**Graphe Orienté** ($\rightarrow$) $G$ = un couple $(X, U)$ où

- $X$ est l'ensemble fini de sommets, $n$ fini (le nombre de sommets n est appelé l'ordre du graph)
- $U$ est l'ensemble de couples de sommets $X \times X$ appelés arcs
- Soit $u = (x_i, x_j) \in U$ alors
  - $x_i \rightarrow$ origine de $u$
  - $x_j \rightarrow$ terminale de $u$

**Graphe simple** : Un graphe orienté est simple s'il ne contient pas de boucles
**Graphe partiel** (strict) : Soit $G = (X, U)$ un graphe $G' = (X, U')$ avec $U' \complement U$ est un graphe partiel de $G$
**Sous-graphe** (strict) : Soit $G = (X, U)$ un graphe, le graphe $G_{X'} = (X', U_{X'})$ avec $X' \complement X$ et $U_{X'} = \{(x_i, x_j) \in U | x_i, x_j \in X'\}$ est un sous-graphe de $G$ engendré par $X'$.
**Dictionnaire d'un graphe** :
Soit un tableau qui à chaque sommet fait correspondre ses successeurs / Soit un tableau qui à chaque sommet fait correspondre ses prédécesseurs

| $x_i$ | $\Gamma^+(x_i)$ | $x_i$ | $\Gamma^-(x_i)$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

- **Successeur** de $x$ = sommet $y$ tel que $(x, y) \in U$
- **Ensemble des successeur** noté $\Gamma^+(x)$
- **Prédécesseur** de $x$ = sommet $y$ tel que $(y, x) \in U$
- **Ensemble des prédécesseur** noté $\Gamma^-(x)$
- **Ensemble des voisins** de $x$ : $\Gamma(x) = \Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)$
- Sommet sans voisin = sommet isolé
- **d° sortant** de $x$ : $d^+(x)$ est le nb d'arcs d'origine $x$
- **d° entrant** de $x$ : $d^-(x)$ est le nb d'arcs d'extrémité de $x$
- **d°** de $x$ : $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$
- **Sources** = sommets de degré entrant nul $d^-(x) = 0$
- **Puits** = sommets de degré sortant nul $d^+(x) = 0$

**Matrice d'adjacence** ($\rightarrow$/$-$) : La matrice d'adjacence associée à un graphe (pas forcément simple) ou matrice booléenne est une matrice $n \times n$ (n'étant le nombre de sommets) dont les termes sont $a_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; (x_i, x_j) \in U \\ 0 \; sinon \end{cases}$
**Chemin-Circuit** ($\rightarrow$) : chemin reliant deux sommets $a$ (origine) et $b$ (extrémité) = une séquence d'arcs dont le sommet extrémité d'un arc soit l'origine du suivant.

- **Chemin simple** : arcs tous différents
- **Longueur** ou **cardinalité** d'un chemin = nombre d'arcs
- **Circuit** = chemin simple dont les 2 extrémités coïncident
- **Chemin élémentaire** = tous les sommets sont distincts
- Remarque : Un chemin ´élémentaire est simple (mais pas l'inverse).

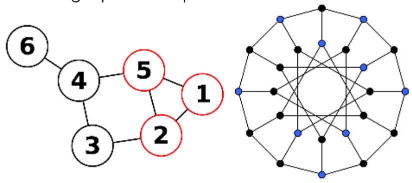
$y$ **Descendant** ($\Gamma^+(x) \subseteq D(x)$) de $x$ = un chemin de $x$ à $y$ ou si $x = y$
Liste des descendants → parcours en largeur ou en profondeur d'abord
$y$ **Ascendant** ($\Gamma^-(x) \subseteq A(x)$) de $x$ s'il existe un chemin de $y$ à $x$ ou $y = x$
**Racine** = tous sommets du graphe sont descendants de $x$, soit qu'il existe un chemin de $x$ vers tous les autres sommets

**Graphe Non Orienté** ($-$) $G$ = un couple $(X, U)$ où

- $X$ est l'ensemble fini de sommets
- $U$ est l'ensemble des **arêtes** (lien non dirigé entre deux sommets)
- Soient $x_i$ et $x_j$ deux sommets, les couples $(x_i, x_j)$ et $(x_j, x_i)$ représentent la même arête dont $x_i$ et $x_j$ sont les extrémités

**Graphe simple non orienté complet** = existe une arête entre deux sommets quelconques

**Clique** ($\rightarrow$/$-$) = sous-graphe complet




**Stable** ($\rightarrow$/$-$) = ensemble de sommets tel que deux sommets distincts ne sont pas adjacents
On appelle **noyau** d'un graphe orienté $G = (X, U)$ un ensemble $N$ de sommets qui est : Un stable ET tout sommet hors du noyau possède un successeur dans le noyau

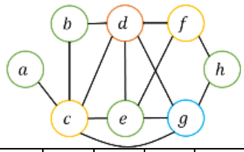
Attention les concepts ($-$) s'appliquent dans des ($\rightarrow$) ou ($-$) :

- Chaque fois qu'on applique un concept ($-$) à un ($\rightarrow$) on l'applique en omettant les orientations des arcs.
- Certains concepts ($\rightarrow$) peuvent s'appliquer à un ($-$) en ajoutant ($\leftrightarrow$)

**Chaîne** ($\rightarrow$/$-$) : séquence d'arcs ou d'arêtes de $U$ reliant deux sommets tel qu'il existe une suite de sommets (sans tenir compte de son orientation si ($\rightarrow$))
**Chaîne simple** ($\rightarrow$/$-$) = contient pas deux fois le même arc
**Cycle** ($\rightarrow$/$-$) = ensemble des arcs d'une chaîne simple dont les extrémités coïncident
**Chaîne élémentaire** ($\rightarrow$/$-$) = contient pas deux fois le même sommet

Info : chemin = chaîne avec tous les arcs ($\rightarrow$) dans le même sens.
Info : chemin ou circuit n'existe pas dans un ($-$)

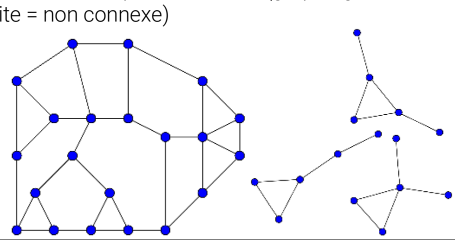
**Coloration de G (partition en stable)** = fonction associant à tout sommet de G une couleur, généralement un élément de l'ensemble d'indices des couleurs $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur ($n$ = nombre de sommets du graphe)
**Nombre chromatique** = nombre min de couleur pour obtenir une coloration de G
**Algo glouton de coloration** = On prend les sommets dans l'ordre et on leur attribue la 1ere couleur possible qui ne crée pas de conflit avec ses voisins (Info : 1 clique de taille $n$ nécessite $n$ couleurs pour être colorié)



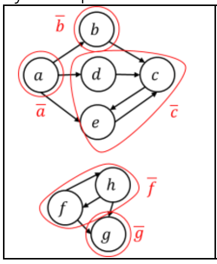

| $S$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 4 | 1 |

Attention : coloration minimale non garantie

**Connexes ou s-connexes** ($\rightarrow$/$-$) = est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive) soit que deux sommets distincts quelconques sont reliés par une chaîne (graphe gauche = connexe / graphe droite = non connexe)



**Composantes f-connexes** ($\rightarrow$) = $x = y$ ou il existe un chemin de $x$ vers $y$ et un chemin de $y$ vers $x$ est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive)



$$\bar{a}\begin{cases} D(a) = \{a,b,d,e,c\} \\ A(a) = \{a\} \end{cases} \rightarrow \bar{a} = \{a\}$$

$$\bar{b}\begin{cases} D(b) = \{b,d,c,e\} \\ A(b) = \{b,a\} \end{cases} \rightarrow \bar{b} = \{b\}$$

$$\bar{c}\begin{cases} D(c) = \{c,e,d\} \\ A(c) = \{c,b,d,a,e\} \end{cases} \rightarrow \bar{c} = \{c,d,e\} = \bar{d} = \bar{e}$$

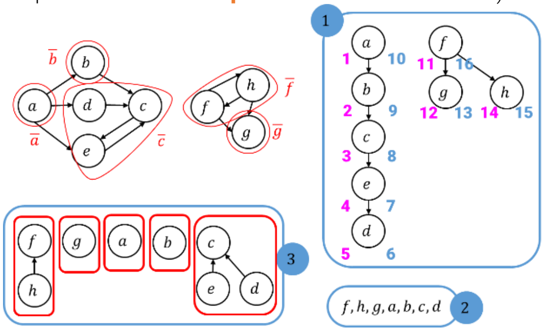
$$\bar{f}\begin{cases} D(f) = \{f,h,g\} \\ A(f) = \{f,h\} \end{cases} \rightarrow \bar{f} = \{f,h\} = \bar{h}$$

$$\bar{g} = \{g\}$$

Soit 5 composantes f-connexes

Pour les repérer facilement **Algorithme de KOSARAJU**

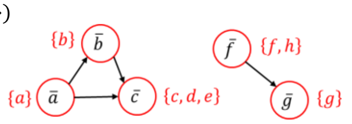
1. Parcours en profondeur d'abord des successeurs ordre alpha
2. Classer les sommets par ordre post-visite décroissante
3. Chercher ascendant en se basant sur l'ordre de l'étape 2 et le graph de départ : $f \rightarrow A(f) \rightarrow h \rightarrow \cancel{f,h} \rightarrow A(g) \rightarrow / \rightarrow A(a)$ …
4. (On peut ensuite faire le graph réduit, pour vérifier qu'il n'y a pas de circuit → **voir procédure de mise à niveau**)



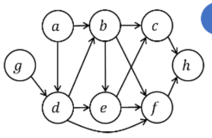

Soit 5 composantes f-connexes

**Graphe fortement connexe** ($\rightarrow$) = qu'une seule composante fortement connexe, c'est-à-dire qu'il existe un chemin entre deux sommets distincts quelconques

**Graphe réduit** ($\rightarrow$)




Déceler **l'absence de circuit** dans un graphe **= procédure de mise en niveau** / partition en niveaux :



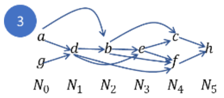
| | $\Gamma^-(G)$ |
|---|---|
| $a$ | / |
| $b$ | $\cancel{a}, \cancel{d}$ |
| $c$ | $\cancel{b}, \cancel{e}$ |
| $d$ | $\cancel{a}, \cancel{g}$ |
| $e$ | $\cancel{b}, \cancel{d}$ |
| $f$ | $\cancel{b}, \cancel{d}, \cancel{e}$ |
| $g$ | / |
| $h$ | $c, f$ |

Sans prédécesseur→ $N_0 = \{a,g\}$

$N_1 = \{d\}$ $N_2 = \{b\}$ $N_3 = \{e\}$

$N_4 = \{c,f\}$ $N_5 = \{h\}$

TANT QUE tous $\Gamma^-(G)$ ne sont pas barré FAIRE
- Regarder dans $C_2$ la ou les prédécesseurs sont tous barrés
- SI tous barré sur une ligne :
  - On crée un nouveau $N_i$
  - On ajoute le sommet correspondant dans $N_i$
  - On barre dans $C_2$ le sommet rangé s'il y est présent




P1 : $G$ entièrement décomposable en niveau si $G$ sans circuit

P2 : Si $G$ sans circuit et si l'arc $(x,y) \in U$ alors $niv(x) < niv(y)$

P3 : Si $G$ sans circuit et si un sommet x est de rang $r > 0$ alors il admet au moins un prédécesseur de rang $r - 1$.

P4 : Si $G$ sans circuit alors le rang d'un sommet est la longueur du plus long chemin vers ce sommet.

**Arbre** ($-$) = graphe connexe et sans cycle

Pour tout $GNO$ $G$ d'ordre $n$ avec $m$ arêtes,

- $G$ sans cycle → $G$ a moins de $n-1$ arêtes : $m \leq n-1$
- $G$ connexe → $G$ a plus de $n-1$ arêtes : $m \geq n-1$

Propriétés caractéristiques d'un arbre $H$ :

- $H$ est connexe et sans cycle
- $H$ est sans cycle et a $(n-1)$ arêtes
- $H$ est connexe et a $(n-1)$ arêtes
- $H$ est sans cycle et toute arête ajoutée crée un cycle unique
- $H$ est connexe et toute arête supprimée le rend non connexe
- tout couple de sommet est relié par une chaîne unique

**Arbre** ($\rightarrow$) : on ne tient pas compte de l'orientation des arcs

**Arbre couvrant** ($\rightarrow/-$) = graphe partiel de $G$ connexe et sans cycle

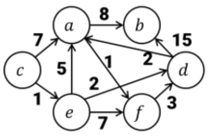
T1 : Un graphe admet un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe

**Problème de l'arbre couvrant de poids min** ou a.p.m. consiste à trouver un graphe partiel de $G$ qui soit connexe et de poids min parmi tous les graphes partiels de $G$

Solution : **Algorithme de KRUSKAL** croissant :

1. Classer les arêtes dans l'ordre de leurs poids croissants
2. On dessine les sommets
3. On dessine les arêtes en partant du poids le plus faible en portant attention à ne pas créer de cycle
4. STOP quand $n-1$ arrêtes

(Alt : KRUSKAL décroissant → classer les arêtes en poids décroissant et on les élimine tant qu'on reste connexe)



$6\ sommets \rightarrow on\ s'arrête$ à $6 - 1 = 5\ arrêtes$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(a,f)$ | $(c,e)$ | $(d,a)$ | $(e,d)$ | $\cancel{(f,d)}$ | $\cancel{(e,a)}$ | $\cancel{(e,f)}$ | $\cancel{(c,a)}$ | $(a,b)$ |
| **1** | **1** | **2** | **2** | **~~3~~** | **~~5~~** | **~~7~~** | **~~7~~** | **8** |

$ACPM\ poids = 14$

**Algorithmes de parcours**