Deuxième contrôle continu (durée 1h30)

Documents autorisés : 2 feuilles A4 recto-verso.

Barème donné à titre indicatif. *Les réponses non justifiées ne seront pas notées.*

I. Chemins optimums (7 points)

On considère le graphe G suivant :

sommets i	a	b	c	d	e
successeurs j	b,c,e	c,e	d,e	a,c,e	/
poids des arcs (i,j)	5,3,10	4,2	2,6	4, 1, 4	/

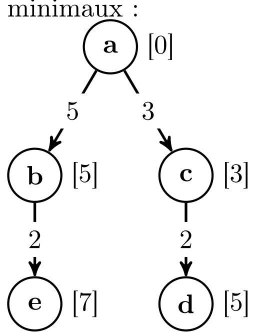
1. Calculez les chemins a-i-minimaux depuis le sommet a vers tous les autres sommets i (précisez l'algorithme utilisé, donnez son déroulement dans un tableau, et l'arborescence des chemins a-i-minimaux).

Corrigé

(2.5 pts) Les poids sont positifs, il y a au moins un circuit (cd) (dc), donc Dijkstra (et pas Bellman sans circuit) sera l'algo le plus efficace.

sommets choix	a	b	c	d	e
init	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
a	/	5	3	$+\infty$	10
c	/	5	/	5	9
b	/	/	/	5	7
d	/	/	/	/	7
e	/	/	/	/	/

Arborescence des chemins ai-minimaux :



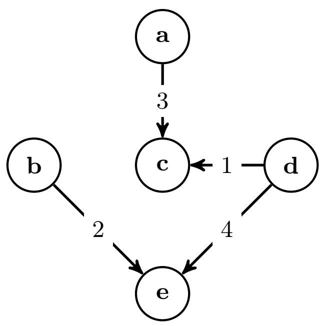
2. L'arborescence obtenue est-elle un arbre couvrant de poids minimal ? (donnez une justification détaillée).

Corrigé

(1.5 pts)L'arborescence est bien connexe et sans cycle et contient tous les sommets donc c'est un arbre couvrant. Il est de poids total 12.

Calculons un ACPM, on utilise l'algo de Kruskal : on sélectionne successivement (dc) poids 1, puis (be) poids 2, on ne peut pas prendre (cd) de poids 2 car ça créerait un cycle, (ac) poids 3, on ne peut pas prendre (ad) de poids 4 car ça créerait un cycle, on peut prendre (bc) ou (de) de poids 4.

On obtient un ACPM de poids 10 Donc l'arborescence de la question 1 n'est pas un ACPM puisque son poids est $12 > 10$.



3. Dessinez le graphe par niveaux si c'est possible sinon expliquez pourquoi ?

Corrigé

(0.5 pt) Il existe des circuits (par ex : cdc) donc on ne peut pas dessiner le graphe en niveaux.

4. Quel algorithme peut-on utiliser sur ce graphe pour calculer les chemins a-i-**Maximaux** ? Quel est le poids du chemin ae-maximal ?

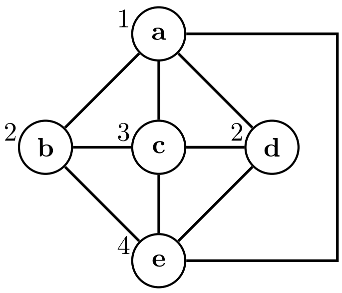
Corrigé

(1 pt) On peut utiliser Bellman-Kalaba ou Ford ou Floyd-Roy-Warshal, mais ni Dijkstra (pas valable pour maximaux) ni Bellman sans circuit (car circuits). Le chemin ae-maximal n'existe pas, car on peut passer une infinité de fois par le circuit (cdc) de poids 3.

5. Sans tenir compte du poids et des orientations des arcs, proposez une coloration du graphe. Montrez qu'on ne peut pas trouver moins que 3 couleurs.

Corrigé

(1.5 pts)



C'est une coloration à 4 couleurs. On ne peut pas trouver moins que 3 car il existe des cliques à 3 sommets (par ex : abc).

II. Routage (3 points)

Rappel : la **matrice des poids minimaux** associée à un graphe orienté[1] valué d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$ ayant pour termes λ_{ij} = longueur du chemin ij-minimal.
Rappel : la **matrice de routage** associée à un graphe orienté[1] valué d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$ ayant pour termes m_{ij} = sommet adjacent à i sur le chemin ij-minimal.

Après avoir fait tourner un algorithme de plus court chemin à partir d'un sommet, on réussit à compléter les matrices de routage et des poids minimaux de la façon suivante (les $\times$ signifient que la valeur n'est pas significative, les ? signifient qu'on ne peut pas déduire la valeur grâce aux résultats obtenus) :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \times & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ ? & \times & ? & ? & ? & ? \\ ? & 2 & \times & 4 & 5 & 4 \\ ? & ? & ? & \times & ? & 6 \\ ? & ? & ? & ? & \times & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & \times \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de routage}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \times & 4 & 2 & 0 & 7 & 4 \\ ? & \times & ? & ? & ? & ? \\ ? & 2 & \times & -2 & 5 & 2 \\ ? & ? & ? & \times & ? & 4 \\ ? & ? & ? & ? & \times & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & \times \end{pmatrix}}_{\text{Matrice des poids minimaux}}$$

1. Dans le cas non-orienté, on considère les chaînes ij-minimales.

1. À partir de ces matrices, donnez le nombre de sommets du graphe et dites si le graphe est orienté ou non (justifiez).

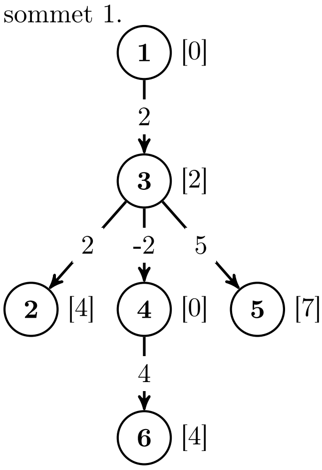
Corrigé

(0.5 pt) Il y a 6 sommets puisque c'est une matrice 6×6. Le graphe est orienté car la matrice des poids n'est pas symétrique (donc le plus court chemin dans un sens n'est pas le même que dans l'autre, ce n'est donc pas une chaîne mais un chemin différent dans un sens et dans l'autre).

2. Donnez le numéro du sommet à partir duquel on a lancé l'algorithme, et l'arborescence des chemins/chaînes minimaux/ales à partir de ce sommet.

Corrigé

(1.5 pt) Comme la première ligne est toute remplie on a calculé le chemin depuis le sommet 1.



3. On sait que l'arc ou l'arête (1,2) appartient au graphe, que peut-on dire sur son poids ?

Corrigé

(0.5 pt) Son poids est forcément supérieur ou égal à 4.

4. Listez tous les algorithmes de plus court chemin du cours qu'on a pu utiliser ?

Corrigé

(0.5 pt) pas Dijkstra (car poids négatif), on a pu utiliser Bellman sans circuit (si y avait pas de circuit), Bellman-Kalaba et Ford et Floyd-Roy-Warshall.

III. Ordonnancement MPM (5 points)

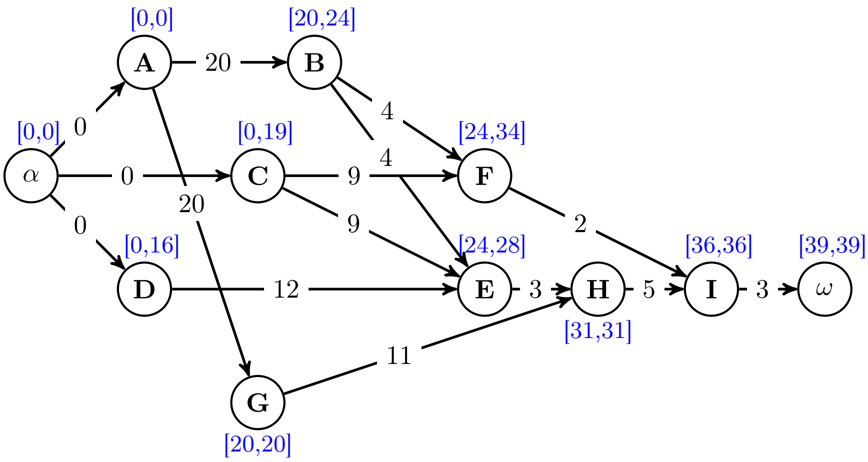
On considère le projet suivant décrit par les tâches et les contraintes entre tâches ci-dessous :

tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I
tâches requises	-	A	-	-	B, C, D	B, C	A	E, G	F, H
durée	20	4	9	12	3	2	11	5	3

1. Dessinez le graphe potentiels-tâches (MPM) correspondant à ce projet.

Corrigé

(1 pt)



2. Calculez la durée minimale du projet, les dates de début au plus tôt, les dates de début au plus tard, les marges totales, les marges libres [2] et les tâches critiques.

Corrigé

(2.5 pts) durée minimale 39, début au + tôt et au + tard : voir dessin

tâches	α	A	B	C	D	E	F	G	H	I	ω
marge totale	0	0	10	19	16	4	10	0	0	0	0
marge libre	0	0	0	15	12	4	10	0	0	0	0

tâches critiques (celles qui ont une marge totale nulle) : A, G, H, I.

3. Certaines tâches ont-elles des marges libres différentes de leur marge totale, pourquoi ?

Corrigé

(0.5 pt) B, C et D car suivies par des tâches qui ont de la marge totale, si elle prennent trop de temps sur leur marge elles peuvent empiéter sur la marge des tâches suivantes.

4. Sans tenir compte des durées des tâches, on désire trouver le nombre maximal de chemins *disjoints au sens des arcs* jusqu'à I. “Disjoints au sens des arcs” signifie que chaque arc peut être utilisé dans au plus un seul chemin entre le début du projet et I. Pour répondre à cette question, proposez un réseau de transport dans lequel le flot maximal donnera la solution. (**on ne demande pas de le résoudre**)

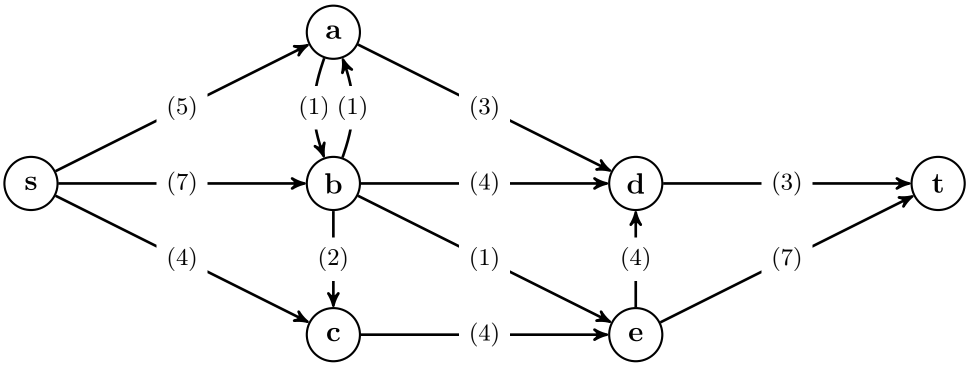
2. La marge libre est le délai pouvant être accordé à une tâche v sans modifier les Marges Totales des tâches suivantes, égal à $\min_{v' \in \Gamma^+(v)}(t(v') - t(v) - duree(v))$, où $t(v)$ est le début au plus tôt de v.

Corrigé

(1 pt) Il suffit de faire le même graphe en mettant des capacités de (1) sur tous les arcs sauf en sortie de (I) où on peut mettre $(+\infty)$, ainsi chaque arc ne sera utilisé qu'une seule fois dans une chaîne augmentante de α vers ω, sinon on excéderait les capacités.

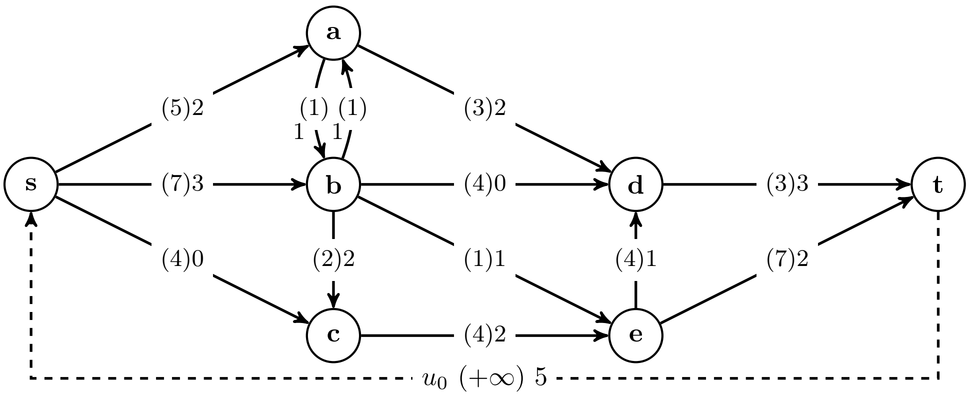
IV. Calcul de flot maximum (5 points)

On considère le réseau suivant où les arcs ont des capacités signalées entre parenthèses :



1. Montrez que le vecteur φ suivant est un flot compatible et donnez sa valeur.

Corrigé



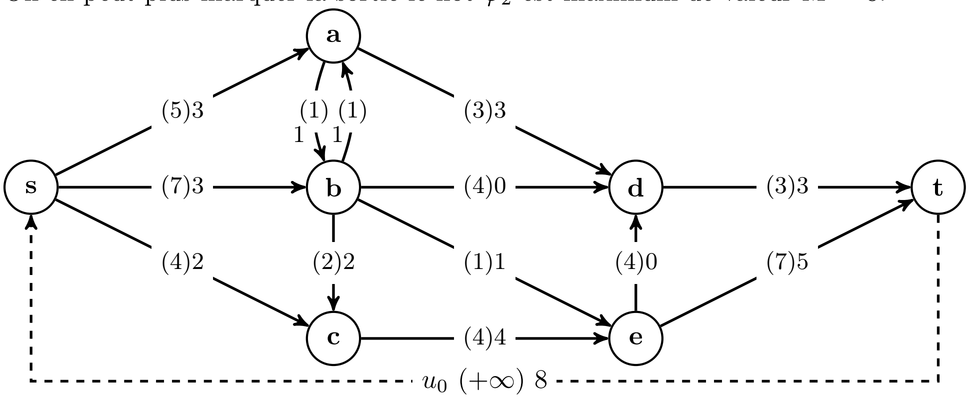
(1 pt) toutes les valeurs de φ sont compatibles : $\forall u, 0 \leq \varphi(u) \leq capa(u)$, d'autre part φ est un flot à condition de mettre 5 sur l'arc de retour, à ce moment là tout ce qui entre en chaque sommet = ce qui sort (loi de Kirchhoff). La valeur du flot est 5.

arcs	(s,a)	(s,b)	(s,c)	(a,b)	(a,d)	(b,a)	(b,c)	(b,d)	(b,e)	(c,e)	(e,d)	(d,t)	(e,t)
$\varphi(u)$	2	3	0	1	2	1	2	0	1	2	1	3	2

2. Donnez un flot maximum à l'aide de l'algorithme de Ford Fulkerson. Vous décrirez les différentes chaînes augmentantes utilisées et de combien vous avez augmenté à chaque étape. Vous décrirez ensuite ce flot maximum en donnant le flux sur chaque arc. Donnez la valeur du flot maximum (soit M cette valeur).

Corrigé

(2.5 pts) On part de φ, première chaîne augmentante : *sadet* on peut augmenter de 1, $\varphi_1 = \varphi + 1sadets$: valeur 6. *scet* on peut augmenter de 2. $\varphi 2 = \varphi_1 + 2scets$: valeur 8. On en peut plus marquer la sortie le flot φ_2 est maximum de valeur $M = 8$.



3. Serait-il possible d'obtenir un flot de même valeur M sans utiliser l'arc (ad) ?

Corrigé

(0.5 pt) oui en faisant passer 3 de + sur (ab) et (bd) et 3 de moins sur (ad) et (sa).

4. Existe-t'il un arc dont l'augmentation de capacité de 1 permettrait de trouver un flot de valeur M+1 ? si oui : lequel ?, sinon : justifiez.

Corrigé

(1 pt) Les arcs dont les capacités empêchent d'augmenter le flot sont ceux qui sortent des derniers sommets marqués (sabcd) c'est à dire (dt) (be) et (ce). Il suffit donc d'augmenter de 1 la capa d'un de ces arcs.