Mathématiques - UPSSITECH 20 Octobre 2017 - Examen mise à niveau - 1h30

Exercice 1. (2 pts) Écrire les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique. En déduire l'écriture **sous forme trigonométrique** du quotient $\frac{z_1}{z_2}$. Calculer directement **l'écriture algébrique** de $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 2. (2 pts) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle suivante

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Exercice 3. (2 pts) Déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2} x^k,$$

puis calculer la somme de cette série dans son domaine de convergence. Indication : Calculer séparément $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2} x^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} x^k$, et utiliser la dérivée de $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

Exercice 4. (2 pts) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n+2)}, \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\, x^n}{n^4}.$$

Exercice 5. (2 pts) En effectuant un changement de variable simple, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{t}{t^2+1} dt$ pour $x > 1$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty \frac{t}{t^2+1} dt$ converge-t-elle ? (Justifier votre réponse.)

(2 pts) Calculer $\displaystyle\int_0^x t \sin 2t\, dt$.

Exercice 6. (1 pt) Soit

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 4y + z = 0\}.$$

Justifier le fait que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de E.

Exercice 7. (2 pts) Quelle est la matrice de l'application linéaire L de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ -2x + z \\ -x - y + z \end{pmatrix}$$

lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique ? Cette matrice est-elle inversible ? (Donner un argument simple permettant de répondre sans calculer l'inverse.)

Exercice 8. (3 pts) Résoudre l'équation différentielle du premier ordre suivante

$$y'(t) + 2y(t) = t\, e^{2t}, \quad y(0) = 0.$$

Exercice 9. (2 pts) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle du second ordre suivante

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 0.$$