Avant d'entrer dans le vif du sujet ... (1/2)

Qui suis-je ?

Sophie JAN
Bureau 122 – Bâtiment 1R3
05.61.55.76.58
sophie.jan@math.univ-toulouse.fr ou sophie.jan@univ-tlse3.fr

Tout est/sera sur https ://www.stri.fr/

SVP y répondre **rapidement** aux 2 questionnaires

- « Etat des lieux des acquis »
- « Faisons connaissance ... »

Avant d'entrer dans le vif du sujet ... (2/2)

Mode d'évaluation

- (13%) moyenne des notes de **RENDU** des feuilles de préparation
- (87%) Examen terminal prévu le **vendredi 15 octobre 2021, 7h45**, 1h30, programme = TOUT

A faire **avant chaque TD**

Travailler le cours magistral !
Remplir au mieux la feuille de préparation au TD
Rendre cette feuille de préparation en début du TD

- Intérêt pour vous : travailler le cours et vérifier que vous avez assimilé les points essentiels.
- Objectif pour les enseignants : faut-il revenir sur certains points ?
- Ce qui importe : le travail, pas les résultats

CM1 : complexes, polynômes et fractions rationnelles

L3 UPSSITECH

Mercredi 1er septembre 2021

Objectif de cette séance

Savez-vous trouver une primitive de $f : x \to \dfrac{x^4 + 3x^2 + 3}{x^3 + x}$?

Objectif de cette séance

Savez-vous trouver une primitive de $f : x \to \dfrac{x^4 + 3x^2 + 3}{x^3 + x}$?

On saura le faire

- si on sait factoriser le dénominateur $x^3 + x$ en produit de facteurs de la forme $(x - \alpha)$ et $(x^2 + \beta x + \gamma)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Objectif de cette séance

Savez-vous trouver une primitive de $f : x \to \dfrac{x^4+3x^2+3}{x^3+x}$?

On saura le faire

- si on sait factoriser le dénominateur x^3+x en produit de facteurs de la forme $(x-\alpha)$ et $(x^2+\beta x+\gamma)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

  ou éventuellement en produit de facteurs de la forme $(x-z)$ seuls

  étude des polynômes

Objectif de cette séance

Savez-vous trouver une primitive de $f : x \to \dfrac{x^4 + 3x^2 + 3}{x^3 + x}$?

On saura le faire

- si on sait factoriser le dénominateur $x^3 + x$ en produit de facteurs de la forme $(x - \alpha)$ et $(x^2 + \beta x + \gamma)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

  ou éventuellement en produit de facteurs de la forme $(x - z)$ seuls

  étude des polynômes

- le z ci-dessus est éventuellement ... un nombre complexe

  étude des nombres complexes

Objectif de cette séance

Savez-vous trouver une primitive de $f : x \to \dfrac{x^4 + 3x^2 + 3}{x^3 + x}$?

On saura le faire

- si on sait factoriser le dénominateur $x^3 + x$ en produit de facteurs de la forme $(x - \alpha)$ et $(x^2 + \beta x + \gamma)$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

  ou éventuellement en produit de facteurs de la forme $(x - z)$ seuls

  étude des polynômes

- le z ci-dessus est éventuellement ... un nombre complexe

  étude des nombres complexes

- on pourra alors décomposer f en somme de termes facilement intégrables.

  étude des décompositions en éléments simples

NOMBRES COMPLEXES

Equation	Solution(s)	Dans	Nom
$x-5=0$	$x=5$	$\in \mathbb{N}$	Entiers naturels
$x+5=0$	$x=-5$	$\in \mathbb{Z}$	Entiers relatifs
$3x-1=0$	$x=\dfrac{1}{3}$	$\in \mathbb{Q}$	Rationnels
$x^2-5=0$	$x=\sqrt{5}$ et $x=-\sqrt{5}$	$\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	Réels (irrationnels)
$x^2+4=0$	? ? ?	$\in \mathbb{C}$	Complexes

Forme algébrique

Définition

Un ***nombre complexe*** z est un nombre de la forme $z = a + \mathrm{i}b$, avec

- $a, b \in \mathbb{R}$,
- et $i \notin \mathbb{R}$ un nombre vérifiant $i^2 = -1$.

Le réel a est appelé ***partie réelle*** de z, noté $a = Re(z)$
Le réel b est appelé ***partie imaginaire*** de z, noté $b = Im(z)$.

Exemples : $1 + 2i$, $33i$, $-1 - i$, 128, ...

Forme algébrique

Définition

Un ***nombre complexe*** z est un nombre de la forme $z = a + \mathrm{i}b$, avec

- $a, b \in \mathbb{R}$,
- et $i \notin \mathbb{R}$ un nombre vérifiant $i^2 = -1$.

Le réel a est appelé ***partie réelle*** de z, noté $a = Re(z)$
Le réel b est appelé ***partie imaginaire*** de z, noté $b = Im(z)$.

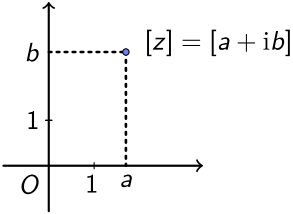
Exemples : $1 + 2i$, $33i$, $-1 - i$, 128, ...

Par définition,

$$z = z' \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}e(z) & = & \mathcal{R}e(z'), \\ \mathcal{I}m(z) & = & \mathcal{I}m(z'). \end{cases}$$

Correspondance avec un unique point dans le plan

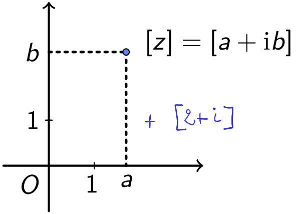
On se donne un plan $\mathcal{P}$ et un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



A tout complexe $z = a + \mathrm{i}b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ correspond un unique point de $\mathcal{P}$ d'abscisse a et d'ordonnée b.

Correspondance avec un unique point dans le plan

On se donne un plan $\mathcal{P}$ et un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



A tout complexe $z = a + \mathrm{i}b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ correspond un unique point de $\mathcal{P}$ d'abscisse a et d'ordonnée b.

Réciproquement, pour tout point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées (a, b), le complexe $z := a + \mathrm{i}b$ est appelé ***affixe de** M*. On note $M = [z]$.

Application directe

Plaçons dans un plan les points d'affixes $1 + 3\mathrm{i}$, $-2 + 3\mathrm{i}$ et $-1 - \mathrm{i}$.

Opérations

Soit $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ et $z' = a' + \mathrm{i}b' \in \mathbb{C}$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$

- ***Addition*** :
  $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$

Opérations

Soit $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ et $z' = a' + \mathrm{i}b' \in \mathbb{C}$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$

- ***Addition*** :

- ***Multiplication*** :

$$zz' = (a+ib)(a'+ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb'$$
$$= aa' + iab' + ia'b - bb'$$
$$= (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Opérations

Soit $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ et $z' = a' + \mathrm{i}b' \in \mathbb{C}$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$

- ***Addition*** :
- ***Multiplication*** :

Active quizz

...

Propriétés de l'addition et de la multiplication

Sur $\mathbb{C}$, les opérations $+$ et $\times$ ont les propriétés suivantes :

- elles sont ***associatives*** : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$,
$$z + (z' + z'') = (z + z') + z'' \qquad \text{et} \qquad z(z'z'') = (zz')z''$$
- elles sont ***commutatives*** : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$,
$$z + z' = z' + z \qquad \text{et} \qquad zz' = z'z$$
- la multiplication est ***distributive*** par rapport à l'addition : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$,
$$z(z' + z'') = zz' + zz''$$

Sur $\mathbb{C}$, les opérations $+$ et $\times$ ont les propriétés suivantes :

- l'***élément neutre pour*** $+$ est $0 := 0 + \mathrm{i}0$: $\forall z \in \mathbb{C}$,
$$z + 0 = z$$
- l'***élément neutre pour*** $\times$ est $1 := 1 + \mathrm{i}0$: $\forall z \in \mathbb{C}$,
$$1 \times z = z$$
- l'***opposé*** de $z := a + \mathrm{i}b$ est $-z = -a - \mathrm{i}b$: $z + (-z) = 0$
- l'***inverse*** de $z \in \mathbb{C}^*$ est $\dfrac{1}{z}$, encore noté z^{-1} : $z \times \dfrac{1}{z} = 1$

Les règles opératoires valables pour les nombres réels le sont aussi pour les nombres complexes.

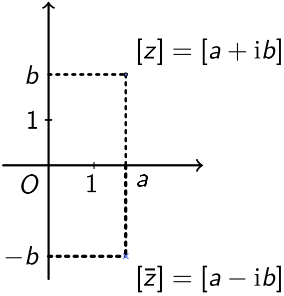
Attention : $\leq$ n'a pas de sens dans $\mathbb{C}$.

- un nombre réel $x \in \mathbb{R}$ peut être vu comme le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}0$. Ainsi, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- un nombre complexe de la forme $z = 0 + \mathrm{i}y$ avec $y \in \mathbb{R}$ est appelé ***imaginaire pur***.

Conjugaison

Définition

Soit $z := a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. On appelle ***conjugué*** de z et on note $\bar{z}$ le nombre complexe $\bar{z} := a - \mathrm{i}b$.



Conjugaison : symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Active quizz

...

Propriétés de la conjugaison

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ et z' des nombres complexes. Alors :

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
4. Si z est non nul, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
5. $a = \mathcal{R}e(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ et $b = \mathcal{I}m(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$
6. z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$
   et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$

Preuves ... (1/3)

1. $\overline{\overline{z}} = z$

2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

Preuves ... (2/3)

3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

4. Si z est non nul, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

Preuves ... (3/3)

Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

5. $a = \mathcal{R}e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $b = \mathcal{I}m(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

$z + \overline{z} = (a + \cancel{ib}) + (a - \cancel{ib}) = 2a$

$z - \overline{z} = (a+ib) - (a-ib) = \cancel{a} + ib - \cancel{a} + ib = 2ib$

6. z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$
   et z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$

Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$z \in \mathbb{R} \iff b = 0 \iff \dfrac{z - \overline{z}}{2i} = 0 \iff z = \overline{z}$

z imag. pur $\iff a = 0 \iff \dfrac{z+\overline{z}}{2} = 0 \iff z = -\overline{z}$

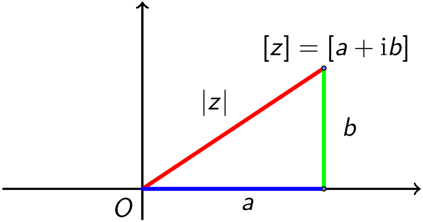
Module

Définition

Soit $z := a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. On appelle ***module de z*** et on note $|z|$ le nombre réel

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pour tout nombre complexe z, $|z|$ est un réel positif.



Propriétés du module

Soient z et z' deux nombres complexes :

1. $|z|^2 = z\overline{z}$
2. $|zz'| = |z||z'|$
3. $|z| = |\overline{z}|$
4. $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$
5. si $z \neq 0$ alors $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Preuves ... (1/3)

1. $|z|^2 = z\overline{z}$

2. $|zz'| = |z||z'|$

Preuves ... (2/3)

3. $|z| = |\overline{z}|$

4. $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$

Preuves ... (3/3)

5. si $z \neq 0$ alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Soit $z \neq 0$

$\left|\frac{1}{z}\right| |z| = \left|\frac{1}{z} \cdot z\right|$ par propriété 2 du module

$= |1| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ par propriété 1 du module

Exercice-méthode (quantité conjuguée et fractions)

1. Calculer $(3+2i)(\overline{3+2i})$.

$$(3+2i)(\overline{3+2i}) = (3+2i)(3-2i)$$
$$= (3^2 - (2i)^2)$$
$$= 9 + 4$$
$$= 13$$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2. En déduire la forme algébrique de $\dfrac{1-i}{3+2i}$.

$$\frac{1-i}{3+2i} = \frac{(1-i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i-3i-2}{13} = \frac{1-5i}{13} = \frac{1}{13} - i\frac{5}{13}$$

Equation	Solution(s)	Dans	Nom
$x - 5 = 0$	$x = 5$	$\in \mathbb{N}$	Entiers naturels
$x + 5 = 0$	$x = -5$	$\in \mathbb{Z}$	Entiers relatifs
$3x - 1 = 0$	$x = \dfrac{1}{3}$	$\in \mathbb{Q}$	Rationnels
$x^2 - 5 = 0$	$x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$	$\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Réels (irrationnels)
$x^2 + 4 = 0$	$2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$	$\in \mathbb{C}$	Complexes

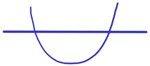
Equation	Solution(s)	Dans	Nom
$x - 5 = 0$	$x = 5$	$\in \mathbb{N}$	Entiers naturels
$x + 5 = 0$	$x = -5$	$\in \mathbb{Z}$	Entiers relatifs
$3x - 1 = 0$	$x = \dfrac{1}{3}$	$\in \mathbb{Q}$	Rationnels
$x^2 - 5 = 0$	$x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$	$\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	Réels (irrationnels)
$x^2 + 4 = 0$	$2\mathrm{i}$ et $-2\mathrm{i}$	$\in \mathbb{C}$	Complexes

Exercice-méthode

Résolvons graphiquement et algébriquement

- $x^2 + x - 2 = 0$;
- $x^2 + 6x + 9 = 0$;
- $x^2 + 2x + 2 = 0$.

Résolution de $x^2 + x - 2 = 0$

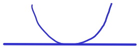


$$\Delta = 1^2 - 4(1)(-2) = 9 > 0$$

donc 2 racines réelles

$$x_{\pm} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Résolution de $x^2 + 6x + 9 = 0$

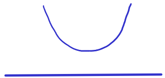


$\Delta = 6^2 - 4(1)(9) = 0$

donc 1 seule racine réelle double

$$x = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$$

Résolution de $x^2 + 2x + 2 = 0$



$\Delta = 2^2 - 4(1)(2) = -4 < 0$

donc pas de racines réelles

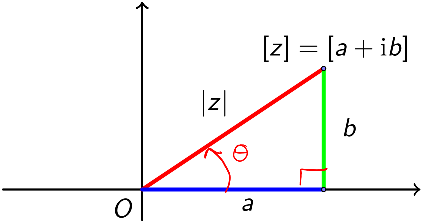
mais deux racines complexes conjuguées

$$x_{\pm} = \frac{-2 \pm i\sqrt{|-4|}}{2} = -1 \pm i$$

Argument, formes trigonométrique et exponentielle

Avec les notations de la figure, il existe un unique angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$a = |z|\cos(\theta) \quad \text{et} \quad b = |z|\sin(\theta).$$



Cet unique angle est appelé ***argument de z*** et noté $\mathrm{Arg}(z)$.

- ***Forme trigonométrique de z*** : $z = |z|\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$,
- ***Forme exponentielle ou polaire*** : $z = |z|e^{i\theta}$.

Exercice-méthode sur la forme exponentielle

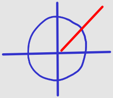
On considère $Z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

- Quel est le module de Z ?

$$|Z| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2 \Rightarrow Z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- Quel est l'argument de Z ?

On cherche $\theta \in [0, 2\pi[$ t.q $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

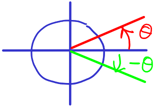


donc $\theta = \frac{\pi}{4}$

- En déduire la forme exponentielle de Z.

$$Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Propriétés de la forme exponentielle (1/2)



Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{(\cos\theta + i\sin\theta)} = \cos\theta - i\sin\theta$$
$$= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$
$$= e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$$

- ***Formules d'Euler*** : $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

  utiles pour intégrer des puissances de cos *ou* sin

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + \cancel{i\sin\theta}) + (\cos\theta - \cancel{i\sin\theta}) = 2\cos\theta$$

Propriétés de la forme exponentielle (2/2)

$a^b a^c = a^{b+c}$

Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- Grâce aux formules de trigonométrie, $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
- Conséquence avec $\theta' = -\theta$, on a $\left(e^{i\theta}\right)^{-1} = e^{-i\theta}$

$(a^b)^c = a^{bc}$

- ***Formule de Moivre*** :
  $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$.
  utile pour calculer des valeurs exactes de $\cos(\theta)$ *et* $\sin(\theta)$ *pour des valeurs de* θ *"exotiques"*

Egalité de deux complexes sous forme exponentielle

Important

Soient r, $r' > 0$ deux réels strictement positifs et α, $\beta \in \mathbb{R}$.
Si $re^{i\alpha} = r'e^{i\beta}$, alors $r = r'$ et $\alpha \equiv \beta \ [2\pi]$.

Egalité de deux complexes sous forme exponentielle

Important

Soient r, $r' > 0$ deux réels strictement positifs et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Si $re^{i\alpha} = r'e^{i\beta}$, alors $r = r'$ et $\alpha \equiv \beta \quad [2\pi]$.

Exercice-méthode

Cherchons toutes les solutions de $z^4 = 81i$

* $81i$ sous forme exponentielle :

$$81i = 81e^{i\pi/2}$$

* On cherche z sous la forme $re^{i\alpha}$

alors $z^4 = (re^{i\alpha})^4 = r^4 e^{i4\alpha}$

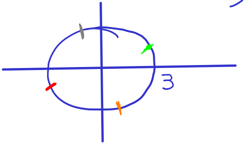
* $r^4 e^{i4\alpha} = 81 e^{i\pi/2} \Longrightarrow \begin{cases} r^4 = 81 & \text{(eq. en modules)} \\ 4\alpha = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] & \text{(eq. en arg)} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} r^4 = 81 \\ r > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad r = 3$$

$$4\alpha = \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \iff \alpha = \frac{\pi}{8} \ \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

Toutes les sol. de $z^4 = 81i$ sont dans

$$\left\{ 3e^{i\pi/8} , 3e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)} , 3e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)} , 3e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}\right)} \right\}$$



POLYNÔMES

Vous avez dit polynôme ?

Définition

Un ***polynôme*** à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une expression de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Les a_i sont appelés les ***coefficients*** du polynôme P.

X est l'***indéterminée*** du polynôme P.

Vous avez dit polynôme ?

Définition

Un ***polynôme*** à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une expression de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Les a_i sont appelés les ***coefficients*** du polynôme P.

X est l'***indéterminée*** du polynôme P.

Définition

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[X]$.

Degré d'un polynôme

Définition

On considère $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.$$

Si $a_n \neq 0$, alors

- n est le ***degré*** de P.
- le terme $a_n X^n$ est le ***terme dominant*** de P
- a_n est le ***coefficient dominant*** de P.

On note $\deg(P) = n$.

Quelques polynômes particuliers

On dit que $P \in \mathbb{R}[X]$ est

- le ***polynôme nul*** si tous ses coefficients sont nuls. Il est noté $P = 0$,
- un ***polynôme constant*** si tous ses coefficients sont nuls, sauf éventuellement a_0
- un ***monôme*** si un seul des coefficients a_i est non nul, par exemple

$$P(X) = 3X, \quad P(X) = X^5, \quad P(X) = \frac{1}{2}X^3, \quad \ldots$$

- ***unitaire*** si son coefficient dominant vaut 1.

Quelques polynômes particuliers

On dit que $P \in \mathbb{R}[X]$ est

- le ***polynôme nul*** si tous ses coefficients sont nuls. Il est noté $P = 0$,
- un ***polynôme constant*** si tous ses coefficients sont nuls, sauf éventuellement a_0
- un ***monôme*** si un seul des coefficients a_i est non nul, par exemple

$$P(X) = 3X, \quad P(X) = X^5, \quad P(X) = \frac{1}{2}X^3, \quad \dots$$

- ***unitaire*** si son coefficient dominant vaut 1.

Complément sur le degré

- Le polynôme nul est de degré $-\infty$
- Les polynômes de degré 0 sont les polynômes constants **non nuls** :

$$P(X) = a_0, \text{ avec } a_0 \neq 0.$$

Un exemple

$P(X) = 5X^5 + \pi X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \sqrt{2}$ est un polynôme de **degré** 5, constitué de 4 **monômes**.

- Son **terme dominant** est $5X^5$.
- Son **coefficient dominant** est 5, donc P n'est pas **unitaire**.

Somme de deux polynômes et degré

Active quizz

...

Somme de deux polynômes et degré

Active quizz

...

Propriété

$$\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

Il n'y a pas forcément égalité !

Produit de deux polynômes et degré

Active quizz

...

Produit de deux polynômes et degré

Active quizz

...

Propriété

$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$$

Intégrité

Proposition

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$PQ = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

Remarques :

- On dit que $\mathbb{R}[X]$ est ***intègre***.
- Le produit de deux fonctions quelconques peut être nul sans qu'aucune des deux ne le soit !

Division euclidienne

Théorème : Division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$

Soient $N, D \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes, avec $D \neq 0$.
Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$N = DQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(D).$$

On dit que Q et R sont respectivement le ***quotient*** et le ***reste*** de la division euclidienne de N par D.

Exercice-méthode

Effectuons la division euclidienne de $N(X) = X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 7X - 3$ par $D(X) = X^2 + 1$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +7X^3 & -2X^2 & +7X & -3 & X^2+1 \\
\cline{6-6}
-(X^4 & & +X^2) & & & X^2+7X-3 \\
\hline
 & 7X^3 & -3X^2 & +7X & -3 & \\
 & -(7X^3 & & +7X) & & \\
\hline
 & & -3X^2 & & -3 & \\
 & & -(-3X^2 & & -3) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Racines

Définition

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.
On dit qu'un nombre $r \in \mathbb{R}$ est une ***racine*** de P si $P(r) = 0$.

Racines

Définition

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.
On dit qu'un nombre $r \in \mathbb{R}$ est une ***racine*** de P si $P(r) = 0$.

Théorème

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $r \in \mathbb{R}$.
r racine de $P \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X]$, polynôme, tel que $P(X) = (X - r)Q(X)$.

Théorème

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $r \in \mathbb{R}$.
r racine de $P \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X]$, polynôme, tel que $P(X) = (X - r)Q(X)$.

Preuve ...

Notion de multiplicité

Considérons les polynômes

$$\begin{aligned} P(X) &= X - 1, \\ Q(X) &= X^2 - 2X + 1. \end{aligned}$$

Donner les racines de P et Q.

Notion de multiplicité

Considérons les polynômes

$$\begin{aligned} P(X) &= X - 1, \\ Q(X) &= X^2 - 2X + 1. \end{aligned}$$

Donner les racines de P et Q.

P et Q ont tous les deux une seule racine : $r = 1$

$$Q(X) = (X - 1)^2$$

Notion de multiplicité

Considérons les polynômes

$$\begin{aligned} P(X) &= X - 1, \\ Q(X) &= X^2 - 2X + 1. \end{aligned}$$

Donner les racines de P et Q.

P et Q ont tous les deux une seule racine : $r = 1$

$$Q(X) = (X - 1)^2$$

Mais intuitivement, on a envie de dire que :

- 1 est *une seule fois* racine de P,
- 1 est *deux fois* racine de Q.

On formalise cette intuition avec la notion de ***multiplicité***.

Notion de multiplicité

Définition

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et r une racine de P.
La ***multiplicité*** (ou ***ordre***) de r est l'entier m tel qu'il existe trois polynômes $Q(X)$, $\tilde{Q}(X)$, $R(X)$ avec

- $P(X) = (X - r)^m Q(X)$
- et $P(X) = (X - r)^{m+1} \tilde{Q}(X) + R(X)$ avec R non nul.

Notion de multiplicité

Définition

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et r une racine de P.
La ***multiplicité*** (ou ***ordre***) de r est l'entier m tel qu'il existe trois polynômes $Q(X)$, $\tilde{Q}(X)$, $R(X)$ avec

- $P(X) = (X-r)^m Q(X)$
- et $P(X) = (X-r)^{m+1}\tilde{Q}(X) + R(X)$ avec R non nul.

En pratique

- Si $P(X) = (X-r)^m Q(X)$, alors
  r est une racine de P d'ordre **au moins** m ;
- Si $P(X) = (X-r)^m Q(X)$ et $Q(r) \neq 0$, alors
  r est une racine de P d'ordre **exactement** m.

Notion de multiplicité

- 1 est *racine d'ordre* 1 de $P(X) = X - 1$,
- 1 est *racine d'ordre* 2 de $Q(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

Définition

On appelle

- ***racine simple*** une racine d'ordre 1
- ***racine multiple*** une racine d'ordre 2 ou plus

Notion de multiplicité

- 1 est *racine d'ordre* 1 de $P(X) = X - 1$,
- 1 est *racine d'ordre* 2 de $Q(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

Définition

On appelle

- ***racine simple*** une racine d'ordre 1
- ***racine multiple*** une racine d'ordre 2 ou plus

Active quizz

...

$X^3 + X^2 - X - 1 = (X+1)(X^2 - 1)$

$= (X+1)(X-1)(X+1)$

$= (X+1)^{2}(X-1)$

$((-1)-1) \neq 0$ Ordre 2

FRACTIONS RATIONNELLES

Introduction aux fractions rationnelles

Définition

Une ***fraction rationnelle*** à coefficients dans $\mathbb{R}$ est une expression de la forme

$$F = \frac{N}{D} \quad \text{avec} \quad N, D \in \mathbb{R}[X] \text{ et } D \neq 0.$$

Par analogie avec les fractions,

- N est le ***numérateur*** de F
- D est le ***dénominateur*** de F

On note $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Egalité entre deux fractions rationnelles

Définition

Deux fractions rationnelles $\frac{N_1}{D_1}$ et $\frac{N_2}{D_2}$ sont dites ***égales*** si

$$N_1\, D_2 = N_2\, D_1.$$

On dit alors que $\frac{N_1}{D_1}$ et $\frac{N_2}{D_2}$ sont deux ***représentants*** de la même fraction rationnelle F.

Exemple

$\frac{1}{X-1}$ et $\frac{X}{X^2-X}$ représentent la même fraction rationnelle.

Opérations sur les fractions rationnelles

Définition

Si $F_1 = \dfrac{N_1}{D_1}$ et $F_2 = \dfrac{N_2}{D_2}$ sont deux fractions rationnelles,

- la ***somme*** de F_1 et F_2 est définie par

$$F_1 + F_2 = \frac{N_1\,D_2 + N_2\,D_1}{D_1\,D_2};$$

- le ***produit*** de F_1 et F_2 est défini par

$$F_1 F_2 = \frac{N_1\,N_2}{D_1\,D_2}.$$

On peut vérifier que ces opérations ne dépendent pas des représentants choisis pour F_1 et F_2

Forme irréductible

Proposition

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle.

Il existe un unique représentant $\dfrac{N_0}{D_0}$ de F tel que

1. N_0 et D_0 n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$;
2. D_0 est unitaire (c.a.d. son coefficient dominant vaut 1).

On dit que le représentant $\dfrac{N_0}{D_0}$ est ***LA forme irréductible*** de F

Degré d'une fraction rationnelle

Proposition et définition

Si F est une fraction rationnelle, alors le nombre

$$\deg(F) := \deg(N) - \deg(D).$$

ne dépend pas du représentant $\frac{N}{D}$ choisi pour F

On l'appelle le ***degré*** de la fraction rationnelle F.

Remarque

Ce nombre peut éventuellement valoir $-\infty$ si $N = 0$.

Décomposition en éléments simples : principe et intérêt

Exemple

Comment trouver une primitive de

$$x \to \frac{x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x + 1}{(x-3)(x+1)} \quad ?$$

En l'écrivant sous la forme (objet de la D.E.S.)

$$(x^2 + 3x) + \frac{\frac{1}{4}}{x-3} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1}.$$

Intérêt : les primitives sont alors de la forme

$$x \to \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right) + \frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \text{constante}$$

Décomposition en éléments simples - méthode

1. Mettre la fraction considérée $F = \dfrac{N}{D}$ sous forme irréductible
2. Calculer le degré $d = \deg(F)$
3. Si $d \geq 0$, effectuer une division euclidienne de N par D pour trouver la partie entière de la D.E.S.
4. Factoriser le dénominateur D
5. En déduire la forme de la D.E.S.
6. Déterminer les coefficients de cette D.E.S.
7. Réunir tous les éléments pour conclure

Décomposition en éléments simples - forme dans $\mathbb{C}$ (version simple)

Pour décomposer une fraction rationnelle $\dfrac{N}{D}$ dans $\mathbb{C}$, on commence par factoriser le dénominateur D dans $\mathbb{C}$.

On obtient alors des facteurs irréductibles du type

$$(X - z) \text{ avec } z \in \mathbb{C}.$$

Ils induisent un terme dans la D.E.S. du type

$$\frac{a_1}{(X - z)} \text{ avec } a_1 \in \mathbb{C} \text{ à déterminer.}$$

Décomposition en éléments simples - forme dans $\mathbb{R}$ (version simple)

Pour décomposer une fraction rationnelle $\dfrac{N}{D}$ dans $\mathbb{R}$, on commence par factoriser le dénominateur D dans $\mathbb{R}$.

On obtient alors deux types de facteurs irréductibles :

- ceux du type $(X-\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ qui induisent un terme dans la D.E.S. du type
$$\frac{a_1}{(X-\alpha)};$$
- ceux du type $(X^2+\beta X+\gamma)$, avec $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\beta^2-4\gamma<0$ qui induisent un terme dans la D.E.S. du type
$$\frac{b_1 X + c_1}{(X^2+\beta X+\gamma)}.$$

avec $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$ qui sont à déterminer.

Méthode pratique de la D.E.S. - premier exemple

Exercice-méthode

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^4 + X^3 - 9X^2 - 9X + 1}{(X-3)(X+1)}$$

$\deg F = 2 \geq 0 \Rightarrow$ à faire div. euclid.

$$(X^4 + X^3 - 9X^2 - 9X + 1) = (X-3)(X+1)Q(X) + \underbrace{R(X)}_{\deg < 2}$$

$$F = \frac{(X-3)(X+1)Q(X) + R(X)}{(X-3)(X+1)} = Q(X) + \frac{R(X)}{(X-3)(X+1)}$$

$$= Q(X) + \frac{a}{X-3} + \frac{b}{X+1}$$

Méthode pratique de la D.E.S. - deuxième exemple

Exercice-méthode

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^4 + 3X^2 + 3}{X^3 + X}$$

Et s'il y a des puissances ?

Si la factorisation du dénominateur D comporte des puissances ?

- un facteur irréductible $(X-z)^{k}$ dans D donne dans la D.E.S.

$$\frac{a_1}{(X-z)^{1}} + \frac{a_2}{(X-z)^{2}} + \cdots + \frac{a_k}{(X-z)^{k}},$$

avec pour tout i

- $a_i \in \mathbb{R}$ si $z \in \mathbb{R}$
- $a_i \in \mathbb{C}$ si $z \in \mathbb{C}$.

1. $\beta^2 - 4\gamma < 0$

Et s'il y a des puissances ?

Si la factorisation du dénominateur D comporte des puissances ?

- un facteur irréductible $(X-z)^{k}$ dans D donne dans la D.E.S.

$$\frac{a_1}{(X-z)^{1}} + \frac{a_2}{(X-z)^{2}} + \cdots + \frac{a_k}{(X-z)^{k}},$$

  avec pour tout i
  - $a_i \in \mathbb{R}$ si $z \in \mathbb{R}$
  - $a_i \in \mathbb{C}$ si $z \in \mathbb{C}$.

- un facteur irréductible[1] $(X^2+\beta X+\gamma)^{m}$ donne dans la D.E.S.

$$\frac{b_1 X + c_1}{(X^2+\beta X+\gamma)^{1}} + \frac{b_2 X + c_2}{(X^2+\beta X+\gamma)^{2}} + \cdots + \frac{b_m X + c_m}{(X^2+\beta X+\gamma)^{m}},$$

  avec $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ pour tout i.

1. $\beta^2 - 4\gamma < 0$

Méthode pratique de la D.E.S. - troisième exemple

Exercice-méthode

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F = \frac{2X+1}{(X+1)^2(X+2)}$$

Point de vocabulaire

- On appelle ***éléments de première espèce*** les fractions rationnelles de la forme
$$\frac{a}{(X-z)^k}$$
pour $a, z \in \mathbb{R}$;
- On appelle ***éléments de seconde espèce*** les fractions rationnelles de la forme
$$\frac{bX+c}{(X^2+\beta X+\gamma)^m}$$
pour $b, c, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Point de vocabulaire

- On appelle ***éléments de première espèce*** les fractions rationnelles de la forme
$$\frac{a}{(X-z)^k}$$
pour $a, z \in \mathbb{R}$;
- On appelle ***éléments de seconde espèce*** les fractions rationnelles de la forme
$$\frac{bX+c}{(X^2+\beta X+\gamma)^m}$$
pour $b, c, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Active quizz

...

Petit point

- Prochain amphi : mardi 7 septembre, 10h (échange avec K. Isoird)
- Distribution feuilles de TD (1+ sa préparation)
- Feuille de préparation au TD 1 à rendre au début du TD1.