TD2-Cinématique

1 Exercice 1 : Mouvement à accélération centrale

1. Il va falloir dériver l'ensemble et vérifier que $\vec{a} = 0$

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R \wedge \vec{V}_{M,R} + \overrightarrow{OM} \wedge \left(\frac{d(\vec{V}_{M,R})}{dt}\right) = \vec{V}_{M,R} \wedge \vec{V}_{M,R} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}_{M,R} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

$\vec{V}_{M,R} \wedge \vec{V}_{M,R} = \vec{0}$ car les vecteurs sont colinéaires
$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a}_{M,R} = \vec{0}$ car donné dans le sujet

Ainsi on peut dire que : $\vec{U} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_{M,R}$ est constant

2. Donnez l'expression du moment cinétique de M par rapport au point O

Info : C'est quoi le moment cinétique ?

$$\boxed{\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}_{M,R}}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_{M,R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = r\overrightarrow{e_r} + r\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_R}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_{R'} + \Omega_{R',R} \wedge \overrightarrow{e_r} = \dot{\alpha}\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_r} = \dot{\alpha}\overrightarrow{e_\alpha}$$

$$\xRightarrow{donc} \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\left(\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}\right)_R = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\alpha\overrightarrow{e_\alpha}$$

$$\xRightarrow{donc} \overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V_{M,R}} = r\overrightarrow{e_r} \wedge m(\dot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{\alpha}\overrightarrow{e_\alpha}) = r\overrightarrow{e_r} \wedge m\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\overrightarrow{e_r} \wedge mr\dot{\alpha}\overrightarrow{e_\alpha}$$

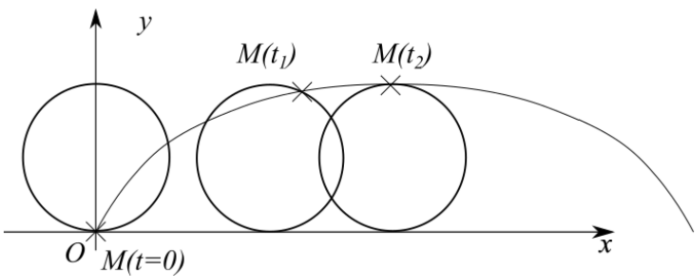
$$\xRightarrow{comme\ r\overrightarrow{e_r} \wedge m\dot{r}\overrightarrow{e_r} = \vec{0}} \overrightarrow{M_C} = mr^2\dot{\alpha}\overrightarrow{e_2}$$

3. On sait que le moment cinétique $\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{cste} = mr^2\dot{\alpha}\overrightarrow{e_2}$ donc :

(…)

2 Exercice 2 : La cycloïde

La courbe cycloïde correspond à la trajectoire de la valve d'une roue de vélo.

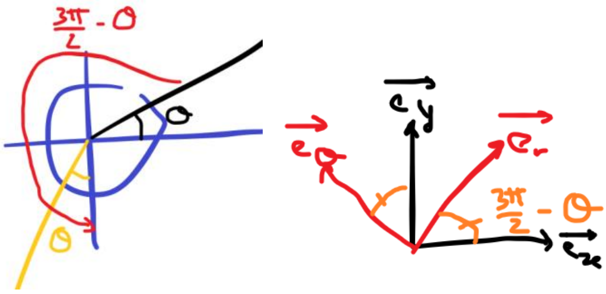


Nous avons donc un point M qui est situé en O pour $t = 0$. La roue avance sans frottement le long de l'axe $\vec{x}$. On notera r le rayon de la roue.

1. Déterminer l'expression de la position du point M dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y})$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$$

On change de méthode : (voir photo du 12/10/2022 plus d'info avec des graphiques)



$$\overrightarrow{e_r} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\overrightarrow{e_x} + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)\overrightarrow{e_y}$$
$$= -\sin(\theta)\,\overrightarrow{e_x} - \cos(\theta)\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\theta\overrightarrow{e_x} + r\overrightarrow{e_y} + r\left(-\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} - \cos\theta\,\overrightarrow{e_y}\right)$$
$$= r(\theta - \sin\theta)\overrightarrow{e_x} + r(r - \cos\theta)\overrightarrow{e_y}$$

2. Donner la vitesse du point M dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y})$

On calcule $\overrightarrow{V_{M,R}}$

$$\overrightarrow{V_{M,R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = r\left(\dot{\theta} - \dot{\theta}\cos\theta\right)\overrightarrow{e_x} + r\left(\dot{\theta}\sin\theta\right)\overrightarrow{e_y}$$

3. Calculez l'expression de l'accélération du point M dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y})$

On calcule $\overrightarrow{a_{M,R}}$

$$\overrightarrow{a_{M,R}} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{M,R}}}{dt}\right)_R = r\left(\ddot{\theta} - \ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta\right)\overrightarrow{e_x} + r\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right)\overrightarrow{e_y}$$

3 Exercice 3 : Manège

1. Donnez l'expression du vecteur position et la vitesse du point A dans le repère $R_2(C, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2})$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}\overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{CA}\overrightarrow{y_2} = l\overrightarrow{x_2}$$

Comme la longueur l ne varie pas en fonction du temps. Alors $\dot{l} = 0$ et $\left(\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_{R_2} = \vec{0}$, ainsi :

$$\overrightarrow{V_{A,R_2}} = \left(\frac{d\overrightarrow{CA}}{dt}\right)_{R_2} = \dot{l}\overrightarrow{x_2} + l\left(\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt}\right)_{R_2} = \vec{0}$$

2. Donnez l'expression du vecteur position et la vitesse du point A dans le repère $R_1(C, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1})$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} = r\overrightarrow{x_1} + l\overrightarrow{x_2} = r\overrightarrow{x_1} + l(\cos\phi\,\overrightarrow{x_1} + \sin\phi\,\overrightarrow{y_1})$$

$$\overrightarrow{V_{A,R_1}} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_2} = l(-\phi\sin\phi\,\overrightarrow{x_1} + \phi\cos\phi\,\overrightarrow{y_1})$$

3. Donnez l'expression du vecteur position et la vitesse du point A dans le repère $R(C, \vec{x}, \vec{y})$

$$\overrightarrow{x_1} = \cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}$$
$$\overrightarrow{y_1} = \cos\theta\,\vec{y} - \sin\theta\,\vec{x}$$

$$\overrightarrow{OA} = (r + l\cos\phi)(\cos\theta\,\vec{x} + \sin\theta\,\vec{y}) + l\sin\phi\,(\cos\theta\,\vec{y} - \sin\theta\,\vec{x})$$

$$\vec{V}_{A,R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d(r\overrightarrow{x_1})}{dt}\right)_R + \left(\frac{d(l\overrightarrow{x_2})}{dt}\right)_R = \dot{\theta}r\theta\overrightarrow{y_1} + l(\theta + \phi)\overrightarrow{y_2}$$

$$\left(\frac{d(r\overrightarrow{x_1})}{dt}\right)_R = \left(\frac{d(\overrightarrow{x_1})}{dt}\right)_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1,R}} \wedge \overrightarrow{x_1} \xRightarrow{\left(\frac{d(\overrightarrow{x_1})}{dt}\right)_{R_1} = \vec{0}} \dot{\theta}\overrightarrow{y_1}$$

$$\left(\frac{d(r\overrightarrow{x_2})}{dt}\right)_R = \left(\frac{d(\overrightarrow{x_2})}{dt}\right)_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2,R}} \wedge \overrightarrow{x_2} \xRightarrow{\left(\frac{d(\overrightarrow{x_2})}{dt}\right)_{R_2} = \vec{0}} (\dot{\theta} + \dot{\phi})\overrightarrow{y_2}$$