Chapitre 2. Les circuits, les cycles et les arbres

I Partition en niveaux des sommets d'un graphe sans circuit

Comment déceler l'absence de circuit dans un graphe ? Procédure de mise en niveau et détection des circuits dans un graphe $G = (X, U)$:

Définition 1 (partition en niveaux)

a) On trace le dictionnaire sommets/prédécesseurs du graphe.

b) On cherche dans le dictionnaire les sommets sans précédents (les sources*). Les sources constituent le niveau 0 (ou rang 0) : soit N_0 l'ensemble de ces sommets. On passe ensuite au niveau $k = 1$.*

c) Le niveau k, N_k, est l'ensemble des sommets sans prédécesseurs dans le sous-graphe issu des sommets de $X \setminus (N_0 \cup ... \cup N_{k-1})$ (c'est-à-dire sans les sommets des niveaux inférieurs). On passe au niveau $k + 1$.

d) On arrête quand un niveau est vide.

Propriété 1 *G peut être entièrement décomposé en niveau (partitionné) $\Leftrightarrow$ G est sans circuit.*

Remarque *Un tri topologique se déduit facilement de la mise en niveaux.*

Propriété 2 *Si G est sans circuit et si l'arc $(x, y) \in U$ alors $niv(x) < niv(y)$*

Propriété 3 *Si G est sans circuit et si un sommet x est de rang $r > 0$ alors il admet au moins un prédécesseur de rang $r - 1$.*

Propriété 4 *Si G est sans circuit alors le rang d'un sommet est la longueur du plus long chemin vers ce sommet.*

Remarque *Si x est de rang r il peut exister des chemins de longueur inférieure à r.*

II Arbre (notion non orientée)

Propriété 5 *Pour tout graphe non orienté G d'ordre n avec m arêtes,*

- *G sans cycle $\Rightarrow$ G a moins de n-1 arêtes : $m \leq n-1$*
- *G connexe $\Rightarrow$ G a plus de n-1 arêtes : $m \geq n-1$*

Définition 2 (Arbre) *Un* arbre *est un graphe connexe et sans cycle.*

Propriété 6 (Propriétés caractéristiques) *Les propositions suivantes sont équivalentes et caractérisent un arbre H :*

1. *H est connexe et sans cycle.*
2. *H est sans cycle et a (n-1) arêtes.*
3. *H est connexe et a (n-1) arêtes.*
4. *H est sans cycle et toute arête ajoutée crée un cycle unique.*
5. *H est connexe et toute arête supprimée le rend non connexe.*
6. *tout couple de sommet est relié par une chaîne unique.*

Remarque *Le concept d'arbre est défini pour un graphe non orienté, dans le cas orienté on considère le graphe associé à G en ne tenant pas compte de l'orientation des arcs.*

III Arbre couvrant de poids minimum

Définition 3 (Arbre couvrant) *Un* arbre couvrant *(ou arbre partiel) d'un graphe G (orienté ou non) est un graphe partiel de G connexe et sans cycle.*

Théorème 1 *Un graphe admet un arbre couvrant si et seulement s'il est connexe.*

Définition 4 (problème de l'arbre couvrant de poids minimum)
*Soit $G = (X, U)$ un graphe connexe pondéré positivement par une fonction poids (ou coût) $p : U \rightarrow \mathbb{R}^+$. Le problème de l'*arbre couvrant de poids minimum *ou a.p.m. consiste à trouver un graphe partiel $(X, U' \subseteq U)$ de G qui soit connexe et de poids $\sum_{u \in U'} p(u)$ minimum parmi tous les graphes partiels de G.*

Algorithme de KRUSKAL croissant : On classe préalablement les arêtes dans l'ordre de leurs poids croissants : $p(u_1) \leq p(u_2) \leq \ldots \leq p(u_m)$

- au départ $G_1 = (X, V_1)$, $V_1 = \{u_1\}$ où u_1 est l'arête de poids minimum dans G
- étape courante $G_{k+1} = (X, V_{k+1})$ obtenu à partir de G_k en ajoutant la première arête (dans l'ordre des poids) dont l'adjonction à V_k ne crée pas de cycle.
- fin de l'algorithme quand $|V_k| = n-1$

Il existe aussi Kruskal décroissant (on classe les arêtes en poids décroissant et on les élimine tant qu'on reste connexe).