TD 1 : Signaux et systèmes analogiques

Exercice 1 : Représentation des signaux

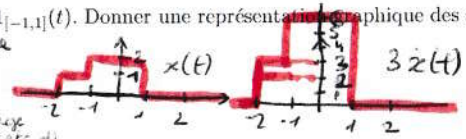
Soit le signal $x(t) = \mathbb{1}_{[-2,1]}(t) + \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$. Donner une représentation graphique des signaux suivants :

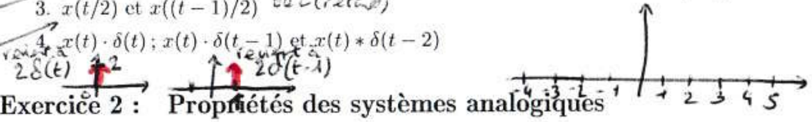
1. $x(t)$ et $3x(t)$
2. $x(t-2)$ et $x(2-t)$ inverse signal par rapport à l'axe des ordonnées puis décalage de 2 (retard)
3. $x(t/2)$ et $x((t-1)/2)$
4. $x(t)\cdot\delta(t)$; $x(t)\cdot\delta(t-1)$ et $x(t) * \delta(t-2)$

décalage (retard)

⚠ dilatation ne compresse pas le signal

vaut $2\delta(t)$ — revient à $2\delta(t-1)$

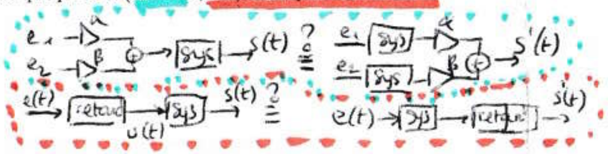




Exercice 2 : Propriétés des systèmes analogiques

Pour chacun des systèmes suivants, donner ses propriétés (linéaire, invariant par translation, stable, causal, sans mémoire) :

1. $e(t) \xrightarrow{H} s(t) = e(t-2) + e(2-t)$
2. $e(t) \xrightarrow{H} s(t) = \cos(2\pi f_0 t)e(t)$
3. $e(t) \xrightarrow{H} s(t) = |e(4t+1)|$



Exercice 3 : Représentations fréquentielles de quelques signaux analogiques

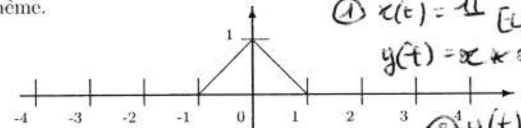
Calculer et tracer la représentation fréquentielle des signaux suivants :

1. $x(t) = \mathbb{1}_{[-L/2,L/2]}(t) = 1$ si $|t| < \frac{L}{2}$, $x(t) = 0$ sinon. Rappeler le résultat de la convolution de x avec lui même.

① $x(t) = \mathbb{1}_{[-L/2,\,L/2]}(t) \rightarrow \hat{x}(F) = L\,\mathrm{sinc}(FL)$

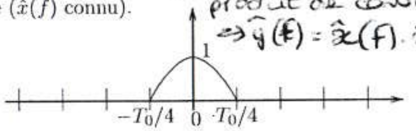
$y(t) = x * x(t) =$ (page 10)

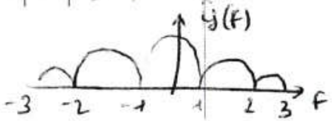
2. Triangle :



② $y(t)$ (pour $L=1$)
produit de convolution $y(t) = x * x(t)$
$\Rightarrow \hat{y}(f) = \hat{x}(f)\cdot\hat{x}(f) = \hat{x}(f)^2 = (\mathrm{sinc}(f))^2$

3. $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)x(t)$ pour $x(t)$ quelconque ($\hat{x}(f)$ connu).
4. $x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & t \in [-\frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{4}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

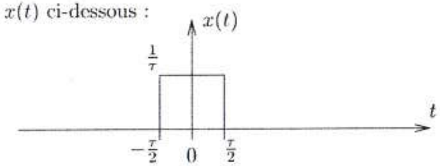




5. $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \sin^2(2\pi f_0 t)$.

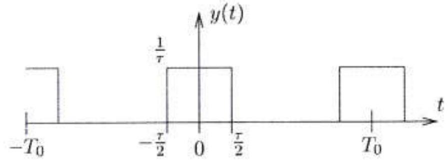
Exercice 4 : Périodisation d'un signal

Soit le signal porte $x(t)$ ci-dessous :



1. Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$ et tracer sa représentation fréquentielle.
2. Que devient cette représentation quand τ tend vers zéro ? Commenter…

On considère maintenant $y(t)$ un signal impulsionnel de la forme ci-dessous, correspondant à la périodisation du signal précédent avec une période T_0 :



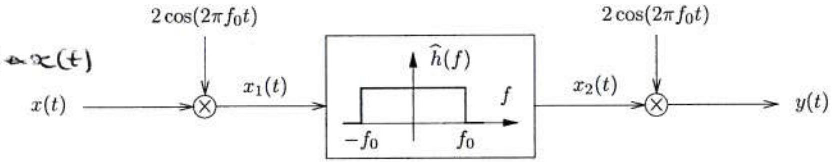
3. Calculer son développement en série de Fourier (bien sur, on se servira des résultats de la question 1. pour faire le moins de calculs possible).
4. En déduire sa transformée de Fourier et la tracer dans le cas $T_0 = 2\tau$. Comparer cette transformée de Fourier à celle de la fonction porte. Commenter… En déduire la conséquence en fréquence de la périodisation en temps d'un signal.
5. Que devient cette transformée de Fourier lorsque τ tend vers zéro. Commenter.

Exercice 5 : Transformations d'un signal

Soit le signal $x(t) = 4f_0\mathrm{sinc}(4f_0 t) + 2f_0\mathrm{sinc}(2f_0 t)$.

1. Calculer et tracer la représentation fréquentielle de ce signal.

Le signal $x(t)$ est placé en entrée du système ci-dessous, où le filtre H est un filtre passe-bas idéal.



2. Calculer et tracer la représentation fréquentielle des signaux $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $y(t)$.
3. Donner l'expression du signal temporel $y(t)$.
4. Donner les propriétés du système considéré dans son ensemble $x(t) \xrightarrow{G} y(t)$.

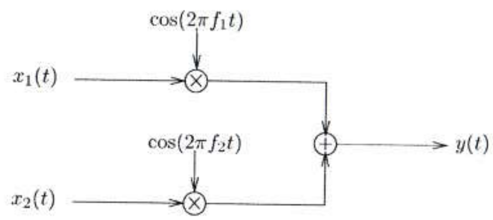
Exercice 6 : Multiplexage fréquentiel

Pour transmettre différents signaux dans un même canal de communication on peut effectuer un multiplexage fréquentiel. On va procéder ici par modulation d'amplitude.

Soit les signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de bande spectrale limitée B, c'est-à-dire tels que $\widehat{x}_1(f) = 0$ et $\widehat{x}_2(f) = 0$ pour $f \notin [-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}]$.

Modulation

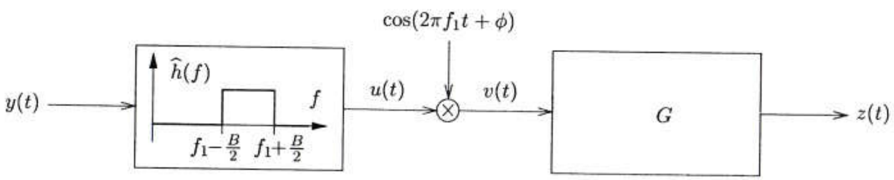
A partir des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ on construit le signal $y(t)$ d'après le schéma :



1. Calculer l'expression de la représentation fréquentielle du signal $y(t)$ à partir de celles des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Tracer l'allure de cette représentation fréquentielle pour $f_1 > \frac{B}{2}$ et $f_2 = f_1 + B$.

Démodulation

Le signal $y(t)$ est transmis via un système de communication et après réception on construit le signal $z(t)$ d'après le schéma :



2. Calculer l'expression de la représentation fréquentielle du signal $u(t)$ à partir de celles des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Tracer l'allure de cette représentation fréquentielle. En déduire l'expression temporelle du signal $u(t)$.
3. Calculer l'expression des représentations temporelle puis fréquentielles du signal $v(t)$. Tracer sa représentation fréquentielle.
4. Quel système pensez-vous nécessaire de prendre pour G afin de retrouver le signal original $x_1(t)$?
5. Pour le système G choisi précédemment, calculer l'expression de la représentation temporelle du signal $z(t)$. A quelle condition sur ϕ retrouve-t-on correctement le signal $x_1(t)$? Que pourrait-on faire pour ne plus avoir ce problème de dépendance vis-à-vis de ϕ ?

Exercice 7 : Détection de cible par radar

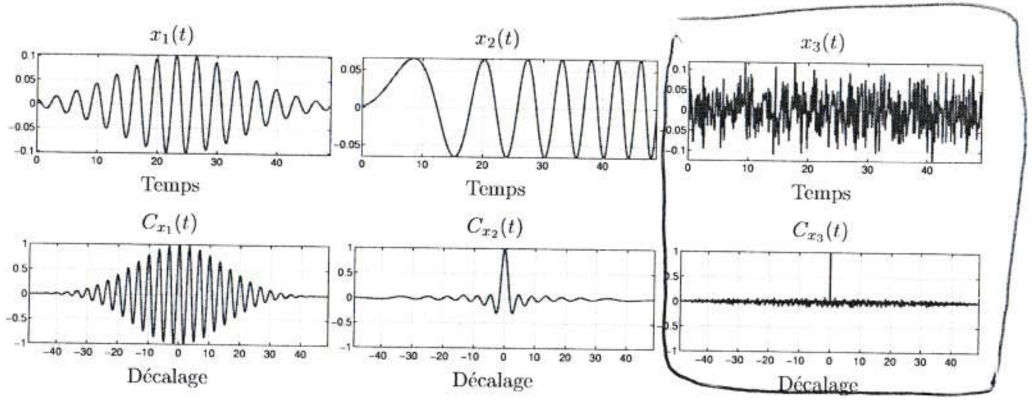
Le principe du radar de position est similaire à celui de la télémétrie ultrasonore et à celui de l'imagerie échographique : le système émet un signal connu $x(t)$ et ce message est réfléchi (avec éventuellement une certaine atténuation) par les cibles.

Soit $x(t)$ le signal émis. On peut modéliser mathématiquement le signal réfléchi par

$$y(t) = h * x(t) + b(t) \quad \text{où} \quad h(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k \delta(t - t_k)$$

avec $b(t)$ un bruit ambiant.

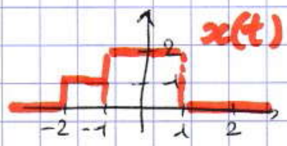
1. Développer l'expression de $y(t)$ en fonction de $x(t)$ et vérifier que le modèle correspond bien à la réalité.
2. Dans le cas sans bruit ($b(t) = 0$), peut-on dire que le signal $y(t)$ est la sortie d'un système linéaire et invariant par translation dont l'entrée est $x(t)$?
3. Calculer l'expression de l'intercorrélation $C_{y,x}(t)$ entre le signal reçu et le signal envoyé, en fonction de l'autocorrélation $C_x(t)$ du signal envoyé et l'intercorrélation $C_{b,x}(t)$ entre le bruit ambiant et le signal envoyé.
4. L'autocorrélation entre deux signaux mesure la ressemblance entre ces signaux décalés. Il n'y a aucune raison pour que le bruit ambiant ressemble au signal envoyé aussi on peut considérer que leur intercorrélation est très faible, voir nulle. On dit alors que les signaux sont décorrélés. Que devient dans ce cas l'expression précédente de $C_{y,x}(t)$?
5. Quelle propriété doit avoir l'autocorrélation du signal envoyé pour qu'il soit aisé de détecter les cibles à partir de l'intercorrélation $C_{y,x}(t)$? Vous trouverez ci-dessous trois types de signaux à envoyer et leur autocorrélation respective. Quel signal vous parait le plus intéressant pour cette application ? **Justifier votre réponse...**

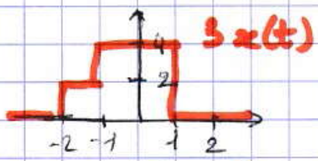


TP 1

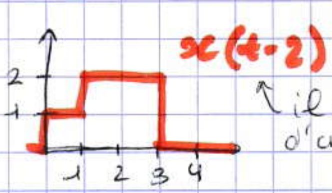
Exercice 1

$x(t) = \mathbb{1}_{[-2,1]}(t) + \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$

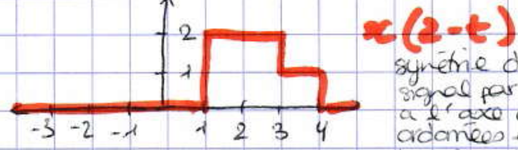




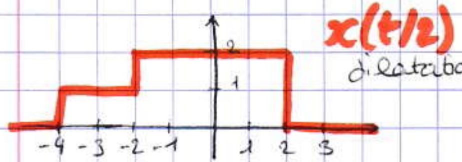
~~$3x(t)$~~



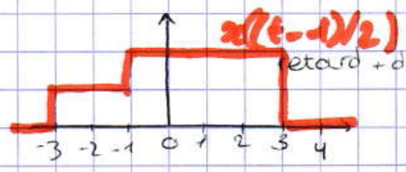
il s'agit d'un retard



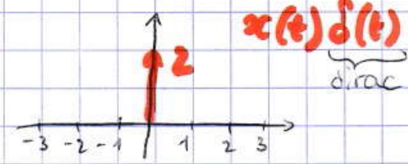
symétrie du signal par rapport à l'axe des ordonnées + décalage de 2 vers la droite (retard)



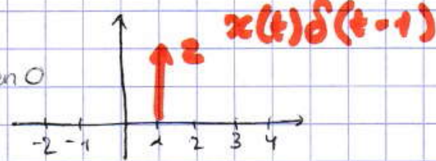
dilatation



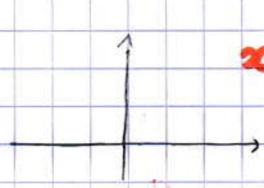
retard + dilatation

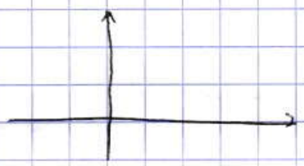


$x(t)\underbrace{\delta(t)}_{\text{dirac}}$ ⇒ = 0 sauf en 0



$x(t) \underbrace{*}_{\text{convolution}} \delta(t-2)$





Exercice 2

linéaire ? invariant par translation ? stable ? causal ? sans mémoire ?

① $e(t) \xrightarrow{H} s(t) = e(t-2) + e(2-t)$

Linéarité $v(t) = \alpha e_1(t) + \beta e_2(t)$

$s(t) = \alpha e_1(t-2) + \beta e_2(t-2) + \alpha e_1(2-t) + \beta e_2(2-t)$

$s'(t) = \alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$
$= \alpha(e_1(t-2) + e_1(2-t)) + \beta(e_2(t-2) + e_2(2-t))$

$\boxed{s = s' \Rightarrow \text{OUI}}$

Invariant : $v(t) = e(t-\tau)$
$s(t) = v(t-2) + v(2-t)$
$= \underline{e(t-2-\tau) + e(2-t-\tau)}$

$v(t) = e(t+2) + e(2-t)$
$s'(t) = v(t-\tau)$
$s'(t) = e(t-\tau-2) + e(2-(t-\tau))$
$= \underline{e(t-\tau-2) + e(2-t+\tau)}$

$s \neq s' \Rightarrow$ NON

Stable : si e(t) borné alors s(t) EBSB (entrée bornée sortie bornée)

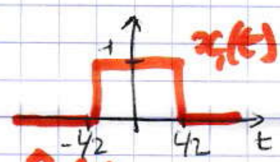
EB : $\exists E$ tq $|e(t)| \leq E$ $\quad |s(t)| = |e(t-2) + e(2-t)| \leq |e(t-2)| + |e(2-t)| \leq 2E$
$\Rightarrow$ SB

donc OUI

Causal :

Exercice 3 : Calculer et tracer la représentation fréquentielle des signaux suivants

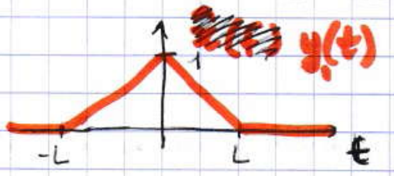
① $x(t) = \mathbb{1}_{[-L/2, L/2]} = 1$ si $|t| < L/2$ $x(t) = 0$ sinon



On sait que ~~Alors~~ $\mathbb{1}_{[-L/2, L/2]}(t) \rightarrow \hat{x}(f) = L\, \text{sinc}(fL)$

Rappeler le résultat de la convolution de x avec lui même

$y(t) = x(t) * x(t) =$



② Triangle

Calcul : Revient à faire le produit de convolution entre x_1 et lui même avec $L = 1$ soit

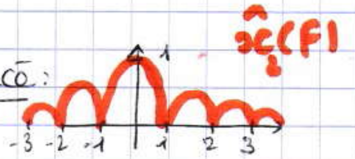
$y(t) = x(t) * x(t)$

$\Rightarrow \hat{y}(f) = \hat{x}(f)\,\hat{x}(f) = (\hat{x}(f))^2$

$= (1\, \text{sinc}(f \times 1))^2$

$= (\text{sinc}(f))^2$

Tracé :



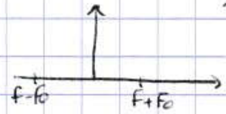
③ $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)\, x(t)$ pour $x(t)$ quelconque ($\hat{x}(f)$ connu)

Avec $B(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ on a

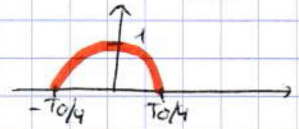
$y(t) = B(t) \times x(t)$ et d'après la propriété du produit :

$\hat{y}(f) = \hat{B}(f) * \hat{x}(f)$ avec $\hat{B}(f) = 1/2\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)$ (voir tableau cours page 17)

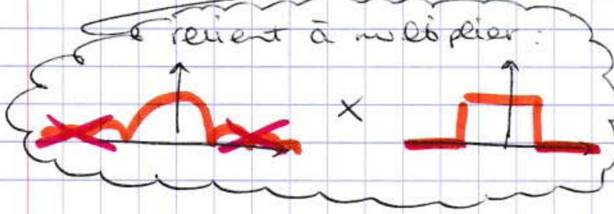
propriété de convolution du dirac
$$= 1/2\left(\delta(f-f_0) * \hat{x}(f) + \delta(f+f_0) * \hat{x}(f)\right)$$
$$= 1/2\left(\hat{x}(f-f_0) + \hat{x}(f+f_0)\right)$$



(4) $x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & \text{si } t \in [-T_0/4, T_0/4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



revient à multiplier :



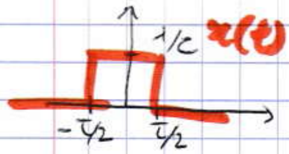
$x(t) = \underbrace{\cos(2\pi F_0 t)}_{1/2(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0))} \underbrace{\mathbb{1}_{[-T_0/4, T_0/4]}}_{TF:\ T_0/2 \operatorname{sinc}\left(\frac{fT_0}{2}\right)}$

$$\hat{x}(f) = 1/2\left(T_0/2 \operatorname{sinc}((f-f_0)T_0/2) + T_0/2 \operatorname{sinc}((f+f_0)T_0/2)\right)$$

(5) $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + \sin^2(2\pi f_0 t)$

$$\hat{x}(f) = 1/2\left(e^{2j\pi f_0 t} + e^{-2j\pi f_0 t}\right) + \left[\frac{1}{2j} e^{2j\pi f_0 t} - e^{-2j\pi f_0 t}\right]^2$$

Exercice 4 Périodisation



(1) Calculer la transformée de Fourier

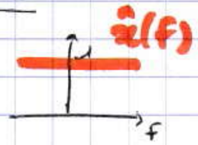
$x(t) = 1/\tau \ \mathbb{1}_{[-\tau/2, \tau/2]}(t)$

$$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 1/\tau \ \mathbb{1}_{[-\tau/2, \tau/2]}(t) e^{-2j\pi f t} dt$$
$$= 1/\tau \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-2j\pi f t} dt = 1/\tau \left[\frac{e^{-2j\pi f t}}{-2j\pi f}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = 1/\tau \left(\frac{e^{-j\pi f \tau} - e^{j\pi f \tau}}{-2j\pi f}\right)$$
$$= 1/\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = \operatorname{sinc}(f\tau)$$

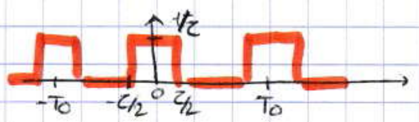
(2) Que deviennent les représentations quand $\tau \to 0$?

$x(t) \xrightarrow{\tau \to 0} \delta(t)$ { nulle partout sauf en $t = 0$

$\hat{x}(f) \xrightarrow{\tau \to 0} 1$



On considère le signal suivant de période T_0



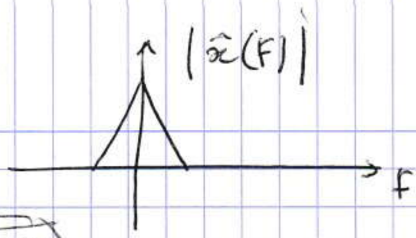
(3) Calculer la transformée de Fourier

TD1 Traitement du signal

Exercice 3

quelconque

③ $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)\, x(t)$



~~① $x(t) \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & t \in [-\frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{4}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$~~

$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{2j\pi f_0 t} + e^{-2j\pi f_0 t}\right) x(t)$

propriété de modulation

$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{2j\pi f_0 t} x(t)}_{\downarrow TF} + e^{-2j\pi f_0 t} x(t)\right)$

$= \hat{y}(f) = \frac{1}{2}\left(\hat{x}(f - f_0) + \hat{x}(f - f_0)\right)$

version 1

$y(t) = B(t)\, x(t)$ avec $B(t) = \cos(2\pi f t)$

$\hat{B}(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$

propriété du produit $\hat{y}(f) = \hat{B}(f) * \hat{x}(f)$

propriété de convolution de dirac

$= \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) * \hat{x}(f) + \delta(f + f_0) * \hat{x}(f)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\hat{x}(f - f_0) + \hat{x}(F + f_0)\right)$

version 2 f F

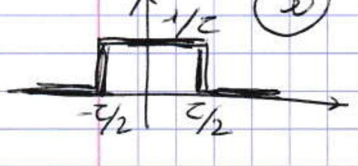
④ $x(t) \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & t \in [-\frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{4}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$= \cos(2\pi f_0 t)\, \mathbb{1}_{[-T_0/4, T_0/4]}(t) \Rightarrow TF = T_0/2 \,\text{sinc}\left(f \frac{T_0}{2}\right)$

$\hat{x}(f) = \frac{1}{2}\left(T_0/2 \,\text{sinc}((f - f_0) T_0/2) + T_0/2 \,\text{sinc}((f + f_0) T_0/2)\right)$

⑧ $x(t) = \cos(2\pi f t) + \sin^2(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{2j\pi f_0 t} + e^{-2j\pi f_0 t}\right) + \left[\frac{1}{2j}\, e^{2j\pi f_0 t} - e^{-2j\pi f_0 t}\right]^2$

Exercice 4



ⓔ $x(t) = \frac{1}{\tau}\, \mathbb{1}_{[-\tau/2, \tau/2]}(t)$

Réponse fréquentielle de x ?
signal périodique ⇒ calculer la transformée de Fourier

$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau} \mathbb{1}_{[-\tau/2, \tau/2]} e^{-2j\pi f t} dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-2j\pi f t} dt$

$= \frac{1}{\tau}\left[\frac{e^{-2j\pi f t}}{-2j\pi f}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{e^{-j\pi f \tau} - e^{j\pi f \tau}}{-2j\pi f}\right) = \frac{1}{\tau}\, \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = \text{sinc}(f\tau)$

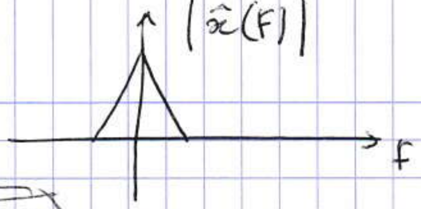
Rappel : $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

TD1 Traitement du signal

Exercice 3

quelconque

③ $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)\, x(t)$



~~⓪ $x(t) \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & t \in [-\frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{4}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$~~

$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{2j\pi f_0 t} + e^{-2j\pi f_0 t}\right) x(t)$

propriete de modulation

$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{e^{2j\pi f_0 t} x(t)}_{\downarrow TF} + e^{-2j\pi f_0 t} x(t)\right)$

$= \hat{y}(f) = \frac{1}{2}\left(\hat{x}(f - f_0) + \hat{x}(f - f_0)\right)$

version 1

propriete du produit

$y(t) = B(t)\, x(t)$ avec $B(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$\hat{B}(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$

$\hat{y}(f) = \hat{B}(f) * \hat{x}(f)$

propriete de convolution du dirac

$= \frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) \overset{* \hat{x}(f)}{+} \delta(f + f_0) * \hat{x}(f)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\hat{x}(f - f_0) + \hat{x}(f + f_0)\right)$

version 2 f F

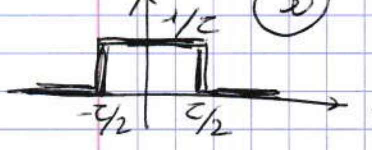
④ $x(t) \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & t \in [-\frac{T_0}{4}, \frac{T_0}{4}] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

$= \cos(2\pi f_0 t)\, \mathbb{1}_{[-T_0/4, T_0/4]}(t) \Rightarrow TF = T_0/2 \operatorname{sinc}\left(f \frac{T_0}{2}\right)$

$\hat{x}(f) = \frac{1}{2}\left(T_0/2 \operatorname{sinc}((f - f_0) T_0/2) + T_0/2 \operatorname{sinc}((f + f_0) T_0/2)\right)$

⑧ $x(f) = \cos(2\pi f t) + \sin^2(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{2j\pi f_0 t} + e^{-2j\pi f_0 t}\right) + \left[\frac{1}{2j}\, e^{2j\pi f_0 t} - e^{-2j\pi f_0 t}\right]^2$

Exercice 4



② $x(t) = \frac{1}{\tau}\, \mathbb{1}_{[-\tau/2, \tau/2]}(t)$

Reponse frequentielle de x ?
signal periodique → calculer la tranformée de Fourier

$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2j\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\tau}\, \mathbb{1}_{[-\tau/2, \tau/2]}\, e^{-2j\pi f t}\, dt = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-2j\pi f t}\, dt$

$= \frac{1}{\tau}\left[\frac{e^{-2j\pi f t}}{-2j\pi f}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{e^{-j\pi f \tau} - e^{j\pi f \tau}}{-2j\pi f}\right) = \frac{1}{\tau}\, \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} = \operatorname{sinc}(f\tau)$

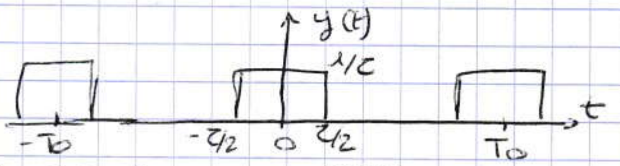
Rappel : $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

② que deviennent ces représentations quand $\tau \to 0$

$x(t) \xrightarrow{\tau \to 0} \delta(t)$ $\begin{cases} \text{nulle partout sauf en } t=0 \\ \text{d'aire ~~unitaire~~ unité} \end{cases}$

$\hat{x}(f) \xrightarrow{\tau \to 0} 1$

③



y(t) de période To

signal périodique ⟶ DSF

$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2j\pi n f_0 t}$ avec $c_n = \frac{1}{T_0} \int_{[T_0]} y(t) e^{-2j\pi f_0 t} dt$

$\hat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi f_0 t} dt$

$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-2j\pi n f_0 t} dt$

$= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi n f_0 t} dt$

$\boxed{\operatorname{sinc}(f\tau) = \hat{x}(f)}$

$= \frac{1}{T_0} \hat{x}(nf_0) =$

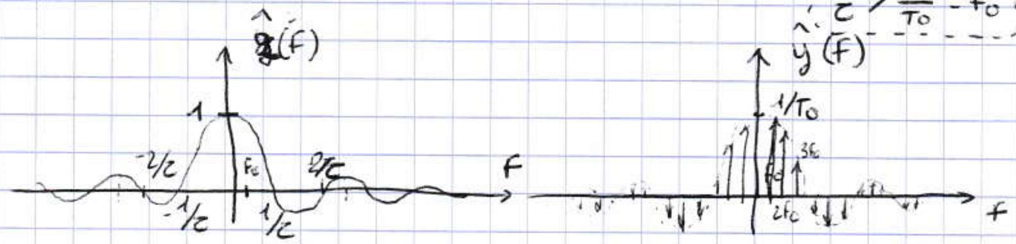
$= \frac{1}{T_0} \operatorname{sinc}(nf_0\tau)$

$\Rightarrow$ ~~sin~~ $y(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(nf_0\tau) e^{2j\pi n f_0 t}$

$\Rightarrow \hat{y}(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(nf_0\tau)\, \delta(f - nf_0)$

$T_0 > \tau$

$\frac{1}{\tau} > \frac{1}{T_0} = f_0$

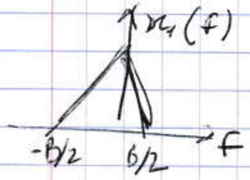


⑤ Quand $\tau \to 0$

$y(t) \longrightarrow Ш_{T_0}(t)$

$\hat{y}(t) \longrightarrow f_0\, Ш_{f_0}(f)$

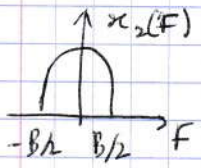
Exercice 6

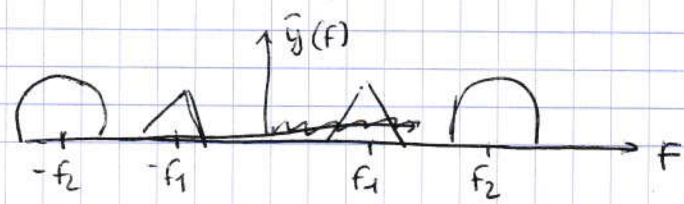


$y(t) = x_1(t)\cos(2\pi f_1 t) + x_2(t)\cos(2\pi f_2 t)$

$\hat{y}(f) = \frac{1}{2}\left[\hat{x}_1(f - f_1) + \hat{x}_1(f + f_1) + \hat{x}_2(f - f_2) + \hat{x}_2(f + f_2)\right]$

(voir exercice 3 Q3)





Exercice 6 Multiplexage fréquentiel (suite)

Démodulation retrouver $x_1(t)$ à partir de $y(t)$

$u(t) = y(t) * h(t)$ avec $h(t)$ tel que

$$\hat{h}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \in [f_1 - B/2 \,;\, f_1 + B/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\hat{u}(f) = \hat{y}(f) \cdot \hat{h}(f) = 1/2\left(\hat{x}_1(f-f_1) + \hat{x}_1(f-f_1)\right)$$

donc $u(t) = x_1(t)\cos(2\pi f_1 t)$

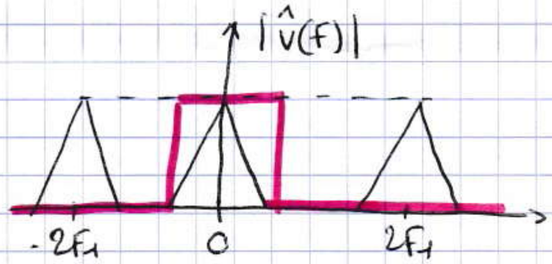
$$v(t) = u(t) \cdot \cos(2\pi f_1 t + \varphi) = u(t)\frac{1}{2}\left(e^{j(2\pi f_1 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_1 t + \varphi)}\right)$$

$$= 1/2\left(e^{j\varphi} u(t) e^{2j\pi f_1 t} + e^{-j\varphi} u(t) e^{-2j\pi f_1 t}\right)$$

$$\hat{v}(f) = 1/2\left(e^{j\varphi}\hat{u}(f-f_1) + e^{-j\varphi}\hat{u}(f-f_1)\right)$$

$$= 1/4\left(e^{j\varphi}(\hat{x}_1(f-2f_1) + \hat{x}_1(f)\right) + e^{-j\varphi}\left(\hat{x}_1(f) + \hat{x}_1(f+2f_1)\right)$$

$$= 1/4\, e^{j\varphi}\hat{x}_1(f-2f_1) + 1/4\, e^{-j\varphi}\hat{x}_1(f-2f_1) + 1/4\underbrace{\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right)}_{2\cos\varphi}\hat{x}_1(f)$$



Bases du triangle $-B/2$ et $B/2$

filtre passe bas

Pour retrouver x_1 il faut filtrer $v(t)$ par un filtre de réponse en fréquence $\hat{g}(f) = \mathbb{1}_{[-B/2,\, B/2]}(f)$

$$\hat{B}(f) = \hat{g}(f) \cdot \hat{v}(f) = 1/2\cos(\varphi)\hat{x}_1(f)$$

$$B(t) = 1/2\cos(\varphi)x_1(t)$$

Exercice 7

① $y(t) = h * x(t) + b(t)$ avec $h(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k \delta(t - t_k)$

$$= \sum_{k=1}^{K} a_k \delta(t-t_k) * x(t) + b(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} a_k \underbrace{\left(\delta(t-t_k) * x(t)\right)}_{x(t-t_k)} + b(t)$$

atténuation liée à la cible k

retard lié à la distance de la cible

② $\underbrace{\text{Système Linéaire Invariant}}_{\text{filtre}}$

Relation entrée / sortie = convolution

$y(t) = h * x(t)$ ↳ réponse ~~[illegible]~~ impulsionnelle du filtre

③ $y(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k x(t-t_k) + b(t)$

$C_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) x(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{K} a_k x(t-t_k) x(t-t_k) x(t+\tau) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) x(t+\tau) dt$

$C_{yx}(\tau) = \sum_{k=1}^{K} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_k) x(t+\tau) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} b(t) x(t+\tau) dt$

$\sum_{k=1}^{K} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') x(t'+t_k+\tau) dt' + C_{bx}(\tau)$

$C_{yx}(\tau) = \sum_{k=1}^{K} a_k C_x(t_k+\tau) + C_{bx}(\tau)$

④ Si b et x sont décorrélés $C_{yx}(\tau) = \sum_{k=1}^{K} a_k C_x(t_k+\tau)$
En prenant $x(t)$ il sera simple de retrouver les retards t_k à partir de $C_{yx}(\tau)$ car

⑤ En prenant $x(t) = x_3(t)$ il sera simple de retrouver les retards t_k à partir de $C_{yx}(\tau)$ car $C_{yx}(\tau)$ sera une somme de pics décalé en $\tau = -t_k$ car l'autocorrélation de $x_3(t)$ est très piquée autour de $\tau = 0$