Deuxième contrôle continu (durée 1h30)

Documents autorisés : 2 feuilles A4 recto-verso.
Barème donné à titre indicatif. *Les réponses non justifiées ne seront pas notées.*

I. Chemins optimums (7 points)

On considère le graphe G suivant :

sommets i	a	b	c	d	e
successeurs j	b,c,e	c,e	d,e	a,c,e	/
poids des arcs (i,j)	5,3,10	4,2	2,6	4, 1, 4	/

1. Calculez les chemins a-i-minimaux depuis le sommet a vers tous les autres sommets i (précisez l'algorithme utilisé, donnez son déroulement dans un tableau, et l'arborescence des chemins a-i-minimaux).
2. L'arborescence obtenue est-elle un arbre couvrant de poids minimal ? (donnez une justification détaillée).
3. Dessinez le graphe par niveaux si c'est possible sinon expliquez pourquoi ?
4. Quel algorithme peut-on utiliser sur ce graphe pour calculer les chemins a-i-**Maximaux** ? Quel est le poids du chemin ae-maximal ?
5. Sans tenir compte du poids et des orientations des arcs, proposez une coloration du graphe. Montrez qu'on ne peut pas trouver moins que 3 couleurs.

II. Routage (3 points)

Rappel : la **matrice des poids minimaux** associée à un graphe orienté [1] valué d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$ ayant pour termes λ_{ij} = longueur du chemin ij-minimal.
Rappel : la **matrice de routage** associée à un graphe orienté [1] valué d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$ ayant pour termes m_{ij} = sommet adjacent à i sur le chemin ij-minimal.

Après avoir fait tourner un algorithme de plus court chemin à partir d'un sommet, on réussit à compléter les matrices de routage et des poids minimaux de la façon suivante (les $\times$ signifient que la valeur n'est pas significative, les ? signifient qu'on ne peut pas déduire la valeur grâce aux résultats obtenus) :

$$\begin{pmatrix} \times & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ ? & \times & ? & ? & ? & ? \\ ? & 2 & \times & 4 & 5 & 4 \\ ? & ? & ? & \times & ? & 6 \\ ? & ? & ? & ? & \times & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & \times \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \times & 4 & 2 & 0 & 7 & 4 \\ ? & \times & ? & ? & ? & ? \\ ? & 2 & \times & -2 & 5 & 2 \\ ? & ? & ? & \times & ? & 4 \\ ? & ? & ? & ? & \times & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & \times \end{pmatrix}$$

Matrice de routage — Matrice des poids minimaux

1. À partir de ces matrices, donnez le nombre de sommets du graphe et dites si le graphe est orienté ou non (justifiez).
2. Donnez le numéro du sommet à partir duquel on a lancé l'algorithme, et l'arborescence des chemins/chaînes minimaux/ales à partir de ce sommet.
3. On sait que l'arc ou l'arête (1,2) appartient au graphe, que peut-on dire sur son poids ?
4. Listez tous les algorithmes de plus court chemin du cours qu'on a pu utiliser ?

1. Dans le cas non-orienté, on considère les chaînes ij-minimales.

III. Ordonnancement MPM (5 points)

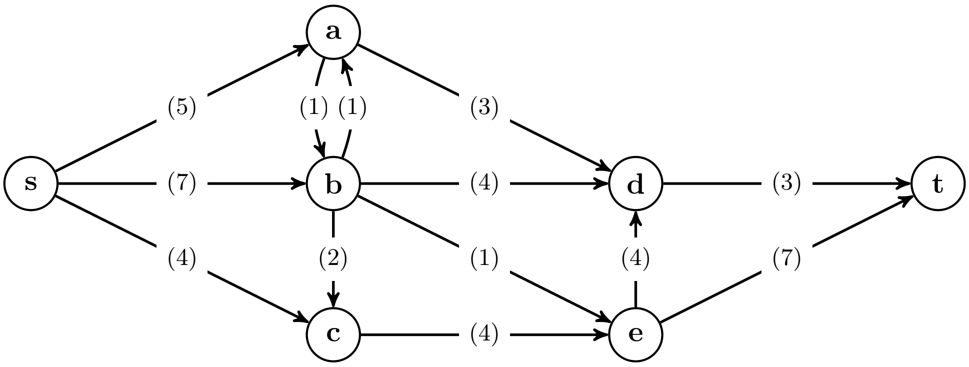
On considère le projet suivant décrit par les tâches et les contraintes entre tâches ci-dessous :

tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I
tâches requises	-	A	-	-	B, C, D	B, C	A	E, G	F, H
durée	20	4	9	12	3	2	11	5	3

1. Dessinez le graphe potentiels-tâches (MPM) correspondant à ce projet.
2. Calculez la durée minimale du projet, les dates de début au plus tôt, les dates de début au plus tard, les marges totales, les marges libres [2] et les tâches critiques.
3. Certaines tâches ont-elles des marges libres différentes de leur marge totale, pourquoi ?
4. Sans tenir compte des durées des tâches, on désire trouver le nombre maximal de chemins *disjoints au sens des sommets* jusqu'à I. “Disjoints au sens des arcs” signifie que chaque arc peut être utilisé dans au plus un seul chemin entre le début du projet et I. Pour répondre à cette question, proposez un réseau de transport dans lequel le flot maximal donnera la solution. (**on ne demande pas de le résoudre**)

IV. Calcul de flot maximum (5 points)

On considère le réseau suivant où les arcs ont des capacités signalées entre parenthèses :



1. Montrez que le vecteur φ suivant est un flot compatible et donnez sa valeur.

arcs	(s,a)	(s,b)	(s,c)	(a,b)	(a,d)	(b,a)	(b,c)	(b,d)	(b,e)	(c,e)	(e,d)	(d,t)	(e,t)
$\varphi(u)$	2	3	0	1	2	1	2	0	1	2	1	3	2

2. Donnez un flot maximum à l'aide de l'algorithme de Ford Fulkerson. Vous décrirez les différentes chaînes augmentantes utilisées et de combien vous avez augmenté à chaque étape. Vous décrirez ensuite ce flot maximum en donnant le flux sur chaque arc. Donnez la valeur du flot maximum (soit M cette valeur).
3. Serait-il possible d'obtenir un flot de même valeur M sans utiliser l'arc (ad) ?
4. Existe-t'il un arc dont l'augmentation de capacité de 1 permettrait de trouver un flot de valeur M+1 ? si oui : lequel ?, sinon : justifiez.

2. La marge libre est le délai pouvant être accordé à une tâche v sans modifier les Marges Totales des tâches suivantes, égal à $\min_{v' \in \Gamma^+(v)}(t(v') - t(v) - duree(v))$, où $t(v)$ est le début au plus tôt de v.