

Examen terminal de l'unité d'enseignement

Traitement du signal

Seuls les documents personnels de cours, TD et TP sont autorisés.

Calculatrices, téléphones portables et ordinateurs non autorisés.

Les hypothèses et propriétés utilisées dans vos démonstrations doivent être clairement mentionnées !

Durée 2 heures.

Exercice I : Filtre moyeneur

Soit le filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{T_0} \mathbb{1}_{[0, T_0[}(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_0} & \text{si } t \in [0, T_0[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Ce filtre est-il stable ? **Justifier votre réponse...**
2. **Calculer** l'expression du signal de sortie $s(t)$ lorsque l'on place en entrée le signal $e(t)$. Pourquoi peut-on appeler ce filtre un filtre moyeneur ?
3. **Calculer** la sortie de ce filtre lorsque l'on place en entrée un signal sinusoïdal de fréquence multiple de $f_0 = \frac{1}{T_0}$: $e(t) = A \cos(2\pi n f_0 t + \phi)$ pour n entier positif et A et ϕ quelconques.
4. **Calculer** la réponse en fréquence $\hat{h}(f)$ de ce filtre. Tracer $|\hat{h}(f)|$. A quel type de filtre correspond-il ?
5. Pouvez-vous faire le lien entre l'expression de $\hat{h}(f)$ et la réponse à la question 3 ?
6. **Calculer** la fonction de transfert $H(p)$ de ce filtre. Cette fonction de transfert a-t-elle une forme classique telle que celles utilisées en cours et TD ?

A partir de ce filtre analogique H , on construit le filtre numérique G par échantillonnage et troncature de sa réponse impulsionnelle avec une période d'échantillonnage de $T_e = T_0/N$.

I.7 **Donner** l'expression de la réponse impulsionnelle $g[n]$ de ce filtre numérique.

I.8 **Calculer** sa réponse en fréquence $\hat{g}(f)$. Tracer $|\hat{g}(f)|$. Quel est le lien entre $\hat{h}(f)$ et $\hat{g}(f)$?

Exercice II : Échantillonnage d'un signal bande étroite (45 min.)

Soit le signal analogique $x_1(t)$ dont le spectre est schématisé Fig. 1. On va effectuer une suite de traitements sur ce signal que vous allez devoir décrire **brèvement**.

Les questions 1. à 8. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

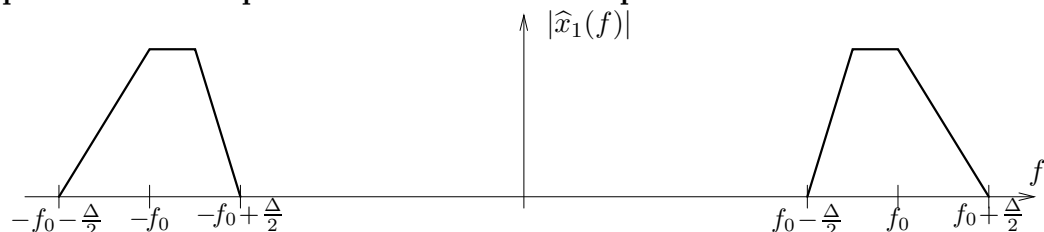


Fig. 1 Représentation fréquentielle du signal x_1 .

1. Quel traitement doit-on effectuer sur le signal x_1 pour obtenir le signal x_2 dont le spectre est schématisé Fig. 2 ? **Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence...**
2. Pourquoi peut-on affirmer que le signal x_2 n'est pas un signal à valeurs réelles ? **Justifier votre réponse...**

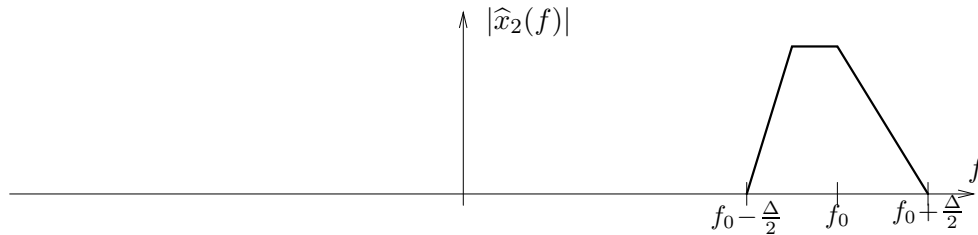


Fig. 2 Représentation fréquentielle du signal x_2 .

3. Quel traitement doit-on effectuer sur le signal x_2 pour obtenir le signal x_3 dont le spectre est schématisé Fig. 3 ? **Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence...**

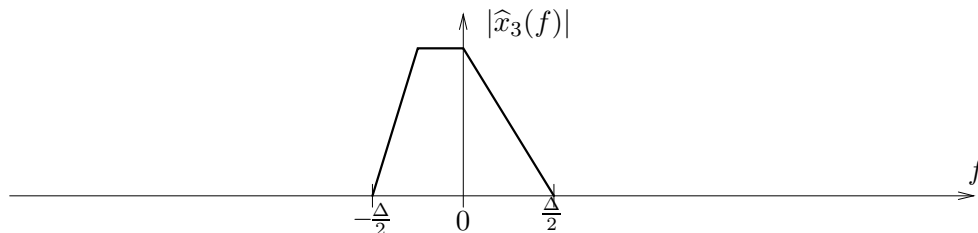


Fig. 3 Représentation fréquentielle du signal x_3 .

4. Quel traitement doit-on effectuer sur le signal x_3 pour obtenir le signal x_4 dont le spectre est schématisé Fig. 4 ? **Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence...**

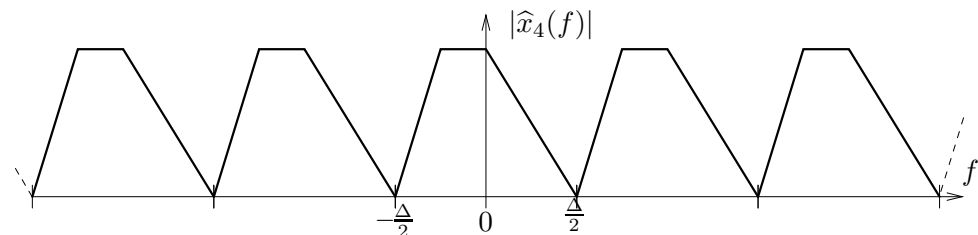


Fig. 4 Représentation fréquentielle du signal x_4 .

On s'intéresse maintenant au traitement inverse permettant de revenir du signal x_4 au signal x_1 .

5. Peut-on revenir du signal x_4 au signal x_3 ? Si oui, quel traitement doit-on effectuer ? **Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence...**
6. Peut-on revenir du signal x_3 au signal x_2 ? Si oui, quel traitement doit-on effectuer ? **Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence...**
7. **Démontrer** que la transformée de Fourier du signal conjugué $y^*(t)$ est la transformée de Fourier du signal y retournée et conjuguée $\hat{y}^*(-f)$.
8. Peut-on revenir du signal x_2 au signal x_1 ? Si oui, quel traitement doit-on effectuer ? Il faut faire attention au fait que le signal x_1 est un signal réel ! **Décrire brièvement ce traitement en temps et en fréquence...**

On va essayer de déduire une propriété générale du traitement précédent.

9. Soit le signal réel analogique $x_1(t)$ de la Fig. 1 occupant une bande de fréquence Δ centrée autour de la fréquence f_0 . D'après le théorème de Shannon, à quelle fréquence minimale peut-on l'échantillonner sans perte d'information ?
10. En effectuant les opérations précédentes, en supposant que l'on connaisse la fréquence f_0 , à quelle fréquence minimale peut-on échantillonner ce même signal sans perte d'information ?

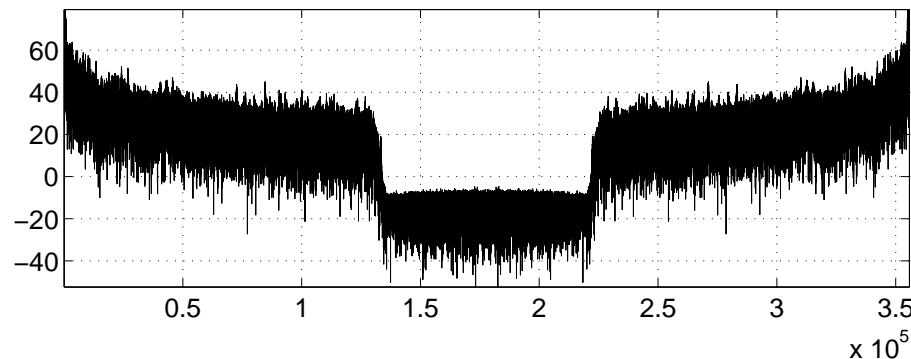
Exercice III : séance de travaux pratiques (30 min.)

Lors de la séance de travaux pratiques, un étudiant a imprimé des figures qu'il a oublié de commenter. Vous allez l'aider pour cet exercice...

Si vous le souhaitez, vous pouvez commenter vos réponses sur les figures ci-dessous et les rendre avec votre copie (indiquer votre nom).

I. Analyse d'un signal audio

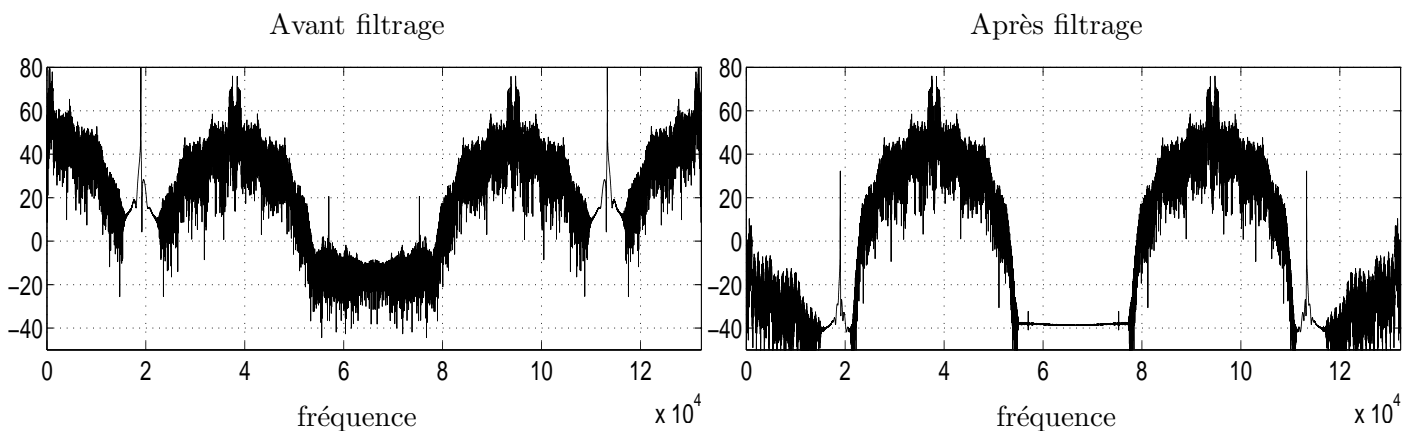
L'étudiant a imprimé sur la figure ci-dessous la représentation fréquentielle en dB d'un signal numérique, échantillonné à 44,1 kHz, correspondant à un extrait d'une chanson célèbre intitulé *alors on danse*.



- I.1 L'étudiant a tracé en abscisse le numéro de l'échantillon au lieu de la fréquence. Tracez l'axe des fréquences correspondant à ce spectre. **Justifier votre réponse...**
- I.2 Était-il possible d'échantillonner ce signal avec une fréquence d'échantillonnage plus faible sans perte d'information ? Si oui, à quelle fréquence (en gros) aurait-on pu l'échantillonner ? **Justifier votre réponse...**
- I.3 Durant le TP, l'étudiant a écouté ce même signal audio quantifié avec un nombre N variable de bits variant de $N = 12$ à $N = 1$. L'étudiant a écrit sur son brouillon : « *Plus N est faible, plus on perd en qualité du son. En particulier, plus N est faible, moins on entend les sons aigus du signal.* » Êtes-vous d'accord avec ce qu'a écrit l'étudiant ? **Justifier votre réponse...**

II. Filtrage d'un signal

L'étudiant a imprimé sur les figures ci-dessous la représentation fréquentielle (amplitude en dB en fonction de la fréquence) d'un signal numérique avant et après filtrage du signal



- II.1 A quelle fréquence ce signal a-t-il été échantillonné ? **Justifier votre réponse...**
- II.2 Quel type de filtre a été appliqué au signal ? **Préciser ses caractéristiques en fréquence et en amplitude...**