Deuxième contrôle continu Graphes (durée 1h30)

Documents autorisés : 2 feuilles A4 recto-verso.
Barème donné à titre indicatif.

I Ordonnancement (4 points)

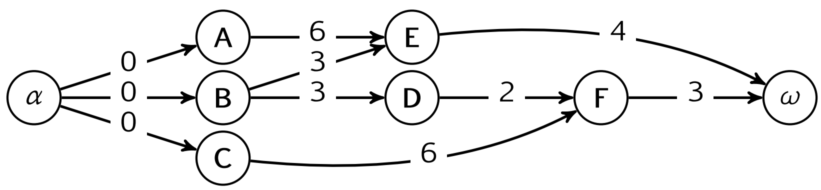
On considère un projet dont les tâches ont les durées et contraintes suivantes :

Taches	A	B	C	D	E	F
durées (en jours)	6	3	6	2	4	3
tâches prérequises				B	A,B	C,D

1. Dessinez le graphe potentiel-tâches.

Corrigé

1 pt



2. Faites un tableau récapitulant les dates de début au plus tôt, début au plus tard, marges totales, marges libres [1].

Corrigé

2 pts

	α	A	B	C	D	E	F	ω
t	0	0	0	0	3	6	6	10
t′	0	0	2	1	5	6	7	10
M	0	0	2	1	2	0	1	0
ml	0	0	0	0	1	0	1	0

3. Quelle est la durée du projet ? Quelles sont les tâches critiques ?

Corrigé

1 pt durée totale : 10 jours, taches critiques A et E.

1. Rappel : la *marge libre ml* d'une tâche v est le délai pouvant être accordé au commencement de cette tâche sans modifier les marges totales des tâches suivantes, $ml(v) = \min_{v' \in \Gamma^+(v)} t_{v'} - (t_v + \text{durée}(v))$ (où t_v et $t_{v'}$ sont les dates de début au plus tôt respectives de v et v').

II Chemins (7 points)

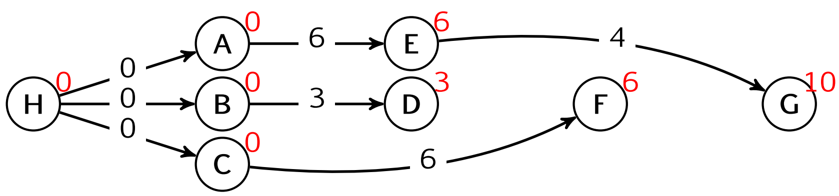
On considère le graphe G_1 suivant :

Sommets	H	A	B	C	D	E	F	G
$y \in \Gamma^+(x)$	A,B,C	E	D,E	F	F	G	G	
$poids(x,y)$	0,0,0	6	3,3	6	2	4	3	/

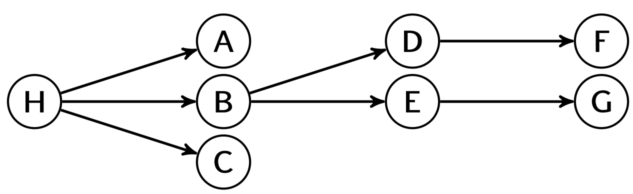
1. Calculez tous les chemins de poids MAXIMUM depuis le sommet H dans le graphe G_1. Vous donnerez le nom de l'algorithme utilisé et donnerez l'arborescence des chemins MAXIMAUX de racine H en écrivant à côté de chaque sommet X le poids du chemin HX-MAXIMAL y arrivant.

Corrigé

$\boxed{\text{2 pts}}$ C'est le même graphe qu'à l'exercice précédent, et l'ordonnancement nous a déjà fait faire un bellman sans-circuit max :



2. L'algorithme de Dijkstra appliqué au sommet H donne l'arborescence suivante :



   (a) Peut-on calculer le terme $\Lambda(B,F)$ de la matrice des longueurs [2] et le terme $M(B,F)$ de la matrice de routage[2], à partir de cette arborescence sans relancer d'algorithme ? Si oui donnez leurs valeurs et justifiez, sinon expliquez.

   Corrigé

   $\boxed{\text{1 pt}}$ Le chemin de B à F est issu d'un chemin minimal (H,B,D,F) donc il est minimal.
   Donc $\Lambda(B,F) = 3 + 2 = 5$ et M(B,F)=D.

   (b) Même question pour les termes $\Lambda(E,F)$ et $M(E,F)$.

2. Rappel : La *matrice des longueurs* Λ des chemins ij-minimaux d'un graphe est une matrice telle que $\Lambda(i,j)$ = longueur du chemin ij-minimal ; la *matrice de routage* M est telle que $M(i,j)$ = sommet successeur de i sur le chemin ij-minimal.

Corrigé

$\boxed{\textbf{1 pt}}$ Le chemin de E à F n'est pas issu d'un chemin minimal dans l'arborescence des chemins minimaux par Dijkstra, donc on ne peut pas donner le chemin minimal de E à F sans relancer l'algo (notons qu'il n'existe pas).

3. Soit G_2 le graphe G_1 auquel on ajoute les arcs (E,H) et (G,C) :

Sommets	H	A	B	C	D	E	F	G
$y \in \Gamma^+(x)$	A,B,C	E	D,E	F	F	G, **H**	G	**C**

Calculez alors les composantes f-connexes de ce nouveau graphe G_2.

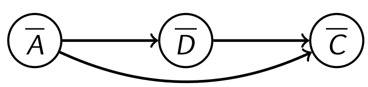
Corrigé

$\boxed{\textbf{2 pts}}$ 3 comp. f-connexes $\overline{A} = \{A, B, E, H\}$, $\overline{D} = \{D\}$ et $\overline{C} = \{C, F, G\}$,

4. Donnez le graphe réduit de G_2 mis en niveau.

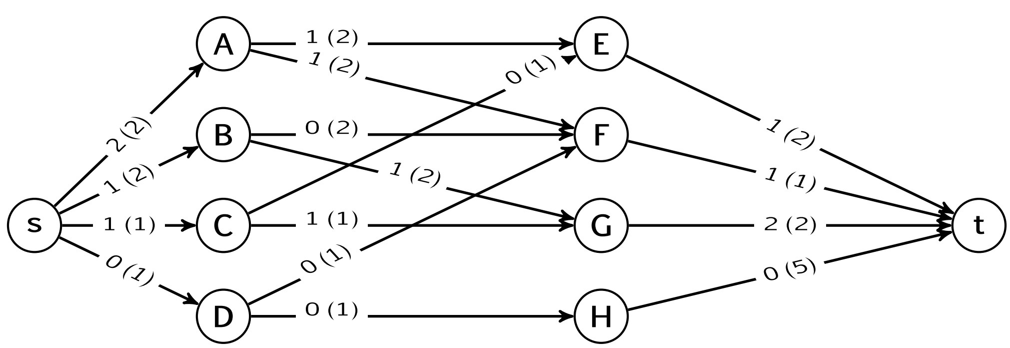
Corrigé

$\boxed{\textbf{1 pt}}$



III Calcul d'un flot Maximum (5 points)

On considère le graphe suivant où pour chaque arc on a donné la valeur d'un flot qui circule et la capacité de l'arc entre parenthèses.



1. Vérifiez que les valeurs données sur les arcs correspondent bien à un **flot compatible**, nommé φ_0, sur le réseau de transport associé à ce problème. Quel est la valeur du flot φ_0 ?

Corrigé

1.5 pts

- Flot : oui car vérifie la Loi de Kirchhoff en tout sommet ce qui entre=ce qui sort.
- Compatible : oui car pour tout arc u $0 \leq \varphi(u) \leq capa(u)$
- Valeur du flot :4

2. Calculez un flot maximum à partir de ce flot vous préciserez les chaînes augmentantes utilisées et de combien le flot est augmenté à chaque étape. Vous donnerez la valeur du flot maximum.

Corrigé

2.5 pts

- chaine augmentante sDHt, on augmente de 1 sur sDHts : $\varphi_1 = \varphi_0 + 1x(sDHts)$ valeur 5
- chaine augmentante sBFAEt, on augmente de 1 sur sBFAEts : $\varphi_2 = \varphi_1 + 1x(sBFAEts)$ valeur 6
- on ne peut plus marquer que s (donc on ne peut pas marquer pas la sortie) donc φ_2 est MAXIMUM.

3. **(STRI et L3-IRT uniquement)** Donnez une coupe de capacité minimum et donnez sa capacité.

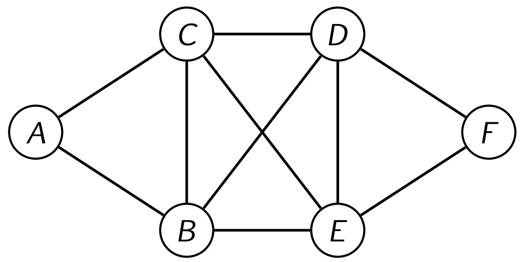
Corrigé

1 pt coupe= $(s, ABCDEFGHt)$, sa capacité est $capa(c) = 2 + 2 + 1 + 1 = 6$ (confirme que φ_2 est maximum)

IV Équipements sportifs (SRI : 4 pts, STRI et L3-IRT : 2 pts)

Les joueuses du Stade Toulousain n'habitent pas toutes dans le même quartier de Toulouse. D'autre part, l'aglomération toulousaine est très étendue et terriblement embouteillée. Il n'est donc pas possible pour chaque joueuse de venir s'entraîner au stade toulousain tous les soirs. L'entraîneuse du Stade Toulousain Féminin (STF) a donc passé un accord avec la mairie de Toulouse pour que chaque quartier bénéficie d'un équipement sportif utilisable par les joueuses du STF et dont le STF financera en partie la construction.
Par contre, la mairie a exigé que des quartiers voisins n'aient pas le même équipement afin d'avoir un choix le plus large possible à proposer à la communauté (les élections

approchent, il faut que les gens soient satisfaits !). Le graphe suivant donne les proximités entre les quartiers A, B, C, D, E, F de la ville (une arête signifie que les quartiers sont voisins).



L'entraîneuse voudrait que ses joueuses de rugby s'entraînent soit sur un terrain de rugby, soit sur un stade d'athlétisme, soit dans une salle de boxe.
Est-ce qu'il est possible de construire seulement ces trois types d'équipement dans chacun des quartiers ? Si oui, montrer comment. Et si non, dîtes à l'entraîneuse combien de types d'équipements sportifs différents devront être utilisés au minimum par ses joueuses pour s'entraîner.
Dans tous les cas, il vous faudra traduire ce problème en termes de graphes puis le résoudre.
(SRI uniquement) Justifiez votre raisonnement et votre solution à l'aide des propriétés vues en TD.

Corrigé

C'est un problème de coloration :

- 1 sommet = 1 quartier,
- 1 arête= quartier voisin d'un autre quartier,
- 1 couleur = 1 type d'équipement sportif

En effet la contrainte : "deux quartiers voisins n'ont pas le même équipement" correspond à la contrainte d'une coloration dans un graphe "deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur".
nb min de couleurs nécessaires : Il faut 4 couleurs au minimum car il existe une clique à 4 sommets B,C,D,E.
nb max de couleurs suffisantes : Le graphe est planaire (en traçant C vers E par l'extérieur), donc il est coloriable en moins de 4 couleurs. Autre démonstration, on trouve la coloration suivante avec 4 couleurs.
Il faut donc exactement 4 couleurs.
B=1, C=2, D=3, E=4, A=3 ou 4, F= 1 ou 2.

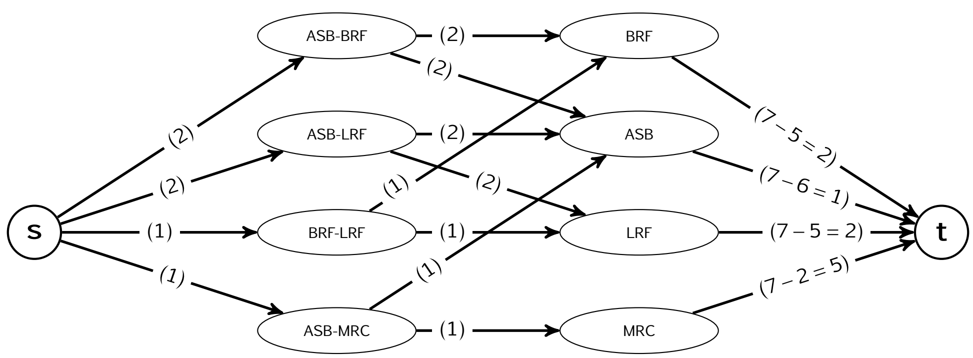
V *(STRI et L3-IRT uniquement)* Rugby Féminin (2 points)

On s'intéresse à l'avenir de l'équipe de rugby féminin du Stade Toulousain dans un championnat où 5 équipes s'affrontent : Association Sportive bayonnaise (ASB), Blagnac Rugby Féminin (BRF), Lons Rugby Féminin (LRF), Montpellier Rubgy Club (MRC), Stade Toulousain féminin (STF) . Voici le nombre de matchs gagnés par les différentes équipes :

Équipe	ASB	BRF	LRF	STF	MRC
gagnés	6	5	5	3	2

Le Stade Toulousain est l'avant dernière équipe mais il reste les 10 matchs suivants à jouer : 2 matchs (STF, BRF), 1 match (STF, ASB), 1 match (STF, LRF), 2 matchs (ASB, BRF), 2 matchs (ASB, LRF), 1 match (BRF, LRF) et 1 match (ASB, MRC).

On se demande si STF peut terminer première (éventuellement ex-aequo) du championnat, c'est-à-dire gagner au moins autant de matchs que chacune des autres équipes. Pour résoudre ce problème on imagine que STF gagne ses 4 prochains matchs, c'est-à-dire qu'elle gagnerait 3+4=7 matchs en tout. Si une autre équipe gagne plus de 7 matchs, il n'y a plus d'espoir pour STF. Hormis les 4 matchs que STF doit gagner, il reste donc 6 matchs dans lesquels STF n'intervient pas : 2 matchs ASB contre BRF, 2 matchs ASB contre LRF et les 2 matchs (BRF, LRF) et (ASB, MRC).
On modélise ce problème grâce au graphe suivant (où les capacités sont écrites entre parenthèses) :



En quoi la valeur du flot maximum peut-elle nous renseigner sur la victoire possible de STF ? **On ne demande pas de calcul.** Justifier votre réponse en expliquant ce que signifient les capacités affectées aux arcs, et en montrant le rapport avec les flots.
Indice : comparer le cas où le flot max serait égal à 6 par rapport au cas où le flot max serait inférieur à 6.
En utilisant les résultats de l'exercice III, concluez sur le fait que STF a un espoir ou non de gagner le championnat, si oui expliquez quels doivent être les résultats des 10 matchs restants sinon dîtes quelle équipe peut gagner.

Corrigé

Les arcs de s aux premiers sommets ont pour capacité le nombre de matchs restants, les matchs sont reliés aux équipes qui y participent avec capa égale aux nombres victoires maximum pour chaque équipe (c'est le nombre de match). Les équipes sont reliées à la sortie avec des capacités égales au nombre de matchs qu'elles peuvent encore gagner sans empêcher STF d'être première (donc en limitant à 7 le nombre de victoires totales et en y soustrayant le nombre de victoires déjà acquises).
S'il existe un flot maximum (=6) alors il existe une façon pour les autres équipes de laisser STF être première.
Si le flot max est <6 c'est raté pour le STF car il faudrait qu'au moins un match n'ait pas de vainqueur pour que STF gagne.