

TD 1 graphes : généralités sur les graphes

Pour les exercices suivants, dire

- si la relation associée est réflexive, transitive, symétrique, antisymétrique,
- s'il existe un puits, une source.

I. Echauffement

Définir le graphe correspondant à la relation « partagent une frontière commune » sur une partie de l'Europe : Irlande, Royaume-Uni, France, Espagne, Portugal, Allemagne, Pays-Bas, Belgique, Suisse, Italie.

II. Le loup, la chèvre et la salade

Il faut faire traverser la rivière à un loup, une chèvre et une salade, le passeur n'a qu'une seule place disponible dans sa barque (qui peut éventuellement rester libre), il ne peut pas laisser seuls sur une rive le loup et la chèvre (le loup mangerait la chèvre), ni la chèvre et la salade (la chèvre mangerait la salade) ; par contre loup, chèvre et salade peuvent cohabiter sans risque. Construire un graphe dont chaque sommet représente la répartition des 3 passagers entre les deux rives et les arcs sont les modifications de répartition par transbordement d'un passager. Combien y a-t-il de sommets dans ce graphe (c'est-à-dire de répartitions possibles des 3 animaux sur les 2 rives) ?

Quels sommets représentent l'état initial et l'état final ?

Dessiner les sommets puis les arcs qui traduisent des transbordements autorisés.

Comment résoudre le problème ? (attention, on ne demande pas la résolution)

III. Les poignées de main

Un couple reçoit chez lui trois autres couples. Lorsqu'elles se rencontrent pour la première fois dans la soirée, certaines personnes se serrent la main. A la fin de la soirée, l'hôte demande à chaque personne, y compris son épouse combien elle a serré de mains. Il obtient des réponses toutes différentes. Sachant que personne ne serre sa propre main ni ne serre la main de son conjoint, le problème consiste à trouver combien de mains a serré la femme de l'hôte.

On représente le problème par un graphe G . Les sommets sont les participants, un arc (x,y) représente le fait que x a serré la main de y .

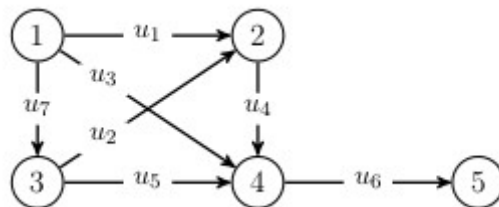
1. Combien de sommets y a-t-il dans G ? Quels sont les degrés possibles des sommets de G ?

Tout le monde ayant donné une réponse différente que peut-on en déduire sur les degrés des sommets de G ? Que peut-on dire du degré du sommet représentant l'hôte qui questionne ?

2. Dessiner le graphe correspondant au problème. Donner les réponses fournies par les conjoints des personnes qui ont serré 6 mains, 5 mains, ... Combien de mains a serré la femme de l'hôte ? Combien y a-t-il eu de poignées de mains en tout ?

IV. Représentations d'un graphe

On considère le graphe orienté G_1 suivant :



1. Donnez sa représentation sous forme de dictionnaire.
2. Donnez sa représentation par une matrice d'adjacence (sommet-sommet).
3. Donnez sa représentation par une matrice d'incidence (sommet-arcs).
4. Calculez sa fermeture transitive à partir de son dictionnaire.

V. Dénombrement

1. Quel est le nombre d'arêtes d'un graphe simple non orienté complet de n sommets (complet : deux sommets quelconques sont adjacents) ?
2. Quel est le nombre de graphes simples non orientés que l'on peut définir sur un ensemble de n sommets ?
3. Dans un graphe orienté, quelle est la relation entre le nombre d'arcs et la somme des degrés de chacun des sommets ? En déduire qu'un graphe à n sommets avec $n \geq 2$, possède un nombre pair de sommets de degré impair.

VI. Un problème de gestion de stock

Un commerçant fait pour les 4 trimestres à venir les prévisions suivantes sur les demandes d'un objet à vendre qu'il aura à satisfaire ainsi que sur les prix d'achat à l'unité qu'il aura à déboursier pour acquérir le dit-objet :

trimestre i	1	2	3	4
demande d_i	2	4	3	3
prix d'achat p_i	13	15	8	14

Le problème consiste à déterminer la politique d'achat optimale c'est-à-dire les quantités à acheter à chaque début de trimestre pour minimiser le coût total d'achat sur l'année à venir. On terminera l'année avec un stock nul.

On suppose la capacité de stockage égale à 5 unités, le coût de stockage nul, le stock initial nul, les quantités achetées en début de trimestre étant entières et supérieures ou égales à la demande à satisfaire.

Les états possibles du stock sont caractérisés par les 2 paramètres j , numéro du trimestre, et a_j quantité restant en stock à la fin du j ème trimestre ($a_j =$ la quantité achetée - d_i , d_i étant la demande à satisfaire).

Construire le graphe dont les sommets sont les états possibles (j, a_j) et dont les arcs traduisent les décisions d'achat faisant passer d'un état possible à un autre état possible.

On représentera l'état initial par le sommet $(0,0)$, correspondant à l'état du stock (nul) avant le premier trimestre. Au premier trimestre, on peut acheter jusqu'à 5 unités puisqu'on n'a rien en stock et que la capacité de stockage est de 5. La demande étant de 2 unités, il faudra au moins en acheter 2. À la fin du premier trimestre, la demande aura été satisfaite, il restera donc au plus 3 unités...

Ce graphe sera valué : on associera à chaque arc le coût de la décision d'achat d'unités correspondante (par exemple, l'achat de 2 unités lors du 1^{er} trimestre coûtera 26).

Comment se formule le problème posé ?