Exam Optim non-linéaire sans contrainte

(1) Rechercher les points stationnaires et déterminer leur nature pour les fonctions f suivantes :

(1.1) $f(x, y) = x \cdot y^3 - 3x^2 \cdot y$

(1.2) $f(x_1, x_2, x_3) = m x_1^3 + \frac{1}{2} x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_2$ (constante $m \in \mathbb{R}$)

(1.1) Cherchons les points stationnaires

1. Calcul des dérivée partielles

$\frac{df}{dx} = y^3 - 6xy$ et $\frac{df}{dy} = 3xy^2 - 3x^2$

2. Trouver les points où les dérivées partielles sont égale à 0

Pour $\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow y^3 - 6xy = 0 \overset{\text{on factorise}}{\Leftrightarrow} y(y^2 - 6x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^2 = 6x \end{cases}$

Pour $\frac{df}{dy} = 0 \Rightarrow 3xy^2 - 3x^2 = 0 \overset{\text{on factorise}}{\Leftrightarrow} 3x(y^2 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = x \end{cases}$

3. Résolution des équations

$y = 0$ et $y^2 - 6x = 0 \Rightarrow y = 0$ et $x = 0$

$x = 0$ et $y^2 - x = 0 \Rightarrow y = 0$ et $x = 0$

Donc il y a 2 points stationnaires en $(0,0)$

4. Détermination de la nature des points $\Rightarrow$ Calcul de la matrice hessienne H

Pour cela nous utiliserons la matrice hessienne H et les critères de la seconde dérivée

La matrice hessienne de cette fonction :

$H = \begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dxdy} \\ \frac{d^2f}{dydx} & \frac{d^2f}{dy^2} \end{bmatrix}$ avec $\begin{cases} \frac{d^2f}{dx^2} = -6y \\ \frac{d^2f}{dy^2} = 6x \\ \frac{d^2f}{dxdy} = 3y^2 - 6x \end{cases}$

5. Evaluons la matrice hessienne au point stationnaire $(0,0)$ → on remplace les x et y par 0

$H(0,0) = \begin{bmatrix} -6(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ donc : $\begin{cases} -6y \Leftrightarrow -6 \times 0 = 0 \\ 6x \Leftrightarrow 6 \times 0 = 0 \\ 3x^2 - 6 \times 0 = 0 \end{cases}$

Ainsi la matrice hessienne est ~~semi définie négative~~ indéterminée car ces valeurs propres sont nulles

Donc nous ne pouvons pas conclure si les points sont des maxima, ou des minimas, ou des points selles en utilisant le test de la ~~second~~ dérivée seconde. Une autre méthode d'analyse est nécessaire pour déterminer leur nature.

Pour rappel une matrice hessienne est une matrice carrée de dérivées secondes partielles d'une fonction multivariée (possédant plusieurs variable ex : x, y, z...)

Elle est utile pour calculer la convexité, la concavité et la nature des points stationnaire d'une fonction. Par exemple, la matrice hessienne H d'une fonction $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sera de la forme suivante :

$H = \begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2} & \frac{d^2f}{dx_1 dx_2} & \cdots & \frac{d^2f}{dx_1 dx_n} \\ \frac{d^2f}{dx_1 dx_2} & \frac{d^2f}{dx_2^2} & \cdots & \frac{d^2f}{dx_2 dx_n} \\ \frac{d^2f}{dx_1 dx_n} & \frac{d^2f}{dx_2 dx_n} & & \frac{d^2f}{dx_n^2} \end{bmatrix}$

Une fois que la matrice hessienne est calculée, il est possible de l'utiliser pour déterminer la nature des points stationnaire en analysant les valeurs propres de la matrice (positive, négative, nulle) ce qui nous permettra de déterminer s'il s'agit le point est un minimum local, un point selle ou un maximum local.

Université Paris-Saclay Opti — Avril 2022 ~~sans~~ contraintes (suite)

(1.2) $f(x_1, x_2, x_3) = m \{x_1^3 + 1/2\, x_1^2 \; (+x_2^2) + 3 x_3^2 - 2 x_2$ (même démarche que par (1.1))

1. Calcul des dérivées partielles

$\frac{df}{dx_1} = 3m x_1^2 + x_1$, $\frac{df}{dx_2} = 2x_2 - 2$, $\frac{df}{dx_3} = 6x_3$

2. Trouver les points où les dérivées partielles égales à zéro

$\frac{df}{dx_1} = 0 \Rightarrow 3m x_1^2 + x_1 = 0$, $\frac{df}{dx_2} = 0 \Rightarrow \cancel{-2 = 0}$ ~~impossible~~ , $\frac{df}{dx_3} = 0 \Rightarrow 6x_3 = 0$

$\Leftrightarrow x_1(3m x_1 + 1) = 0$

2 sol: $x_1 = 0$ soit $3m x_1 = -1 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{3m}$

$x_3 = 0$

$2x_2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x_2 = 1$ $\Rightarrow$ il y a donc

3. Résolution des équations

4. Détermination de la nature des points

$H = [$

Calcul des deux matrices hessiennes

si $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ indéterminé

$\begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix} \Rightarrow$ minimum local

$\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \Rightarrow$ max local

$\begin{bmatrix} + & - \\ + & - \end{bmatrix} \Rightarrow$ point selle

Exam dec 2021 optimisation (suite)

3

Nous utilisons la formule de Newton pour calculer Δx, Δy et $\Delta \lambda$

avec $[\Delta x, \Delta y, \Delta \lambda] = -(H)^{-1} \nabla L$ avec $H = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H^{-1} = \Big[\; 1/2 \quad -1$

$U \times V = U'V + UV'$