UPSSITECH Mise à niveau-Mathématiques

Examen - 16 octobre 2020 - 1h30

L'utilisation des calculatrices, téléphones, tablettes ou ordinateurs est interdite.
Aucun document n'est autorisé.
Le barème est indicatif et susceptible d'être légèrement ajusté.
Les questions marquées d'une étoile sont indépendantes des précédentes.

Exercice 1 *(2 pts)*

1. Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ de $2z^2 + 3z + 2 = 0$.

   (0.5) On commence par calculer le discriminant $\Delta = 3^2 - 4(2)(2) = -7$.

   (2 × 0.25) Comme $\Delta < 0$, on a deux racines complexes conjuguées : $z_\pm = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{7}}{4}$.

2. (*) Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ de $z^3 = -2\sqrt{2}$.

   (0.25) On commence par écrire $-2\sqrt{2}$ sous forme exponentielle : $-2\sqrt{2} = (\sqrt{2})^3 e^{i\pi}$.

   On cherche maintenant z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$.

   (0.25) On peut donc écrire l'équation en module $\rho^3 = (\sqrt{2})^3$ de laquelle on tire $\rho = \sqrt{2}$.

   (0.25) Puis l'équation en argument $3\theta = \pi[2\pi]$ fournit trois angles dans $[0, 2\pi[$: $\pi/3$, π et $5\pi/3$.

   (0.25) Les racines de l'équation sont donc $\sqrt{2}e^{i\pi/3}$, $\sqrt{2}e^{i\pi} = -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}e^{i5\pi/3}$.

Exercice 2 *(2 pts)* Quelle est la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle suivante ?

$$F(x) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 + 4x}$$

(0.25) Le degré du numérateur étant strictement inférieur au degré du dénominateur, la partie entière de la D.E.S. vaut 0.

(0.25) La factorisation du dénominateur en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$ donne $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$.

(0.5) La forme de la D.E.S. est donc

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}. \tag{1}$$

(0.25) Pour trouver A, on multiplie (1) par x,

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{(x^2 + 4)} = A + \frac{x(Bx + C)}{x^2 + 4},$$

puis on évalue en $x = 0$: $\dfrac{1}{4} = A$.

(0.25) Pour trouver B, on multiplie (1) par x,

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{(x^2 + 4)} = A + \frac{x(Bx + C)}{x^2 + 4},$$

puis on prend la limite lorsque $x \to \infty$: $4 = A + B$. On en déduit que $B = 4 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{15}{4}$.

(0.25) Pour trouver C, on évalue (1) en $x = 1$: $\dfrac{1}{5} = A + \dfrac{B+C}{5}$. On en déduit $1 = 5A + B + C$ et donc $C = 1 - 5A - B = -4$.

(0.25) Finalement, $F(x) = \dfrac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 + 4x} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{15x - 16}{x^2 + 4}\right)$.

Exercice 3 *(2 pts)* **En utilisant le changement de variable** $\boxed{u = \frac{x}{2}}$, calculer l'intégrale

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx.$$

(0.75) On commence par calculer $du = \dfrac{1}{2}dx$, puis on calcule les nouvelles bornes : lorsque x vaut 0, u vaut 0 et lorsque x vaut 2, u vaut 1.

(1.25) On peut alors écrire

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{(2u)^2 + 4} 2du = \frac{2}{4}\int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{2}\Big[\arctan(u)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\Big(\arctan(1) - \arctan(0)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{4} - 0\Big) = \frac{\pi}{8}.$$

Exercice 4 *(2 pts)*

1. **En utilisant une intégration par parties**, calculer l'intégrale $I_2(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{\ln(x)}{x^4} dx$.

   (1.5 pt) On choisit de dériver le ln et on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
I_2(a) &= \int_1^a x^{-4} \ln(x) dx \\
&= -\int_1^a \frac{x^{-3}}{-3}\frac{1}{x} dx + \left[\frac{x^{-3}}{-3}\ln(x)\right]_1^a \\
&= \frac{1}{3}\int_1^a x^{-4} dx - \frac{1}{3}\frac{\ln(a)}{a^3} \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^a - \frac{1}{3}\frac{\ln(a)}{a^3} \\
&= \frac{-1}{9}\left(\frac{1}{a^3} - 1\right) - \frac{1}{3}\frac{\ln(a)}{a^3}
\end{aligned}$$

   J'ai appliqué ici

   - *0.25 point pour le bon choix de u et v'*
   - *0.25 pour la bonne dérivée de u*
   - *0.25 pour la bonne primitive de v*
   - *0.25 pour l'application correcte de la formule d'IPP*
   - *0.5 pour la fin du calcul*

2. En déduire si l'intégrale généralisée $I_3 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^4} dx$ converge. Si oui, donner sa valeur.

   (0.5 pt) On calcule la limite de $I_2(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$. On obtient $1/9$, donc $I_3 = \dfrac{1}{9}$.

Exercice 5 *(2 pts)* Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tous calculs faits, on obtient $\det(M) = 1120$.

Exercice 6 *(1 pt)* Donner une équation cartésienne caractérisant l'espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille constituée des deux vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 2, 3)$.

Par définition, tout vecteur (x, y, z) de F s'écrit $au_1 + bu_2 = (x, y, z)$, pour a et b réels. Pour trouver une équation cartésienne de F, il suffit de résoudre le système linéaire

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccc} a & + & b & = & x \\ a & + & 2b & = & y \\ & & 3b & = & z \end{array} \right.$$

On a en fait

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} a & + & b & = & x & \\ & & b & = & y - x & (L_2 - L_1) \\ & & 3b & = & z & \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccccc} a & + & b & = & x & \\ & & b & = & y - x & \\ & & 0 & = & z - 3(y - x) & (L_3 - 3L_2) \end{array} \right\}.$$

Une équation cartésienne de F est donc $3x - 3y + z = 0$.

Exercice 7 *(1 pt)* Donner une base et la dimension de l'espace vectoriel

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}.$$

On peut écrire $G = \{(2y, y, z) \text{ avec } y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\Big((2, 1, 0), (0, 0, 1)\Big)$. Comme ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, $\Big((2, 1, 0), (0, 0, 1)\Big)$ est une base de G et $\dim(G) = 2$.

Exercice 8 *(4.5 pts)* On considère l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x + 2y, 3y). \end{array}$$

1. Cette application f est-elle injective ? surjective ?

   (0,5 pt) On commence par calculer le noyau de f en résolvant le système linéaire suivant :

   $$(S) \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & + & 2y & = & 0 \\ & & 3y & = & 0 \end{array} \right.$$

   Il admet l'unique solution $(x, y) = (0, 0)$.

   (0,5 pt) On en déduit que f est injective.

   (0,5 pt) En appliquant le théorème du rang, on a $2 = 0 + \dim(\mathrm{Im}(f))$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. On en déduit que f n'est pas surjective.

2. (*) Donner A, la matrice représentative de f relativement aux bases canoniques.

   (0,5 pt)

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. (*) Notons $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (-2, -1, 2)$ et $a_3 = (1, 2, 3)$. On admet que la famille $\mathcal{F}$ formée des vecteurs a_1, a_2 et a_3 est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Donner la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{F}$.

   (0,5 pt)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer l'inverse de P.

   (1 pt)

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. En déduire B, la matrice représentative de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et à la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$. *Remarque : on ne change donc de base que pour l'espace d'arrivée.*

   (1 pt)

$$B = P^{-1}A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 *(2.25 pts)* Trouver la solution de l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = e^{-x}$ qui vérifie $y(0) = 3$.

(0.5 pt) L'équation homogène s'écrit $y'(x)+y(x) = 0$ et ses solutions sont sous la forme $y_H(x) = Ce^{-x}$ avec C une constante.

(1 pt) On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_P(x) = Axe^{-x}$.

On a alors $y_P'(x) = Ae^{-x} - Axe^{-x}$. En injectant dans l'équation, on obtient

$$\left[Ae^{-x} - Axe^{-x}\right] + Axe^{-x} = e^{-x},$$

dont on tire $A = 1$.

Une solution particulière de l'équation $y'(x) + y(x) = e^{-x}$ est donc $y_P(x) = xe^{-x}$.

(0.25 pt) Les solutions de l'équation complète s'écrivent alors $y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ce^{-x} + xe^{-x}$.

(0.5 pt) On exploite enfin la condition initiale : $y(0) = 3 \Leftrightarrow C = 3$.

LA solution de l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = e^{-x}$ qui vérifie $y(0) = 3$ est donc $y(x) = 3e^{-x} + xe^{-x} = (3 + x)e^{-x}$.

Exercice 10 *(2.5 pts)* Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 13\cos(2x).$$

(1 pt) L'équation caractéristique associée à (E) est $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui s'écrit encore $(r - 1)^2 = 0$ et donc la racine double est donc $r = 1$ (*0.5 point ici*).

On en déduit que les solutions de l'équation homogène $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ associée à (E) sont de la forme $y_H(x) = (Ax + B)e^x$, avec A et B des constantes (*0.5 point ici*).

(1 pt) On cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_P(x) = C\cos(2x) + D\sin(2x)$ (*0.25 point ici*).

On a alors $y_P'(x) = 2D\cos(2x) - 2C\sin(2x)$ (*0.25 point ici*) et $y_P''(x) = -4C\cos(2x) - 4D\sin(2x)$ (*0.25 point ici*).

En injectant dans l'équation on obtient

$$(-4C - 4D + C)\cos(2x) + (-4D + 4C + D)\sin(2x) = 13\cos(2x).$$

On doit alors résoudre le système linéaire (*0.25 point ici pour l'écriture du SL*)

$$\begin{cases} -3C - 4D &= 13 \\ 4C - 3D &= 0. \end{cases}$$

On obtient $C = -\dfrac{39}{25}$ et $D = -\dfrac{52}{25}$.

Une solution particulière de (E) s'écrit donc $y_P(x) = -\dfrac{1}{25}\Big(39\cos(2x) + 52\sin(2x)\Big)$.

(0.5 pt) Les solutions de (E) s'écrivent

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = (Ax + B)e^x - \frac{1}{25}\Big(39\cos(2x) + 52\sin(2x)\Big).$$