Espaces vectoriels (suite)

Exercice 1 Donner une base et la dimension des deux espaces vectoriels suivants, définis par des équations cartésiennes :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ y = 0 \text{ et } x = z \right\} \text{ et } G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \Big/ z = x + y \text{ et } x + y + t = 0 \right\}.$$

Solution de l'exercice 1

On peut aisément écrire $F = \mathrm{Vect}((1,0,1))$. Comme le vecteur $(1,0,1)$ est libre, une base de F est $((1,0,1))$ et $\dim(F) = 1$.

De la même manière, on a $G = \mathrm{Vect}((-1,1,0,0),(-1,0,-1,1))$. Comme les deux vecteurs sont bien libres, ils forment une base de G, qui est donc de dimension 2.

Exercice 2 Trouver des équations cartésiennes caractérisant les e.v. engendrés par les familles :

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solution de l'exercice 2

Via une résolution de système linéaire, on peut trouver que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$.

De même, on a $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_2) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x - y + z = 0 \text{ et } 5x - 3y - t = 0\}$.

Exercice 3 Trouver une base et la dimension de l'espace W des solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & + & 2s & - & t & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & + & 3s & - & 2t & = & 0 \\ 2x & + & 4y & - & 7z & + & s & + & t & = & 0. \end{array} \right.$$

Solution de l'exercice 3

$W = \mathrm{Vect}((-2,1,0,0,0),(-4,0,-1,1,0),(3,0,1,0,1))$.

Applications linéaires et représentation matricielle

Exercice 4 Les applications suivantes sont-elles linéaires ou pas ? Si oui, en donner la représentation matricielle relativement aux bases canoniques.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ yx \end{pmatrix}$;
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-3y+4z \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 4

1. f est linéaire et sa représentation matricielle relativement aux bases canoniques est la suivante
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Comme $f(1,1) = (2,1) \neq (2,0) = (2,0) + (0,0) = f(1,0) + f(0,1)$, f n'est pas linéaire.
3. f est linéaire et sa représentation matricielle relativement aux bases canoniques est la suivante
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 Pour chacune des transformations linéaires f, r_θ, g et h de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies ci-dessous, exprimer sa matrice représentative relativement à la base canonique :

1. f est définie par $f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $f(e_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$;
2. r_θ est la rotation de θ degrés dans le sens direct ;
3. g est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$;
4. h effectue une rotation d'angle $\pi/4$ dans le sens direct, suivie d'une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = -x$.

Solution de l'exercice 5

1. La représentation matricielle de f relativement aux bases canoniques est la suivante
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$
2. La représentation matricielle de r_θ relativement aux bases canoniques est la suivante
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
3. La représentation matricielle de g relativement aux bases canoniques est la suivante
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
4. La représentation matricielle de h relativement aux bases canoniques est la suivante
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Calcul matriciel

Exercice 6 **Calculer les déterminants** suivants, par la méthode de Gauss ou bien par développement par rapport à une ligne ou une colonne.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -5 & 5 & 6 & -6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \qquad \det(C) = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

Solution de l'exercice 6

On a $\det(A) = 12$, $\det(B) = 880$ et $\det(C) = 0$.

Exercice 7 On considère le système linéaire suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & 5z & = & 3. \end{array} \right.$$

1. Le mettre sous la forme $AX = b$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, A est une matrice à déterminer et b un vecteur à déterminer.
2. Calculer l'inverse de A et en déduire la solution du système linéaire. (On pourra vérifier le calcul en résolvant le SL par la méthode du pivot de Gauss pour s'entraîner !)

Solution de l'exercice 7

1. Il est assez aisé de trouver

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. On obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -2 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour vous entrainer ...

Exercice 8 Trouver une base et la dimension des sous-espaces vectoriels W suivants :

$$W_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x + y + z = 0 \right\}, \quad W_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Big/ x = y = z \right\},$$

$$W_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \Big/ x + z - 2t = 0, \; x + y = 0, \; y - 2z = 0 \right\}.$$

Solution de l'exercice 8

On peut écrire $W_5 = \mathrm{Vect}\Big((1,0,-1),(0,1,-1)\Big)$ et comme ces deux vecteurs sont libres, ils forment une base de W_5. En conséquence, $\dim(W_5) = 2$.

Par un raisonnement analogue, on a $W_6 = \mathrm{Vect}\Big((1,1,1)\Big)$ et $\dim(W_6) = 1$, ainsi que $W_7 = \mathrm{Vect}\Big((4,-6,-2,1)\Big)$ et $\dim(W_7) = 1$

Exercice 9 Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Trouver une équation cartésienne de F.

Solution de l'exercice 9

$7x - 3y + 5z = 0$ est une équation cartésienne de F.

Exercice 10 Calculer $\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$ en choisissant la méthode la plus adaptée.

Solution de l'exercice 10

$\det(D) = -18$, par exemple en effectuant $C_3 - 6C_1$ puis en développant par rapport à la ligne 1.

Exercice 11 On considère

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer E^2 et en déduire E^{-1}.

Solution de l'exercice 11

On a $E^2 = I_2$, donc E est inversible et $E^{-1} = E$.

Exercice 12 On considère le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & - & s & = & -1 \\ 2x & + & 5y & - & 7z & - & s & = & -1 \\ -3x & - & 7y & + & 11z & + & s & = & 2 \\ -x & - & 2y & + & z & + & 6s & = & 4. \end{array}\right.$$

1. Le mettre sous la forme $AX = b$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, A est une matrice à déterminer et b un vecteur à déterminer.
2. Calculer l'inverse de A et en déduire la solution du système linéaire.

Solution de l'exercice 12

1. Il est aisé de trouver

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -1 \\ -3 & -7 & 11 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. On obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 30 & 5 & 11 & 4 \\ -3 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 Donner la représentation matricielle des applications linéaires suivantes, relativement aux bases canoniques.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x+y \\ -y \\ 5x \end{pmatrix}$;

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ définie par $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x \\ -y \\ 2z-x \\ 0 \end{pmatrix}$;

3. $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ définie par $f(x,y,z,s,t) = \begin{pmatrix} s-t \\ t-z \\ z-y \\ y-x \\ x \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 13

1. La matrice représentative de f relativement aux bases canoniques est $M_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

2. La matrice représentative de f relativement aux bases canoniques est $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. La matrice représentative de f relativement aux bases canoniques est $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.