TD 6 graphes : ordonnancement et flot

I. Exercice 1

Un projet est décomposé en tâches A,B,C,D,E,F,G,H,I. Les contraintes de postériorité et les durées des tâches sont données dans le tableau suivant :

Tâches (x_i, x_j)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Tâches prérequises			B	A	A	A,C	E	D,F	D,F,G
Durées b_{ij}	4	1	2	3	2	8	4	2	8

1. Construire le graphe d'états (PERT) du problème.
2. Construire le graphe de tâches du problème.
3. Construire le diagramme de Gantt du problème.
4. Critère de durée.

Sur le résultat de la question 2, déterminer :
– les dates de début au plus tôt des différentes tâches, et la durée minimale du projet ;
– les dates de début au plus tard des différentes tâches pour que la durée du projet ne soit pas augmentée
– le (ou les) chemin(s) critique(s) ainsi que les tâches critiques.

5. Exploiter le résultat de la question 3, pour trouver combien de personnes il faut au minimum pour réaliser le projet dans le temps calculé en question 4 en supposant qu'une personne réalise une tâche à la fois, et toutes à la même vitesse.
6. Critère de coût.

On suppose maintenant que, moyennant un surcoût unitaire h_{ij}, la durée t_{ij} de la tâche (x_i , x_j) peut être réduite, conformément aux données suivantes :

Tâches (x_i, x_j)	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Durée minimale a_{ij}	2	1	1	2	2	6	3	1	5
Coût unitaire de réduction h_{ij}	4	-	5	3	-	5	8	7	10

On note λ_M (respectivement λ_m) la durée minimale du projet pour les durées initiales $t_{ij} = b_{ij}$ des tâches (respectivement pour les durées minimales $t_{ij} = a_{ij}$ des tâches).

Notons C_M le coût de réalisation du projet lorsque la durée minimale du projet est égale à λ_M ; et $C(\lambda)$ le coût minimum de réalisation du projet pour une durée minimale du projet $\lambda \in [\lambda_m , \lambda_M]$: $C(\lambda) = C_M + \theta(\lambda)$, où $\theta(\lambda)$ est le surcoût résultant de la diminution de la durée de certaines tâches (θ est une fonction décroissante de λ, $\theta(\lambda_M) = 0$).

(a) Quelle est la valeur de λ_m ?
(b) Préciser la (ou les) tâche(s) dont il faut réduire la durée pour obtenir un coût $C(\lambda)$, ainsi que la valeur de $\theta(\lambda)$, pour $\lambda = 19$.

II. Vacances

Avant de partir en vacances, on doit effectuer plusieurs opérations :
1. choisir le lieu de vacances et ceci avant toute autre tâche
2. aller à l'office du tourisme
3. se faire vacciner

4. obtenir un visa au consulat (après être passé à l'office du tourisme)
5. acheter les billets de voyage
6. préparer les valises
7. mettre les billets, le passeport et les certificats de vaccination dans son portefeuille
8. aller à l'aéroport pour prendre l'avion

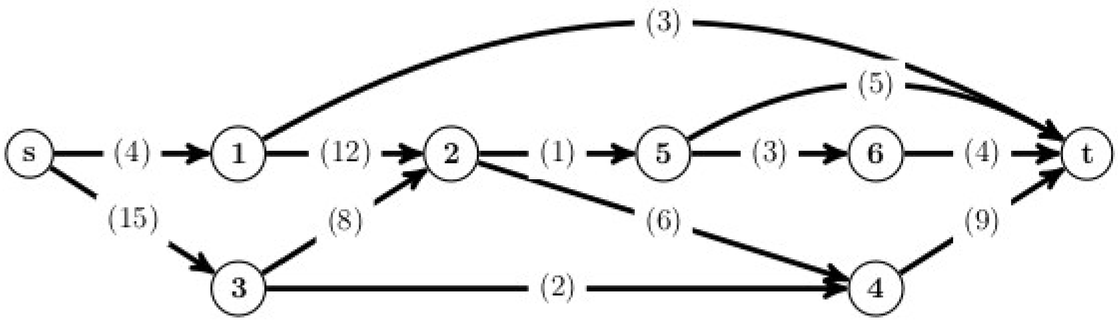
Les durées maximale et minimale de chaque tâche ainsi que l'accroissement de son coût de réalisation correspondant à une diminution unitaire de sa durée sont contenus dans le tableau ci-dessous :

Opérations	1	2	3	4	5	6	7	8
Durées maximales	35	7	25	15	5	20	2	1
Durées minimales	25	3	10	5	3	16	0	0
Coûts unitaires	3	1	2	2	1	3	1	3

Déterminer un ordonnancement de durée minimale et de coût minimum.

III. Flots

On considère le graphe suivant muni des capacités données entre parenthèses.



1. On considère le vecteur φ0 suivant. Est-ce un flot, qui est compatible pour le réseau de transport correspondant au graphe ci-dessus ? Si oui le justifier sinon le modifier en changeant le flux sur un seul arc afin qu'il le devienne. Quelle est sa valeur ?

(s,1)	(s,3)	(1,2)	(1,t)	(2,4)	(2,5)	(3,2)	(3,4)	(4,t)	(5,t)	(5,6)	(6,t)
4	3	4	0	6	1	3	0	6	-1	0	0

2. Donnez un flot maximum grâce à l'algorithme de Ford-Fulkerson en partant de ce flot. Vous donnerez les différentes chaînes augmentantes utilisées et direz à chaque étape de combien vous augmentez le flot. Vous donnerez enfin la valeur du flot maximum.