TP 4 : Analyse spectrale numérique des signaux

Il est indispensable d'avoir préparé le TP avant la séance, c'est-à-dire :

- **avoir lu le sujet de TP et avoir compris le cours et les travaux dirigés correspondants ;**
- **avoir répondu aux questions théoriques, dont le numéro est suivi du signe †.**

Les listings de tous les programmes doivent être joints au rapport.

Tous les résultats et courbes doivent être commentés.

I Présentation du TP

L'objectif de cette manipulation est d'illustrer les effets de l'utilisation de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) pour l'analyse spectrale des signaux numériques.

Avant d'arriver en séance, vous devez impérativement avoir assimilé les notions théoriques concernant :

- les hypothèses sous-jacentes à l'utilisation de la Transformée de Fourier Discrète ;
- les calculs d'erreur en fréquence et d'erreur relative en amplitude dans l'analyse spectrale d'une sinusoïde par TFD ;
- les techniques de fenêtrage et de bourrage de zéros (*zero padding*).

II TFD d'une sinusoïde

On va étudier l'utilisation de la Transformée de Fourier Discrète et mettre en avant la précision que l'on peut obtenir d'un tel outil pour l'analyse spectrale d'une sinusoïde. Pour cela, on va calculer la TFD de $N = 100$ d'échantillons d'un signal sinusoïdal d'amplitude unité et de fréquence f_0 compris entre 90 et 100 Hz, échantillonner à $F_e = 1$ kHz.

1†. Rappeler l'expression de la représentation fréquentielle d'un signal sinusoïdal analogique d'amplitude unité et de fréquence f_0.

2†. La fréquence d'échantillonnage choisie respecte t-elle le théorème de Shannon ?

3. Pour une fréquence $f_0 = 100$ Hz et pour $N = 100$ échantillons, tracer la représentation temporelle d'un tel signal échantillonné (pour rappel : `t=(0:N-1)/Fe;`).

4. Tracer, en fonction de la fréquence (pour rappel : `freq=(0:N-1)/N*Fe;`), le module de sa TFD (calculée par `X=fft(x);`), soit `plot(freq,abs(X))`. Peut-on ainsi retrouver les fréquences et amplitudes du signal analogique initial à partir de cette représentation ? On remarquera que pour retrouver l'amplitude il faut diviser la TFD par un facteur N.

5. Tracer le module de la TFD pour $f_0 = 95$ Hz et calculer la fréquence à laquelle elle est maximale et l'amplitude correspondante. Calculer l'erreur en fréquence, c'est-à-dire la différence entre la fréquence à laquelle la TFD est maximale et celle correspondant aux fréquences pures du signal analogique original.

6. Calculer l'erreur en amplitude (c'est-à-dire la différence entre l'amplitude des fréquences du signal analogique original et celle correspondant à l'amplitude maximale de la TFD divisée par N). Le calcule avec Matlab de la valeur maximale d'un vecteur réel `v` se fait par `v_max=max(v)`. En déduire l'**erreur relative en amplitude** (en pourcentage) donnée par l'analyse spectrale d'une sinusoïde par TFD (erreur sur l'amplitude divisée par l'amplitude) dans cette configuration.

Pour diminuer cette erreur en amplitude il parait naturel de prendre un nombre plus élevé d'échantillons N. Pour vérifier que l'analyse est ainsi améliorée, on va refaire l'analyse précédente pour $N = 1000$ échantillons

7. Comparer la TFD de la sinusoïde pour $f_0 = 100$ Hz, $f_0 = 95$ Hz et $f_0 = 99,5$ Hz. Quelle est maintenant l'erreur relative en amplitude ? Commenter le résultat...

Pour bien comprendre ce qu'il se passe, il faut se souvenir que la représentation fréquentielle associée aux signaux à temps discret est la Transformée de Fourier des Signaux Discrets (TFSD) dont la définition est :

$$\widehat{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-2i\pi \frac{nf}{F_e}}.$$

Cette représentation est une fonction périodique (de période F_e) de la fréquence f, variable à valeur continue. La Transformée de Fourier Discrète utilisée en pratique est la représentation fréquentielle associée aux signaux à temps discrets périodique (de période N). Elle est de période N et dépend d'un indice entier k :

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2i\pi \frac{nk}{N}}.$$

8†. Rappeler l'expression de la TFSD d'une sinusoïde échantillonnée de longueur N. Pourquoi est-il nécessaire de diviser le module de la TFSD par N pour retrouver l'amplitude du signal analogique original ?

9†. Rappeler la relation entre la TFD et la TFSD pour un signal de durée finie N.

10†. Déduire de cette relation l'erreur maximale en fréquence que l'on peut obtenir par TFD.

11. Comparer cette erreur maximale en fréquence théorique et celle obtenue en pratique (question 5). Commenter...

12†. Rappeler l'erreur relative maximale en amplitude calculée en Cours et pour quelles fréquences on obtient cette erreur maximale.

13. Comparer cette erreur relatives maximale en amplitude théorique et celle obtenue en pratique (question 6 et 7). Les fréquences pour lesquelles cette erreur est maximale en pratique vérifient-elles la propriété prédite par la théorie ? Commenter...

III Utilisation du *zero padding*

Pour mieux comprendre ce phénomène, on peut profiter de la technique du bourrage de zéros (*zero padding*), qui consiste à prolonger le signal étudié par des zéros avant d'en calculer sa TFD.

1.† Rappeler la relation entre la TFD de ce nouveau signal de longueur $M > N$ (composé des N échantillons du signal suivis de $M-N$ zéros) et la TFSD du signal original ? En quoi un tel outil permet d'améliorer l'analyse spectrale par TFD ?
2. Calculer la TFD du signal sur 10 fois plus d'échantillons (`M=10*N;`) en employant une telle technique. Pour cela, on pourra calculer cette TFD directement à partir du signal original en utilisant la fonction Matlab `X_ZP=fft(x,M);` Superposer le module de cette TFD, qui sera représentative de la TFSD (aux fréquences `freq_ZP=(0:M-1)/M*Fe;`) tracé avec la fonction `plot(freq_ZP,abs(X_ZP))`, au module de la TFD du signal original (tracé avec la fonction `stem(freq,abs(X))`). Effectuer cette opération pour $N = 100$ et $f_0 = 100$ Hz et $f_0 = 95$ Hz et commenter. . .
3. En pratique, pour éviter un cout de calculer élevé de la TFD sur un grand nombre d'échantillons, on se contente bien souvent d'effectuer le *zero padding* avec un facteur 2, soit $M = 2N$. Tracer la TFD pour $M = 2N$ pour $N = 100$ dans les cas où $f_0 = 100$ Hz et $f_0 = 97.5$ Hz (cas le plus défavorable). Calculer l'erreur relative maximale en amplitude et comparer au cas sans *zero padding*. . .

IV Utilisation d'une fenêtre de pondération

Afin d'obtenir une erreur plus faible en amplitude, on peut effectuer un fenêtrage (ou pondération) du signal temporel avant de calculer sa TFD. De façon implicite, nous avons considéré jusqu'alors une pondération du signal par une fenêtre rectangulaire lors de la troncature de la sinusoïde :

$$w_R[n] = \begin{cases} 1 \text{ pour } n = 0 \dots N-1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Il existe un grand nombre de fenêtre de pondération mais nous allons étudier ici uniquement le cas de la fenêtre de Hanning :

$$w_H[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos(\frac{2\pi n}{N-1})) \text{ pour } n = 0 \dots N-1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1.† Rappeler l'effet sur la TFSD de cette pondération par une fenêtre. En déduire l'effet sur la TFD et donc sur l'analyse spectrale effectuée.
2.† Quelles sont les propriétés souhaitées pour une telle fenêtre ? En pratique, quels sont les inconvénients de l'utilisation d'une telle fenêtre ?
3. Tracer les représentations fréquentielles (parfois appelées fenêtres spectrales) correspondant à ces fenêtres de pondération : `w_r=ones(1,N);` et `w_h=hanning(N);` et les comparer. On pourra pour cela tracer, pour chaque fenêtre, le module de leur TFD en dB après bourrage de zéros pour $M = 10N$; soit : `M=10*N; freq_ZP=(0:M-1)/M*Fe; W = fft(w,M); plot(freq_ZP,20*log10(abs(W)));`
   Analyser ces fenêtres spectrales en terme de largeur et amplitudes des lobes. . .

4. Fenêtrer le signal par une fenêtre de Hanning : `x_h=x.*w_h';` et tracer le module de sa TFD (fonction `stem`) pour $N = 100$ et $f_0 = 100$ Hz. Superposer à ce module le module de la TFD après *zero padding* pour $M = 10N$ du signal fenêtré (fonction `plot`). Faire de même pour $f_0 = 95$ Hz et commenter ces résultats. . .
5. Montrer qu'il faut diviser l'amplitude par $\widehat{w_H}(0) = \sum_n w_H[n]$ (qui se calcule par `sum(w_h)`) pour retrouver l'amplitude de la sinusoïde analogique originale dans le meilleurs des cas.
6. Donner l'erreur relative maximale en amplitude ainsi obtenue pour l'analyse spectrale de la sinusoïde par TFD avec la fenêtre de Hanning, sans *zero padding*. Commenter en comparant la version avec et sans pondération. . .

V Résolution de l'analyse spectrale par TFD

La résolution en analyse spectrale est la distance minimale entre deux fréquences f_0 et f_1 pour que l'on puisse des distinguer. Plus cette distance est petite, meilleure est la résolution. On va ici étudier la résolution d'un point de vue pratique.

1. Tracer la TFD d'un signal constitué de deux sinusoïdes d'amplitudes unité et de fréquences f_0 et f_1, pour une fréquence f_0 choisie comme précédemment, en faisant varier la fréquence f_1. Tracer cette TFD avec et sans *zero padding* pour $M = 10N$. Jusqu'à quelle distance $f_1 - f_0$ peut-on clairement distinguer les deux fréquences ?
2. Faire de même en pondérant le signal par une fenêtre de Hanning. Jusqu'à quelle distance $f_1 - f_0$ peut-on clairement distinguer les deux fréquences ?
3. Conclure sur le compromis entre erreur en amplitude et résolution dans l'utilisation des fenêtres de pondération. . .