CM4 : Equations cartésiennes, applications linéaires, matrices

L3 UPSSITECH

Mardi 14 septembre 2021

Objectifs de cette séance

- Savoir caractériser un espace vectoriel par
  - une base et la dimension
  - ou des équations cartésiennes.
- Savoir déterminer si une application est linéaire
  et en donner une représentation matricielle dans des bases indiquées.
- Savoir manipuler des matrices
  - les additionner, les multiplier,
  - en calculer le déterminant,
  - les inverser.

Lorsqu'un e.v. est défini par des équations cartésiennes ...

... comment en trouver une base et la dimension ?

- le mettre sous la forme $\mathrm{Vect}(...)$
- et montrer que les vecteurs générateurs sont libres.

Ils forment alors une base et leur nombre donne la dimension du s.e.v.

Exercice-méthode - base et dimension ?

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + 2y - z = 0 \right\}.$$

Lorsqu'un e.v. est engendré par une famille de vecteurs ...

... comment en trouver les équations cartésiennes ?

Exercice-méthode - equations cartésiennes ?

$$W_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Hypothèses de la section

- E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ;
- $\dim(E) = n$, $\dim(F) = m$;
- $\mathcal{E} = \left\{e_1, e_2, ..., e_n\right\}$ est une base de E et $\mathcal{F} = \left\{f_1, f_2, ..., f_m\right\}$ est une base de F.
- On note 0_E l'élément neutre de E et 0_F celui de F.

Définition

Une application $f : E \to F$ est une ***application linéaire*** si elle vérifie, pour tous $u, v \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \text{et} \quad f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Conséquence de la définition

$$f(0_E) = 0_F.$$

Application

L'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y) = (x+1, y+2)$ est-elle linéaire ?

Exercice-méthode : montrer qu'une application est linéaire

$$\begin{array}{rccc} L : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & \Big(x+y, 2y, x-y\Big), \end{array}$$

Théorème

Si on se donne n vecteurs quelconques $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$, ..., $\hat{f}_n$ de F, il existe une et une seule application linéaire f de E dans F telle que

$$f(e_1) = \hat{f}_1, \quad f(e_2) = \hat{f}_2, \quad ..., \quad f(e_n) = \hat{f}_n.$$

Application

Prenons $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{E}$ la base canonique et

$$\hat{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \hat{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \hat{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Cherchons l'expression de l'application linéaire f définie par

$$f(e_1) = \hat{f}_1, \quad f(e_2) = \hat{f}_2, \quad f(e_3) = \hat{f}_3$$

Réponse

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x + y + 3z \\ -5x + 12y - 4z \end{pmatrix}.$$

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- f est déterminée de manière unique par l'image d'une base de E, donc par les vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$, ..., $f(e_n)$.
- Comme $f(e_j) \in F$, il se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{F}$: il existe a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj} tels que

$$f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + ... + a_{mj}f_m.$$

Représentation matricielle de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$

C'est le tableau à m lignes et n colonnes suivant

$$[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exercice-méthode - représentation matricielle de $L(x, y) = (x + y, 2y, x - y)$ dans les bases canoniques ?

Addition de deux matrices

Définition

On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, ou parfois $\mathbb{R}^{m,n}$, l'***ensemble des matrices*** (tableaux) de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{R}$.

Addition de deux matrices

L'***addition de 2 matrices*** A et B de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, notée $A+B$, dont les éléments sont simplement la somme des éléments de A et B aux mêmes positions.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Multiplication d'une matrice par un scalaire

La ***multiplication d'une matrice A de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ par un élément $\lambda \in \mathbb{R}$*** est une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, notée λA, dont les éléments sont simplement la multiplication des éléments de A par λ.

Exemple

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & -15 \end{pmatrix}$$

Théorème

L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Multiplication de deux matrices

Multiplication de deux matrices

La ***multiplication de 2 matrices*** $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, notée C, définie pour tout $1 \leq i \leq m$ et pour tout $1 \leq j \leq p$ par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 15 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} = ???$$

Exemple (suite)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 15 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 15 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & & & \\ -3 & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 15 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 13 & & \\ -3 & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 15 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 13 & 15 & 1 \\ -3 & -16 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

Lien avec les représentations matricielles

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une base de F.

Relation importante

Notons

- $[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ la matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$,
- $[v]_{\mathcal{E}}$ le vecteur des coordonnées de v dans la base $\mathcal{E}$,
- et $[f(v)]_{\mathcal{F}}$ le vecteur des coordonnées de $f(v)$ dans la base $\mathcal{F}$.

On a

$$[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[v]_{\mathcal{E}} = [f(v)]_{\mathcal{F}},$$

Transposée

Transposée d'une matrice à coefficients réels

Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la ***matrice transposée*** de A est la matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, notée $A^\top$, définie par $A^\top = (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ et $\alpha_{ij} = a_{ji}$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Remarque : $\left(A^\top\right)^\top = A$.

Proposition

Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Déterminant d'une matrice carrée

Dans cette section, on ne s'intéresse qu'aux matrices carrées : celles qui ont autant de lignes de colonnes.

L'espace $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est aussi noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On appelle ***déterminant de A*** et on note $\det(A)$ ou $|A|$ le scalaire de $\mathbb{R}$ défini par

$$\det(A) = ad - cb.$$

Calcul du déterminant par développement par rapport à la ligne i

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle ***déterminant de A*** et on note $\det(A)$ ou $|A|$ le scalaire de $\mathbb{R}$ défini par :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij}|M_{ij}|$$

où $M_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est obtenue à partir de A en retirant la ligne i et la colonne j.

Exercice-méthode - calcul de déterminant par développement p.r. ligne 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Résultat analogue pour les colonnes ...

Exercice-méthode - calcul de déterminant par développement p.r. colonne 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Exercice-méthode - calcul du déterminant d'un matrice triangulaire

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire

est simplement le produit des éléments diagonaux.

Quelques règles de calcul pour les matrices 2×2

- Permutation de 2 lignes ;

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb = -(cb - ad) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

- Multiplication d'une ligne par un scalaire ;

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = (\alpha a)d - c(\alpha b) = \alpha(ad - cb) = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- Linéarité par rapport aux lignes ;

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a + A & b + B \\ c & d \end{vmatrix} &= (a + A)d - c(b + B) \\ &= (ad - cb) + (Ad - cB) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & B \\ c & d \end{vmatrix} \end{aligned}$$

- Une petite dernière
$\begin{vmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{vmatrix} = \dots$

Mêmes propriétés si matrice carrée de taille > 2 ...

Mêmes propriétés pour les colonnes ...

Application pratique :

- algorithme de Gauss pour faire apparaître des zéros sur une ligne (ou une colonne),
- puis développer par rapport à cette ligne (ou colonne).

Exercice-méthode : calcul de déterminant efficace

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Dans cette section encore, on ne s'intéresse qu'aux matrices carrées

Matrice identité

On appelle ***matrice identité*** et on note I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont des 1 et les éléments extra-diagonaux sont nuls.

Inverse

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est ***inversible*** s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.
Si une telle matrice B existe, elle est unique et on la note A^{-1}.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

En pratique ...

- Une manière de procéder pour trouver l'inverse d'une matrice A est d'appliquer la méthode de Gauss pour résoudre le système linéaire (à plusieurs second membres) $AB = I$ pour trouver B.
- On peut le faire en posant le tableau augmenté $(A|I)$ et en appliquant le procédé d'élimination de Gauss pour obtenir I à gauche du tableau augmenté final. La partie droite contient alors A^{-1} : $(I|B)$.

Exercice-méthode : calcul d'inverse efficace

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Lien avec les systèmes linéaires

Soit le système linéaire

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n. & = & b_m \end{array}\right.$$

Posons $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ et

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Alors (S) peut être réécrit de manière compacte $Ax = b$.

Si le S.L. est carré $m = n$, ...

Théorème

- Si A est inversible, alors (S) admet une unique solution : $x = A^{-1}b$.
- Si A n'est pas inversible, alors
  - * soit (S) n'a pas de solution,
  - * soit (S) a une infinité de solutions.

Exemples

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 0 \end{array} \right.$$

Famille libre et déterminant

Proposition

Si $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors $\{u, v\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est non nul.

Proposition

Si $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors $\{u, v, w\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ est non nul.