U.P.S. - F.S.I. **UPSSITECH**

EXAMEN D'OPTIMISATION SANS CONTRAINTES– SRI 2

Décembre 2022 - Durée : 50 mns – Polycopié de cours autorisé

Nom : Prénom :

1. Rechercher le(s) point(s) stationnaire(s) et déterminer leur nature pour la fonctions f suivante :

$$f(x, y) = x^2 + 1 - 2x + x.y^2$$

2. On a un ensemble de points de mesure dans le plan qui sont proches d'une ellipse, centrée à l'origine, qu'on cherche à identifier. Sachant que l'équation d'un ellipse centrée dans le plan est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on veut chercher les paramètres optimaux de l'ellipse qui minimisent les erreurs de mesure.
   (a) Écrire le résidus pour une mesure.
   (b) Écrire le problème d'optimisation.
   (c) Écrire ce problème sous forme de MCL. Que pouvez-vous conclure ?
   (d) Représenter sur la figure 1 à quoi correspond votre solution.

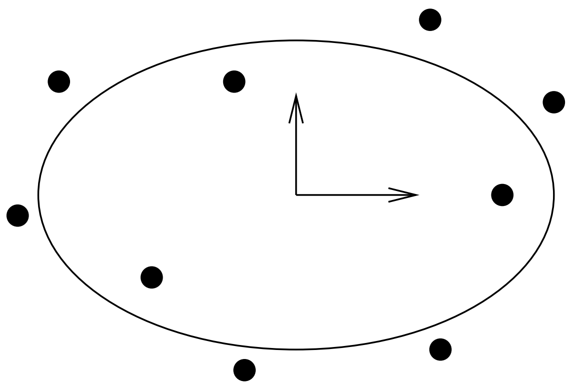

Figure 1 – Nuage de points mesurés dans le plan

3. Soit $f : \Re^2 \longrightarrow \Re$ définie par $f(x, y) = x.y + y^2 + x^2 + x - y$. On cherche l'optimum de f sur $\Re^2$.
   (a) En partant du point $X_0 = (1 \quad 1)^t$, à quel point X_a arrive-t-on si l'on applique la méthode de Newton ?
   En partant du point $X_0 = (2 \quad -3)^t$, à quel point X_b arrive-t-on si l'on applique la méthode de Newton ?
   Pouvez-vous expliquer ces résultats d'un point de vue théorique ? Que pouvez-vous conclure sur une optimisation basée sur le principe de la méthode de Newton.
   (b) Caractériser le(s) point(s) critique(s) si possible.
   (c) Modéliser la fonction f sous forme quadratique. Pouvez-vous appliquer ici la méthode des gradients conjugués ? Justifier votre réponse. Comment feriez-vous pour initialiser l'algorithme. Donner les premières étapes de calcul.

U.P.S. - F.S.I. UPSSITECH

EXAMEN D'OPTIMISATION AVEC CONTRAINTES– SRI 2

Décembre 2022 - Durée : 40 mns – Polycopié de cours autorisé

Nom : Prénom :

1. Résoudre le problème d'optimisation suivant :

   min $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$ avec $x \in \mathbb{R}^2$

   sous la contrainte : $x_1^2 - x_2^2 - 100 = 0$.

   (a) Existe-il un point critique qui est un minimum ou maximum local ?

   (b) Même question si on change la contrainte en : $x_1^2 - x_2^2 - 100 \leq 0$?

   Justifier vos réponses.

2. Un fabricant de lotions, "miracles", produit dans son usine 3 type de lotions notées A, B et C. La fabrication d'une lotion comporte 3 étapes qui se font dans 3 ateliers différents. Les temps de fabrication d'un m^3 de lotion par atelier et de disponibilité des ateliers sont donnés dans la tableau suivant :

	A	B	C	Disponibilité Atelier
Atelier 1	10h	15h	5h	150h
Atelier 2	20h	10h	8h	160h
Atelier 3	8h	12h	5h	140h

   Après fabrication chaque m^3 de lotion miracle doit être testée dans le laboratoire de test : 30h (A), 20h (B), 22h (C).

   Pour des raisons syndicales, le nombre d'heures de tests ne peut pas être supérieur de plus de 10% au dessus de 150h.

   La politique de production impose qu'au moins un m^3 de lotion B soit produit pour 3 m^3 de lotion A (ratio de production minimum permis de 1/3).

   Les accords de commandes reçues stipulent qu'au plus 15 m^3 de lotion (A ou B ou C) doivent être produits.

   La vente d'un m^3 de lotion rapporte pour A 4000 €, pour B 3000 € et pour C 2000 €.

   (a) Écrire le problème de programmation linéaire qui maximise le bénéfice (ne pas le résoudre).

   (b) Un algorithme de PL donne la solution optimale : $A = 2.51269$, $B = 7.53807$, $C = 2.36041$. Que pouvez-vous conclure sur les contraintes ?

Remarques :

— Soit une matrice du type $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$

  — si $a > 0$ alors si $a > b$ les valeurs propres sont positives (et de signes opposés si $a < b$).

  — si $a < 0$ alors si $b < -a$ les valeurs propres sont négatives (et de signes opposés si $b > -a$).

— Une matrice du type $\begin{vmatrix} a & b \\ b & 0 \end{vmatrix}$ a toujours des valeurs propres de signes opposés.