2. Algèbre binaire ou algèbre de Boole[1]

1. Définitions :

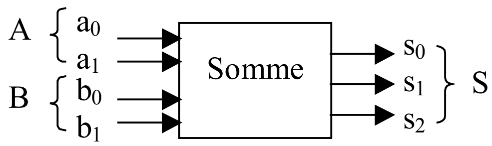
- La fonction binaire est une **application** qui, à un mot binaire d'entrée $X = x_{n-1}...x_0$ associe une variable binaire y:

$$\begin{aligned} F : S^n &\rightarrow S \qquad \text{avec} \quad S = \{ 0 , 1 \} \\ X &\rightarrow Y \end{aligned}$$

- Une fonction binaire est dite « **fonction combinatoire** » si pour une des combinaisons d'entrées correspond **un seul état** de la sortie. Dans ce cas la fonction est indépendante du temps.
- Un système logique combinatoire est un système qui possède plusieurs fonctions logiques combinatoires. A partir d'un mot binaire d'entrée $x_{n-1}...x_0$, ce système permet d'élaborer plusieurs variables de sortie $y_{m-1}...y_0$ telles que $yi = F_i(x_{n-1}...x_0)$.

❑ **Exemple** :

Soient A et B deux nombres décimaux compris entre 0 et 3. Les nombres A et B sont codés en binaire naturel (chacun sur 2 bits). Un système logique combinatoire doit réaliser le calcul du code binaire de la somme A + B



→ Ce système logique combinatoire comporte :
  - 4 variables d'entrées :
    - a_1 et a_0 correspondant au code binaire naturel de A
    - b_1 et b_0 correspondant au code binaire naturel de B
  - 3 variables de sorties :
    - s_2, s_1 et s_0 correspondant au codage de A+B car la somme décimale est comprise entre 0 et 6 d'où un codage sur 3 bits

→ Les variables de sortie sont des fonctions logiques combinatoires des variables d'entrée (cf. chapitre 3)

→ Ce système combinatoire s'appelle un additionneur. Pour le concevoir, il existe des opérateurs et une algèbre qui permettent de décrire des équations binaires (ou équations logiques).

[1] George BOOLE, anglais du XIXème siècle, est le premier a avoir étudié les propriétés de l'algèbre binaire. On l'appelle donc communément algèbre de Boole.

2. Les opérateurs de base de l'algèbre binaire

- Il existe 3 opérateurs de base définis sur l'ensemble binaire S = {0,1} :

  - L'opérateur **OU**, représenté par le signe '+' ou $\vee$: Opération logique de somme
  - L'opérateur **ET**, représenté par le signe '**.**' ou $\wedge$: Opération logique de produit
  - L'opérateur **NON**, représenté par une barre ' $\overline{}$ ' : Opération logique de négation ou de complémentation

OU	ET	NON
0 + 0 = 0	0 . 0 = 0	$\overline{1} = 0$
0 + 1 = 1	0 . 1 = 0	
1 + 0 = 1	1 . 0 = 0	$\overline{0} = 1$
1 + 1 = 1	1 . 1 = 1	

- <u>Définitions</u> :

  - La **somme** logique de a et b, noté **a + b**, réalise le OU entre deux variables logiques (a + b se lit « a ou b »). On parle aussi d'union logique.
  - Le **produit** logique de a et b, noté **a . b** (qu'on note aussi **ab**), réalise le ET entre deux variables logiques (a . b se lit « a et b »). On parle aussi d'intersection logique.
  - le **complémentaire** de a, noté $\overline{a}$, réalise le NON de cette variable logique ($\overline{a}$ se lit « a barre » ou « non a »)

3. Les propriétés de base de l'algèbre binaire

Règles	Fonction OU	Fonction ET
Commutativité	a + b = b + a	a . b = b . a
Associativité	a + (b + c) = (a + b) + c	a . (b . c) = (a . b) . c
Distributivité	OU par rapport à ET : a + (b . c) = (a + b) . (a + c)	ET par rapport à OU : a . (b + c) = (a . b) + (a . c)
Élément neutre	a + 0 = a	a . 1 = a
Complémentaire	$a + \overline{a} = 1$	$a . \overline{a} = 0$
Forçage (absorbant)	a + 1 = 1	a . 0 = 0

Règles de base

Règles	Fonction OU	Fonction ET
Nihil Potence (involution)	$\overline{\overline{a}} = a$	
Idem Potence	a + a = a	a . a = a
Absorption 1	$a + a\,b = a$	$a\,(a + b) = a$
Absorption 2	$a + \overline{a}\,b = a + b$	$a\,(\overline{a} + b) = a\,b$
Consensus	$a\,b + \overline{a}\,c + b\,c = a\,b + \overline{a}\,c$ (identité de Blake)	$(a+b)(\overline{a}+c)(b+c) =$ $(a+b)(\overline{a}+c)$
De Morgan	$\overline{\mathrm{a} + \mathrm{b}} = \overline{\mathrm{a}}\ .\ \overline{\mathrm{b}}$ Le complément d'une somme est égal au produit des compléments	$\overline{\mathrm{a.b}} = \overline{\mathrm{a}} + \overline{\mathrm{b}}$ Le complément d'un produit est égal à la somme des compléments

Autres règles de l'algèbre binaire

- **Règle du complément :**

Soit l'expression logique F. L'expression $\overline{\mathbf{F}}$, complémentaire de F, s'obtient en permutant dans F les opérations « OU » en « ET » et les opérations « ET » en « OU » en remplaçant chaque variable par son complément, sans oublier de placer ou de supprimer les parenthèses afin de maintenir la règle de hiérarchie des opérateurs.

Exemple :

Soit l'expression logique F définie par : $F = (\overline{a} + b).c + a.c + \overline{(a + b)}$

Alors le complémentaire de F s'écrit : $\overline{F} = \overline{(\overline{a} + b).c + a.c + \overline{(a + b)}}$

→ Règle de De Morgan (complément d'une somme) : $\overline{F} = \overline{(\overline{a} + b).c}\ .\ \overline{a.c}\ .\ \overline{\overline{(a + b)}}$

… simplification en utilisant les règles…

→ après simplification : $\overline{F} = (a + b).\overline{c}$