Mathématiques - UPSSITECH 21 Octobre 2016 - Correction

Exercice 1. (1 pt) Calculer les racines de l'équation $x \in \mathbb{C}$, $z^2 + z + 2 = 0$.
$\Delta = -9$. Les racines sont $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{3}{2}$ et $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{3}{2}$.

(1 pt) Résoudre l'équation $z^4 = -81$.
$z_0 = 3\, e^{i\pi/4}$, $z_1 = 3e^{i(\pi/4+\pi/2)}$, $z_3 = e^{i(\pi/4+\pi)}$, $z_4 = e^{i(\pi/4+3\pi/2)}$.

Exercice 2. (2 pt) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{1-x}{(x+1)(x^2+1)}$.

$$\frac{1-x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{-x}{x^2+1}.$$

Exercice 3. (2 pts) Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k\, x^k$, puis calculer la somme de cette série dans son domaine de convergence.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k\, x^k = \frac{1}{1-3x} \quad \text{si } |x| < 3. \quad R = 3.$$

Exercice 4. (2 pts) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$(i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n!}, \quad R = \infty. \qquad (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n^3+n^2)}, \quad R = 2.$$

Exercice 5. (2 pts) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ pour $x > 1$.

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (\frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1) = 1$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$ converge.

(2 pts) Calcul d'intégrales

$$(i) \quad \int_0^x t\, e^{2t}\, dt = x\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{4}(e^{2x} - 1).$$

$$(ii) \quad \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 t)\, \tan(t)\, dt = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6. (1 pt) Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 15 - 1\,(6) = -5.$$

Exercice 7. (i) (1 pt) Quelle est la matrice de l'application linéaire L de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique définie par

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ -2x+z \\ -x-y+z \end{pmatrix} ? \qquad M_L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii-a) (1 pt) Déterminer une base du noyau de l'application linéaire L.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}L \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-y \\ -2x+z \\ -x-y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x=y \text{ et } z=2x).$$

Donc

$$\mathrm{Ker}L = \{(x,y,z)^T \mid x=y \text{ et } z=2x\} = \mathrm{vect}\{(1,1,2)^T\}.$$

Comme $(1,1,2)^T$ est un vecteur générateur non nul de Ker$L$, c'est une base de Ker$L$, et Ker$L$ est de dimension 1.

(ii-b) (1 pt) Comme

$$\begin{pmatrix} x-y \\ -2x+z \\ -x-y+z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}L &= \{(x-y,-2x+z,-x-y+z)^T \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{vect}\{(1,-2,-1)^T,(-1,0,-1)^T,(0,1,1)^T\} = \mathrm{vect}\{(1,-2,-1)^T,(-1,0,-1)^T\}. \end{aligned}$$

Comme $\{(1,-2,-1)^T,(-1,0,-1)^T\}$ est une famille libre, c'est une base de ImL.

Exercice 8. (3 pts) Résoudre l'équation différentielle du premier ordre
$y'(t) - y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 2.$
On recherche une solution particulière de l'équation non homogène de la forme $z(t) = a\,e^{2t}$.
On a $z'(t) - z(t) = 2a\,e^{2t} - a\,e^{2t}$. Donc $a = 1$.
On recherche la solution de l'équation complète sous la forme

$$y(t) = Ce^t + e^{2t}.$$

La condition $y(0) = 2$, donne $C = 1$. D'où $y(t) = e^t + e^{2t}$.

Exercice 9. (2 pts) Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle du second ordre suivante

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0.$$

Les solutions sont

$$y(t) = (at+b)e^{-t}.$$