La théorie des graphes et la recherche opérationnelle font à la fois partie des mathématiques dites "discrètes" [1] et de l'informatique théorique (Dijkstra était informaticien). Cependant cette matière est peu enseignée en mathématiques et fait systématiquement partie de l'enseignement en informatique, bien que la recherche fasse intervenir des laboratoires rattachés aux deux disciplines. Informellement, la *théorie des graphes* permet de raisonner sur des dessins dans lesquels apparaissent des sommets et des arcs. La *recherche opérationnelle* propose des méthodes rationnelles pour élaborer de meilleures décisions dans les problèmes d'organisation. La recherche opérationnelle tire son nom des applications militaires dont elle est issue, elle s'attaque à trois types de problèmes *combinatoire* (trouver une solution optimale parmi un grand nombre de solutions [2]), *aléatoire* (trouver une solution optimale en présence d'incertitude [3]) ou *concurrentiel* (trouver une solution optimale en prenant en compte les agissements d'autres décideurs [4]) [17].
Les thèmes abordées dans ce cours sont au confluent de la théorie des graphes et de l'optimisation combinatoire :

— connexité, coloration
— arbre partiel de poids minimum
— plus court chemin
— problèmes de flots
— ordonnancement de tâches.

Les principaux documents qui ont servi à réaliser ce cours sont le support de cours de Serge Nogarède [14] celui de Mme Laudet[12] et celui d'Annie Astié-Vidal [1], les livres [2, 4, 8, 13, 11] et l'encyclopédie en ligne wikipedia [18, 17].

Historique

(wikipedia [18], Patrice Ossona de Mendez [5], Alexander Schrijver [16])
Les premiers travaux sur la théorie des graphes sont en général attribués au mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) qui en 1736 réussit à formaliser mathématiquement et résoudre le problème des ponts de Koenigsberg D'autres problèmes datant du XIXieme siècle sont posés en termes de graphes :

1. dans le sens où la notion de continuité n'intervient pas. Les objets étudiés en mathématiques discrètes sont des ensembles dénombrables comme celui des entiers. Les mathématiques discrètes incluent habituellement la logique (et l'étude du raisonnement), la théorie des ensembles, la théorie des nombres, la combinatoire, la théorie des graphes, la théorie de l'information, la théorie de la calculabilité et de la complexité.

2. Exemple typique : déterminer où installer 5 centres de distribution parmi 30 sites d'implantation possibles, de sorte que les coûts de transport entre ces centres et les clients soient minimum. L'énumération des solutions 30 x 29 x 28 x 27 x 26 / (5x4x3x2) = 142 506 doit être évitée.

3. Exemple typique : connaissant la distribution aléatoire du nombre de personnes entrant dans une administration en une minute et la distribution aléatoire de la durée de traitement pour une personne, déterminer le nombre minimum de guichets à ouvrir pour qu'une personne ait moins de 5% de chances de devoir attendre plus de 15 minutes.

4. Exemple typique : fixer une politique de prix de vente, sachant que les résultats d'une telle politique dépendent de la politique que les concurrents adopteront.

— le problème du voyageur de commerce (“traveling salesman”) formulé dans un manuel allemand pour voyageurs de commerce de 1832 [5]. Il s'agit de trouver un circuit de longueur minimale permettant de parcourir toutes les villes d'un réseau.
— le problème des quatre couleurs : en 1852, l'anglais Francis Guthrie (élève de Augustus De Morgan) conjecture que n'importe quelle carte géographique peut être coloriée en utilisant uniquement quatre couleurs de telle façon que deux pays qui présentent une frontière commune soient de couleur distincte. Ce problème a été résolu par Kenneth Appel et Wolfgang Haken en 1976 en faisant appel à une preuve informatique, soit un siècle après son énonciation. En 2006, Georges Gonthier a proposé une nouvelle preuve basée elle aussi sur une démonstration par ordinateur mais plus robuste. De nombreux termes et concepts théoriques fondamentaux de la théorie des graphes ont découlé des tentatives de résolution de ce problème.

La formalisation de la théorie des graphes commence vraiment dans les années 1940 : un des premiers ouvrage est écrit par König en 1936 (théorie des graphes orientés et non orientés). Et connait un essort particulier dans les années 1960 avec notamment Claude Berge [2], père de la théorie “moderne” des graphes.

Parallèlement les années 1960 permettent la découverte d'algorithmes fondamentaux :
— plus court chemin (Bellman-Ford 1958, Dijkstra 1959)
— arbre couvrant de poids minimum (Kruskal 1956, Prim 1957, Norman-Rabin 1959)
— flot maximal (Ford-Fulkerson 1956)
— coloration (Welsh-Powell 1967)
— recherche de chemin (“pathfinding”) : Branch and bound (Land-Doig 1960) et $A^\star$ (Hart-Nilsson-Raphael 1968).

De nos jours, la recherche opérationnelle et la théorie des graphes continuent leur évolution, deux exemples (Philippe Chrétienne [3]) :
— le problème du voyageur de commerce (années 60 : 20 villes, années 80 : 1000 villes, années 00 : 1 000 000 villes). Cette évolution est due à des progrès théoriques (approche polyédrique), des progrès algorithmique (programmation linéaire continue, structure de données) et au progrès technologique.
— les problèmes d'ordonnancement : un problème concernant 10 machines et 10 pièces (nombre de solutions $(10!)^{10}$) était non résolu jusqu'en 1995. Il est maintenant résolu exactement pour plusieurs dizaines de machines et de pièces grace aux progrès théoriques et algorithmiques (approches par contraintes).

5. “Der Handlungsreisende - wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiB zu sein- von einem alten Commis-Voyageur” (Le voyageur de commerce - comment il doit être et ce qu'il doit faire pour obtenir des commandes et être sur du succès de ses affaires - par un ancien Commis-Voyageur).