CM6 : Équations Différentielles Ordinaires (EDO) linéaires à coefficients constants

L3 UPSSITECH

Mardi 21 septembre 2021

Objectifs de cette séance

Savoir résoudre des EDO

- linéaires
- à coefficients constants
- d'ordre 1 et 2

Exemples ?

- Corps de masse m en chute dans l'atmosphère :

$$mv'(t) = \underbrace{mg}_{\text{force de pesanteur}} + \underbrace{\Big(-kv(t)\Big)}_{\text{résistance de l'air}} .$$

- Un ressort relié à une masse exerce sur celle-ci une force de rappel proportionnelle à l'extension ou la compression du ressort :

$$x''(t) = -\omega x(t).$$

- Si on prend en compte l'amortissement/les frottements :

$$x''(t) = -cx'(t) - \omega x(t),$$

avec $c > 0$ le coefficient de frottement.

EDO d'ordre 1

Dans cette section, on s'intéresse à l'équation

$$y'(x) + ay(x) = f(x),$$

éventuellement complétée de la ***condition initiale***

$$y(x_0) = y_0,$$

avec a, x_0 et y_0 des réels donnés.

Existence et unicité

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, l'EDO et sa condition initiale admettent une unique solution.

Principe de superposition

Si y_1 est l'unique solution de

$$y'(x) + ay(x) = 0, \qquad y(x_0) = y_0$$

et y_2 est l'unique solution de

$$y'(x) + ay(x) = f(x), \qquad y(x_0) = 0,$$

alors $y_1 + y_2$ est l'unique solution de

$$y'(x) + ay(x) = f(x), \qquad y(x_0) = y_0.$$

EDO homogène

L'EDO $y'(x) + ay(x) = 0$ est dite ***homogène***.

Méthode de résolution pratique

1. On détermine la forme des solutions de l'équation homogène $y'(x) + ay(x) = 0$ et on la note $y_H(x)$.
2. On cherche une solution particulière de l'équation $y'(x) + ay(x) = f(x)$ et on la note $y_P(x)$.
3. D'après le principe de superposition, on sait que toutes les solutions de $y'(x) + ay(x) = f(x)$ s'écrivent $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$.
4. Si une condition initiale $y(x_0) = y_0$ est fournie, alors elle permet de déterminer la constante impliquée dans y_H.

Solutions de l'EDO homogène

Equation caractéristique associée à l'EDO $y'(x) + ay(x) = 0$:

$$r + a = 0 \quad \text{dont la solution est} \quad r = -a.$$

Ensemble des SGEH (Solutions Générales de l'Equation Homogène)

L'ensemble des solutions de l'EDO homogène $y'(x) + ay(x) = 0$ est

$$\mathcal{S}_H = \{Ce^{-ax} : C \in \mathbb{R}\}.$$

Remarque

C'est un s.e.v. de l'e.v. des fonctions continues sur $\mathbb{R}$: $\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}\left(e^{-ax}\right)$.

Exercice-méthode : résoudre $y'(x) + 2y(x) = 0$

Solutions particulières de l'EDO "complète" - cas 1

Rappel : on étudie l'EDO $y'(x) + ay(x) = f(x)$ et $y_H(x) = Ce^{-ax}$.

CAS 1 : Si $f(x) = p(x)e^{\gamma x}$ avec p polynôme de degré n,

- si $\gamma \neq -a$
  On cherche une solution particulière sous la forme
  $$y_P(x) = q(x)e^{\gamma x};$$
- si $\gamma = -a$
  On cherche une solution particulière sous la forme
  $$y_P(x) = \boxed{x}\,q(x)e^{\gamma x}$$

avec q un polynôme de degré n à déterminer.

Exercice-méthode : resoudre $y'(x) + 2y(x) = xe^{2x}$

Exercice-méthode : resoudre $y'(x) + 2y(x) = xe^{-2x}$

Solutions particulières de l'EDO "complète" - cas 2

Rappel : on étudie l'EDO $y'(x) + ay(x) = f(x)$.

$$\boxed{\text{CAS 2 : Si } f(x) = \alpha\cos(\omega x + \phi) + \beta\sin(\omega x + \phi) \text{ avec } \omega \in \mathbb{R}^*,}$$

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_P(x) = A\cos(\omega x + \phi) + B\sin(\omega x + \phi).$$

avec A et B des réels à déterminer.

Exercice-méthode : résoudre $y'(x) + 2y(x) = \cos(3x - 2)$

Solutions particulières de l'EDO "complète" - autre cas

Rappel : on étudie l'EDO $y'(x) + ay(x) = f(x)$ et $y_H = Ce^{-ax}$.

AUTRES CAS : Si $f(x)$ n'est pas sous l'une des formes précédentes,

Méthode de la variation de la constante

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_P(x) = K(x)e^{-ax}.$$

Exercice-méthode : résoudre $y'(x) + 2y(x) = \cos(3x-2)e^{-2x}$

EDO d'ordre 2

On s'intéresse ici à l'équation

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x),$$

éventuellement complétée des ***conditions initiales***

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(x_0) = v_0,$$

avec a, b, x_0, y_0 et v_0 des réels donnés.

Solutions de l'EDO homogène $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$

$$\text{Equation caractéristique :} \quad r^2 + ar + b = 0. \tag{1}$$

SGEH (Sol. Générales de l'Equation Homogène)

- Si (1) admet 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2,

$$y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

- Si (1) admet 1 unique solution réelle r_1,

$$y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 \boxed{x} e^{r_1 x},$$

- Si (1) admet 2 sol. complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$,

$$y_H(x) = e^{\alpha x}\Big(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\Big),$$

avec C_1 et C_2 des constantes réelles.

Ensembles des SGEH

- Si (1) admet 2 solutions réelles distinctes r_1 et r_2,

$$\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}),$$

- Si (1) admet 1 unique solution réelle r_1,

$$\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(e^{r_1 x}, \boxed{x} e^{r_1 x}),$$

- Si (1) admet 2 sol. complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$,

$$\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)).$$

Exercice-méthode : résoudre $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0$

Exercice-méthode : résoudre $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$

Exercice-méthode : résoudre $y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 0$

Solutions particulières de l'EDO "complète" - cas 1

CAS 1 : Si $f(x) = p(x)e^{\gamma x}$ avec p polynôme de <u>degré n</u>,

Formes de la solution particulière

- si γ n'est pas solution de l'équation caractéristique

$$y_P(x) = q(x)e^{\gamma x},$$

- si γ est racine simple de l'équation caractéristique

$$y_P(x) = \boxed{x}\,q(x)e^{\gamma x},$$

- si γ est racine double de l'équation caractéristique

$$y_P(x) = \underline{x^2}\,q(x)e^{\gamma x},$$

avec q un polynôme de <u>degré n</u> à déterminer.

Exercice-méthode : résoudre $y''(x) + y'(x) + y(x) = 3x^2 + 4$

Solutions particulières de l'EDO "complète" - cas 2

CAS 2 : Si $f(x) = e^{\lambda x}\left(\gamma \cos(\omega x + \phi) + \delta \sin(\omega x + \phi)\right)$ avec $\omega \in \mathbb{R}^*$,

Formes de la solution particulière

- si $\lambda + i\omega$ n'est pas solution de l'équation caractéristique

$$y_P(x) = e^{\lambda x}\left(A \cos(\omega x + \phi) + B \sin(\omega x + \phi)\right),$$

- si $\lambda + i\omega$ est racine de l'équation caractéristique

$$y_P(x) = e^{\lambda x}\boxed{x}\left(A \cos(\omega x + \phi) + B \sin(\omega x + \phi)\right),$$

avec A et B des constantes réelles à déterminer.

Exercice-méthode : résoudre $y''(x) + 9y(x) = \cos(x)$

Solutions particulières de l'EDO "complète" - autre cas

AUTRES CAS : Si $f(x)$ n'est pas sous l'une des formes précédentes,

Méthode de la variation de la constante

Notons y_1 et y_2 les deux solutions de l'EDO homogène.
On cherche la solution particulière y_P sous la forme

$$y_P(x) = K_1(x)y_1(x) + K_2(x)y_2(x),$$

avec K_1 et K_2 des fonctions à déterminer
et avec l'hypothèse supplémentaire

$$y_P'(x) = K_1(x)y_1'(x) + K_2(x)y_2'(x).$$

Exercice-méthode : résoudre $y''(x) + y(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$