

Examen - 15 octobre 2021 - 1h30

L'utilisation des calculatrices, téléphones, tablettes ou ordinateurs est interdite.

Aucun document n'est autorisé.

Le barème est indicatif et susceptible d'être légèrement ajusté.

Exercice 1 (3 pts) Soit a un réel. Calculer $I_2(a) = \int_a^0 xe^{-x}dx$ et étudier la convergence de l'intégrale généralisée $I_3 = \int_{-\infty}^0 xe^{-x}dx$.

Exercice 2 (2 pts) En utilisant le changement de variable $u = \cos(x)$, calculer $I_4 = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$.
Indication : on rappelle que $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Exercice 3 (7 pts) (Les questions peuvent toutes être indépendantes.)
On considère l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x - y + z, 2y - 4z - t). \end{array}$$

1. Déterminer une base et la dimension du noyau de f .
2. L'application f est-elle surjective ?
3. Donner A , la matrice représentative de f relativement aux bases canoniques.
4. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Montrer que la famille $\mathcal{E} = ((1, 2, 1, 0), (1, 1, 0, 2), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1))$ est une base de \mathbb{R}^4 .
6. Exprimer B , la matrice représentative de f relativement à la base \mathcal{E} de \mathbb{R}^4 et à la base canonique de \mathbb{R}^2 . *Remarque : on ne change donc de base que pour l'espace de départ.*

Exercice 4 (2 pts) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $y'(x) - 3y(x) = 2xe^{3x}$.

Exercice 5 (3 pts) Trouver la solution de l'équation différentielle $y''(x) - 6y'(x) + 10y(x) = 50x + 10$ qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$?

Exercice 6 (3 pts) Quelle est la décomposition en éléments simples dans \mathbb{R} de la fraction rationnelle ci-dessous ?

$$F(x) = \frac{3x^2 - 10x + 6}{(x-2)(x^2 - 2x + 2)}$$