Calcul de $T_{3,6}(q_4, q_5, q_6)$

- Du MGD, il vient :

$$T_{46} = \left(\begin{array}{ccc|c} \overset{D_1}{\boxed{c_5c_6}} & \times & s_5 & 0 \\ s_6 & \times & 0 & 0 \\ \underset{D_2}{\boxed{-s_5c_6}} & \times & c_5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad T_{36} = \left(\begin{array}{ccc|c} \overset{D_3}{\boxed{c_4c_5c_6 - s_4s_6}} & \times & \overset{D_4}{\boxed{c_4s_5}} & 0 \\ \underset{D_5}{\boxed{s_4c_5c_6 + c_4s_6}} & \times & \underset{D_6}{\boxed{s_4s_5}} & 0 \\ \underset{D_2}{\boxed{-s_5c_6}} & \times & c_5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

→ **Aucun calcul à effectuer**

Calcul de $T_{3,6}(q_1, q_2, q_3)$ - 1

$$T_{16} = T_{10}(q_1)T_{06}(x) = \left(\begin{array}{ccc|c} c_1t_{11} + s_1t_{21} & \times & c_1t_{13} + s_1t_{23} & c_1t_{14} + s_1t_{24} \\ -s_1t_{11} + c_1t_{21} & \times & -s_1t_{13} + c_1t_{23} & -s_1t_{14} + c_1t_{24} \\ t_{31} & \times & t_{33} & t_{34} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$T_{26} = \left(\begin{array}{ccc|c} c_2(c_1t_{11} + s_1t_{21}) + s_2t_{31} & \times & c_2(c_1t_{13} + s_1t_{23}) + s_2t_{33} & c_2(c_1t_{14} + s_1t_{24}) + s_2t_{34} \\ -s_2(c_1t_{11} + s_1t_{21}) + c_2t_{31} & \times & -s_2(c_1t_{13} + s_1t_{23}) + c_2t_{33} & -s_2(c_1t_{14} + s_1t_{24}) + c_2t_{34} \\ s_1t_{11} - c_1t_{21} & \times & s_1t_{13} - c_1t_{23} & s_1t_{14} - c_1t_{24} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Calcul de $T_{3,6}(q_1, q_2, q_3)$ - 2

$$T_{36} = \left(\begin{array}{ccc|c} c_2(c_1t_{11} + s_1t_{21}) + s_2t_{31} & \times & c_2(c_1t_{13} + s_1t_{23}) + s_2t_{33} & c_2(c_1t_{14} + s_1t_{24}) + s_2t_{34} \\ s_1t_{11} - c_1t_{21} & \times & s_1t_{13} - c_1t_{23} & s_1t_{14} - c_1t_{24} \\ s_2(c_1t_{11} + s_1t_{21}) - c_2t_{31} & \times & s_2(c_1t_{13} + s_1t_{23}) - c_2t_{33} & s_2(c_1t_{14} + s_1t_{24}) - c_2t_{34} - q_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ecriture du système non linéaire

__Principe :__ Identifier les deux matrices suivantes :

$$T_{36} = \left(\begin{array}{ccc|c} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & \times & c_4s_5 & 0 \\ s_4c_5c_6 + c_4s_6 & \times & s_4s_5 & 0 \\ -s_5c_6 & \times & c_5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$T_{36} = \left(\begin{array}{ccc|c} c_2(c_1t_{11} + s_1t_{21}) + s_2t_{31} & \times & c_2(c_1t_{13} + s_1t_{23}) + s_2t_{33} & c_2(c_1t_{14} + s_1t_{24}) + s_2t_{34} \\ s_1t_{11} - c_1t_{21} & \times & s_1t_{13} - c_1t_{23} & s_1t_{14} - c_1t_{24} \\ s_2(c_1t_{11} + s_1t_{21}) - c_2t_{31} & \times & s_2(c_1t_{13} + s_1t_{23}) - c_2t_{33} & s_2(c_1t_{14} + s_1t_{24}) - c_2t_{34} - q_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Système non linéaire à résoudre

ordre de résolution

① (8) $s_1t_{14} - c_1t_{24} = 0$

connus

ici $t_{14}^2 + t_{24}^2 \geqslant 0$ tjs vérifié

- $\sin(q_1) = \frac{-\varepsilon_1 t_{24}\cdot\sqrt{t_{24}^2+t_{14}^2}}{t_{14}^2+t_{24}^2}$
- $\cos(q_1) = \frac{-\varepsilon_1 t_{14}\sqrt{t_{14}^2+t_{24}^2}}{t_{14}^2+t_{24}^2}$

$$\boxed{q_1 = \mathrm{atan2}\left(\frac{-\varepsilon_1 t_{24}}{\sqrt{t_{14}^2+t_{24}^2}}, \frac{-\varepsilon_1 t_{14}}{\sqrt{t_{14}^2+t_{24}^2}}\right)}$$

q_1 est connue

Remarque : $t_{14} = t_{24} = 0$

⇒ O_6 au dessus de O_0

⇒ ∞ de choix de q_1

⇒ singularité

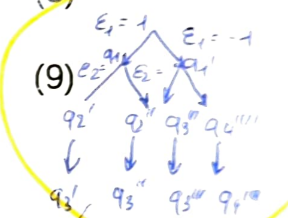
$$\left\{\begin{array}{lcl}
c_2(c_1t_{11}+s_1t_{21})+s_2t_{31} & = & c_4c_5c_6 - s_4s_6 \quad (1)\\
c_2(c_1t_{13}+s_1t_{23})+s_2t_{33} & = & c_4s_5 \quad (2)\\
s_1t_{11} - c_1t_{21} & = & s_4c_5c_6 + c_4s_6 \quad (3)\\
s_1t_{13} - c_1t_{23} & = & s_4s_5 \quad (4)\\
s_2(c_1t_{11}+s_1t_{21}) - c_2t_{31} & = & -s_5c_6 \quad (5)\\
s_2(c_1t_{13}+s_1t_{23}) - c_2t_{33} & = & c_5 \quad (6)\\
c_2(c_1t_{14}+s_1t_{24})+s_2t_{34} & = & 0 \quad (7)\\
① \; s_1t_{14} - c_1t_{24} & = & 0 \quad (8)\\
s_2(c_1t_{14}+s_1t_{24}) - c_2t_{34} - q_3 & = & 0 \quad (9)
\end{array}\right.$$

3 inconnues q₁, q₂, q₃ | ***3 inconnues q₄, q₅, q₆***

ε_1 a 2 solution

ε_2 a 2 solution

ε_3 a 1 solution



↳ voir arbre de la dernière page

② (7) $c_2(\underbrace{c_1t_{14}+s_1t_{24}}_{D \text{ connue}}) + s_2t_{34} = 0$

$\varepsilon_2 = \pm 1$ $D^2 + t_{34}^2 > 0$ (tjs vérifié)

- $\sin(q_2) = \frac{\varepsilon_2 D}{\sqrt{D^2+t_{34}^2}}$
- $\cos(q_2) = \frac{-\varepsilon_2 t_{34}}{\sqrt{D^2+t_{34}^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{q_2 = \mathrm{atan2}\left(\frac{\varepsilon_2 D}{\sqrt{D^2+t_{34}^2}}, \frac{-\varepsilon_2 t_{34}}{\sqrt{D+t_{34}^2}}\right)}$$

2 solutions ⇒ singularité

↳ $D^2 + t_{34}^2 = 0$

$t_{14} = t_{24} = t_{34} = 0$

$t_{14}^2 + t_{24}^2 + t_{34}^2 = 0$

⇒ $O_0 = O_6$

q_2 connue

③ (9) ⇒ $q_3 = \underbrace{s_2D - c_2t_{34}}_{\text{connu}}$

1 solution pour q_3

⇒ ∀ A_i sont connus (numérique)

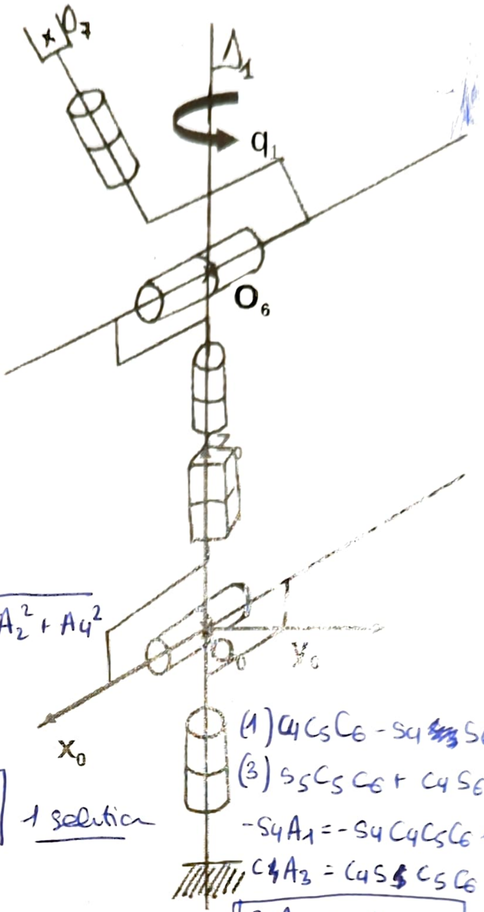
Système non linéaire à résoudre

avec la formule $\alpha c q + \beta s q = 0 \Rightarrow s(q) = \frac{\varepsilon\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ $c(q)\ \frac{-\varepsilon\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

$$\begin{array}{llcll}
A_1 \rightarrow & c_2(c_1t_{11}+s_1t_{21})+s_2t_{31} & = & c_4c_5c_6 - s_4s_6 & (1)\\
A_2 \rightarrow & c_2(c_1t_{13}+s_1t_{23})+s_2t_{33} & = & c_4s_5 & (2)\\
A_3 \rightarrow & s_1t_{11} - c_1t_{21} & = & s_4c_5c_6 + c_4s_6 & (3)\\
A_4 \rightarrow & s_1t_{13} - c_1t_{23} & = & s_4s_5 & (4)\\
A_5 \rightarrow & s_2(c_1t_{11}+s_1t_{21}) - c_2t_{31} & = & -s_5c_6 & (5)\\
A_6 \rightarrow & s_2(c_1t_{13}+s_1t_{23}) - c_2t_{33} & = & c_5 & (6)\\
 & c_2(c_1t_{14}+s_1t_{24})+s_2t_{34} & = & 0 & (7)\\
 & s_1t_{14} - c_1t_{24} & = & 0 & (8)\\
 & s_2(c_1t_{14}+s_1t_{24}) - c_2t_{34} - q_3 & = & 0 & (9)
\end{array}$$

↳ effet du poignet axes concourants

Singularité géométrique sur q_1



- O_6 est sur Δ_1
- Il existe une infinité de solutions pour q_1
- q_1 arbitraire

(6) ⇒ $A_6 = c_5$

$s_5 = \varepsilon_5 \sqrt{1 - A_6^2}$

⇒ 2 solutions pour q_5

$$\boxed{q_5 = \text{atan2}\left(\varepsilon_5\sqrt{1-A_6^2}, A_6\right)}$$

pas de singularité

(2) $A_2 = c_4 s_5$

$A_4 = s_4 s_5$

$A_2^2 + A_4^2 = s_5^2 \Rightarrow s_5 = \pm\sqrt{A_2^2 + A_4^2}$

(2) $A_2 = c_4 s_5 \Rightarrow c_4 = \frac{A_2}{s_5}$

(4) $A_4 = s_4 s_5 \Rightarrow s_4 \frac{A_4}{s_5}$

$$\boxed{q_4 = \text{atan2}\left(\frac{A_4}{s_5}, \frac{A_2}{s_5}\right)}$$ 1 solution

si $s_5 \neq 0$

(1) $c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 = A_1$

(3) $s_5 c_5 c_6 + c_4 s_6 = A_3$

$-s_4 A_1 = -s_4 c_4 c_5 c_6 + s_4^2 s_6$

$c_4 A_3 = c_4 s_4 c_5 c_6 + c_4^2 s_6$

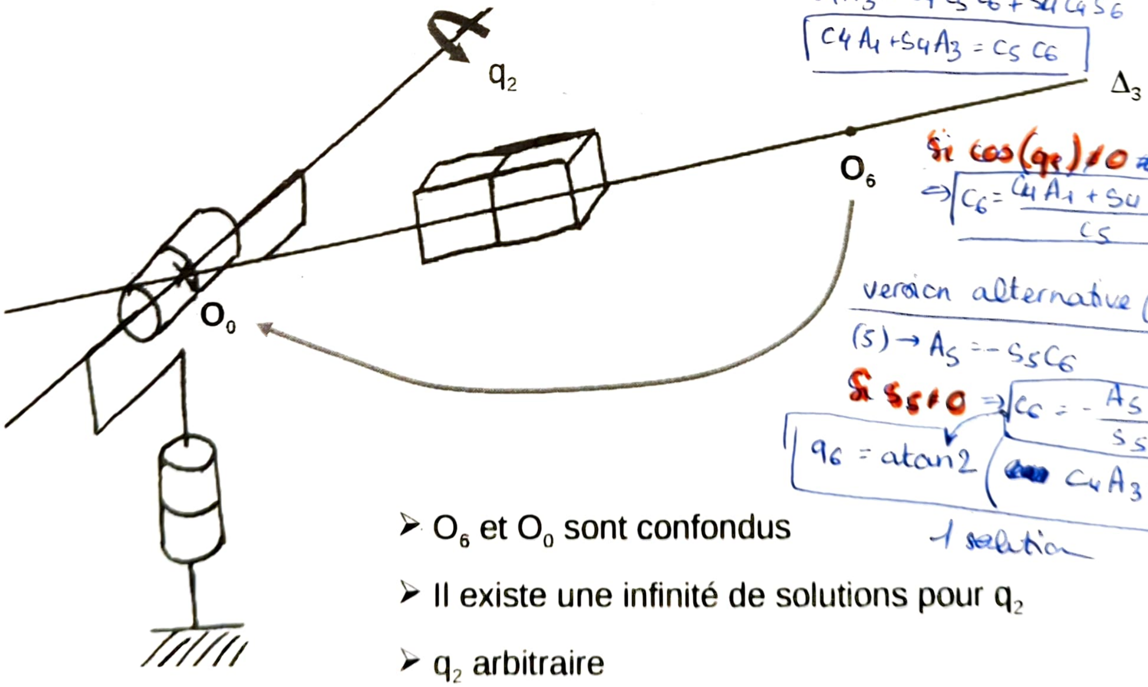
$$\boxed{c_4 A_3 - s_4 A_1 = s_6}$$

Singularité géométrique sur q_2

$c_4 A_1 = c_4^2 c_5 c_6 - c_4 s_4 s_6$

$s_4 A_3 = s_4^2 c_5 c_6 + s_4 c_4 s_6$

$$\boxed{c_4 A_1 + s_4 A_3 = c_5 c_6}$$



Si $\cos(q_5) \neq 0$

⇒ $\boxed{c_6 = \frac{c_4 A_1 + s_4 A_3}{c_5}}$

version alternative (+ simple)

(5) → $A_5 = -s_5 c_6$

Si $s_5 \neq 0$ ⇒ $\boxed{c_6 = -\frac{A_5}{s_5}}$

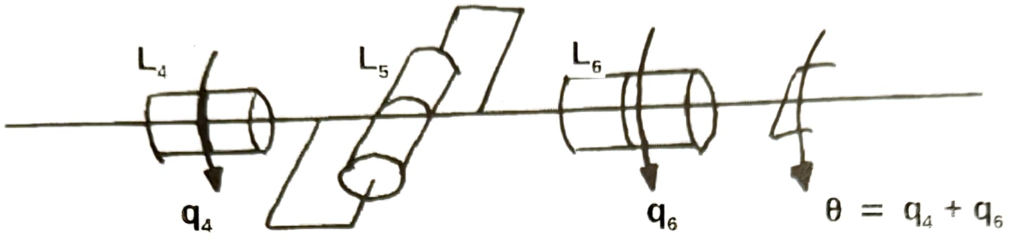
$$\boxed{q_6 = \text{atan2}\left(c_4 A_3 - s_4 A_2, c_6\right)}$$

1 solution

- O_6 et O_0 sont confondus
- Il existe une infinité de solutions pour q_2
- q_2 arbitraire
- *Remarque :* q_1 est aussi indéterminé dans ce cas

Singularité géométrique sur q_5

Si $\sin(q_5) = 0$:



➤ Impossible de déterminer séparément q_4 et q_6

➤ Il faut fixer q_4 et déduire q_6 ou inversement

Algorithme de calcul d'un MGI pour le robot RRPRRR

```
Entrées
Lectures des valeurs de la situation $\underline{X}$
Choix du MIG : lecture de $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$
Sorties
Calcul du MGI : $\underline{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^t$
début
    Calcul de la matrice $T_{0,6} = [t_{ij}]$
    $D = -\epsilon_1 \sqrt{t_{14}^2 + t_{24}^2}$
    si $D = 0$ alors
        $q_1$ indeterminé → choisir $q_1$ (singularite)
    sinon
        $s1 = \frac{t_{24}}{D}$
        $c1 = \frac{t_{14}}{D}$
        $q_1 = ATAN2(s1, c1)$
    fin
    $F = \sqrt{D^2 + t_{34}^2}$
    si $F = 0$ alors
        $q_2$ indeterminé → choisir $q_2$ (singularite)
    sinon
        $s2 = \frac{\epsilon_2 D}{F}$
        $c2 = \frac{\epsilon_2 t_{34}}{F}$
        $q_2 = ATAN2(s2, c2)$
    fin
    $q_3 = s2\,D - c2\,t_{34}$
    $A_1 = c2\,(c1\,t_{11} + s1\,t_{21}) + s2\,t_{31}$
    $A_2 = c2\,(c1\,t_{13} + s1\,t_{23}) + s2\,t_{33}$
    $A_3 = s1\,t_{11} - c1\,t_{21}$
    $A_4 = s1\,t_{13} - c1\,t_{23}$
    $A_5 = s2\,(c1\,t_{11} + s1\,t_{21}) - c2\,t_{31}$
    $A_6 = s2\,(c1\,t_{13} + s1\,t_{23}) - c2\,t_{33}$
    $c5 = A_6$
    $s5 = \epsilon_3 \sqrt{1 - c5^2}$
    $q_5 = ATAN2(s5, c5)$
    si $s5 = 0$ alors
        $C_5' = c5$
        $C_5'\,q_4 + q_6 = ATAN2(A_3, C_5' A_1)$ (singularite geom)
    sinon
        $s4 = \frac{A_4}{s5}$
        $c4 = \frac{A_2}{s5}$
        $q_4 = ATAN2(s4, c4)$
        $s6 = -A_1\,s4 + A_3\,c4$
        $c6 = -\frac{A_5}{s5}$
        $q_6 = ATAN2(s6, c6)$
    fin
fin
```