EXAMEN D'OPTIMISATION SANS CONTRAINTES– SRI 2

Décembre 2021 - Durée : 45 mns – Polycopié de cours autorisé

Nom : Prénom :

1. Optimisation sans contrainte
   Soit $f(X) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 - 1$ avec $X \in \mathbb{R}^2$
   — Etude analytique : chercher les points critiques et déterminer leur nature.
   — En partant du point $X_0 = (1 \quad 1)^t$, à quel point X_1 arrive-t-on si l'on applique la méthode de Newton pour annuler le gradient de la fonction ? Conclusion ?
   — En partant du point $X_0 = (1 \quad 1)^t$, à quel point X_1 arrive-t-on si l'on applique la méthode du gradient avec un pas = 0.5 pour chercher l'optimum de la fonction ?
   — Ecrire la condition de Wolfe permettant de vérifier que le pas α_k n'est pas trop petit à l'itération k pour la fonction $f(X)$ de l'exercice. On prendra $d_k = -\nabla f(X_k)$
2. On suppose qu'on connaît la position de 4 balises (B_i) dans le plan (x_i, y_i).
   Un opérateur souhaite placer un relais R en (x, y) de telle manière qu'il soit a distance minimale de l'ensemble des balises.
   (a) Montrer que le problème peut s'écrire comme un moindre carrée non-linéaire. Ecrire le problème d'optimisation. Ecrire l'expression des résidus.
   (b) Faire un dessin illustrant le problème avec 4 balises.

   (c) On veut utiliser la méthode de Gauss-Newton pour calculer la position optimale.
   Ecrire l'expression de l'approximation de la matrice Hessienne $(J(x_k)^T.J(x_k))$ qu'il faudra calculer à chaque itération de l'algorithme (matrice fonction des x_i, y_i).
   Pour rappel : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2.\sqrt{u}}$