**UPSSITECH** Mise à niveau-Mathématiques

# Examen - 16 octobre 2020 - 1h30

**L'utilisation des calculatrices, téléphones, tablettes ou ordinateurs est interdite.**
**Aucun document n'est autorisé.**
**Le barème est indicatif et susceptible d'être légèrement ajusté.**
**Les questions marquées d'une étoile sont indépendantes des précédentes.**

**Exercice 1** *(2 pts)*

1. Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ de $2z^2 + 3z + 2 = 0$.
2. (*) Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ de $z^3 = -2\sqrt{2}$.

**Exercice 2** *(2 pts)* Quelle est la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle suivante ?

$$F(x) = \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 + 4x}$$

**Exercice 3** *(2 pts)* **En utilisant le changement de variable** $\boxed{u = \frac{x}{2}}$, calculer l'intégrale

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx.$$

**Exercice 4** *(2 pts)*

1. **En utilisant une intégration par parties**, calculer l'intégrale $I_2(a) = \displaystyle\int_1^a \frac{\ln(x)}{x^4} dx$.
2. En déduire si l'intégrale généralisée $I_3 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^4} dx$ converge. Si oui, donner sa valeur.

**Exercice 5** *(2 pts)* Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6** *(1 pt)* Donner une équation cartésienne caractérisant l'espace vectoriel $F$ de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille constituée des deux vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (1, 2, 3)$.

**Exercice 7** *(1 pt)* Donner une base et la dimension de l'espace vectoriel

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}.$$

Tourner la page SVP ...

**Exercice 8** *(4 pts)* On considère l'application linéaire

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x+2y, 3y). \end{array}$$

1. Cette application $f$ est-elle injective ? surjective ?
2. (*) Donner $A$, la matrice représentative de $f$ relativement aux bases canoniques.
3. (*) Notons $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (-2,-1,2)$ et $a_3 = (1,2,3)$. On admet que la famille $\mathcal{F}$ formée des vecteurs $a_1$, $a_2$ et $a_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   Donner la matrice $P$ de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{F}$.
4. Calculer l'inverse de $P$.
5. En déduire $B$, la matrice représentative de $f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et à la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$. *Remarque : on ne change donc de base que pour l'espace d'arrivée.*

**Exercice 9** *(2 pts)* Trouver la solution de l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = e^{-x}$ qui vérifie $y(0) = 3$.

**Exercice 10** *(2 pts)* Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 13\cos(2x).$$