CHAPITRE 3

RÉPONSES TEMPORELLES ET FRÉQUENTIELLES : UNE INTRODUCTION

Viviane CADENAT
Enseignant – chercheur à l'UPS
LAAS – CNRS
cadenat@laas.fr

Au programme

Introduction

- Hypothèses
  - Système linéaire invariant mono-entrée/mono-sortie
  - Trois types de modèles

Représentation d'état

$$\dot X(t)=AX(t)+BU(t)$$
$$Y(t)=CX(t)+DU(t)$$

↓

Modèle interne

U(t) → Modèle (X(t)) → Y(t)

Équation différentielle d'ordre n

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot y(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 \dot u(t) + b_0 u(t)$$

Fonction de transfert

$$G(p) = \frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

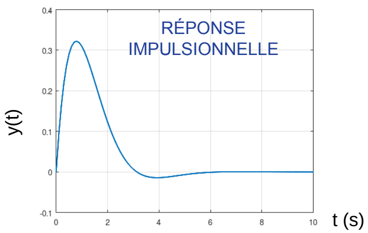
Modèles externes ou entrées/sorties

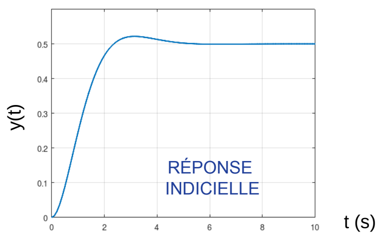
U(t) → Modèle → Y(t)

Réponse temporelle

- Généralités
  - **Définition :** Sortie y(t) délivrée par le système sous l'action de la commande envoyée u(t)

    u(t) → Système → y(t)
  - **Réponses usuelles**
    - Réponse *impulsionnelle* : u(t) = δ(t) (impulsion de Dirac)
    - **Réponse *indicielle* : u(t) = u_0 = constante**
    - Mais aussi : réponse *à une rampe* (u(t) = u_0 t), ...





Réponse temporelle

- Détermination
  - A partir de l'équation différentielle → résoudre
  - A partir de la représentation d'état

$$X(t) = \underbrace{e^{At}X(0)}_{\text{Régime libre}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau}_{\text{Régime forcé}}$$

$$Y(t)=CX(t)+DU(t)$$

► Exemple : TD1 → Réponse indicielle des bacs d'eau

$$Y(t) = \underbrace{4/3\, e^{-t} + 2/3\, e^{-7t}}_{\text{Régime libre}} \underbrace{- 2/3\, e^{-t} + 2/21\, e^{-7t} + 4/7}_{\text{Régime forcé}} = \underbrace{2/3\, e^{-t} + 16/21\, e^{-7t}}_{\text{Régime transitoire}} + \underbrace{4/7}_{\text{Régime permanent}}$$

Conditions initiales

Réponse temporelle

- Détermination
  - A partir de la fonction de transfert
    - Écrire Y(p) = G(p) U(p)
    - Décomposer en éléments simples (si nécessaire)
    - Déterminer y(t) directement à partir des tables des transformées de Laplace

Attention : on ne voit que le régime forcé

► Exemple : TD1 → Réponse indicielle des bacs d'eau

$$G(p) = \frac{8}{p^2 + 8p + 7} \longrightarrow Y(p) = G(p)U(p),\ U(p) = \frac{u_0}{p}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \left(\frac{8/7}{p} - \frac{4/3}{p+1} + \frac{4/21}{p+7}\right) u_0$$

$$\Rightarrow y(t) = \boxed{\frac{4}{7} e^{0t}} \boxed{- \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{2}{21} e^{-7t}}$$

Mode lié à la commande   Modes liés au système

Focus sur la réponse indicielle

- Caractéristiques de la réponse indicielle
  - **Temps de montée**
    - Temps que met la réponse indicielle pour passer de 10 à 90% de sa valeur finale
    - Évalue la rapidité de « démarrage du système »
  - **Temps de réponse à n%**
    - Temps nécessaire à la réponse indicielle pour atteindre sa valeur finale à ±n % près (n=5 dans la plupart des cas)
    - Évalue la rapidité du système à se stabiliser
  - **Premier dépassement**
    - Se mesure lorsque *la réponse indicielle dépasse* sa valeur finale
    - Évalue si le système est oscillatoire
  - **Valeur au régime permanent**
    - Valeur y_{RP} de y(t) lorsque le système est stabilisé
    - Nécessite que le système soit stable

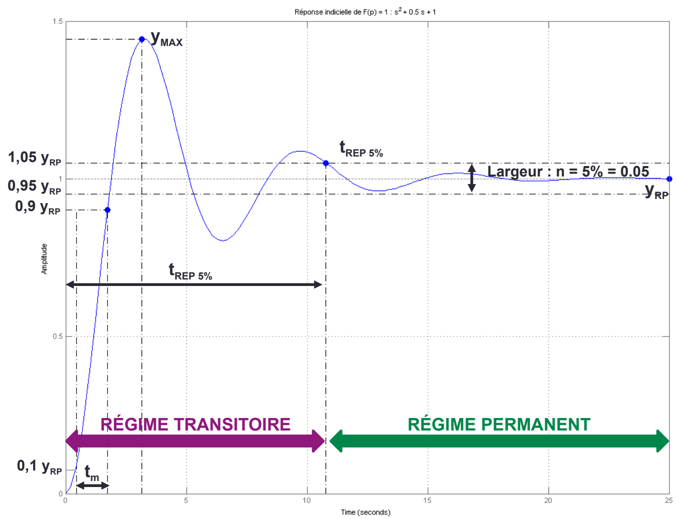
Caractérise le régime transitoire

Caractérise le régime permanent

Focus sur la réponse indicielle

$$D_{1\%} = 100 \frac{y_{max} - y_{RP}}{y_{RP}}$$

$$y_{RP} = \lim_{t \to \infty} y(t)$$



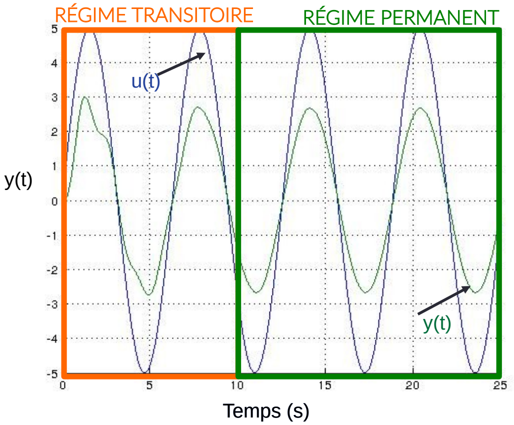
Réponse fréquentielle

- Hypothèses
  - La réponse fréquentielle suppose que :
    - Le système est stable
    - Le système modélisé par une fonction de transfert G(p)
    - Le système est excité par une entrée sinusoïdale
    - On attend le régime permanent

$u(t) = u_0 \sin(\omega t)$ → G(p) stable → y(t) ?

Réponse fréquentielle

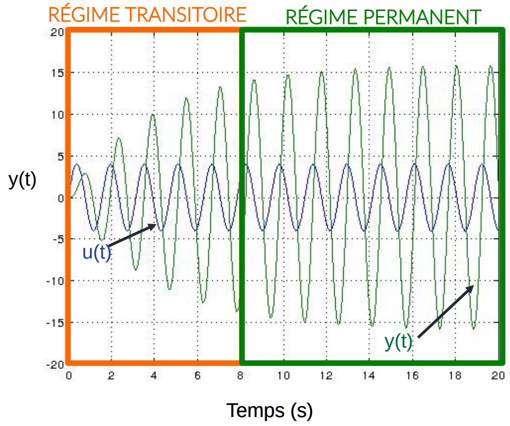
- Excitation d'un système stable avec une entrée sinusoïdale



Au régime permanent, la sortie est sinusoïdale de même pulsation que l'entrée, mais elle est 'modifiée' :
- en amplitude
- en phase → décalage

Réponse fréquentielle

- Excitation d'un système stable avec une entrée sinusoïdale



Au régime permanent, la sortie est sinusoïdale de même pulsation que l'entrée, mais elle est 'modifiée' :
- en amplitude
- en phase → décalage

Ces « modifications » sont différentes selon la pulsation du signal d'entrée
→ Amplification/réduction de l'amplitude de la sortie / entrée
→ Avance/retard de la sortie par rapport à l'entrée

Réponse fréquentielle

- Excitation d'un système stable avec une entrée sinusoïdale : conclusion
  - On montre (cf. slide 15) qu'au régime permanent la sortie y(t) s'écrit :

$$y(t) = y_0(\omega)\ \sin(\omega\ t + \varphi(\omega))$$

avec : $y_0(\omega) = |G(j\omega)|\ u_0$ et $\varphi(\omega) = Arg(G(j\omega))$

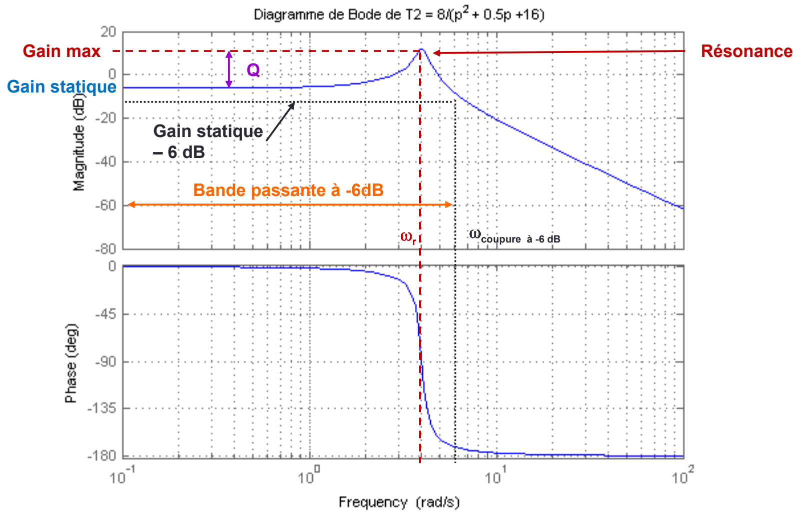
  - Donc l'amplitude y_0 et le décalage φ (appelé **phase**) dépendent de la pulsation du signal d'entrée et des caractéristiques du système définies par la fonction **$G(p = j\omega)$ =** $|G(j\omega)|\ \exp(j\ \varphi(\omega))$
  - Définition : On appelle réponse fréquentielle ou harmonique du système la fonction $G(j\omega)$ que l'on caractérisera souvent à travers son module et son argument.

$u(t) = u_0 \sin(\omega t)$ → Système → $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Réponse fréquentielle

- Représentation graphique
  - **Diagramme de Bode :**
    - Principe : tracer le gain G_{dB} (en dB) et la phase φ en fonction de la pulsation ω → 2 tracés :
      - **Tracé de G_{dB} = 20 log $|G(j\omega)|$ en fonction de la pulsation ω**
      - **Tracé de φ en fonction de la pulsation ω**
    - NB :
      - Travailler en log permet de construire les diagrammes plus facilement, notamment dans le cas de fonctions de transfert complexes.
      - Le tracé se fait en utilisant une échelle semi-logarithmique (échelle linéaire en ordonnée, échelle logarithmique en abscisse)
    - Ce diagramme est très utilisé pour l'analyse et la commande des systèmes.

Réponse fréquentielle : diagramme de Bode



Réponse fréquentielle

- Les caractéristiques : définition précise
  - **Gain statique**

    En dB : $G_{dB}(0) = \lim_{\omega \to 0} G_{dB}(\omega)$ *En amplitude :* $|G(j0)| = \lim_{\omega \to 0} |G(j\omega)|$
  - **Pulsation de coupure à -x dB**
    - Valeur ω_c de ω telle que $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB}(0) - x$
    - Valeurs usuelles en automatique :

      → x = -3 (signal de sortie / √2) x = -6 (signal de sortie / 2)
    - L'intervalle $[0, \omega_c]$ définit la **bande passante** à –x dB → une grande bande passante est le signe d'un système rapide.
  - **Pulsation de résonance :** Valeur ω_r de ω telle que $G_{db}(\omega_r)$ est maximum
  - **Coefficient de surtension**

$$Q = G_{dB_{max}} - G_{dB_0} \quad (en\ dB)$$

Une résonance et un coefficient de surtension sont le signe d'un système oscillant qui comporte donc des pôles complexes conjugués.

Réponse fréquentielle

u(t) = $u_0 \sin(\omega t)$ → Système → y(t)

- Preuve

★ On écrit la sortie du système : $Y(p) = G(p)U(p),\ U(p) = \frac{u_0\omega}{p^2+\omega^2} = \mathscr{L}(u_0 \sin \omega t)$

★ On décompose Y(p) en éléments simples (comme pour la réponse temporelle) :

$$Y(p) = \frac{K_1}{p+j\omega} + \frac{K_2}{p-j\omega} + E_G(p)$$

où $E_G(p)$ est la décomposition en éléments simples de G(p)

$$Y(p) = \frac{K_1}{p+j\omega} + \frac{K_2}{p-j\omega}$$

Au RP, les modes associés à $E_G(p)$ disparaissent (système stable).

avec $K_1 = (p+j\omega)Y(p)|_{p=-j\omega} = j\frac{u_0}{2}G(-j\omega)$ et $K_2 = (p-j\omega)Y(p)|_{p=j\omega} = -j\frac{u_0}{2}G(j\omega)$

Or $G(j\omega)$ est un nombre complexe ⇒ $G(j\omega) = |G(j\omega)| \exp(j\,\varphi(\omega))$ et $G(-j\omega) = |G(j\omega)| \exp(-j\,\varphi(\omega))$
où $|G(j\omega)|$ est le module de $G(j\omega)$ et $\varphi(\omega)$ son argument. En remplaçant :

$$Y(p) = \frac{1}{2} j u_0 |G(j\omega)| \left(\frac{e^{-j\varphi(\omega)}}{p+j\omega} - \frac{e^{j\varphi(\omega)}}{p-j\omega}\right)$$

★ On utilise la table des transformées de Laplace et la formule d'Euler donnant $\sin(\omega t)$:

$y(t) = u_0|G(j\omega)|\sin(\omega t+\varphi(\omega))$ $\frac{1}{p+a} = \mathscr{L}(e^{-at})$ $\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$