Etude des applications linéaires

Exercice 1 On considère les 4 applications linéaires f, g, h suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2y+2z \\ x+3z \\ 2x+y+z \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+3z \\ x-y+z \end{pmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ y \end{pmatrix} \end{array}.$$

ainsi que l'application v dont la matrice représentative relativement aux bases canoniques est :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces applications linéaires f, g, h et v :

1. Déterminer son noyau et son image ;
2. Dire si elle est surjective/injective/bijective ;
3. Donner sa matrice représentative relativement aux bases canoniques (pour f, g, h).

Solution de l'exercice 1

$\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$, donc f est injective. Comme f est un endomorphisme, l'injectivité est équivalente à la surjectivité et donc f est bijective. Sa matrice représentative relativement aux bases canoniques est

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}((-3,-2,1))$, donc g n'est pas injective. Par le théorème du rang ($3 = 1 + \dim(\mathrm{Im}(g))$), on obtient la surjectivité de g. La matrice représentative de g relativement aux bases canoniques est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On montre que h est injective. Par le théorème du rang ($2 = 0 + \dim(\mathrm{Im}(h))$), on obtient que $\dim(\mathrm{Im}(h)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ et donc h n'est pas surjective. Sa matrice représentative relativement aux bases canoniques est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Vect}((-1,-1,1,0),(1,-1,0,1))$, donc v n'est pas injective. Par le théorème du rang ($4 = 2 + \dim(\mathrm{Im}(v))$), on déduit que $\dim(\mathrm{Im}(v)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ et donc v n'est pas surjective. Sa matrice représentative relativement aux bases canoniques est V.

Changement de base

Exercice 2 Considérons les 2 bases de $\mathbb{R}^2$ suivantes : $\mathcal{E} := \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ (base canonique) et $\mathcal{E}' := \{e'_1, e'_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.

1. Quelle est la matrice P de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$?

2. Quelle est la matrice Q de changement de base de $\mathcal{E}'$ à $\mathcal{E}$?

3. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Quelles sont les coordonnées de v dans la base $\mathcal{E}'$?

Solution de l'exercice 2

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Il suffit de calculer $Q[v]_{\mathcal{E}}$ pour obtenir $[v]_{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$.

1. Donner l'expression de A, matrice représentative de f dans la base canonique.

2. Soit les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donner l'expression de B, matrice représentative de f dans la base $\mathcal{E}' := \{v_1, v_2\}$. Que constate-t-on ? Que peut-on en déduire ?

Solution de l'exercice 3

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. La matrice P de changement de base de la base canonique à $\mathcal{E}'$ s'écrit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   La matrice Q de changement de base de $\mathcal{E}'$ à la base canonique s'écrit $Q = P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   La matrice représentative de f relativement à la base $\mathcal{E}'$ s'écrit QAP et on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $f(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ 2x - y \\ x - y \end{pmatrix}$. Donner l'expression de la matrice représentative de f relativement aux bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, constituées respectivement des vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 4

En procédant pas à pas comme dans l'exercice précédent, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour vous entrainer ...

Exercice 5 Montrer que les applications suivantes ne sont pas linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = \begin{pmatrix} x+3 \\ 2y \\ x+y \end{pmatrix}$;
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} |x| \\ y+z \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 5

1. On a $f(0,0) = (3,0,0) \neq (0,0,0)$ donc f n'est pas linéaire.
2. On a $f(1,0,0) = f(-1,0,0) = (1,0)$ et $f(0,0,0) = (0,0)$. Mais

   $$f\Big(1(1,0,0)+1(-1,0,0)\Big) = f(0,0,0) = (0,0) \neq (2,0) = (1,0)+(1,0) = 1f(1,0,0)+1f(-1,0,0),$$

   donc f n'est pas linéaire.

Exercice 6 Trouver une base et la dimension de l'image et du noyau de chacune des applications linéaires ci-dessous :

1. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x-y+z+t \\ x+2z-t \\ x+y+3z-3t \end{pmatrix}$.
2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 6

1. $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\Big((-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\Big)$ et comme ces deux vecteurs sont libres, ils forment une base de $\mathrm{Ker}(f)$, qui est donc de dimension 2. L'application linéaire n'est donc pas injective.

   Par le théorème du rang, on a $\dim\Big(\mathrm{Im}(f)\Big) = 4-2 = 2$. Comme $2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ et donc f n'est pas surjective. On a

   $$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \mathrm{Vect}\Big(f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1)\Big) \\ & = & \mathrm{Vect}\Big((1,1,1),(-1,0,1),(1,2,3),(1,-1,-3)\Big) \\ & = & \mathrm{Vect}\Big((1,1,1),(-1,0,1)\Big) \end{array}$$

   car $(1,2,3) = (-1,0,1) + 2(1,1,1)$ et $(1,-1,-3) = -(1,1,1) - 2(-1,0,1)$. Comme $(1,1,1)$ et $(-1,0,1)$ sont libres, $\Big((1,1,1),(-1,0,1)\Big)$ forme une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}\Big((3,-1,1)\Big)$ et comme ce vecteur n'est pas le vecteur nul, $\Big((3,-1,1)\Big)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(g)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 1$. L'application g n'est donc pas injective.

   Comme g est un endomorphisme, g n'est pas surjective non plus.

On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(g) &= \mathrm{Vect}\Big(g(1,0,0), g(0,1,0), g(0,0,1)\Big)\\ &= \mathrm{Vect}\Big((1,0,1),(2,1,1),(-1,1,-2)\Big)\\ &= \mathrm{Vect}\Big((1,0,1),(2,1,1)\Big)\end{aligned}$$

car $(-1,1,-2) = (2,1,1) - 3(1,0,1)$. Comme $(1,0,1)$ et $(2,1,1)$ sont libres, $\Big((1,0,1),(2,1,1)\Big)$ forme une base de $\mathrm{Im}(g)$, qui est donc de dimension 2.

Exercice 7 Trouver la représentation matricielle des applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ suivantes, relativement à la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. f définie par $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+2y-3z \\ 4x-5y-6z \\ 7x+8y+9z \end{pmatrix}$;

2. f définie par $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $f(e_3) = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 7

1. La matrice représentative de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice représentative de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 Les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les composantes d'un vecteur arbitraire $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur la base $\mathcal{E}$.

Solution de l'exercice 8

$$v = (y-z)u_1 + (-2x+2y-z)u_2 + (x-y+z)u_3.$$

Exercice 9 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(x,y) = \begin{pmatrix} 5x-y \\ 2x+y \end{pmatrix}$ et $\mathcal{E}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que $\mathcal{E}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice B représentant f dans la base $\mathcal{E}'$.

Solution de l'exercice 9

$$B = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$