

**Exercice 1.** (1 pt) Calculer les racines de l'équation :  $x \in \mathbb{C}$ ,  $z^2 + z + 2 = 0$ .

(1 pt) Trouver toutes les solutions de l'équation :  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z^4 = -81$ .

**Exercice 2.** (2 pt) Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}$  la fraction rationnelle suivante

$$\frac{1-x}{(x+1)(x^2+1)}.$$

**Exercice 3.** (2 pts) Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k,$$

puis calculer la somme de cette série dans son domaine de convergence.

**Exercice 4.** (2 pts) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n^3 + n^2)}.$$

**Exercice 5.** (2 pts) En intégrant par parties, calculer l'intégrale  $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt$  pour  $x > 1$ .

L'intégrale généralisée  $\int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$  converge-t-elle ? (Justifier votre réponse.)

(2 pts) Calculer  $\int_0^x t e^{2t} dt$  et  $\int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2(t)) \tan(t) dt$ .

**Exercice 6.** (1 pt) Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 7.** (i) (1 pt) Quelle est la matrice de l'application linéaire  $L$  de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même définie par

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -2x + z \\ -x - y + z \end{pmatrix}$$

lorsque  $\mathbb{R}^3$  est muni de sa base canonique ?

(ii) (1 pt) Déterminer une base du noyau de l'application linéaire  $L$ . (1 pt) Déterminer une base de l'image de l'application linéaire  $L$ .

**Exercice 8.** (3 pts) Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$y'(t) - y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 2.$$

**Exercice 9.** (2 pts) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle du second ordre suivante

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0.$$