

## Deuxième contrôle continu Graphes (durée 1h30)

Documents autorisés : 2 feuilles A4 recto-verso.

Barème donné à titre indicatif.

### I Ordonnancement (4 points)

On considère un projet dont les tâches ont les durées et contraintes suivantes :

Tâches	A	B	C	D	E	F
durées (en jours)	6	3	6	2	4	3
tâches prérequis				B	A,B	C,D

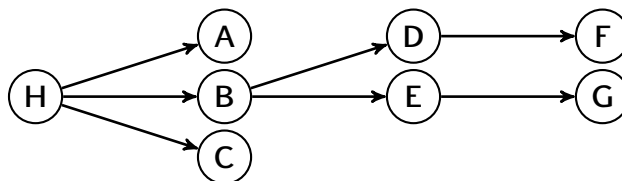
1. Dessinez le graphe potentiel-tâches.
2. Faites un tableau récapitulant les dates de début au plus tôt, début au plus tard, marges totales, marges libres<sup>1</sup>.
3. Quelle est la durée du projet? Quelles sont les tâches critiques?

### II Chemins (7 points)

On considère le graphe  $G_1$  suivant :

Sommets	H	A	B	C	D	E	F	G
$y \in \Gamma^+(x)$	A,B,C	E	D,E	F	F	G	G	
$poids(x,y)$	0,0,0	6	3,3	6	2	4	3	/

1. Calculez tous les chemins de poids MAXIMUM depuis le sommet H dans le graphe  $G_1$ . Vous donnerez le nom de l'algorithme utilisé et donnerez l'arborescence des chemins MAXIMAUX de racine H en écrivant à côté de chaque sommet X le poids du chemin HX-MAXIMAL y arrivant.
2. L'algorithme de Dijkstra appliqué au sommet H donne l'arborescence suivante :



- (a) Peut-on calculer le terme  $\Lambda(B,F)$  de la matrice des longueurs<sup>2</sup> et le terme  $M(B,F)$  de la matrice de routage<sup>2</sup>, à partir de cette arborescence sans relancer d'algorithme? Si oui donnez leurs valeurs et justifiez, sinon expliquez.

1. Rappel : la *marge libre*  $ml$  d'une tâche  $v$  est le délai pouvant être accordé au commencement de cette tâche sans modifier les marges totales des tâches suivantes,  $ml(v) = \min_{v' \in \Gamma^+(v)} t_{v'} - (t_v + \text{durée}(v))$  (où  $t_v$  et  $t_{v'}$  sont les dates de début au plus tôt respectives de  $v$  et  $v'$ ).

2. Rappel : La *matrice des longueurs*  $\Lambda$  des chemins  $ij$ -minimaux d'un graphe est une matrice telle que  $\Lambda(i,j) = \text{longueur du chemin } ij\text{-minimal}$ ; la *matrice de routage*  $M$  est telle que  $M(i,j) = \text{sommet successeur de } i \text{ sur le chemin } ij\text{-minimal}$ .

(b) Même question pour les termes  $\Lambda(E, F)$  et  $M(E, F)$ .

3. Soit  $G_2$  le graphe  $G_1$  auquel on ajoute les arcs  $(E, H)$  et  $(G, C)$  :

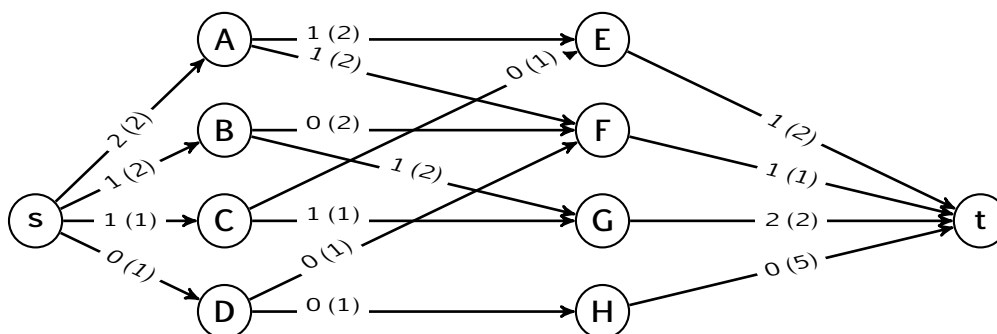
Sommets	H	A	B	C	D	E	F	G
$y \in \Gamma^+(x)$	A,B,C	E	D,E	F	F	G, H	G	C

Calculez alors les composantes f-connexes de ce nouveau graphe  $G_2$ .

4. Donnez le graphe réduit de  $G_2$  mis en niveau.

### III Calcul d'un flot Maximum (5 points)

On considère le graphe suivant où pour chaque arc on a donné la valeur d'un flot qui circule et la capacité de l'arc entre parenthèses.

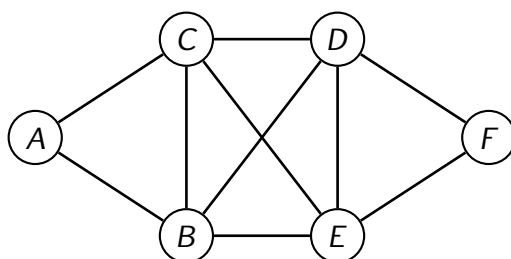


1. Vérifiez que les valeurs données sur les arcs correspondent bien à un **flot compatible**, nommé  $\varphi_0$ , sur le réseau de transport associé à ce problème. Quel est la valeur du flot  $\varphi_0$  ?
2. Calculez un flot maximum à partir de ce flot vous préciserez les chaînes augmentantes utilisées et de combien le flot est augmenté à chaque étape. Vous donnerez la valeur du flot maximum.
3. (STRI et L3-IRT uniquement) Donnez une coupe de capacité minimum et donnez sa capacité.

## IV Équipements sportifs (SRI : 4 pts, STRI et L3-IRT : 2 pts)

Les joueuses du Stade Toulousain n'habitent pas toutes dans le même quartier de Toulouse. D'autre part, l'agglomération toulousaine est très étendue et terriblement embouteillée. Il n'est donc pas possible pour chaque joueuse de venir s'entraîner au stade toulousain tous les soirs. L'entraîneuse du Stade Toulousain Féminin (STF) a donc passé un accord avec la mairie de Toulouse pour que chaque quartier bénéficie d'un équipement sportif utilisable par les joueuses du STF et dont le STF financera en partie la construction.

Par contre, la mairie a exigé que des quartiers voisins n'aient pas le même équipement afin d'avoir un choix le plus large possible à proposer à la communauté (les élections approchent, il faut que les gens soient satisfaits!). Le graphe suivant donne les proximités entre les quartiers A, B, C, D, E, F de la ville (une arête signifie que les quartiers sont voisins).



L'entraîneuse voudrait que ses joueuses de rugby s'entraînent soit sur un terrain de rugby, soit sur un stade d'athlétisme, soit dans une salle de boxe.

Est-ce qu'il est possible de construire seulement ces trois types d'équipement dans chacun des quartiers? Si oui, montrer comment. Et si non, dites à l'entraîneuse combien de types d'équipements sportifs différents devront être utilisés au minimum par ses joueuses pour s'entraîner.

Dans tous les cas, il vous faudra traduire ce problème en termes de graphes puis le résoudre.

**(SRI uniquement)** Justifiez votre raisonnement et votre solution à l'aide des propriétés vues en TD.

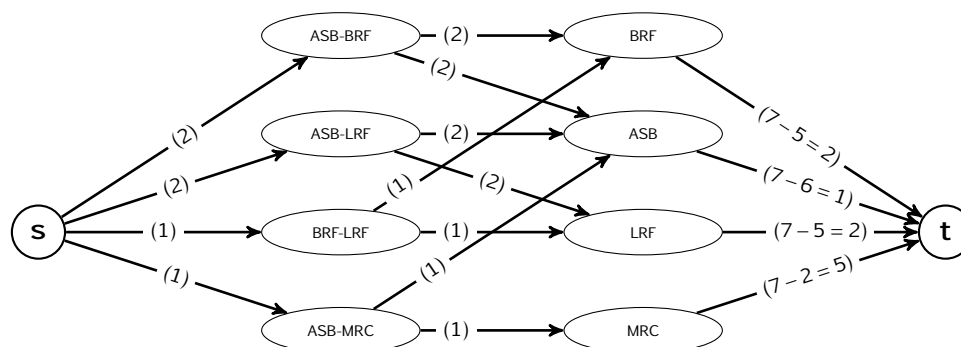
## V (STRI et L3-IRT uniquement) Rugby Féminin (2 points)

On s'intéresse à l'avenir de l'équipe de rugby féminin du Stade Toulousain dans un championnat où 5 équipes s'affrontent : Association Sportive bayonnaise (ASB), Blagnac Rugby Féminin (BRF), Lons Rugby Féminin (LRF), Montpellier Rugby Club (MRC), Stade Toulousain féminin (STF). Voici le nombre de matchs gagnés par les différentes équipes :

Équipe	ASB	BRF	LRF	STF	MRC
gagnés	6	5	5	3	2

Le Stade Toulousain est l'avant dernière équipe mais il reste les 10 matchs suivants à jouer : 2 matchs (STF, BRF), 1 match (STF, ASB), 1 match (STF, LRF), 2 matchs (ASB, BRF), 2 matchs (ASB, LRF), 1 match (BRF, LRF) et 1 match (ASB, MRC).

On se demande si STF peut terminer première (éventuellement ex-aequo) du championnat, c'est-à-dire gagner au moins autant de matchs que chacune des autres équipes. Pour résoudre ce problème on imagine que STF gagne ses 4 prochains matchs, c'est-à-dire qu'elle gagnerait  $3+4=7$  matchs en tout. Si une autre équipe gagne plus de 7 matchs, il n'y a plus d'espoir pour STF. Hormis les 4 matchs que STF doit gagner, il reste donc 6 matchs dans lesquels STF n'intervient pas : 2 matchs ASB contre BRF, 2 matchs ASB contre LRF et les 2 matchs (BRF, LRF) et (ASB, MRC). On modélise ce problème grâce au graphe suivant (où les capacités sont écrites entre parenthèses) :



En quoi la valeur du flot maximum peut-elle nous renseigner sur la victoire possible de STF? **On ne demande pas de calcul.** Justifier votre réponse en expliquant ce que signifient les capacités affectées aux arcs, et en montrant le rapport avec les flots. *Indice : comparer le cas où le flot max serait égal à 6 par rapport au cas où le flot max serait inférieur à 6.*

En utilisant les résultats de l'exercice III, concluez sur le fait que STF a un espoir ou non de gagner le championnat, si oui expliquez quels doivent être les résultats des 10 matchs restants sinon dites quelle équipe peut gagner.