[Annale TdS]

Exercice n°1

$h(t) = \frac{1}{T_0} \mathbb{1}_{[0,T_0[}(t) = \begin{cases} 1/T_0 \text{ si } t \in [0,T_0[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1) filtre stable si $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$

ici $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_0^{T_0} \frac{1}{T_0} = 1 < +\infty \rightarrow \boxed{\text{stable}}$

2) $s(t) = e(t) * h(t)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e(t-\tau) d\tau = \int_0^{T_0} h(\tau) e(t-\tau) d\tau$

$= \int_0^{T_0} \frac{1}{T_0} e(t-\tau) d\tau = \boxed{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e(t-\tau) d\tau}$

on intègre sur $[0, T_0[$ et ensuite on divise par T_0 → on [effectue la moyenne.]

3) $s(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A \cos(2\pi n f_0 (t-\tau) + \phi) d\tau$

$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{e^{2j\pi n f_0 (t-\tau)} e^{j\phi} + e^{-2j\pi n f_0 (t-\tau)} e^{j\phi}}{2} d\tau$

$= \frac{A}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{e^{-2j\pi n f_0 \tau} e^{j\phi} e^{2j\pi n f_0 t} + e^{j\phi} e^{-2j\pi n f_0 t} e^{2j\pi n f_0 \tau}}{2} d\tau$

$= \frac{A}{2T_0} \left[e^{+2j\pi n f_0 t} e^{j\phi} \int_0^{T_0} e^{-2j\pi n f_0 \tau} d\tau + e^{-2j\pi n f_0 t} e^{j\phi} \int_0^{T_0} e^{+2j\pi n f_0 \tau} d\tau \right.$

$= \frac{A}{2T_0} e^{2j\pi n f_0 t} e^{j\phi} \left[\frac{e^{-2j\pi n f_0 \tau}}{-2j\pi n f_0} \right]_0^{T_0} + \frac{A}{2T_0} \left[\frac{e^{2j\pi n f_0 \tau}}{+2j\pi n f_0} \right]_0^{T_0} e^{-2j\pi n f_0 t} e^{j\phi}$

$= \frac{A e^{2j\pi n f_0 t} e^{j\phi}}{-4T_0 j\pi n f_0} \left[e^{-2j\pi n f_0 T_0} - 1 \right] + \frac{A e^{-2j\pi n f_0 t} e^{j\phi}}{4T_0 j\pi n f_0} \left[e^{2j\pi n f_0 T_0} - 1 \right]$

$= \frac{A e^{j\phi}}{4T_0 j\pi n f_0} \left[-e^{2j\pi n f_0 t + \phi} \left(e^{-2j\pi n f_0 T_0} - 1 \right) + e^{-2j\pi n f_0 t + \phi} \left(e^{2j\pi n f_0 T_0} - 1 \right) \right]$

$= \frac{A}{4T_0 j\pi n f_0} \left(\left[-e^{2j\pi n f_0 (t-T_0) + \phi} + e^{2j\pi n f_0 t + \phi} \right] + \left[e^{-2j\pi n f_0 (t-T_0) + \phi} - e^{2j\pi n f_0 t + \phi} \right] \right.$

sachant que $f_0 = \frac{1}{T_0}$ simplifie | utiliser formule rouge question suivante

①

4) $\hat{h}(f) = \frac{1}{T_0} \hat{\mathbb{1}}_{[0,T_0[}(f)$ propriété de réciprocité

$\Rightarrow \hat{h}(f) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-2j\pi n f_0 t} \, dt$

$= \frac{1}{T_0} \left[\frac{e^{-2j\pi n f_0 t}}{-2j\pi n f_0} \right]_0^{T_0} = \frac{1}{T_0 \pi n f_0} \left(\frac{e^{-2j\pi n f_0 T_0} - 1}{-2j} \right)$

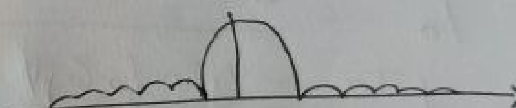
$= \frac{1}{T_0 \pi n f_0} \left(\frac{1 - e^{-2j\pi n f_0 T_0}}{2j} \right)$

$\cdot \; 1 - e^{\alpha j} = e^{-j\alpha/2} \left(e^{j\alpha/2} - e^{-j\alpha/2} \right)$

$\Rightarrow \frac{1}{T_0 \pi n f_0} \left(\frac{1 - e^{-2j\pi n f_0 T_0}}{2j} \right) = \frac{1}{T_0 \pi n f_0} \, e^{-j\pi n f_0 T_0} \frac{\left(e^{j\pi n f_0 T_0} - e^{-j\pi n f_0 T_0} \right)}{2j}$

$= e^{-j\pi n f_0 T_0} \frac{\sin(\pi n f_0 T_0)}{T_0 \pi n f_0} = e^{-j\pi n f_0 T_0} \operatorname{sinc}(\pi n f_0 T_0)$ ↳ sin

$\Rightarrow \boxed{\hat{h}(f) = e^{-j\pi n f_0 T_0} \operatorname{sinc}(\pi n f_0 T_0)}$

$|\hat{h}| = |\operatorname{sinc}(\pi n f_0 T_0)| \longrightarrow$ 

filtre passe bas

6) $H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-pt} \, dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-pt} \, dt$

$= \frac{1}{T_0} \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{T_0} = \boxed{\frac{1}{-pT_0} \left(e^{-T_0 p} - 1 \right)}$

$= \frac{1}{-pT_0} e^{-\frac{T_0 t}{2}} \left(e^{-\frac{T_0 t}{2}} - e^{\frac{T_0 t}{2}} \right) = \frac{e^{\frac{T_0 p}{2}}}{pT_0} 2j \sin\left(-\frac{T_0 p}{2}\right)$

forme non classique, difficile de voir les pôles et zéros mais reste cohérent avec TF q5.

7) $g[n] = \left(\underbrace{h(t) \cdot Ш_{T_e}(t)}_{\text{echantillonnage}} \right) \cdot w[n]$

↳ 1 entre $\{-P, P\}$

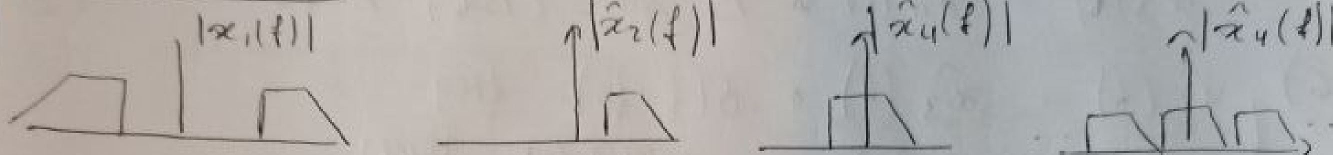
8) $g[n] = \left(\hat{h}(f) * \frac{1}{T_e} Ш_{\frac{1}{T_e}}(f)\right) * \hat{\omega}(f)$

$= \left(\hat{h}(f) * \frac{1}{T_e} \sum \delta(f - nf_e)\right) * \hat{\omega}(f)$

$= \left(\frac{1}{T_e} \sum \hat{h}(f - nf_e)\right) * \hat{\omega}(f)$

↳ sinus cardinal car porte entre $\{-P, P\}$.

<u>Exercice n°2</u>



1) En fréquence → passe bande décalé autour non pas de zéro mais de f_0 (pour cela on le multiplie toujours en fréquence par un dirac pour décaler le signal fréquentiel) (vu en TP)

~~→ TF($x_1(t)$) • porte passe bas décalé~~

~~→ TF($x_1(t)$) • [(porte passe bas) • dirac] en fréquence~~

En temporel les multiplication sont des produits de convolution, une porte est un sinc et le dirac un cosinus

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\text{fréquence}} : \hat{x}_2(f) = \hat{x}_1(f) \cdot \left(\amalg_{[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]}(f) \cdot \delta(f - f_0)\right) \\ &\underline{\text{en temps}} : \hat{x}_2(t) = x_1(t) * \left(\Delta \operatorname{sinc}(t\Delta) * e^{2j\pi f_0 t}\right) \end{aligned}}$$

2) ~~Si signal à valeur réelles~~ →

$\boxed{\hat{x}_2(f) \text{ n'est pas paire}}$, ⇒ $x_2(t)$ n'est pas paire,

⇒ $x_2(t)$ n'est pas à valeures réelles

3) on décale le signal en fréquence

$$\boxed{\begin{cases} \hat{x}_3(f) = \hat{x}_2(f + f_0) = \hat{x}_2(f) * \delta(f + f_0) & \text{en freq} \\ x_3(t) = x_2(t) \cdot e^{-2j\pi f_0 t} & \text{en temps} \end{cases}}$$

4) on convolue en freq par un peigne de Dirac :

$$\boxed{\begin{cases} \hat{x}_4(f) = \hat{x}_3(f) * \widehat{Ш}_{\frac{1}{T}}(f) & \text{en freq} \\ x_4(t) = x_3(t) \cdot Ш_T(t) & \text{en temps} \end{cases}}$$

5) $$\begin{cases} \hat{x}_3(f) = \hat{x}_4(f) \cdot 1\!\!1_{[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]}(f) & \text{freq} \\ x_3(t) = x_4(t) * \Delta \operatorname{sinc}(\Delta t) & \text{temps} \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} \hat{x}_2(f) = \hat{x}_3(f) * \delta(f - f_0) & \text{freq} \\ x_2(t) = x_3(t) \cdot e^{2j\pi f_0 t} & \text{temps} \end{cases}$$

7) $TF(\overline{y(t)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{y(t)}\, e^{2j\pi n f t}\, dt$

8)

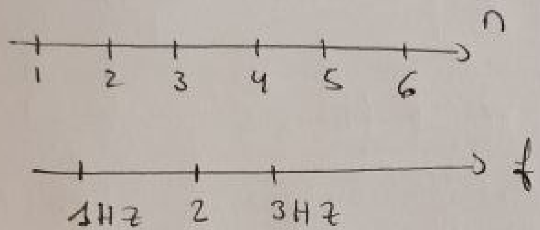
9) Shannon → $F_e > 2f_m$ avec $f_m = f_0 + \frac{\Delta}{2}$

$\Rightarrow \boxed{F_e > (2f_0 + \Delta)}$

10) pas compris

Exercice n°3

1)



$t = n \times T_e$ | $f = \frac{1}{t}$, $F_e = \frac{1}{T_e}$

$\Rightarrow \frac{1}{f} = n \times \frac{1}{F_e}$

$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{n}{F_e}$

$\Rightarrow \boxed{f = \frac{F_e}{n}}$

2) Faire avec Shannon

$F_e > 2f_m$

je ne vois pas f_m

3)

1)

2) ~~filtre passe bas décalé autour de 50 000 Hz environ~~

passe bande de 0 à 60 000 Hz et 80000 à 12 0000Hz

avec une amplitude > 1 car le signal est "allongé"