas 1 en 0
mais le kronecker oui ⇒ $\delta[0] = 1$

② $x[n] = \mathbb{1}_{\{0,\dots,L-1\}}[n]$ ⇒ porte de longueur L

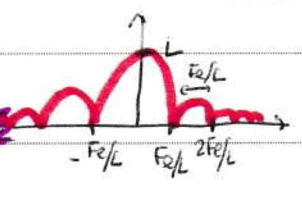
$\hat{x}(f) = \sum_{n=0}^{L-1} 1 \cdot e^{-2j\pi f n/Fe}$ ⟶ série géométrique (voir cour p36)

$\boxed{\sum_n q^n = \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1-q} \times 1^{er} \text{ terme}}$

$= 1 \times \frac{1 - e^{-2j\pi L f/Fe}}{1 - e^{-2j\pi f/Fe}}$

$= \dots$

$= e^{-j\pi f(L-1)/Fe} \underbrace{\frac{\sin(\pi L f/Fe)}{\sin(\pi f/Fe)}}_{\text{sinus cardinal périodisé}}$



$B_2(f)$

③ $\mathbb{1}_{\{-N \dots N\}}[n]$ → porte de longueur **2N+1**

$\hat{B_2}(f) = \sum_{n=-N}^{N} e^{-2j\pi f n/Fe}$ série géo

$= e^{+2j\pi N f/Fe} \dfrac{1 - e^{-2j\pi(2N+1)f/Fe}}{1 - e^{-2j\pi f/Fe}}$

$= 1 \dfrac{\sin(\pi(2N+1)f/Fe)}{\sin(\pi f/Fe)}$

propriété de translation

$\boxed{\text{Remarque : } \mathbb{1}_{\{-N \dots N\}}[n] = \mathbb{1}_{\{0 \dots 2N\}}[n+N]}$

$B_2[n]$

④ $\mathbb{1}_{\{-N \dots N\}}[n] \cos(2\pi f_0 n Te) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 n Te) & \text{si } -N \leq n < N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$= \begin{cases} \dfrac{e^{2j\pi n f_0/Fe} + e^{-2j\pi n f_0/Fe}}{2} & \text{si } -N \leq n < N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

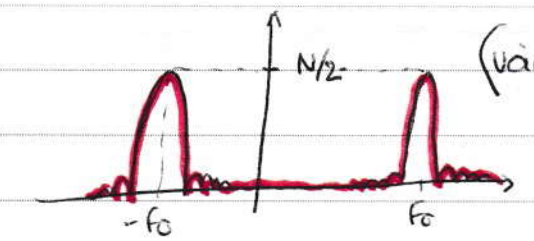
$\hat{B_3}(f) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\dfrac{e^{2j\pi n f_0/Fe} + e^{-2j\pi n f_0/Fe}}{2} \right) e^{-2j\pi n F/Fe}$

→ Remarque : propriété de modulation

↪ si $y[n] = x[n] e^{2j\pi n f/Fe}$ alors $\hat{y}(f) = \hat{x}(f - f_0)$

Ici $\hat{B_3}(f) = \frac{1}{2} \hat{B_2}(f - f_0) + B_2(f + f_0)$

$= \frac{1}{2} \left(\dfrac{\sin(\pi(2N+1)(f-f_0)/Fe)}{\sin(\pi f - f_0)/Fe} + \dfrac{\sin(\pi(2N+1)(f+f_0)/Fe)}{\sin(\pi(f+f_0)/Fe)} \right)$



(voir 1er poly page de garde)

Exercice 2 : Filtre Idéal

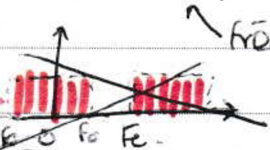
① Calculer le signal dont la transformée de Fourier de période Fe est :

$\hat{x}(f) = \mathbb{1}_{\{-f_0, f_0\}}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f \in [-f_0, f_0] \text{ avec } f_0 = Fe/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

↖ fréquence continue

Rappel

$\boxed{\text{sinc} = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}}$



et on est périodique en fréquence

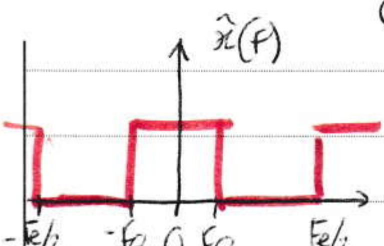
⇒ TFSD^{-1}

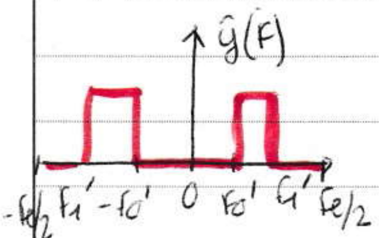
On applique la formule du cours

$\boxed{x[n] = \dfrac{1}{Fe} \int_{-Fe/2}^{Fe/2} \hat{x}(f) e^{2j\pi n f/Fe} df} = \dfrac{1}{Fe} \int_{-f_0}^{f_0} e^{2j\pi n f/Fe} df$

$= (\dots) = \dfrac{2f_0}{Fe} \text{sinc}\left(\dfrac{2nf_0}{Fe}\right)$

↪ $\left[\dfrac{e^{2j\pi n f/Fe}}{2j\pi f/Fe} \right]_{-f_0}^{f_0} = \cancel{e^{2j\pi n f_0/Fe}}$





② avec $fo = \frac{f_1' - f_0'}{2}$

1ère Idée

$$\hat{y}(f) = \underbrace{\hat{x}\left(f - \frac{f_1' + f_0'}{2}\right) + \hat{x}\left(f + \frac{f_1' + f_0'}{2}\right)}$$

⇒ ~~via la propriété de modulation~~

2ème Idée $\cancel{y[n] = 2\cos\left(2\pi n \frac{fo' + f_1}{2Fe}\right) \frac{f_1 - f_0'}{Fe} \operatorname{sinc}\left(\frac{nF_1 - Fe}{Fe}\right)}$

$$\hat{y}(f) = \mathbb{1}_{[-f_1, f_1]}(f) - \mathbb{1}_{[-fo, fo]}(f) \quad \text{(à vérifier)}$$

$$\hat{y}[n] \frac{2f_1}{Fe} \operatorname{sinc}(2n f_1/Fe) - \frac{2fo}{Fe} \operatorname{sinc}(2n fo/Fe)$$

La première idée est plus simple mais on peut aussi utiliser la seconde idée.

Exercice 3 : Transformée en z et domaine de convergence

① Rappeler la TF en z de l'échelon et son domaine de convergence :
(cours p. 38)

$$\boxed{u[n] = \mathbb{1}_{\{0 \dots \infty\}}[n] \xrightarrow{TZ} U(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} \text{ pour } |z| > 1}$$

② Calculer la transformée en z de $x[n] = -u[-n-1] = -\mathbb{1}_{\{-\infty, -1\}}[n]$

$$= \begin{cases} -1 \text{ si } n < 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = -\sum_{m=+\infty}^{1} z^{m} = -\sum_{m=1}^{+\infty} z^{-m}$$

changement de variable $m = -n$

$$= -z \frac{1 - \lim z^{m}}{1 - z} = -\frac{z}{1 - z} \text{ si } |z| < 1$$

③ Que pouvez vous conclure sur l'unicité de la TF en z d'un signal

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \text{ pour } \boxed{|z| > 1}$$

$$X(z) = \frac{-z}{1 - z} = \frac{z}{z - 1} \text{ pour } \boxed{|z| < 1}$$

domaine de convergence ≠

Pour avoir l'unicité de la transformée en z il ne faut pas oublier de lui associer son domaine de convergence !

SMA C