M1 - SRI
IA - Représentation et
Résolution de problèmes

Mars 2021 – 1h30
(documents autorisés)

Pour être comptabilisée, toute réponse devra être justifiée.

Exercice 1 (4 pts)

La conférence principale en IA se tient cette année à New-York. La situation sanitaire va-t-elle me permettre d'y aller ?

1. Exprimez sous la forme d'une base de formules en logique propositionnelle les connaissances suivantes :
   — Si l'épidémie est finie, la frontière vers les USA va rouvrir
   — Je vais aux USA si la frontière est ouverte
   — Je vais aux USA seulement si je suis vaccinée
   — Pour être vaccinée, il faut que je sois "à risque" ou qu'il y ait suffisamment de vaccins disponibles
2. Exprimez le problème *Etant données les connaissances précédentes et sachant que je ne suis pas "à risque" et que l'épidémie n'est pas finie, vais-je aller aux USA* ?
3. Quelle méthode et quel outil pouvez-vous utiliser pour résoudre ce problème ?
4. Donnez la réponse au problème en la justifiant.

Exercice 2 (4 pts)

Cet été, je prévois d'aller aux USA à la fois pour le travail (conférence importante à suivre) et pour les vacances [1]. La conférence a lieu à New-York et je voudrais en profiter pour faire le tour des principaux sites intéressants du pays (les villes comme Boston, Washington DC, San-Francisco et Los Angeles par exemple) ainsi que les grands parcs nationaux (Yosemite, Grand Canyon, les chutes du Niagara ou Yellowstone). Il me faut donc planifier mes déplacements et choisir mes moyens de transport.

Pour chaque site, je dispose de la liste des moyens permettant d'y accéder depuis certains autres sites (voiture, train, avion) avec pour chaque moyen le prix que cela me coûtera. Attention, tous les sites ne sont pas forcément accessibles par tous les autres sites. D'autre part, pour des questions de disponibilité, un seul vol est possible pour atteindre les USA : Toulouse-Paris-New-York aller-retour.

Le problème à résoudre : *Sans tenir compte de l'aspect temporel, comment puis-je enchaîner les visites de manière à ce que cela me coûte le moins possible ?*

1. De quel type de problème s'agit-il ?
2. A quel problème connu, ce problème vous fait-il penser ?
3. Exprimez-le sous la forme d'un espace d'états en donnant la définition *précise* de chaque état et de chaque opérateur.
4. Pouvez-vous utiliser un algorithme du type $A*$ pour résoudre ce problème ? Si oui, proposez une heuristique admissible. Si non, expliquez pourquoi.

La liste des sites qui m'intéressent étant énorme (plus d'une centaine) et mon temps étant limité, je me résigne à ne visiter que 10 sites. Le nombre de combinaisons possibles étant beaucoup trop important, je vais appliquer une méthode approchée pour faire mon choix.

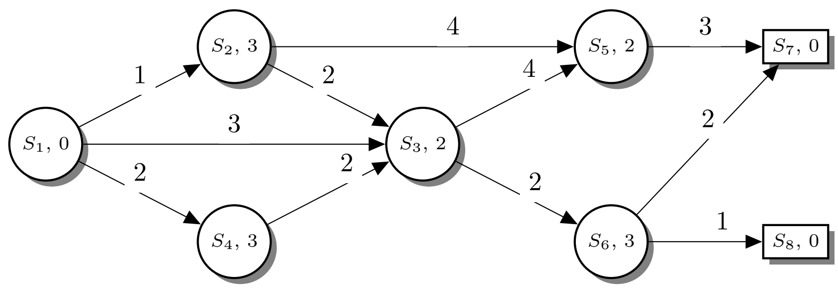
5. Donnez une formalisation des solutions recherchées et de leur évaluation.
6. Proposez une méthode pour construire un voisinage à partir d'une solution donnée.

1. L'épidémie de COVID est finie et toute la planète est vaccinée. Quoi ? ...On peut bien rêver un peu !-)

Exercice 3 (4 pts)

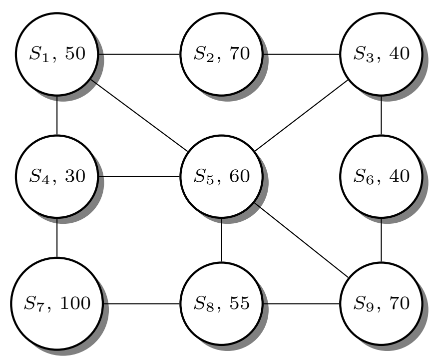
On considère l'espace d'états donné par la figure suivante. Le graphe est orienté, les valeurs sur les arcs donnent le coût de passage d'un état à un autre. Les valeurs sur les sommets correspondent à l'heuristique h évoquée ci-après. L'état initial est S_1. On considère qu'on dispose d'une fonction qui reconnaît les états finaux (indiqués par un rectangle sur la figure).

1. Décrivez l'application du A* sur cet espace et donnez le résultat obtenu en utilisant l'heuristique h donnée pour chaque sommet dans le graphe (donnez le chemin solution et son poids).
2. h est-elle admissible ? Qu'en concluez-vous sur la réponse obtenue à la question 1 ?



Exercice 4 (4 pts)

On considère le graphe suivant :



Chaque nœud correspond à une solution. Le voisinage d'une solution e est constitué de l'ensemble des solutions e' qui ont une arête allant de e à e' (le graphe est non-orienté). La valeur de chaque solution est indiquée dans le nœud. On part d'une solution donnée et on cherche la solution dont la valeur est **la plus grande**.

1. Donnez l'ordre des solutions visitées en utilisant le *steepest hill climbing*, sans reprise, en partant de S_1.
2. Décrivez l'exécution de *tabou* (solutions visitées + liste de tabous à chaque étape) avec une taille de liste égale à 3 en partant de S_1. Arrêtez-vous quand l'algorithme boucle (c'est-à-dire quand on retrouve le même état courant avec la même liste de tabous que lors d'une étape précédente) ou que la liste de tabous atteint la taille de 3.

Attention, en cas d'égalité de valeur, vous privilégierez le sommet ayant le plus petit numéro.

Exercice 5 (4 pts)

Dans le cadre de mon périple américain, j'ai identifié 4 trajets principaux :

T_1 **:** New-York vers San-Francisco

T_2 **:** San-Francisco vers Seattle

T_3 **:** Seattle vers Chicago

T_4 **:** Chicago vers New-York

Chacun de ces trajets peut être réalisé a priori soit en voiture de location, soit en train, soit en avion. Par contre,

— pour des problèmes financiers, je ne vais pouvoir faire au plus qu'un seul de ces trajets en avion
— si je fais T_1 (qui est très long) en voiture, je serai obligé d'utiliser ensuite uniquement le train ou l'avion (pour gagner un peu de temps)
— je veux absolument faire le trajet T_2 en voiture pour profiter au maximum de la côte pacifique
— faire le trajet T_3 en train va m'obliger ensuite à faire T_4 en voiture

Mon problème *Quel moyen de transport dois-je choisir pour chacun de ces 4 trajets ?*

1. De quel type de problème s'agit-il ?
2. Comment pouvez-vous le représenter ? Vous donnerez tous les composants de cette représentation.
3. Quels algorithmes pouvez-vous utiliser pour résoudre le problème ?
4. Faites dérouler l'un de ces algorithmes et trouvez une solution. Est-ce la seule ? Expliquez et justifiez.

Corrigé

Exercice 1 (4 pts)

La conférence principale en IA se tient cette année à New-York. La situation sanitaire va-t-elle me permettre d'y aller ?

1. Exprimez sous la forme d'une base de formules en logique propositionnelle les connaissances suivantes :
   - Si l'épidémie est finie, la frontière vers les USA va rouvrir
   - Je vais aux USA si la frontière est ouverte
   - Je vais aux USA seulement si je suis vaccinée
   - Pour être vaccinée, il faut que je sois "à risque" ou qu'il y ait suffisamment de vaccins disponibles

   Etape 1 : trouver le vocabulaire.
   - *EF : épidémie finie*
   - *FO : frontière ouverte*
   - *US : aller aux USA*
   - *V : être vaccinée*
   - *R : être à risque*
   - *VD : vaccins disponibles*

   Etape 2 : traduire chaque phrase en une formule de la logique propositionnelle
   - *Si l'épidémie est finie, la frontière vers les USA va rouvrir :* $EF \rightarrow FO$
   - *Je vais aux USA si la frontière est ouverte :* $FO \rightarrow US$
   - *Je vais aux USA seulement si je suis vaccinée :* $US \rightarrow V$
   - *Pour être vaccinée, il faut que je sois "à risque" ou qu'il y ait suffisamment de vaccins disponibles :* $V \rightarrow (R \vee VD)$

2. Exprimez le problème *Etant données les connaissances précédentes et sachant que je ne suis pas "à risque" et que l'épidémie n'est pas finie, vais-je aller aux USA* ?

   Cela correspond à la requête :
   $$\text{“}BC \cup \{ \neg R, \neg EF \} \models US\ ?\text{”}$$
   (donc est-ce qu'à partir de BC qui est l'ensemble des 4 formules et des faits $\neg R$ *et* $\neg EF$*, je peux déduire que j'irai aux USA)*

3. Quelle méthode et quel outil pouvez-vous utiliser pour résoudre ce problème ?

   Répondre à la requête en étudiant la satisfiabilité de la formule :
   $$BC \cup \{ \neg R, \neg EF, \neg US\}$$
   Si cette formule est satisfiable, alors la réponse à la requête est NON.
   Si cette formule n'est pas satisfiable, alors la réponse à la requête est OUI.
   On peut donc utiliser un solver SAT comme outil.

4. Donnez la réponse au problème en la justifiant.

   Ici on peut exhiber un modèle de $BC \cup \{ \neg R, \neg EF, \neg US\}$ *qui est le suivant : mettre à faux toutes les variables propositionnelles.*
   Donc la réponse est NON (il existe au moins un modèle dans lequel je ne vais pas aux USA)

Exercice 2 (4 pts)

Cet été, je prévois d'aller aux USA à la fois pour le travail (conférence importante à suivre) et pour les vacances [2]. La conférence a lieu à New-York et je voudrais en profiter pour faire le tour des principaux sites intéressants du pays (les villes comme Boston, Washington DC, San-Francisco et Los Angeles par exemple)

2. L'épidémie de COVID est finie et toute la planète est vaccinée. Quoi ? ...On peut bien rêver un peu !-)

ainsi que les grands parcs nationaux (Yosemite, Grand Canyon, les chutes du Niagara ou Yellowstone). Il me faut donc planifier mes déplacements et choisir mes moyens de transport.

Pour chaque site, je dispose de la liste des moyens permettant d'y accéder depuis certains autres sites (voiture, train, avion) avec pour chaque moyen le prix que cela me coûtera. Attention, tous les sites ne sont pas forcément accessibles par tous les autres sites. D'autre part, pour des questions de disponibilité, un seul vol est possible pour atteindre les USA : Toulouse-Paris-New-York aller-retour.

Le problème à résoudre : *Sans tenir compte de l'aspect temporel, comment puis-je enchaîner les visites de manière à ce que cela me coûte le moins possible ?*

1. De quel type de problème s'agit-il ?

   Il s'agit d'un problème d'optimisation

2. A quel problème connu, ce problème vous fait-il penser ?

   Le problème du TSP (voyageur de commerce) : trouver un chemin partant de NY et revenant sur NY en passant par tous les sites et de coût minimum.
   Attention, c'est compliqué ici par le fait qu'il s'agit d'un multi-graphe (il peut exister plusieurs arcs entre 2 sommets). En fait, on peut simplifier en considérant qu'un arc représente le fait qu'il existe un moyen de transport entre ces deux sommets et que le coût d'un arc est le min des coûts des différents moyens possibles.

3. Exprimez-le sous la forme d'un espace d'états en donnant la définition *précise* de chaque état et de chaque opérateur.

   Un état sera une liste de sites $l = (s_1, \dots, s_n)$, $n = 1$ *à* $N+1$ *(*N *étant le nb total de sites à visiter)*
   L'état initial = (NY)
   Les états finaux lf *sont caractérisés par les équations suivantes :*
   - $\forall s$ *un site,* $s \in lf$ *(tous les sites ont été visités)*
   - $\forall s_i \neq NY, s_j \neq NY$, $s_i \in lf$, $s_j \in lf$, *si* $i \neq j$ *alors* $s_i \neq s_j$ *(une seule visite par site)*
   - *longueur(*lf*)* $= N + 1$ *et* $s_1 = s_{N+1} = NY$

   Un opérateur AjoutSite *défini par : soit* $l = (s_1, \dots, s_n)$ *un état,*
   AjoutSite*(*l*)* $= \{l' | l' = (s_1, \dots, s_n, s_{n+1})$ *avec* $s_{n+1} \notin l$ *et il existe un moyen d'aller de* x_n *à* $s_{n+1}\}$

4. Pouvez-vous utiliser un algorithme du type $A*$ pour résoudre ce problème ? Si oui, proposez une heuristique admissible. Si non, expliquez pourquoi.

   Oui, on peut utiliser le $A*$ *puisque l'espace des états correspond à un graphe dans lequel on cherche un plus court chemin, avec, soit* $l = (s_1, \dots, s_n)$ *un état, coût(*l*)* $= \Sigma_{i=1}^{n-1}$ *coût(*s_i, s_{i+1}*).*
   L'heuristique suivante peut être utilisée (c'est une heuristique admissible) : soit $l = (s_1, \dots, s_n)$ *un état,* $h(l) =$ *(nb de sites manquants à* l *+ 1)* $\times$ *le plus petit coût du graphe.*

La liste des sites qui m'intéressent étant énorme (plus d'une centaine) et mon temps étant limité, je me résigne à ne visiter que 10 sites. Le nombre de combinaisons possibles étant beaucoup trop important, je vais appliquer une méthode approchée pour faire mon choix.

5. Donnez une formalisation des solutions recherchées et de leur évaluation.

   Une solution sera un état $l = (NY, s_{i_1}, \dots, s_{i_n}, NY)$ *respectant les contraintes* $|l| = 11$ *et* $\forall i_k, i_l \in \{i_1, \dots, i_n\}$ *si* $i_k \neq i_l$ *alors* $s_{i_k} \neq s_{i_l} \neq NY$

6. Proposez une méthode pour construire un voisinage à partir d'une solution donnée.

   Sélectionner aléatoirement un i_k *et remplacer* s_{i_k} *par un site qui* $\notin l$ *et qui est accessible depuis* $s_{i_{k-1}}$ *et depuis* $s_{i_{k+1}}$ *(en considérant par convention que* $s_{i_0} = s_{i_{n+1}} = NY$*. Faire cela* $\frac{N}{2}$ *fois pour chaque solution* l*.*

Exercice 3 (4 pts)

On considère l'espace d'états donné par la figure suivante. Le graphe est orienté, les valeurs sur les arcs donnent le coût de passage d'un état à un autre. Les valeurs sur les sommets correspondent à l'heuristique h évoquée ci-après. L'état initial est S_1. On considère qu'on dispose d'une fonction qui reconnaît les états finaux (indiqués par un rectangle sur la figure).

1. Décrivez l'application du A* sur cet espace et donnez le résultat obtenu en utilisant l'heuristique h donnée pour chaque sommet dans le graphe (donnez le chemin solution et son poids).

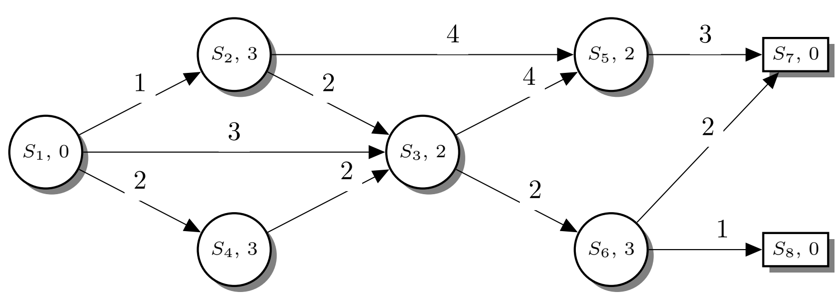
Pour chaque sommet, on donne son père, son coût et son heuristique.

AVoir	*Vu*	s
$s_1(-,0,0)$	$\varnothing$	
$\varnothing$	$s_1(-,0,0)$	$s_1(-,0,0)$
$s_2(s_1,1,3)$, $s_3(s_1,3,2)$, $s_4(s_1,2,3)$	$s_1(-,0,0)$	$s_1(-,0,0)$
$s_3(s_1,3,2)$, $s_4(s_1,2,3)$	$s_1(-,0,0)$, $s_2(s_1,1,3)$	$s_2(s_1,1,3)$
$s_3(s_1,3,2)$, $s_4(s_1,2,3)$, $s_5(s_2,5,2)$	$s_1(-,0,0)$, $s_2(s_1,1,3)$	$s_2(s_1,1,3)$
$s_4(s_1,2,3)$, $s_5(s_2,5,2)$	$s_1(-,0,0)$, $s_2(s_1,1,3)$, $s_3(s_1,3,2)$	$s_3(s_1,3,2)$
$s_4(s_1,2,3)$, $s_5(s_2,5,2)$, $s_6(s_3,5,3)$	$s_1(-,0,0)$, $s_2(s_1,1,3)$, $s_3(s_1,3,2)$	$s_3(s_1,3,2)$
$s_5(s_2,5,2)$, $s_6(s_3,5,3)$	$s_1(-,0,0)$, $s_2(s_1,1,3)$, $s_3(s_1,3,2)$, $s_4(s_1,2,3)$	$s_4(s_1,2,3)$
$s_5(s_2,5,2)$, $s_6(s_3,5,3)$	$s_1(-,0,0)$, $s_2(s_1,1,3)$, $s_3(s_1,3,2)$, $s_4(s_1,2,3)$	$s_4(s_1,2,3)$
$s_6(s_3,5,3)$	$s_1(-,0,0)$, $s_2(s_1,1,3)$, $s_3(s_1,3,2)$, $s_4(s_1,2,3)$, $s_5(s_2,5,2)$	$s_5(s_2,5,2)$
$s_6(s_3,5,3)$, $s_7(s_5,8,0)$	$s_1(-,0,0)$, $s_2(s_1,1,3)$, $s_3(s_1,3,2)$, $s_4(s_1,2,3)$, $s_5(s_2,5,2)$	$s_5(s_2,5,2)$
$s_7(s_5,8,0)$	$s_1(-,0,0)$, $s_2(s_1,1,3)$, $s_3(s_1,3,2)$, $s_4(s_1,2,3)$, $s_5(s_2,5,2)$, $s_6(s_3,5,3)$	$s_6(s_3,5,3)$
$s_7(s_6,7,0)$, $s_8(s_6,6,0)$	$s_1(-,0,0)$, $s_2(s_1,1,3)$, $s_3(s_1,3,2)$, $s_4(s_1,2,3)$, $s_5(s_2,5,2)$, $s_6(s_3,5,3)$	$s_6(s_3,5,3)$
$s_7(s_6,7,0)$	$s_1(-,0,0)$, $s_2(s_1,1,3)$, $s_3(s_1,3,2)$, $s_4(s_1,2,3)$, $s_5(s_2,5,2)$, $s_6(s_3,5,3)$, $s_8(s_6,6,0)$	$s_8(s_6,6,0)$
Fin puisque s_8 est une solution		

Le chemin solution est donc $s_1 - s_3 - s_6 - s_8$ de poids 6.

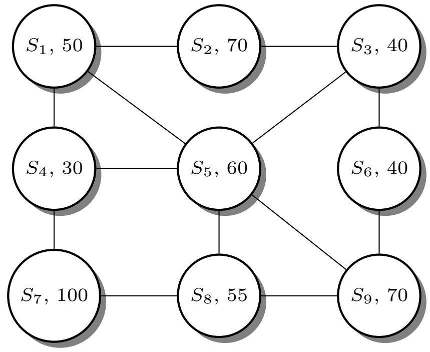
2. h est-elle admissible ? Qu'en concluez-vous sur la réponse obtenue à la question 1 ?

h est coincidente (l'heuristique des états finaux = 0)
Par contre, h n'est pas monotone car $h(s_6) \not\leq h(s_8) + 1$.
Donc le chemin solution trouvé précédemment n'est pas forcément le meilleur. Ici c'est le cas mais c'est uniquement un hasard.



Exercice 4 (4 pts)

On considère le graphe suivant :



Chaque nœud correspond à une solution. Le voisinage d'une solution e est constitué de l'ensemble des solutions e' qui ont une arête allant de e à e' (le graphe est non-orienté). La valeur de chaque solution est indiquée dans le nœud. On part d'une solution donnée et on cherche la solution dont la valeur est **la plus grande**.

1. Donnez l'ordre des solutions visitées en utilisant le *steepest hill climbing*, sans reprise, en partant de S_1.

   On part de s_1 (50). Le meilleur voisin est s_2 (70), donc on repart de là. Et cela s'arrête car aucun voisin de s_2 n'est meilleur que s_2.
   Donc la meilleure soluton obtenue avec le SHC est : s_2 (70).

2. Décrivez l'exécution de *tabou* (solutions visitées + liste de tabous à chaque étape) avec une taille de liste égale à 3 en partant de S_1. Arrêtez-vous quand l'algorithme boucle (c'est-à-dire quand on retrouve le même état courant avec la même liste de tabous que lors d'une étape précédente) ou que la liste de tabous atteint la taille de 3.

   On part de s_1 (50) avec la liste des tabous = $\varnothing$
   On sélectionne s_2 (70) avec la liste des tabous = $\varnothing$
   On sélectionne s_1 (50) avec la liste des tabous = $\{s_2\}$
   On sélectionne s_5 (60) avec la liste des tabous = $\{s_2\}$
   On sélectionne s_9 (70) avec la liste des tabous = $\{s_2\}$
   On sélectionne s_5 (60) avec la liste des tabous = $\{s_2, s_9\}$
   On sélectionne s_8 (55) avec la liste des tabous = $\{s_2, s_9, s_5\}$
   On s'arrête car la liste des tabous a atteint la taille de 3.

Attention, en cas d'égalité de valeur, vous privilégierez le sommet ayant le plus petit numéro.

Exercice 5 (4 pts)

Dans le cadre de mon périple américain, j'ai identifié 4 trajets principaux :

- T_1 **:** New-York vers San-Francisco
- T_2 **:** San-Francisco vers Seattle
- T_3 **:** Seattle vers Chicago
- T_4 **:** Chicago vers New-York

Chacun de ces trajets peut être réalisé a priori soit en voiture de location, soit en train, soit en avion. Par contre,

— pour des problèmes financiers, je ne vais pouvoir faire qu'un seul de ces trajets en avion

— si je fais T_1 (qui est très long) en voiture, je serai obligé d'utiliser ensuite uniquement le train ou l'avion (pour gagner un peu de temps)
— je veux absolument faire le trajet T_2 en voiture pour profiter au maximum de la côte pacifique
— faire le trajet T_3 en train va m'obliger ensuite à faire T_4 en voiture

Mon problème *Quel moyen de transport dois-je choisir pour chacun de ces 4 trajets ?*

1. De quel type de problème s'agit-il ?

   Un problème de satisfaction de contraintes

2. Comment pouvez-vous le représenter ? Vous donnerez tous les composants de cette représentation.

   Les variables : les trajets (donc 4 variables T_1 à T_4)
   Les domaines : ce sont les mêmes pour toutes les variables : avion, voiture, train
   Les contraintes : la traduction de chacune des phrases en impact sur les domaines (tuples interdits) :
   — *pour des problèmes financiers, je ne vais pouvoir faire au plus qu'un seul de ces trajets en avion :*

   $$\textit{tuples interdits : } C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{23} = C_{24} = C_{34} = \{(avion, avion)\}$$

   — *si je fais T_1 (qui est très long) en voiture, je serai obligé d'utiliser ensuite uniquement le train ou l'avion (pour gagner un peu de temps)*

   $$\textit{tuples interdits : } C'_{12} = C'_{13} = C'_{14} = \{(voiture, voiture)\}$$

   — *je veux absolument faire le trajet T_2 en voiture pour profiter au maximum de la côte pacifique*

   $$\textit{tuples interdits : } C_2 = \{(avion), (train)\}$$

   — *faire le trajet T_3 en train va m'obliger ensuite à faire T_4 en voiture*

   $$\textit{tuples interdits : } C'_{34} = \{(train, avion), (train, train)\}$$

3. Quels algorithmes pouvez-vous utiliser pour résoudre le problème ?

   On peut utiliser le backtrack (avec ou sans ordonnancement)

4. Faites dérouler l'un de ces algorithmes et trouvez une solution. Est-ce la seule ? Expliquez et justifiez.

On pourrait choisir d'utiliser le backtrack avec ordonnancement. On commence donc par compter pour chaque variable le nb de contraintes qui la concernent.
Pour T_1, on a 6 contraintes.
Pour T_2, on a 5 contraintes.
Pour T_3, on a 5 contraintes.
Pour T_4, on a 5 contraintes.
A noter que la propagation de contrainte permettrait de gagner du temps si on faisait du forward checking.

- *une seule valeur possible pour T_2 (à cause de C_2) : voiture*
- *donc voiture devient impossible pour T_1 (à cause de C'_{12})*

Le déroulement du backtrack donnerait (avec l'ordre de sélection suivant sur les valeurs des domaines : avion, puis train, puis voiture :

- *pour T_1 : choix de avion, l'affectation $a = \{(T_1, avion)\}$ et passage à T_2*
- *pour T_2 : choix de voiture (avion et train impossible), l'affectation $a = \{(T_1, avion)$, $(T_2, voiture)\}$ et passage à T_3*
- *pour T_3 : choix de train (avion impossible), l'affectation $a = \{(T_1, avion)$, $(T_2, voiture)$, $(T_3, train)\}$ et passage à T_4*
- *pour T_3 : choix de voiture (avion et train impossible), l'affectation $a = \{(T_1, avion)$, $(T_2, voiture)$, $(T_3, train)$, $(T_4, voiture)\}$ et FIN*

Remarque : ici backtrack inutile
Solution finale : $(T_1, avion), (T_2, voiture), (T_3, train), (T_4, voiture)$
Ce n'est pas la seule solution. On aurait aussi pu avoir par exemple : $(T_1, avion)$, $(T_2, voiture)$, $(T_3, voiture)$, $(T_4, voiture)$. Il y a encore d'autres solutions possibles.