CM2 : Intégrales

L3 UPSSITECH

Mardi 7 septembre 2021

Objectifs de cette séance

- savoir calculer des primitives/intégrales
  - par reconnaissance de forme
  - via une décomposition en éléments simples
  - par intégration par parties
  - par changement de variable
- acquérir quelques notions sur les intégrales généralisées
  - savoir quand une intégrale est généralisée
  - savoir étudier la convergence d'une intégrale généralisée
    - par comparaison à une autre intégrale
    - en revenant à la définition

INTÉGRALES et PRIMITIVES

Primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$\int f(x)dx$	valable pour $x \in ...$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x^\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Primitives des fonctions usuelles (suite)

$f(x)$	$\int f(x)dx$	valable pour $x \in \ldots$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$
$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{argsinh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{argcosh}(x)$	$]1,\infty[$

Intégration par parties

C'est la conséquence directe de la formule de dérivation d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Théorème : formule d'intégration par parties

Soit deux fonctions u, v dérivables sur $[a, b]$ et de dérivées continues sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

On choisit donc u' et v de telle sorte que la fonction uv' soit plus simple à intégrer que la fonction $u'v$

Choix de u et v

Rappel :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

En règle générale, :

- Pour u', on choisit des fonctions qui ne deviennent pas plus compliquées quand on les intègre. Ex. : exp, sin, cos, sinh, cosh
- Pour v, on choisit des fonctions qui deviennent plus simples quand on les dérive. Ex. : les fonctions polynomiales, ln

Active Quizz

...

Active Quizz

...

Exercice-méthode : IPP

Calculons $\displaystyle\int_1^e \ln(t)\, dt$.

Changement de variable

C'est la conséquence de la formule de dérivation d'une fonction composée : si F est une primitive de f, on a

$$(F \circ u)' = (F' \circ u)u' = (f \circ u)u'.$$

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et $u : J \to I$ une fonction dérivable, dont la dérivée u' est continue. Soient a et b dans J, alors on a

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx.$$

Démarche :

1. on pose $x = u(t)$,
2. on en déduit $dx = u'(t)dt$,
3. on adapte les bornes : si $t = a$, alors $x = u(a)$ et si $t = b$, alors $x = u(b)$.

Exercice-méthode : changement de variable

Effectuer le changement de variable $x = 2t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 f(2t)\mathrm{d}t$.

Exercice-méthode : changement de variable

Effectuer le changement de variable $x = \sin t$ dans l'intégrale $\int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\mathrm{dx}$.

Primitives des fractions rationnelles

Après une D.E.S. dans $\mathbb{R}(X)$, les éléments suivants peuvent apparaitre :

- les éléments de première espèce :
  - $\dfrac{a}{x-z}$
  - $\dfrac{a}{(x-z)^k}$
- les éléments de deuxième espèce :
  - $\dfrac{bx+c}{x^2+\beta x+\gamma}$
  - $\dfrac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}$

avec k, m entiers ≥ 2, $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Il s'agit donc de savoir les intégrer ...

Proposition. Elements de première espèce

- Les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{x-z}$ sont

$$x \longmapsto \ln(|x-z|) + C.$$

- Pour $k \geq 2$, les primitives de $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-z)^k}$ sont

$$x \longmapsto \frac{1}{-k+1} \frac{1}{(x-z)^{k-1}} + C.$$

Exercice-méthode : intégration via une D.E.S.

Calculons les primitives de $\dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Pour les éléments de deuxième espèce du type $\dfrac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\beta^2 - 4\gamma < 0$, on a deux résultats :

Proposition. Elements de deuxième espèce - 1

On suppose que $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

- Les primitives de $x \longmapsto \dfrac{2x+\beta}{x^2+\beta x+\gamma}$ sont
$$x \longmapsto \ln(x^2+\beta x+\gamma) + C.$$
- Pour $m \geq 2$, les primitives de $x \longmapsto \dfrac{2x+\beta}{(x^2+\beta x+\gamma)^m}$ sont
$$x \longmapsto -\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{m-1}} + C.$$

Proposition. Elements de deuxième espèce - 2

- Les primitives de $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ sont
$$t \longmapsto \arctan(t) + C.$$
- Pour $m \geq 2$, les primitives de $t \longmapsto \dfrac{1}{(t^2+1)^m}$ peuvent être calculées par intégrations par parties successives (en primitivant 1).

Exercice-méthode : intégration par D.E.S.

Calculons $\displaystyle\int_1^3 \frac{3x+1}{x^2-6x+13}dx$.

INTRODUCTION aux INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

Rappel : si a et b sont deux réels, pour toute fonction f continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est finie.

Quand parle-t-on d'intégrale généralisée ?

- lorsque l'intervalle d'intégration est non borné
- et/ou lorsque la fonction à intégrer est non bornée sur l'intervalle d'intégration

Exemples

$$\int_0^{\infty} \cos(t)dt, \quad \int_0^1 \ln(t)dt, \quad \int_0^{\infty} \ln(t)dt$$

Convergence d'une intégrale généralisée

Définition

- Soit f une fonction continue sur $[a, \infty)$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ est ***convergente*** si

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^x f(t)\,dt \quad \textbf{\textit{existe et est finie.}}$$

- Soit f une fonction continue sur $]a, b]$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^{b} f(t)\,dt$ est ***convergente*** lorsque la limite

$$\lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,dt \quad \textbf{\textit{existe et est finie.}}$$

Si les limites ci-dessus ne sont pas finies, on dit que l'intégrale généralisée est ***divergente***.

Exercice-méthode : étude de la convergence par la définition

L'intégrale $\int_0^{\infty} e^t \, dt$ est-elle convergente ?

Exercice-méthode : étude de la convergence par la définition

L'intégrale $\int_0^e \ln(t)\,dt$ est-elle convergente ?

Active Quizz

...

Notion de convergence absolue

Théorème et définition de convergence absolue

- Si l'intégrale généralisée $\int_a^{\infty} |f(t)|\,dt$ ***est convergente*** alors l'intégrale généralisée $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ est aussi convergente.

  Nous dirons dans ce cas que $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ est ***absolument convergente***.

- Si l'intégrale généralisée $\int_a^{b} |f(t)|\,dt$ ***est convergente*** alors l'intégrale généralisée $\int_a^{b} f(t)\,dt$ est aussi convergente.

  Nous dirons dans ce cas que $\int_a^{b} f(t)\,dt$ est ***absolument convergente***.

Théorèmes de comparaison des fonctions positives

Théorème de comparaison 1

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, \infty)$ et vérifiant

$$0 \leq f(t) \leq g(t) \quad \text{pour tout } t \in [a, \infty).$$

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^\infty g(t)\,dt$ est convergente alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\,dt$ est aussi convergente.

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\,dt$ est divergente, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^\infty g(t)\,dt$ est aussi divergente.

Théorème de comparaison 2

Soient f et g deux fonctions continues sur $]a, b]$ et vérifiant

$$0 \leq f(t) \leq g(t) \quad \text{pour tout } t \in]a, b].$$

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est aussi convergente.

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ est aussi divergente.

Exercice-méthode : étude de la convergence par comparaison

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \cos(t)e^{t}\,dt$.

Des intégrales repères

Proposition 1

$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\, dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve ...

Exercice-méthode

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$.

Proposition 2

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Preuve ...

Exercice-méthode

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.

Petit point

- Prochain amphi : demain, mercredi 8 septembre, 7h45

- Distribution feuille de préparation au TD2,
  à rendre au début du TD2