FICHE MEMO DU COURS ESPACE D'ETAT
Focus sur la commande et l'observation

On considère un système linéaire stationnaire d'ordre n, mono-entrée, mono-sortie, décrit par son équation d'état et son équation de sortie :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \end{cases}$$

Notons $\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$ le polynôme caractéristique de A.
La fonction de transfert s'écrit : $F(p) = C(pI - A)^{-1}B$

1 Rappels utiles

1.1 Les changements de base

◇ **Mise sous forme compagne de commande :**

$$A_{cc} = M_{cc}^{-1}AM_{cc} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{cc} = M_{cc}^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage $M_{cc} = (M_1, \ldots, M_n)$ est définie par :
$M_n = B$, et pour $k = 1, \ldots, n-1$, $M_{n-k} = (A^k + a_{n-1}A^{k-1} + \ldots + a_{n-k}I)B$.

◇ **Mise sous forme compagne d'observation :**

$$A_{co} = M_{co}^{-1}AM_{co} = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ -a_1 & & & \ldots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_{co} = CM_{co} = (1, 0, \ldots, 0)$$

La matrice de passage M_{co} est obtenue à partir de $P = (P_1, \ldots, P_n) = ({M_{co}}^{-1})^T$, où $P_1 = C^T$, et pour $k = 2, \ldots, n$, $P_k = \big((A^T)^{k-1} + a_{n-1}(A^T)^{k-2} + \ldots + a_{n-k+1}I\big)\, C^T$.

1.2 L'analyse dans l'espace d'état

◇ **Critères de commandabilité pour le système** (A, B, C) **:**
- *Critère de Kalman :* $Rg(B \;\; AB \;\; \ldots A^{n-1}B) = n$
- *Critère pour A diagonale :* toutes les lignes de B doivent être non nulles

◇ **Critères d'observabilité pour le système** (A, B, C) **:**
- *Critère de Kalman :* $Rg(C^T \;\; A^TC^T \;\; \ldots {A^{n-1}}^T C^T)^T = n$
- *Critère pour A diagonale :* toutes les colonnes de C doivent être non nulles.

2 Commande dans l'espace d'état

On cherche un correcteur de la forme $u = Ne - KX$, où $K = (k_0, \ldots, k_{n-1})$ et N sont les gains à déterminer. La dynamique souhaitée pour le système corrigé est donnée par une équation caractéristique de référence : $\Psi(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_0$.

◇ **Calcul de K :** *permet d'obtenir la dynamique souhaitée en boucle fermée*
- Soit par identification directe des équations caractéristiques en boucle fermée ; les gains du correcteur sont alors obtenus dans la base initiale : $\det(\lambda I - (A - BK)) = \Psi(\lambda)$
- Soit en mettant le système initial sous forme compagne de commande ; dans cette base, les gains du correcteur $\tilde{K} = (\tilde{k}_0, \ldots, \tilde{k}_{n-1})$ s'écrivent : $\boxed{\tilde{k}_i = \alpha_i - a_i}$
  Il suffit ensuite d'exprimer le gain dans la base initiale : $K = \tilde{K}M_{cc}^{-1}$.

◇ **Calcul de N :** *garantit une erreur de position nulle au régime permanent :* $N = -(C(A-BK)^{-1}B)^{-1}$

3 Observateur

L'observateur est un système linéaire stationnaire d'ordre q dont la représentation d'état s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{Z} = FZ + Gy + Hu \\ \hat{X} = MZ + Ny \end{cases}$$

Les différentes matrices vérifient : $TA - FT = GC; \quad TB = H; \quad \text{et} \quad MT + NC = I$
La dynamique souhaitée de l'observateur est donnée par une équation caractéristique de référence :

$$\Phi(\lambda) = \lambda^q + \beta_{q-1}\lambda^{q-1} + \ldots + \beta_1\lambda + \beta_0$$

Calcul des gains de l'observateur

- ◇ Déterminer q et les tailles des différentes matrices.
- ◇ Choisir la dynamique de l'observateur et identifier det $[\lambda I - F]$ avec $\Phi(\lambda) \rightarrow$ Premier système (S_1).
- ◇ Résoudre $TA - FT = GC$ conjointement avec le système (S_1).
- ◇ Déduire H, M, N à l'aide des équations précédentes.

Observateur identité : $\boxed{q = n}$

On pose $T = I$, $M = I$, $N = 0$, d'où : $H = B$ et $A - F = GC$. Il suffit ensuite de suivre les étapes de calcul précédentes.

Observateur minimal : $\boxed{q = n - Rg(C)}$

L'observateur se calcule en appliquant les étapes ci-dessus.