U.P.S. - F.S.I. UPSSITECH

EXAMEN D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES– SRI 2

Décembre 2021 - Durée : 45 mns – Polycopié de cours autorisé

1. Un agriculteur possède 10 hectares de terrain à utiliser entièrement pour cultiver de la vigne, des céréales ou des légumes. Chaque type de culture nécessite un certain temps de travail et un investissement en capital et donne à terme un certain bénéfice par hectare (voir tableau ci-dessous).

Culture	Heures de travail/hectare	Investissement/hectare	Bénéfice net/hectare
Vigne	9	54 €	60 €
Céréales	9	26 €	45 €
Légumes	3	27 €	30 €

Sachant que l'agriculteur possède un capital de 540 € et de 48 heures de travail il cherche à savoir la taille des parcelles de chaque culture pour optimiser son bénéfice.

(a) i. Modéliser le problème d'optimisation sous forme de programmation linéaire

ii. L'agriculteur peut embaucher du personnel au tarif de 12 €/ heure. Comment modifier votre modélisation pour déterminer le nombre d'heures pour lesquelles il devrait embaucher afin d'optimiser son bénéfice.

(b) On suppose maintenant que l'agriculteur ne souhaite embaucher aucun salarié et qu'il n'a pas de problème de capital.

La solution optimale est de cultiver 3 hectares de vigne et 7 hectares de légumes.

Ecrire les variables de base, X_B, et hors base X_H.

Sachant qu'il souhaite garder ce type de solution (culture de la vigne et des légumes), donner les valeurs maximale et minimale d'heures de travail permises pour garder ces deux cultures.

2. Résoudre le problème d'optimisation suivant :

min $f(x,y) = x^2 + y^2 - x.y + y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

sous la contrainte $h(x,y) = x + 2.y - 1 = 0$

(a) i. Calcul théorique : calculer un optimum local s'il existe.

ii. Méthode numérique : afin de calculer la solution on veut annuler le gradient du Lagrangien par la méthode de Newton. Si on suppose que le point initial $(x_0, y_0) = (1, 1)$ et que le multiplicateur de Lagrange égale 1 à l'état initial ($\lambda_0 = 1$), à quel point (x_1, y_1) arrive-t-on après la première itération ?

(b) On remplace la contrainte $h(x,y)$ par la contrainte $g(x,y) = x + 2.y - 1 <= 0$. Calculer un optimum local s'il existe.