CHAPITRE 1

MODÉLISATION DES SYSTÈMES PAR REPRÉSENTATION D'ÉTAT

Viviane CADENAT
Enseignant – chercheur à l'UPS
LAAS – CNRS
cadenat@laas.fr

Sommaire

I. Introduction Slide 3

1. Notion de système
2. Notion de modèle

II. Focus sur la représentation d'état Slide 6

1. Un modèle temporel en deux parties
2. Changement de base
3. La solution de l'équation d'état ou comment déterminer X(t) ?

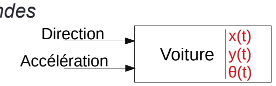
III. Analyse dans l'espace d'état Slide 17

1. Stabilité
2. Commandabilité
3. Observabilité

Section 1.1

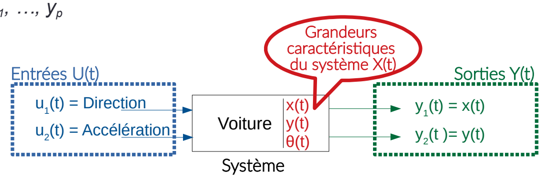
Introduction

- Notions de base
  - **Système**
    - <u>Définition :</u> *tout procédé évoluant en fonction du temps sous l'action d'entrées de commande notées u_1, u_2, … , u_m.*
    - <u>*Exemple :*</u> *Voiture*
      - *Système évoluant sous l'action de 2 commandes*
      - *Représentation graphique → schéma-bloc*



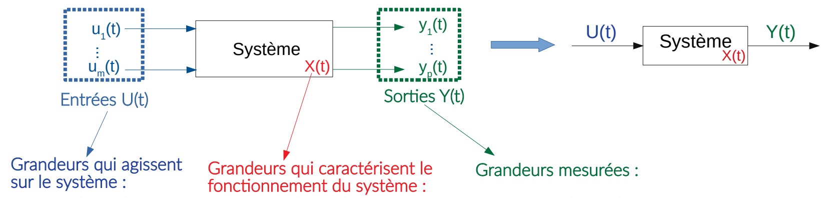
    - *Un système est équipé de **capteurs***
      - *Renseignent sur « ce qui se passe dans le système »*
      - *On appelle '**sortie**' l'ensemble des informations fournies par les capteurs : y_1, …, y_p*

Les grandeurs caractéristiques ne sont pas toutes forcément mesurées ou mesurables.



Introduction

- Notions de base
  - **Système**
    - <u>Définition affinée :</u> *tout procédé évoluant au cours du temps sous l'action de ses entrées de commande et produisant des sorties.*
    - <u>*Représentation graphique :*</u> *schéma-bloc*



$$U(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix} \qquad X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad Y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}$$

Section 1.2

Introduction

- Notions de base
  - **Modèle**
    - <u>Définition :</u> *Représentation mathématique d'un système*

      → ***Approximation de la réalité*** *→ Attention à la fidélité*

      → *Outil privilégié : équations différentielles*

      → *Représentation graphique : schéma-bloc*

$$U(t) \longrightarrow \boxed{\text{Modèle}} \longrightarrow Y_M(t)$$

    - *<u>3 types de modèles :</u>*

+ complet

- *Représentation d'état →* ***Modèle interne*** ***(fait intervenir X(t))***
- *Équation différentielle entrée/sortie*
- *Fonction de transfert*

- complet

→ ***Modèles E/S ou externe (X(t) n'est plus 'visible').***

Section 2.1

Focus sur la représentation d'état

- Un modèle **temporel** en deux parties

Une équation <u>différentielle</u>

$$\dot{X}(t)=f(X(t),U(t))$$

- Appelée '**Équation d'état**'
- Reflète la **dynamique** du système → ***évolution des grandeurs caractéristiques*** *X(t) sous l'action des commandes U(t)*
- X(t) est appelé '**état**' du système

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{pmatrix}$$

où $x_i(t)$ est appelée variable d'état

Une équation <u>algébrique</u>

$$Y(t)=g(X(t),U(t))$$

- Appelée '**Équation de sortie**'
- Reflète la manière dont les sorties sont produites à partir de X(t) → la relation dépend de ce que l'on mesure
- On peut mesurer tout ou partie de l'état

$$Y(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ \vdots \\ y_p(t)\end{pmatrix} \qquad U(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ \vdots \\ u_m(t)\end{pmatrix}$$

NB 1 : *Le choix des variables d'état est laissé à la discrétion de celui qui modélise. Elles ont souvent un sens physique mais ce n'est pas obligatoire. Elles peuvent être mesurées ou non. Elles doivent être* ***indépendantes*** *et* ***en nombre minimal****.*

NB 2 : *Plus formellement : les variables d'état sont des grandeurs nécessaires et suffisantes pour décrire le système telles que leur connaissance à l'instant t_0 et celle de u(t) permettent de déterminer* ***<u>de manière unique</u>*** *l'état X(t) et la sortie Y(t) pour tout $t \geq t_0$ → Elles permettent donc de prédire le comportement futur du système en fonction de ses entrées.*

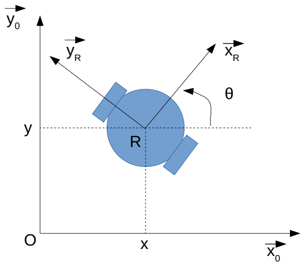
Focus sur la représentation d'état

- Un modèle **temporel** en deux parties
  - Structure générale d'une représentation d'état

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=f(X(t),U(t))\\ Y(t)=g(X(t),U(t))\end{cases}$$

où f et g dépendent du système considéré

  - Un exemple : le robot mobile



<u>Question :</u> quelle est la représentation d'état du robot ?

$$\dot{X}=\begin{pmatrix}v\cos\theta\\ v\sin\theta\\ \omega\end{pmatrix}=f(X(t),U(t))$$

$$Y=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=g(X(t))$$

NB : f est non linéaire ici

Focus sur la représentation d'état

- Un modèle **temporel** en deux parties
  - Et si f et g sont linéaires par rapport à X et U ?

→ **Système linéaire**

$$\begin{matrix}\dot{X}(t)=f(X(t),U(t))\\ Y(t)=g(X(t),U(t))\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\dot{X}(t)=AX(t)+BU(t)\\ Y(t)=CX(t)+DU(t)\end{matrix}$$

Dimensions des matrices

X : (n,1)
U : (m,1)
Y : (p,1)

⇒

A : (n,n) C : (p,n)
B : (n,m) D : (p,m)

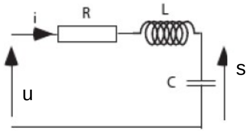
→ Un peu de vocabulaire

- A : Matrice dynamique (ou d'état)
- B : Matrice de commande (ou d'entrée)
- C : Matrice de sortie (ou d'observation)
- D : Matrice de transmission directe (souvent nulle)
- Si A, B, C, D sont constantes, le système est dit '*invariant*'.
- Ordre du système : Nombre n de variables d'état

NB : Sauf mention contraire, on ne considérera ici que des systèmes linéaires invariants mono-entrée/mono-sortie → m=1, p=1

Focus sur la représentation d'état

- Un modèle **temporel** en deux parties
  - Un exemple « linéaire » : un circuit électronique



Question 1 : quelle est la représentation d'état du robot ?

$$\dot{X}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1/C\\ -1/L & -R/L\end{pmatrix}X(t)+\begin{pmatrix}0\\ 1/L\end{pmatrix}U(t)$$

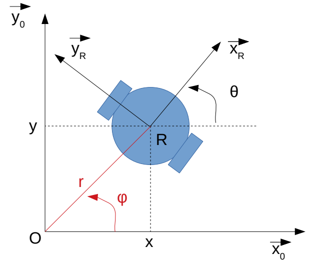
$$Y(t)=C\,X(t)$$

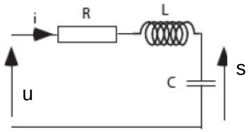
NB : C dépend des capteurs disponibles

Question 2 : Pourrait-on trouver une autre représentation d'état ?

Focus sur la représentation d'état

- Un modèle **temporel** en deux parties
  - Combien de représentations d'état peut-on déterminer pour représenter un même système ?





$$X_1=\begin{pmatrix}x\\ y\\ \theta\end{pmatrix} \longrightarrow X_2=\begin{pmatrix}r\\ \varphi\\ \theta\end{pmatrix}$$

$$X_1=\begin{pmatrix}s\\ i\end{pmatrix} \longrightarrow X_2=\begin{pmatrix}s\\ \dot{s}\end{pmatrix}$$

Focus sur la représentation d'état

- Un modèle **temporel** en deux parties
  - Combien de représentations d'état peut-on déterminer pour représenter un même système ?
    - **Il existe une infinité de représentations d'état pour un même système**
    - Pour passer d'une définition de l'état à une autre, on utilise une **matrice de passage M inversible***

      → **on effectue un changement de base**

      → **M est aussi appelée matrice de changement de base**
    - 3 bases intéressantes
      - **Base diagonale**
      - **Base compagne de commande (CC)**
      - **Base compagne d'observation (CO)**

* Remarque : X(t) appartient à un espace vectoriel de dimension n appelé classiquement 'espace d'état'. Les variables d'état sont linéairement indépendantes (cf. slide 5) → elles forment donc une base de l'espace d'état et définissent les axes de cet espace.

Section 2.2

Focus sur la représentation d'état

- Changement de base
  - Impact sur la représentation d'état

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=A\,X(t)+BU(t)\\ Y(t)=C\,X(t)+DU(t)\end{cases}$$

Système dans la base initiale

$$X(t) = T\,\tilde{X}(t)$$

T : matrice de passage

$$\begin{cases}\dot{\tilde{X}}(t)=\tilde{A}\,\tilde{X}(t)+\tilde{B}\,U(t)\\ Y(t)=\tilde{C}\,\tilde{X}(t)+\tilde{D}\,U(t)\end{cases}$$

Système dans la nouvelle base

Y et U ne changent pas !

$$\tilde{A}=T^{-1}AT \qquad \tilde{C}=CT$$
$$\tilde{B}=T^{-1}B \qquad \tilde{D}=D$$

- Rappels (cf. cours de math)
  - Polynôme caractéristique de A : $det(A-\lambda I) = \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0$
  - Valeurs propres de A : racines du polynôme caractéristique
  - Toutes les matrices de la forme $T^{-1}AT$ ont le même polynôme caractéristique
  - A et Ã sont des **matrices semblables**

Focus sur la représentation d’état

- Changement de base
  - Base diagonale
    - Matrice de passage $T = \begin{pmatrix} V_1 & \dots & V_n \end{pmatrix}$
      - V_i : vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i
      - Par définition (cf. cours math) : $A V_i = \lambda_i V_i$
    - Structure

$$\begin{cases} \dot{X}_d(t) = A_d X_d(t) + B_d U(t) \\ Y(t) = C_d X_d(t) + D U(t) \end{cases}$$

    - Forme particulière de A_d

$$A_d = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad B_d = T^{-1} B \qquad C_d = CT$$

Valeurs propres de A

Focus sur la représentation d’état

- Changement de base
  - Base compagne de commande
    - Matrice de passage $M_{cc} = \begin{pmatrix} M_1 & \dots & M_n \end{pmatrix}$

$$M_n = B \qquad M_{n-j} = \left(A^j + a_{n-1} A^{j-1} + \dots + a_{n-j} I\right) B$$

    - Structure

$$\begin{cases} \dot{X}_{cc}(t) = A_{cc} X_{cc}(t) + B_{cc} U(t) \\ Y(t) = C_{cc} X_{cc}(t) + D U(t) \end{cases}$$

    - Forme particulière de A_{cc} et B_{cc}

$$A_{cc} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0 \dots 1 \\ \hline \boxed{-a_0 \quad \dots \quad -a_{n-1}} \end{pmatrix} \qquad B_{cc} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C_{cc} = C M_{cc}$$

Coefficients du polynôme caractéristique de A

Focus sur la représentation d’état

- Changement de base
  - Base compagne d’observation
    - Matrice de passage $P = \begin{pmatrix} P_1 & \dots & P_n \end{pmatrix}$ *et* $M_{co} = P^{-T}$

$$P_1 = C^T \qquad P_j = \left(A^{T^{j-1}} + a_{n-1} A^{T^{j-2}} + \dots + a_1 I\right) C^T$$

    - Structure

$$\begin{cases} \dot{X}_{co}(t) = A_{co} X_{co}(t) + B_{co} U(t) \\ Y(t) = C_{co} X_{co}(t) + D U(t) \end{cases}$$

    - Forme particulière de A_{co} et C_{co}

$$A_{co} = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix} -a_{n-1} \\ \vdots \\ -a_0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \dots 0 \\ \ddots \\ 0 \dots 1 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots \quad 0 \end{array}\right) \qquad C_{co} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_{co} = M_{co}^{-1} B$$

Coefficients du polynôme caractéristique de A

Section 2.3

Focus sur la représentation d’état

- La solution de l’équation d’état ou comment trouver X(t) ?
  - Équation d’état : $\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t)$
  - Solution :

Matrice de transition d’état

$$X(t) = \underbrace{e^{At} X(0)}_{\text{Régime libre}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau}_{\text{Régime forcé}}$$

  - Calcul de exp(At) (cf. cours math)

    - **Attention :** *exp(At) est l’exponentielle d’une matrice carrée qui n’est pas égale à l’exponentielle de chaque terme de la matrice !*
    - Exploiter la base diagonale

$$A_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow e^{A_d t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \longrightarrow e^{At} = T \; e^{A_d t} T^{-1}$$

    - Théorème de Sylvester (cf. cours math) → calcul de f(A)
    - Numériquement : sous matlab, utiliser expm et non exp.

Section 3.1

Analyse dans l'espace d'état

Stabilité

Intuitivement : le système diverge-t-il ?

Définition :

- Stabilité au sens « entrée bornée / sortie bornée » (EBSB ou BIBO)

  → Un système est **stable** si, lorsqu'il est excité par une **entrée bornée**, il produit une **sortie bornée**.

  → Un système est **instable** si, lorsqu'il est excité par une **entrée bornée**, il produit une **sortie non bornée**.

Critère mathématique

- Un système est stable au sens EBSB ssi **toutes les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle strictement négative.**
- Pourquoi ?
  - Sortie du système dépend de ses **modes** et donc **des valeurs propres de A** (vp) → cf. TD1 :

    $Y(t) = 2/3\,\boxed{e^{-t}} + 16/21\,\boxed{e^{-7t}} + 12/21$ → 2 vp : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = -7$
  - La sortie ne peut se stabiliser que si les exponentielles → 0 quand t → ∞

Section 3.2

Analyse dans l'espace d'état

Commandabilité

Intuitivement : Capacité d'un système à voir son comportement dynamique évoluer sous l'action de sa commande.

Définition

- Une variable d'état $x_i(t)$ est commandable ssi, **quel que soit $x_i(t_0)$, il existe** une commande u(t) permettant de transférer $x_i(t)$ de sa valeur initiale $x_i(t_0)$ à une valeur finale $x_i(t_f)$ **en un temps t_f fini**.
- Si cela est vrai pour toutes les variables d'état du système, alors celui-ci est commandable.

Critères mathématiques

Base quelconque	Base diagonale	Base compagne de commande
1/ Matrice de commandabilité $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ 2/ Système commandable ssi Rg($\mathcal{C}$) = n où n = dim(X)	Le système est commandable ssi aucune ligne de B n'est nulle.	Le système est commandable par construction.

Section 3.3

Analyse dans l'espace d'état

Observabilité

Intuitivement : possibilité de déterminer l'état du système à partir des mesures de sa sortie.

Définition

- Une variable d'état $x_i(t)$ est observable ssi, en mesurant la sortie y(t) sur un intervalle de temps $[t_0, t_f]$ **fini,** il est possible de déterminer la valeur initiale de l'état $x_i(t_0)$.
- Si cela est vrai pour toutes les variables d'état du système, alors celui-ci est observable.

Critères mathématiques

NB : observable ≠ mesurable

Base quelconque	Base diagonale	Base compagne d'observation
1/ Matrice d'observabilité $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ 2/ Système observable ssi Rg($\mathcal{O}$) = n où n = dim(X)	Le système est observable ssi aucune colonne de C n'est nulle.	Le système est observable par construction.