1.1 Commandabilité $x(t) \rightarrow \boxed{SYST \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \rightarrow y(t)$ ⚠ 1e question dans quelle base est donnée la RE ?

Ici on est dans une base quelconque ⇒ on applique le critère de Kalman. Système comm SSI $Rg(\mathcal{C}) = n$ = Nb de var d'état avec $\mathcal{C} = (B, AB \dots A^{n-1}B)$. Ici $\mathcal{C}(B, AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

avec $AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det(\mathcal{C}) = 2 \neq 0 \Rightarrow Rg(\mathcal{C}) = 2 \Rightarrow$ SYSTEME COMMANDABLE

Commandabilité et observabilité
TD – UPSSITECH SRI 1e année

1.2 Observabilité

On est dans une base quelconque ⇒ On applique le critère de Kalman

Système observable SSI $Rg(\mathcal{O}) = n$ avec $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$

Ici $n = 2 \Rightarrow \mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

avec $CA = (1 \; -1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (-1 \; 1)$

$\det(\mathcal{O}) = 1 - 1 = 0 \rightarrow Rg(\mathcal{O}) < 2 \Rightarrow$ Système inobservable

I. Étude de commandabilité et d'observabilité :

On considère le système suivant :

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{X} & = & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}_{(2,2)} \underbrace{X}_{(2,1)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{(2,1)} \underbrace{u}_{(1,1)} \\ \underbrace{y}_{(1,1)} & = & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}}_{(1,2)} \underbrace{X}_{(2,1)} \end{array} \right.$$

$(1,1) \rightarrow$ une seule commande

$(2,1) \rightarrow$ 2 variables d'état $\hookrightarrow n = 2 \leftarrow$ ordre du système

une seule sortie

1. Étudier la commandabilité, l'observabilité et la stabilité de ce système.
2. Sachant que la forme diagonale s'écrit : valeurs propres

Dans base diagonale $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = +1 > 0$

Pour la base initiale $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{X}_d & = & \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(2,2)} \underbrace{X_d}_{(2,1)} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}}_{(2,1)\ B_d} \underbrace{u}_{(1,1)} \\ y & = & \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}}_{C_d} X_d = -x_{d1} \end{array} \right.$$

⇒ Commandable : Système commandable car aucune ligne de $B_d = 0$.

⇒ Observable : Système inobservable car 1 colonne de $C_d = 0$

NB : on ne voit pas x_{d2} dans la sortie ⇒ stabilité SSI toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle < 0

1.3 $x(t) = u_0 = 1 \rightarrow \boxed{SYSTEME} \rightarrow y(t)$ On s'est placé à condition initiale = 0

retrouver les résultats de la première question et préciser le mode concerné par la perte d'observabilité.

3. On trace la réponse indicielle du système à un échelon unité et à conditions initiales nulles (i.e., on trace la sortie $y(t)$ en considérant que $X(0) = [0 \;\; 0]^T$). On observe le résultat proposé sur la figure ci-après. Cela vous semble-t-il logique ?

1.4 $X_d(t) = \begin{pmatrix} -1 + e^{-t} \\ -\sqrt{2}(1 - e^{t}) \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \rightarrow x_{d1}(t) \\ \rightarrow x_{d2}(t) \end{matrix}$ MODES

$\lim_{t \to \infty} x_{d1}(t) = -1$

$\lim_{t \to \infty} x_{d2}(t) = \infty$

$y = (-1 \;\; 0) X_d = -x_{d1} = 1 - e^{-t} \rightarrow$ Seul le mode stable intervient. On ne voit pas le mode instable → solution : changer le capteur ou rajouter 1 capteur capable de "voir" la partie inobservable.

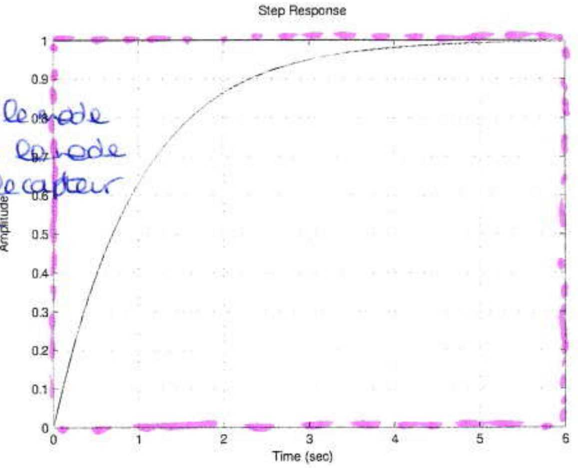


FIGURE 1 – Réponse indicielle du système considéré

4. On détermine la solution de l'équation d'état dans la base diagonale pour le cas précédent :

$$X_d(t) = \left[\; -1 + e^{-t} \quad -\sqrt{2}(1 - e^{t}) \; \right]^T$$

En déduire $y(t)$. Retrouver le résultat précédent.

II A 2 (suite) → BLOC 2 $G_2(p) = \dfrac{1}{p^2 + 7p + 6}$ (a_1, a_0) → 1 FT du **2nd** ordre ⇒ RE d'ordre **2** ⇒ **2** variables d'état

On choisit d'exprimer la RE dans la base CC : $\dot{X}_{cc}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} X_{cc} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U$

RE du bloc 2 : $\begin{cases} \dot{X}_{cc} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} X_{cc} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(t) \\ Y = (1 \ \ 0)\, X_{cc} \end{cases}$ **Représentation d'état du bloc 2**

Conclusion

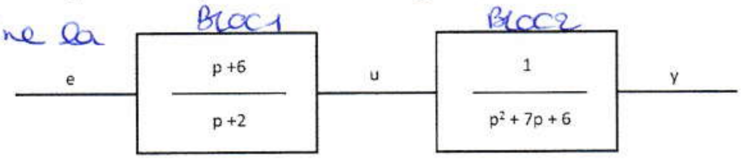
Chaque bloc est commandable et observable (pris séparément). Qu'en est il à ce lors connecté ?

II. Commandabilité et observabilité dans les schémas-blocs

A. On considère le système représenté sur la figure 2 :

Pour vérifier on détermine la RE des 2 blocs

$E — \boxed{B1} — \boxed{B2} — Y$; $B1 \to x_0$; $B2 \to x_1$ et x_2



On a 3 variables d'état

FIGURE 2 – Schéma-bloc du système considéré

$X(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ On détermine $\dot{X}(t)$ pour avoir la RE associée → $\begin{cases} \dot{x}_0(t) = -2x_0(t) + 4e(t) \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1 - 7x_2 + u(t) \end{cases}$?

1. Calculer la fonction de transfert du système $\frac{Y(p)}{E(p)}$.
2. Conclure sur la commandabilité et l'observabilité du système d'entrée $e(t)$ et de sortie $y(t)$.

Or $u(t) = x_0(t) + e(t) \Rightarrow \dot{x}_2 = -6x_1 - 7x_2 + x_0 + e$

$\Rightarrow \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e(t)$

$Y = x_1 = (0 \ \ 1 \ \ 0)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

B. Exercice « pour s'entraîner » :
On considère le système représenté sur la figure 3 :

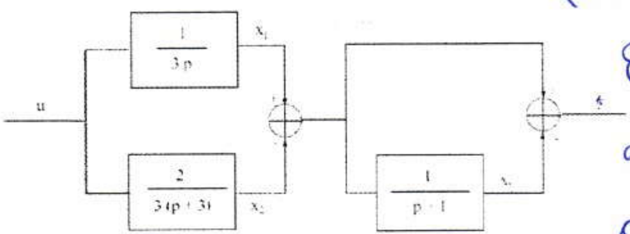


FIGURE 3 – Schéma-bloc du système considéré

$\mathcal{C} = (B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 0 & 1 & -8 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ B AB A^2B

$\det(\mathcal{C}) = 0$

↳ $\boxed{\text{système non commandable}}$

$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} C \\ CA \\ CA^2 \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & -7 \end{pmatrix}$

$\det(\mathcal{O}) = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{système observable}}$

1. Donner une représentation d'état du système.
2. Déterminer la transmittance.
3. Étudier la commandabilité et l'observabilité du système.

II A 1 $E(p) — \boxed{\dfrac{p+6}{p+2}} \xrightarrow{U(p)} \boxed{\dfrac{1}{p^2+7p+6}} — Y(p)$; $G_1(p)$, $G_2(p)$

$Y(p) = G_2(p) U(p)$
$U(p) = G_1(p) E(p)$ ⇔ $E(p) \boxed{G(p)} Y(p)$ $Y(p) = G(p) E(p)$

1 Trouver $G(p) \Rightarrow Y(p) = G_1(p) E(p) G_2(p)$ donc $G(p) = \dfrac{p+6}{p+2} \dfrac{1}{p^2+7p+6}$

$p^2 + 7p + 6 = 0$ $\begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 = -6 \end{cases}$; $\dfrac{\cancel{p+6}}{p+2} \dfrac{1}{(p+1)\cancel{(p+6)}} = \dfrac{1}{(p+2)(p+1)}$ $G(p)$

On a une perte de commandabilité ou d'observabilité

$E(p) \boxed{\dfrac{\cancel{p+6}}{p+2}} U(p) \boxed{\dfrac{1}{(p+1)\cancel{(p+6)}}} Y(p)$ ⇒ Pole $p = -6$ non commandable et observable
2 poles -1 et -2 commandable et observable

⇒ Système $\boxed{\text{non commandable}}$ mais $\boxed{\text{observable}}$

2 Construire la RE des blocs 1 et 2

→ $\boxed{\text{BLOC 1}}$ $U(p) = \dfrac{p+6}{p+2} E(p) \Rightarrow (p+2) U(p) = (p+6) E(p)$

On prend la TL inv : $\dot{u}(t) + 2u(t) = \dot{e}(t) + 6e(t)$

Rappel : $\mathcal{L}(u(t)) = U(p)$
$\mathcal{L}^{-1}(pU(p)) = \dot{u}(t)$ (en considérant les CI = 0)

$\dot{u}(t) - \dot{e}(t) = -2u(t) + 6e(t)$

$x_0(t) = u(t) - e(t)$

$\dot{x}_0(t) = -2u(t) + 6e(t) = -2u(t) + 2e(t) + 4e(t) = 2\underbrace{(e(t) - u(t))}_{-x_0(t)} + 4e(t)$

$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = -2x_0(t) + 4e(t) \\ u(t) = 1\, x_0(t) + 1\, e(t) \end{cases}$ A B C D

$e(t) \boxed{\text{BLOC 1}} u(t)$

Représentation d'état du bloc 1