TD 2 : Filtres analogiques

Exercice 1 : Stabilité des filtres analogiques

Soit un système de réponse impulsionnelle $h(t) = e^{\alpha t}u(t)$ où $u(t)$ est l'échelon unité.

1. Donner la condition sur α de stabilité du système (stabilité de sa réponse impulsionnelle).
2. Calculer sa fonction de transfert $H(p)$ et en déduire la condition de stabilité sur les paramètres de $H(p)$.
3. Généraliser à toute fraction rationnelle.

Exercice 2 : Un filtre un peu spécial...

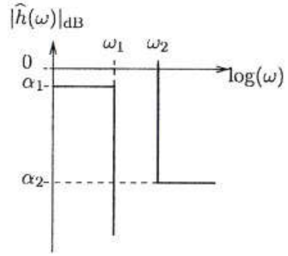
Soit un filtre de fonction de transfert $H(p) = \dfrac{p+\overline{\alpha}}{p-\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. A quelle condition ce filtre est-il stable ?
2. Un tel filtre stable peut-il être à minimum de phase ?
3. Calculer le module de la réponse en fréquence de ce filtre. Que constatez vous ? Quel nom pourrait-on donner à un tel filtre ?
4. En utilisant la table des Transformées de Laplace du cours, calculer la réponse impulsionnelle de ce filtre.
5. Calculer la sortie correspondant à une fréquence pure en entrée $e(t) = e^{2j\pi f_0 t}$. Montrer que cette entrée subit un simple retard τ_0 dont on précisera l'expression.
6. Soit un filtre analogique stable de fonction de transfert $G(p)$ tel que tous ses zéros sont à partie réelle négative sauf z_0. Montrer que le filtre de fonction de transfert $H(p)G(p)$ pour $\alpha = z_0$ est un filtre à phase minimale dont la réponse en fréquence est identique en module à celle de $G(p)$. En déduire une méthode pour construire un filtre à phase minimale ayant la même réponse en fréquence que n'importe quel filtre stable.

Exercice 3 : Synthèse de filtres de Butterworth

Filtre passe-bas

On cherche dans un premier temps à synthétiser un filtre analogique passe-bas satisfaisant le gabarit suivant.



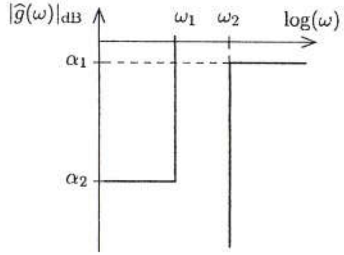
Par la suite, on travaillera plutôt en pulsation qu'en fréquence et on notera $\widehat{h}(\omega)$ la réponse en fréquence à la pulsation ω.

On donne les valeurs : $f_1 = 10$ kHz, $f_2 = 20$ kHz, $\alpha_1 = -1$ dB et $\alpha_2 = -20$ dB.

1. A quelle atténuation en amplitude correspond une atténuation de 1dB, de 20dB, de 40dB ? Peut-on considérer qu'une atténuation de 1 dB dans la bande passante est faible pour un filtre ? De même, peut-on considérer qu'une atténuation de 20 dB dans la bande coupée est forte ?
2. Rappeler les relations que doivent vérifier l'ordre du filtre N et la pulsation ω_c pour que le filtre satisfasse le gabarit (donc fonction de ω_1, ω_2, α_1 et α_2). Quelle est la signification de ω_c ?
3. A partir de ces relations, calculer l'ordre N (entier) puis la pulsation ω_c.
4. Si l'on choisit finalement un ordre 2, quel est la valeur de la pulsation ω_c pour avoir $|\widehat{h}(\omega_1)|_{\mathrm{dB}} = \alpha_1$? Quelle sera alors l'atténuation du filtre à la pulsation ω_2 ?
5. Rappeler l'expression du polynôme de Butterworth de degré 2 et en déduire la fonction de Transfert du filtre de Butterworth d'ordre 2 de la question précédente.

Filtre passe-haut

On cherche maintenant à synthétiser un filtre analogique passe-haut satisfaisant le gabarit suivant. Pour les mêmes valeurs : $f_1 = 10$ kHz, $f_2 = 20$ kHz, $\alpha_1 = -1$ dB et $\alpha_2 = -20$ dB.



La synthèse d'un tel filtre se fait par transformation d'un filtre passe-bas. et la réponse en fréquence est symétrisée horizontalement, aussi, l'ordre du filtre passe-haut est le même que l'ordre du filtre passe-bas précédent.

6. Quelles sont les caractéristiques de la représentation de Bode du filtre $G(p) = H(\frac{1}{p})$ ou $H(p)$ est le filtre passe-bas satisfaisant le gabarit précédent ?
7. Quels sont les paramètres du filtre passe-bas de Butterworth $H(p)$ à synthétiser pour que le filtre passe-haut $G(p)$ satisfasse le Gabarit ?
8. En déduire la fonction de transfert du filtre passe-haut correspondant pour un ordre 2.