

ANNEXE LIEU DES RACINES (LIEU D'EVANS)

Avertissement Cette annexe ne constitue qu'une présentation sommaire et réductrice du lieu d'Evans et de son utilisation. Elle n'est en aucun cas suffisante, et ne prétend pas se substituer à vos notes de cours, que nous vous invitons à consulter pour de plus amples détails. Vous pouvez également vous reporter à des ouvrages de référence tels que :

F. de Caufort, C. Foulard, J. Calvet. *Asservissements linéaires continus*. Dunod.
G.F. Franklin, J.D. Powell, A. Emami-Naeini. *Feedback control of dynamic systems*. Addison-Wesley.
K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall Éd.

Introduction Soit le système asservi admettant une chaîne directe et une chaîne de retour de transmittances respectives $G(p) = \frac{N_G(p)}{D_G(p)}$ et $H(p) = \frac{N_H(p)}{D_H(p)}$. On appelle *fonction de transfert en boucle ouverte* le produit $G_{BO}(p) = G(p)H(p)$. On désigne par m le degré du numérateur $N_{BO}(p) = N_G(p)N_H(p)$ de la boucle ouverte, et par n son ordre, c-à-d. le degré de son dénominateur $D_{BO}(p) = D_G(p)D_H(p)$.

La transmittance de cet asservissement est définie par (Figure 1)

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} = \frac{N_G(p)D_H(p)}{N_G(p)N_H(p) + D_G(p)D_H(p)} \quad (1)$$

Ses zéros sont les zéros de sa chaîne directe et les pôles de sa chaîne de retour. En effet,

$$z \in \mathbb{C} \text{ est un zéro de } F(p) \Leftrightarrow N_G(z) = 0 \text{ ou } D_H(z) = 0. \quad (2)$$

D'autre part, les pôles de la fonction de transfert du système asservi sont les racines de l'équation caractéristique $1 + G(p)H(p) = 0$, soit

$$p \in \mathbb{C} \text{ est un pôle de } F(p) \Leftrightarrow 1 + G_{BO}(p) = 0 \quad (3)$$

ou bien, sous forme polynômiale,

$$p \in \mathbb{C} \text{ est un pôle de } F(p) \Leftrightarrow \text{Num}\{1 + G(p)H(p)\} = N_G(p)N_H(p) + D_G(p)D_H(p) = 0. \quad (4)$$

Ainsi, le système asservi

- est du même ordre que sa boucle ouverte ;
- est stable si et seulement si les solutions de l'équation $1 + G_{BO}(p) = 0$ sont à parties réelles négatives. En effet, un système de fonction de transfert $F(p)$ est stable si et seulement si ses pôles sont situés à gauche de l'axe imaginaire dans le plan complexe.

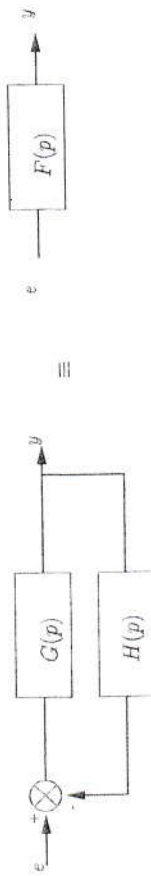


FIG. 1 - Chaîne directe et chaîne de retour → Fonction de transfert en BF

Définition du lieu d'Evans Il est particulièrement intéressant d'étudier la configuration des pôles d'un système asservi lorsqu'un gain k variable est inséré dans sa boucle. On peut alors en déduire les valeurs de k pour lesquelles l'asservissement est stable, celles pour lesquelles il est rapide, suffisamment amorti, etc.

Si un amplificateur de gain k est introduit dans la boucle du système asservi représenté Figure 1 - en aval du comparateur par exemple - alors les n pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont les solutions de l'équation caractéristique

$$1 + kG_{BO}(p) = 0, \quad (5)$$

ou bien, sous forme polynômiale

$$D_{BO}(p) + kN_{BO}(p) = 0. \quad (6)$$

Le lieu \mathcal{L} de l'ensemble des solutions obtenues lorsque k varie est appelé le *lieu des racines* (pour « lieu des racines de l'équation caractéristique de l'asservissement lorsque le gain k varie », *lieu des pôles du système asservi* (sous-entendu « lorsque k varie », ou *lieu d'Evans* (du nom de son créateur).

Règles pour l'élaboration de \mathcal{L} Si

$$G_{BO}(p) = k_{BO}\Gamma(p), \text{ avec } \Gamma(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\prod_{i=1, \dots, m} (p - z_i)}{\prod_{j=1, \dots, n} (p - p_j)}, \quad (7)$$

alors l'équation (5) peut être réécrite sous la forme « canonique »

$$1 + K\Gamma(p) = 0, \text{ avec } K = k_{BO}k, \quad (8)$$

soit

$$D(p) + KN(p) = 0, \quad (9)$$

ou bien

$$\frac{\prod_{i=1, \dots, m} (p - z_i)}{\prod_{j=1, \dots, n} (p - p_j)} = -\frac{1}{K}. \quad (10)$$

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où $K \in \mathbb{R}_+$ (si $K \leq 0$, se référer à un ouvrage de base). Soient Z_i d'affixe z_i , $i = 1, \dots, m$, et P_j d'affixe p_j , $j = 1, \dots, n$, les points du plan complexe correspondant aux zéros et aux pôles de $\Gamma(p)$, respectivement. D'après (10), un point M d'affixe p appartient au lieu des racines \mathcal{L} si et seulement si

$$\sum_{i=1, \dots, m} \arg \overline{Z_i M} - \sum_{j=1, \dots, n} \arg \overline{P_j M} = \pi + 2\lambda\pi. \quad (11)$$

Cette condition nécessaire et suffisante d'appartenance à \mathcal{L} est appelée *condition des angles*. En outre, (10) implique la condition suivante, dite *condition des modules*, utilisée pour graduer le lieu \mathcal{L} en fonction de K .

$$\frac{\prod_{i=1, \dots, m} |\overline{Z_i M}|}{\prod_{j=1, \dots, n} |\overline{P_j M}|} = \frac{1}{K}. \quad (12)$$

Voici les règles que l'on établit à partir de (11)-(12) pour la construction du lieu :

1. Nombre de branches du lieu : égal au degré n de $\Gamma(p)$;
2. Symétrie du lieu par rapport à l'axe réel : un point $M[p]$ appartenant au lieu \mathcal{L} est soit sur l'axe réel, soit admet une partie imaginaire non nulle ; dans ce dernier cas, le lieu \mathcal{L} comprend également le symétrique M^* de M , d'affixe p^* (conjugué de p) ;
3. Départ et arrivées des branches : le lieu comporte
 - n points de départ, pour $K = 0$, situés sur les pôles p_j de $\Gamma(p)$;
 - m (avec bien sûr $m < n$) points d'arrivée, pour $K = +\infty$, situés sur les zéros z_i de $\Gamma(p)$;
 - $n - m$ branches infinies ;
4. Asymptotes :
 - les $n - m$ asymptotes des branches infinies du lieu \mathcal{L} font les angles $\beta_\lambda = \frac{2\lambda+1}{n-m}\pi$, $\lambda = 0, \dots, (n - m - 1)$ avec l'horizontale ;
 - elles intersectent l'axe réel en le point Δ , d'affixe $\delta = \frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m}$;
5. Branches du lieu appartenant à l'axe réel : un point M d'affixe réelle appartient à \mathcal{L} si le nombre de pôles et zéros réels de $\Gamma(p)$ situés à droite de M est impair ;
6. Intersections du lieu avec l'axe réel (points de séparation) : il est possible que le lieu quitte ou rejoigne l'axe réel en certains points de celui-ci ; pour que $X[x]$ soit un tel point, il faut que x vérifie $\frac{dN(p)}{N(p)dp} \Big|_{p=x} = \frac{dD(p)}{D(p)dp} \Big|_{p=x}$. Cette condition n'est pas suffisante.
7. D'autres éléments de tracé peuvent être obtenus à partir d'un examen approfondi de (11) et (12), tels que la recherche des tangentes de \mathcal{L} en ses points de départ et d'arrivée finis. Vous êtes invités à vous reporter au cours pour davantage d'informations.

Exemples

Le lieu tracé sur la Figure 2 est le lieu des racines de l'équation $1 + K \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} = 0$, $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, lorsque K varie de 0 à $+\infty$. Ce lieu comporte 2 branches. Les racines recherchées sont réelles pour $K \leq (\frac{p_2-p_1}{2})^2$. À partir de cette valeur de K , les branches quittent l'axe réel et font un angle de $\pm \frac{\pi}{2}$ avec l'horizontale. Tous les pôles qui s'y situent admettent une partie réelle négative, égale à $\frac{p_1+p_2}{2}$.

La Figure 3 présente le lieu des pôles d'un asservissement admettant $K \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)}$ pour boucle ouverte, $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, lorsque K varie de 0 à $+\infty$. Ce lieu comporte 3 branches. Les pôles de l'asservissement sont réels pour K suffisamment faible. Ensuite, deux d'entre eux deviennent complexes conjugués, et leur partie réelle croît avec K . Lorsque $K = -p_1 p_2 (p_1 + p_2)$, ils prennent des valeurs imaginaires pures. Pour $K \rightarrow \infty$, le module de ces deux pôles complexes conjugués croît indéfiniment, ils tendent vers des asymptotes coupant l'axe réel en le point d'affixe $\delta = \frac{p_1+p_2}{3}$ et faisant un angle de $\pm \frac{\pi}{3}$ avec l'horizontale ; le pôle réel demeurant sur l'axe des réels négatifs, son argument vaut $-\pi$.

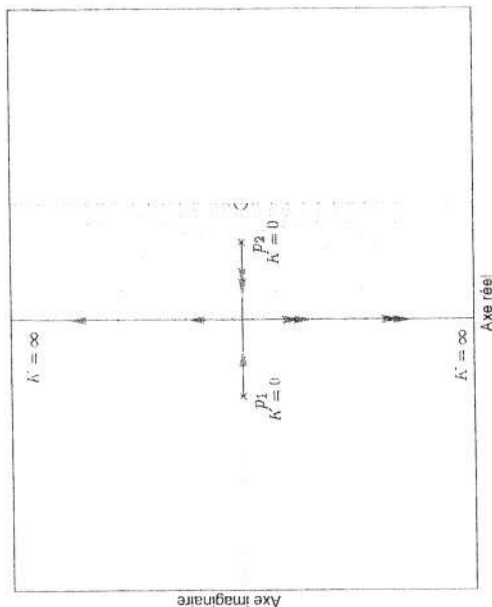


FIG. 2 - Lieu des racines de $1 + K \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} = 0$

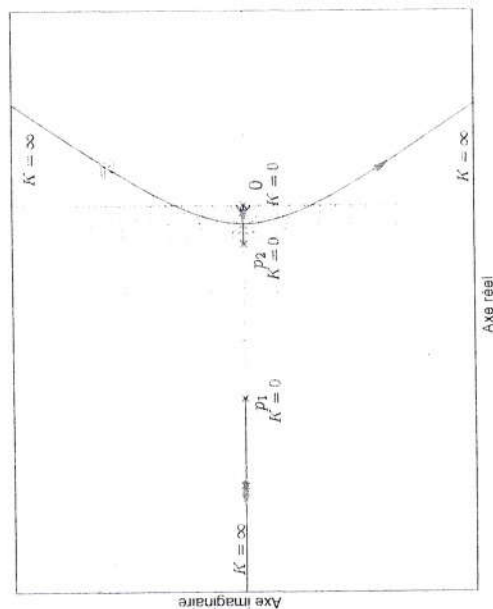


FIG. 3 - Lieu des racines de $1 + K \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)} = 0$