Dec 2021 - partiel optim

Exercice 1

Culture	h de travail/hectare	Investissement/hec	Benef net/hec
Vigne	9	54€	60€
Céréale	9	26€	45€
légume	3	27€	30€

a) i) Modélisation du problème sous la forme de programmation linéaire

x_1 taille des parcelle en hectare pour la vigne
x_2 — — — céréale
x_3 — — — légume

objectif : maximiser ~~ce~~ le bénéfice net de l'agriculteur qui est donné par la somme des benef net des différentes cultures soit :

bénéfice $\Rightarrow \max(60x_1 + 45x_2 + 30x_3)$

Contraintes : ① Temps de travail : 48h $\Rightarrow 9x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leq 48h$
② Capital : 540€ $\Rightarrow 54x_1 + 26x_2 + 27x_3 \leq 540€$
③ superficie totale : 10 hectares $\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$ hectares
④ non-négativité : taille parcelles positive ou nulle $\Rightarrow x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

ii) Modification pour inclure l'embauche de personnel

tarif : 12€/h , il est possible de déterminer le nombre d'heures qu'il devrait embaucher pour optim son benef

+ nouvelle variable de décision "h" = nombre d'heure de travail supplémentaire embauché
même objectif : maximiser le benef net

$\Rightarrow \max(60x_1 + 45x_2 + 30x_3 - 12h)$

+ ajout d'une contrainte

⑤ Temps de travail dispo : 48h y compris les h embauché $\Rightarrow 9x_1 + 9x_2 + 3x_3 + h \leq 48h$

b) L'agric ne souhaite embaucher aucun salarié
Pas de pb de capital
On donne la solution optimale telle que : 3 hec de vigne et 7 hec de légumes.
On nous demande | d'écrire les variable de base X_B et hors base X_h
| donner les valeurs max et min d'heures de travail permises pour garder ces 2 cultures

Soit $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7$, $h = 0$

$\Rightarrow$ variable de base $X_B = [x_1, x_3]$
$\Rightarrow$ variable hors base $X_h = [x_2, h]$

Modification des contraintes :

⑤ Temps de travail ... $\Rightarrow 9x_1 + 3x_3 + h \leq 48$
$\Leftrightarrow 9 \times 3 + 3 \times 7 + h \leq 48$
$\Leftrightarrow 27 + 21 + h \leq 48$
$\Leftrightarrow 48 + h \leq 48$
$\Leftrightarrow h \leq 0$ $\Rightarrow$ donc l'agriculteur ne peut ni augmenter ni réduire davantage le nombre d'heure de travail sans compromettre la culture de vigne et du légume

Exercice 2 Résoudre le pb suivant

$\min f(x,y) = x^2 + y^2 - x \cdot y + y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

sous la contrainte $h(x,y) = x + 2y - 1 = 0$

a) i) Calcul théorique pour trouver un optimum local

Pour résoudre ce pb $\Rightarrow$ multiplicateur de Lagrange pour trouver un optimum local sous contrainte donnée

Minimiser : $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + y$ sous ....

Soit le lagrangien du problème : $\boxed{L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)}$ avec λ le multiplicateur de lagrange associé à la contrainte $h(x,y)$

$\boxed{\text{soit } L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - xy + y + \lambda(x + 2y - 1)}$

Les conditions de stationnarité ~~sont~~ pour un optimum local sont données par l'eq de Lagrange :

(1) $\circ$ $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - y + \lambda = 0$ termes dépendant de x

(2) $\circ$ $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - x + 1 + 2\lambda = 0$ termes dépendant de y

(3) $\circ$ $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = h(x,y) = x + 2y - 1 = 0$

Résolvons les équations simultanément pour trouver x, y, λ

(3) $\rightarrow \lambda = 1 - x - 2y$, (1) (2) $\longrightarrow$ $\left|\begin{array}{l} (1) : 2x - y + (1 - x - 2y) = 0 \\ (2) : 2y - x + 1 + 2(1 - x - 2y) = 0 \end{array}\right.$

Simplification $\begin{cases} (1) : x - 3y + 1 = 0 \\ (2) : -x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ système de 2 eq à 2 inconnues la solution nous donnera les coordonnées de l'optimum local (x, y)

(1) $\rightarrow x = +3y - 1$

On choisi de mettre (1) $\xrightarrow{\text{dans}}$ (2) soit :

(2) : $-(3y-1) - 4y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow -3y + 1 - 4y + 3 = 0$

$\Leftrightarrow -7y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow -7y = -4$

$\Leftrightarrow \boxed{y = 4/7} \longrightarrow x = 3y - 1 = 3 \times 4/7 - 1 = 12/7 - 1 = \boxed{5/7}$

Donc les valeurs correcte de l'optimum local sont $\boxed{y = 4/7}$ et $\boxed{x = 5/7}$ $\lambda = 1 - \frac{5}{7} - 2\left(\frac{4}{7}\right) = -\frac{6}{7}$

ii) Afin de calculer la solution on veut annuler le gradient du lagrangien par la méthode de Newton. Si on suppose que le point initial $(x_0, y_0) = (1,1)$ et que le multiplicateur de Lagrange $= 1$ à l'état initial $(\lambda_0 = 1)$, à quel point (x_1, y_1) arrive t on après la première itération ?

~~Soit les equation de Newton suivantes~~

$\cancel{\Delta x = -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)}$ $\cancel{\Delta y = -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)}$ $\cancel{\Delta \lambda = -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)}$

① Calcul des dérivées partielles (voir ci dessus) $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 1y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - x + 1 + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

② Calcul de la matrice hessienne H de L :

$\underset{3\times3}{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0$ y'en a pas

$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = -1$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} = 1$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} = 2$

dans l'eq de $\frac{\partial L}{\partial x}$ combien il y a de y ?

Examen d'optim sans contraintes - Dec 2021

① $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 1$ avec $X \in \mathbb{R}^2$

1. Etude analytique des points critique et de leur nature

Il faut calculer le gradient de f et résoudre l'eq $\nabla f(~~X~~) = 0$, où $\nabla f(X)$ est le vecteur gradient

La fonction f(X) est donnée par ., soit ~~[illegible]~~

- $\nabla f(X) = \left[\frac{df}{dx_1} \quad \frac{df}{dx_2}\right]$ avec $\frac{df}{dx_1} = 2x_1 + 1$ et $\frac{df}{dx_2} = 2x_2$
- Points par $\nabla f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = -\frac{1}{2}} \\ 2x_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_2 = 0} \end{cases}$ ⇒ donc le point critique est $(-1/2, 0)$
- Calcul de la matrice hessienne

Rappel : | Si définie positive → point est un minimum local
| si définie négative → point est un ~~minim~~ maximum local
| si indéfinie → point est un point selle.

Soit $H = \begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2} & \frac{d^2f}{dx_1 dx_2} \\ \frac{d^2f}{dx_1 dx_2} & \frac{d^2f}{dx_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$ car $\begin{cases} \frac{d^2f}{dx_1^2} = (2x_1+1)' = 2 \\ \frac{d^2f}{dx_2^2} = (2x_2)' = 2 \\ \frac{d^2f}{dx_1 dx_2} = 0 \end{cases}$

matrice définie positive → $(-1/2, 0)$ est un minimum local de la fonction $f(X)$

② ~~Méthode~~ En partant du point $X_0 = (1, 1)^t$, a quel point X_1 arrive~~z vous~~ t-on si on applique la méthode de Newton pour annuler le gradient de la fonction ? Conclusion ?

Rappel : la méthode de Newton consiste a trouver un min local en itérant la formule

$X_{k+1} = X_k - H(~~X_k~~)^{-1} * \nabla f(X_k)$ où H est la matrice hessienne ~~de~~ $\nabla f(X_k)$ le gradient à l'itération k

Ainsi au point de départ $X_0 = (1,1)$, le gradient $\nabla f(X_0) = [3 \ 2]$ et $H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ donc la formule de Newton devient $X_1 = X_0 - H^{-1} \times \nabla f(X_0)$

$$= [1 \ 1] - \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}}_{\text{on inverse les élément diagonaux car H est diagonale. Soit } H^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}} [3 \ 2]$$

$$= [1 \ 1] - [3/2 \ 1]$$

$$= [-1/2 \ 0]$$

⇒ en appliquant la méthode de Newton on retombe bien sur le point critique $(-1/2 \ 0)$ et comme les valeurs propres de $H > 0$, la méthode de Newton converge bien vers un minimum local

③ En partant de $X_0(1,1)$, à quel point X_1 arrive-t-on si l'on applique la méthode du Gradient avec un pas de 0,5 pour chercher l'optimum de la fonction

La méthode du gradient consiste à suivre la direction opposée du gradient pour atteindre l'optimum de la fonction.

$X_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \nabla f(X_0) = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\quad \alpha = 0,5$ $\qquad$ Formule : $\boxed{X_1 = X_0 - \alpha \nabla f(X_0)}$

$X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 0,5\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3/2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ on retrouve encore le même point critique

④ Condition de Wolfe pour savoir si le pas α_k n'est pas trop petit à l'itération k pour la fonction $f(X)$ de l'exercice. On prendra $d_k = -\nabla f(X_k)$

2 critères $\left|\begin{array}{ll} f(X_k + a_k d_k) \leq f(X_k) + c_1 \alpha_k \nabla f(X_k) d_k & \text{(Condition ~~Armi~~ d'Armijo)} \\ \nabla f(X_k + a_k d_k) d_k \geq c_2 \nabla f(X_k) d_k & \text{(Condition de courbure)} \end{array}\right.$

avec $\left|\begin{array}{l} X_k \text{ la position actuelle} \\ \alpha_k \text{ le pas} \\ d_k \text{ la direction de recherche} \end{array}\right.$ et c_1 et c_2 qui sont des constantes dans l'intervalle $(0,1)$

Ici on nous impose $d_k = -\nabla f(X_k)$ et typiquement $c_1 = 0,1$ et $c_2 = 0,9$

soit |

Exercice 2 $\quad$ On connaît la position de 4 balises (B_i) dans le plan (x_i, y_i)
On opérateur souhaite placer ~~une balise~~ un relais R en (x,y) de telle manière qu'il soit à distance min de l'ensemble des balises

ⓐ Écrire le pb sous la forme des moindre carré linéaires. Écrire l'expression des résidus.

4 balise (B1, B2, B3, B4), 1 relais R en (x,y)

Nous définissons une fonction de coût ~~tel que~~ qui mesure la somme des carré des distances entre le relais R et les balises. Cette fonction de coût est à minimiser

$\boxed{\text{Coût}(x,y) = (d(B1,R))^2 + (d(B2,R))^2 + (d(B3,R))^2 + (d(B4,R))^2}$

L'objectif est $\boxed{\min(\text{Coût}(x,y))}$

Ici il s'agit d'un problèmes sans contraintes

Les résidus correspondent aux termes individuels du coût

$\boxed{\text{Résidu}(B_i, R) = (d(B_i, R))^2 - c_i}$ avec c_i la distance minimale entre B_i et R

Si nous voulons que le relais R soit à distance des balises, c_i est généralement 0
Les résidus peuvent être utilisé pour formuler la fonction d'optimisation

minimiser $\rightarrow AX - b$ avec $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Soit $\min \frac{1}{2}\|r\|^2$

La distance (B_i, R) peut s'écrire $\rightarrow$ distance$(B_i, R) = \sqrt{(x_R - x_i)^2 + (y_R - y_i)^2}$ avec $i = \{1,2,3,4\}$

La fonction à minimiser est donc $F_i(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}$ distance(B_i, R)

Il s'agit d'un pb d'optim non-linéaire

r_i = distance$(B_i, R_i) - F_i$ $\qquad r_i = 0$