CHAPITRE 2

LA REPRÉSENTATION D'ÉTAT ET LES AUTRES MODÈLES

Viviane CADENAT
Enseignant – chercheur à l'UPS
LAAS – CNRS

Au programme

Introduction

- Rappels
  - **Notions de base**
    - Système : *tout procédé évoluant en fonction du temps sous l'action d'entrées de commande et produisant des sorties*
    - Modèle : *Représentation mathématique du système*
  - ***3 types de modèles***

Représentation d'état

$$\dot{X}(t) = A\,X(t) + BU(t)$$
$$Y(t) = C\,X(t) + DU(t)$$

Modèle interne

U(t) → Modèle (X(t)) → Y(t)

Équation différentielle d'ordre n

Fonction de transfert

Modèles externes ou entrées/sorties

U(t) → Modèle → Y(t)

⇒ Intuitivement : relient *directement* la sortie et l'entrée du système.

Introduction

- Modèles externes
  - **Équation différentielle (ED) d'ordre n**
    - Ce modèle donne la relation E/S d'un système dynamique
      → Exemple : Slide 7
    - Cas général : système linéaire invariant mono-entrée/mono-sortie :
      → **Équation différentielle ordinaire à coefficients constants**

$$\boxed{a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)}$$

  - Les paramètres a_i, b_i sont constants, $y^{(n)}(t) = \frac{d^n y(t)}{dt^n}$ $u^{(m)}(t) = \frac{d^m y(t)}{dt^m}$
  - m < n : **système causal** (ne peut réagir avant d'avoir été excité)
- Remarques :
  - n : **ordre** du système
  - L'état du système X(t) n'apparaît plus → **modèle externe**
  - La solution de l'ED y(t) définit la **réponse temporelle** du système
  - L'équation différentielle d'ordre n est **unique**

Introduction

- Modèles externes
  - **Fonction de transfert (FT)**
    - Se déduit de l'équation différentielle d'ordre n grâce à la **transformée de Laplace (TL)**
    - Transformée de Laplace (cf. cours math)
      - Définition : La TL d'un signal *causal* f(t) (i.e., *f(t) = 0 pour t <0*) est définie par :

$$\underbrace{F(p)}_{\text{Transformée}} = \mathscr{L}(\underbrace{f(t)}_{\text{Original}}) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt \qquad \text{avec } p = \sigma + j\,\omega$$

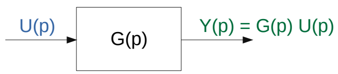
      - Propriétés essentielles :
        - **Linéarité** ➡ $\mathscr{L}(af(t) + bg(t)) = aF(p) + bG(p), \quad a,b \in \mathbb{R}$
        - **Intégration** ➡ $\mathscr{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) = \frac{F(p)}{p}$
        - **Dérivation** ➡ $\mathscr{L}(\dot{f}(t)) = p\,F(p) - f(0)$
          $\mathscr{L}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$

Intérêt : On transforme les équations différentielles en équations algébriques plus simples à manipuler

Introduction

- Modèles externes
  - **Fonction de transfert (FT)**
    - Se déduit de l'équation différentielle grâce à la **transformée de Laplace**
    - Définition : On appelle **transmittance** ou **fonction de transfert** du système le rapport des TL de la sortie et de l'entrée **à CI nulles**

$$G(p) = \frac{\mathscr{L}(y(t))}{\mathscr{L}(u(t))} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$



- Calcul :
  - Un exemple → Slide 7
  - Cas général

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

TL à CI = 0

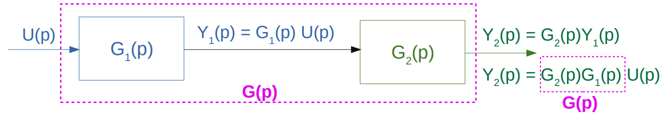
$$(a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0) Y(p) = (b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0) U(p)$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0}$$

NB : La fonction de transfert est UNIQUE

Introduction

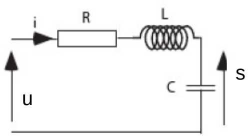
- Modèles externes
  - **Fonction de transfert (FT)** $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0}$
    - Intérêts
      - Ratio de 2 polynômes → *plus facile à manipuler*
      - Manipulation aisée des schémas-blocs → *Possibilité de déterminer plus facilement la sortie d'un système constitué de plusieurs sous-systèmes*



- Définitions complémentaires
  - **Ordre du système** : degré du dénominateur de la FT
  - **Pôles** de la FT : Racines du dénominateur
  - **Stabilité** : Une FT est stable ssi tous ses pôles sont à partie réelle < 0
  - **Zéros** de la FT : Racines du numérateur
  - **Gain statique** de la FT : $\lim_{p \to 0} G(p)$

Introduction

- Modèles externes → Un exemple



$$u(t) - s(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = C\frac{ds(t)}{dt} = C\dot{s}(t)$$

Équation différentielle d'ordre n (unique)

$$u(t) - s(t) = RC\dot{s}(t) + LC\ddot{s}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$LC\ddot{s}(t) + RC\dot{s}(t) + s(t) = u(t)$$

Fonction de transfert F(p) = $\frac{S(p)}{U(p)}$ (unique)

$$(LCp^2 + RCp + 1) S(p) = U(p)$$

$$\Downarrow$$

$$S(p) = \underbrace{\frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}}_{F(p)} U(p)$$

Et une représentation d'état (parmi une infinité) $\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix} U(t)$ $\quad Y(t) = C\,X(t)$ $\quad X(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \end{pmatrix}$

Les relations entre les différents modèles

- De la RE → FT
  - Détermination

$$\begin{matrix} \dot{X}(t) = A\,X(t) + B\,U(t) \\ Y(t) = C\,X(t) + D\,U(t) \end{matrix} \xrightarrow{\text{TL à CI = 0}} G(p) = \frac{\mathscr{L}(y(t))}{\mathscr{L}(u(t))} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

$$\boxed{G(p) = C(pI - A)^{-1} B + D}$$

- Remarques
  - **Les valeurs propres de A sont aussi pôles de la FT** (avant simplification éventuelle pôle/zéro)
  - **Il existe une infinité de représentations d'état mais une seule fonction de transfert** ⇒ on obtient la même FT que l'on calcule à partir d'une base diagonale, CC, CO ou autre

Les relations entre les différents modèles

- De la FT → RE : méthodes rapides
  - Privilégier la forme compagne de commande ou d'observation
  - La fonction de transfert doit être sous la forme :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{1\, p^n + \ldots + a_1 p + a_0}$$

★ Penser à diviser par a_n le cas échéant !
★ m doit être < n

Base compagne d'observation

$$\dot{X}_{co}(t) = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} X_{co}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} U(t)$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} X_{co}(t)$$

Base compagne de commande

$$\dot{X}_{cc}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} X_{cc}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(t)$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_m & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} X_{cc}(t)$$

Les relations entre les différents modèles

- De l'ED d'ordre n → RE : méthode rapide
  - Privilégier la forme compagne d'observation
  - L'ED doit être sous la forme :

$$1\, y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

★ Penser à diviser par a_n le cas échéant !
★ m doit être < n

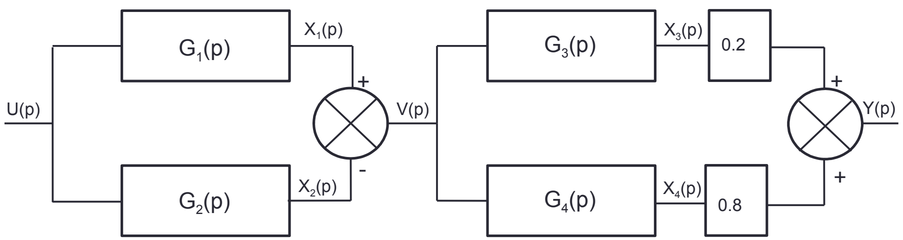
$$\dot{X}_{co}(t) = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} X_{co}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_m \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} U(t)$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} X_{co}(t)$$

NB : Il existe une infinité de représentations d'état mais une seule ED d'ordre n

Hiérarchie entre modèles

- Non équivalence des modèles : un exemple



$$G_1(p) = \frac{1.5}{p+1} \qquad G_2(p) = \frac{0.5}{p-1} \qquad G_3(p) = \frac{1}{p-2} \qquad G_4(p) = \frac{1}{p+3}$$

Hiérarchie entre modèles

- Non équivalence des modèles : un exemple
  - Choix du vecteur d'état : $X(t) = [x_1(t)\ x_2(t)\ x_3(t)\ x_4(t)]^T$
  - Représentation d'état obtenue à partir du schéma-bloc:

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U(t)$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} X(t)$$

➡ **Ordre du système :**

Hiérarchie entre modèles

- Non équivalence des modèles : un exemple
  - Modèle *temporel* entrées/sorties : Lien entre y (et ses dérivées successives) et u (et ses dérivées successives)
  - Obtention de l'équation différentielle

$$\begin{cases} Y(p)=\dfrac{p-1}{p^2+p-6}V(p) \longrightarrow \dot{y}(t)+\dot{y}(t)-6y(t)=\dot{v}(t)-v(t) \\ V(p)=\dfrac{p-2}{p^2-1}U(p) \longrightarrow \ddot{v}(t)-v(t)=\dot{u}(t)-2u(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dddot{y}(t)+2\ddot{y}(t)-5\dot{y}(t)-6y(t)=\dot{u}(t)-2u(t)$$

➡ **Ordre du système :**

Hiérarchie entre modèles

- Non équivalence des modèles : un exemple
  - Obtention de la FT $F(p)=\dfrac{Y(p)}{U(p)}$

$$\begin{cases} Y(p)=\dfrac{p-1}{p^2+p-6}V(p) \\ V(p)=\dfrac{p-2}{p^2-1}U(p) \end{cases} \Rightarrow Y(p)=\frac{1}{(p+3)(p+1)}U(p)$$

➡ **Ordre du système :**

Conclusion : entre les 3 modèles, on a une « perte d'information » qui se traduit par une disparition de certains pôles.

Hiérarchie entre les modèles

- Non équivalence des modèles : un exemple
  - Expression de la RE initiale dans la base diagonale

$$\dot{X}_d(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} X_d(t) + \begin{pmatrix} 0.75 \\ -0.125 \\ 0 \\ -0.625 \end{pmatrix} U(t)$$

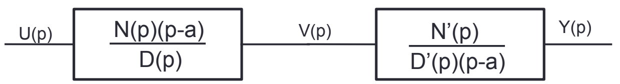
$$Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} X_d(t)$$

Donc
- ✔ Le pôle 2 est non commandable et il n'apparaît pas dans la FT
- ✔ Le pôle 1 est non observable et il n'apparaît ni dans la FT ni dans l'ED
- ✔ Les pôles -1 et -3 sont commandables et observables, ils apparaissent dans la FT et l'ED

Conclusion
- La FT ne contient que les pôles commandables et observables
- L'ED contient les pôles observables, commandables, non commandables → forcément observable
- La RE contient tous les pôles → elle est le modèle le plus complet !

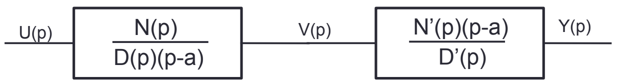
Hiérarchie entre les modèles

- Non équivalence des modèles : commandabilité et observabilité dans les schémas-blocs
  - Commandabilité de p = a



Le pôle p = a est non commandable

  - Observabilité de p = a



Le pôle p = a est non observable

★ Ne jamais permuter les schémas-blocs
★ Toujours vérifier si ce critère fonctionne → limite les calculs !