Mathématiques - UPSSITECH 18 octobre 2019

Examen mise à niveau - 1h30

L'utilisation des calculatrices, téléphones, tablettes ou ordinateurs est interdite.
Aucun document n'est autorisé.
Le barème est indicatif et susceptible d'être légèrement ajusté.
Les questions marquées d'une étoile sont indépendantes des précédentes.

1. *(2 pts)* Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ de $z^4 = -16i$.

   Solution. Comme $-16i = 16e^{i3\pi/2}$, on cherche $\rho > 0$ et des angles $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que

   $$\left(\rho e^{i\theta}\right)^4 = \rho^4 e^{i4\theta} = 16e^{i3\pi/2}.$$

   On travaille ensuite en résolvant les équations en module et arguments suivantes :

   $$\rho^4 = 16 \quad \text{et} \quad 4\theta = \frac{3\pi}{2}[2\pi].$$

   L'équation en module admet une unique solution > 0 : $\rho = 2$. Pour l'équation en argument, on obtient 4 angles dans $[0, 2\pi[$:

   $$\theta_0 = \frac{3\pi}{8}, \quad \theta_1 = \frac{7\pi}{8}, \quad \theta_2 = \frac{11\pi}{8}, \quad \theta_3 = \frac{15\pi}{8}.$$

   Les solutions de $z^4 = -16i$ sont donc $2e^{i3\pi/8}$, $2e^{i7\pi/8}$, $2e^{i11\pi/8}$ et $2e^{i15\pi/8}$.

2. *(5 pts)*

   (a) *(2 pts)* Quelle est la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $\dfrac{1}{t^4-1}$?

   SOLUTION. Le numérateur est de degré < au degré du dénominateur, donc il n'y a pas de partie entière.
   On commence par factoriser le dénominateur en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$:

$$t^4 - 1 = (t^2-1)(t^2+1) = (t-1)(t+1)(t^2+1).$$

   Etant donnée cette factorisation, la forme de la D.E.S. est

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} + \frac{ct+d}{t^2+1}. \tag{1}$$

   Pour trouver a, on multiplie (1) par $t-1$ et on évalue pour $t=1$. On obtient $a = 1/4$.
   Pour trouver b, on multiplie (1) par $t+1$ et on évalue pour $t=-1$. On obtient $b=-1/4$.
   Pour trouver c et d, on multiplie (1) par t^2+1 et on évalue pour $t=i$. On obtient $c=0$ et $d=-1/2$.

   Conclusion : $\dfrac{1}{t^4-1} = \dfrac{\frac{1}{4}}{t-1} - \dfrac{\frac{1}{4}}{t+1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{t^2+1}$.

   (b) *(1.5 pts)* Calculer $I_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^4-1}dt$.

   SOLUTION. En utilisant les résultats de la question précédente et la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$I_1(x) = \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{4}\int_0^x \frac{1}{t+1}dt - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt$$

   et donc

$$I_1(x) = \frac{1}{4}\ln(|x-1|) - \frac{1}{4}\ln(|x+1|) - \frac{1}{2}\arctan(x).$$

   (c) *(1 pts)* (*) Notons $I_2 = \displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^4 - 1}dx$.

   En utilisant le changement de variable $t = \cos(x)$, montrer que $I_2 = I_1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

   SOLUTION. Avec $t = \cos(x)$, on a $dt = -\sin(x)dx$ et comme $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et $\cos(\pi/2) = 0$, on a

$$I_2 = -\int_{\sqrt{2}/2}^{0} \frac{1}{t^4-1}dt = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{t^4-1}dt = I_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

   (d) *(0.5 pts)* En exploitant la définition d'intégrale généralisée, étudier la convergence de :

$$I_3 = \int_0^1 \frac{1}{t^4-1}dt.$$

   SOLUTION. Par définition de l'intégrale généralisée, $I_3 = \lim\limits_{x\to 1} I_1(x)$. Comme $\lim\limits_{x\to 1}\ln(|x-1|) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}\ln(|x+1|) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to 1}\arctan(x) = \pi/4$, on a $\lim\limits_{x\to 1} I_1(x) = -\infty$ et donc I_3 diverge.

3. *(8 pts)* On considère l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & (x+z-4t, x+y+t, 3x+2y+2z-5t). \end{array}$$

(a) *(1.5 pts)* Donner une base et la dimension du noyau de f ? Cette application est-elle injective ?

SOLUTION. Pour déterminer le noyau de f, on doit résoudre le système linéaire :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & & & + & z & - & 4t & = & 0 \\ x & + & y & & & + & t & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & - & 5t & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} x & & + & z & - & 4t & = & 0 \\ & y & - & z & + & 5t & = & 0 \quad L_2 - L_1 \\ & 2y & - & z & + & 7t & = & 0 \quad L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccccl} x & & + & z & - & 4t & = & 0 \\ & y & - & z & + & 5t & = & 0 \\ & & & z & - & 3t & = & 0 \quad L_3 - 2L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & t \\ y & = & -2t \\ z & = & 3t \end{array}\right.$$

On en conclue que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\Big((1,-2,3,1)\Big)$. Ainsi la famille $\mathcal{B}$ constituée du seul vecteur $(1,-2,3,1)$ est génératrice de $\operatorname{Ker}(f)$.
Comme $(1,-2,3,1)$ n'est pas le vecteur nul, il est libre. La famille $\mathcal{B}$ est donc une base de $\operatorname{Ker}(f)$, qui est ainsi de dimension 1.
Comme $\operatorname{Ker}(f) \neq \{(0,0,0,0)\}$, f n'est pas injective.

(b) *(0.5 pts)* f est-elle surjective ?

SOLUTION. Par le théorème du rang, nous avons $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 4 - \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 4 - 1 = 3$. Comme $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on peut conclure que $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ et donc que f est surjective.

(c) *(1 pts)* (*) Donner A, la matrice représentative de f relativement aux bases canoniques.

SOLUTION.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

(d) *(1 pts)* (*) Notons $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (-2,-1,2)$ et $a_3 = (1,2,3)$. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ formée des vecteurs a_1, a_2 et a_3 est une base de $\mathbb{R}^3$.

SOLUTION. On peut procéder en calculant le déterminant D de la matrice formée des vecteurs a_1, a_2 et a_3.

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Comme $D \neq 0$, les trois vecteurs sont bien libres. Comme ils sont au nombre de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, ils forment bien une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) *(1 pts)* (*) Donner la matrice P de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{F}$.

SOLUTION.
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(f) *(1.5 pts)* Calculer l'inverse de P.

SOLUTION. On procède en utilisant la méthode du pivot de Gauss sur le tableau augmenté suivant :
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Avec les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

On poursuit avec $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$,

puis avec $L_3 \leftarrow -L_3/2$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 2 & -1/2 \end{array}\right)$.

En utilisant $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$, on peut écrire $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 5/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 2 & -1/2 \end{array}\right)$.

On termine avec $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ pour aboutir à $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/2 & -4 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 2 & -1/2 \end{array}\right)$.

L'inverse de P est donc $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

(g) *(1.5 pts)* En déduire B, la matrice représentative de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et à la base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$.

SOLUTION.
$$B = P^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 13/2 & -51/2 \\ 1 & 0 & 3/2 & -11/2 \\ -1 & 1 & -5/2 & 21/2 \end{pmatrix}.$$

4. *(3 pts)*

(a) *(1 pts)* Calculer $I_4(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{x} t\ln(2t)dt$ par intégration par partie.

SOLUTION. On rappelle la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Dans notre cas, on pose $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln(2t)$. On en déduit donc $u(t) = \frac{t^2}{2}$ et $v'(t) = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$. L'application de la formule mène donc à

$$I_4(x) = \left[\frac{t^2}{2}\ln(2t)\right]_{\frac{1}{2}}^{x} - \int_{\frac{1}{2}}^{x} \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}dt = \frac{x^2}{2}\ln(2x) - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{x} tdt = \frac{x^2}{2}\ln(2x) - \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$$

(b) *(2 pts)* En déduire la solution de l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) - 3y(x) = x\ln(2x)e^{3x} \quad \text{et} \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

SOLUTION.

- L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'(x) - 3y(x) = 0$ est $r - 3 = 0$. On en déduit que la solution générale de l'EDO homogène est $y_H(x) = Ce^{3x}$.
- Pour trouver une solution particulière de l'EDO, on procède par la méthode de variation de la constante : on pose $y_P(x) = K(x)e^{3x}$. On a alors $y_P'(x) = K'(x)e^{3x} + K(x)3e^{3x}$. On injecte ensuite dans l'EDO :

$$\Big(K'(x)e^{3x} + K(x)3e^{3x}\Big) - 3\Big(K(x)e^{3x}\Big) = x\ln(2x)e^{3x},$$

  qui implique que $K'(x) = x\ln(2x)$. D'après la question précédente, on en déduit que $K(x) = \frac{x^2}{4}\Big(2\ln(2x) - 1\Big)$ est une primitive possible de $K'(x)$.

  Une solution particulière de l'EDO s'écrit donc $y_P(x) = \frac{x^2}{4}\Big(2\ln(2x) - 1\Big)e^{3x}$.
- Toutes les solutions de l'EDO s'écrivent donc

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ce^{3x} + \frac{x^2}{4}\Big(2\ln(2x) - 1\Big)e^{3x}.$$

- Déterminons la solution de l'EDO qui satisfait la condition initiale $y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$: il suffit de résoudre $Ce^{3/2} + \frac{1/4}{4}\Big(2\ln(1) - 1\Big)e^{3/2} = 0$. On obtient $C = \frac{1}{16}$ et donc l'unique solution cherchée est

$$y(x) = \frac{1}{16}e^{3x} + \frac{x^2}{4}\Big(2\ln(2x) - 1\Big)e^{3x}.$$

5. *(2 pts)* Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \qquad y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 4x.$$

SOLUTION.

- L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$ est $r^2 - r - 2 = 0$. Elle admet 2 racines réelles distinctes : $r_1 = -1$ et $r_2 = 2$.
  On en déduit que la solution générale de l'EDO homogène est $y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.
- Comme le second membre de l'EDO est un polynôme de degré 1, on cherche une solution particulière sous la forme $y_P(x) = Ax + B$. En injectant dans l'EDO, on obtient $0 - A - 2(Ax + B) = 4x$. qui permet de trouver aisément $A = -2$ et $B = 1$. Ainsi, une solution particulière est $y_P(x) = -2x + 1$.
- Toutes les solutions de l'EDO s'écrivent donc

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - 2x + 1.$$