TD 5 : Filtres numériques

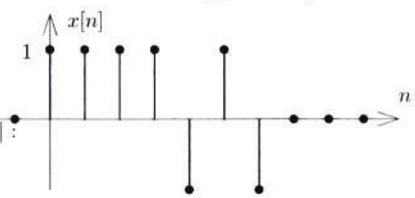
Exercice 1 : Étude de filtres

Soient les filtres numériques dont les relations entrée/sortie sont régies par les équations de récurrence suivantes :

$H_1 : s[n] = \frac{1}{2}(e[n]+e[n-1]),\qquad H_2 : s[n] = \frac{1}{2}(e[n]-e[n-1]),\qquad H_3 : s[n] = \frac{1}{2}(e[n]+s[n-1]).$

Pour chacun de ces filtres, répondre aux questions suivantes :

1. Ce filtre est-il causal ?
2. Calculer sa réponse impulsionnelle $h[n]$, sa fonction de transfert $H(z)$ et sa réponse en fréquence $\hat{h}(f)$.
3. Ce système est-il stable ?
   Ce système est-il à minimum de phase ?
   De quel type est ce filtre ?
4. Calculer la sortie de ce filtre pour l'entrée $x[n]$:



Exercice 2 : Modifications de la réponse impulsionnelle

Soit un filtre numérique de réponse impulsionnelle $h[n]$, de fonction de transfert $H(z)$ et de réponse en fréquence $\hat{h}(f)$. Calculer la réponse en fréquence et la fonction de transfert des filtres de réponse impulsionnelle :

1. $g_1[n] = h[n]e^{2j\pi n f_0/f_e}$;
2. $g_2[n] = h[n]\cos(2\pi n f_0/f_e)$;
3. $g_3[n] = h[n]\sin(2\pi n f_0/f_e)$;
4. $g_4[n] = h[n](-1)^n$.
5. Si $h[n]$ est un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c, quelles sont les caractéristiques fréquentielles des filtres $g_2[n]$ et $g_4[n]$

Exercice 3 : Synthèse d'un filtre RIF passe-bande

On dispose d'un signal numérique échantillonné à une fréquence $F_e = 100$ kHz. On souhaite récupérer la partie de ce signal situé dans la bande de fréquence 20 kHz – 40 KHz. On va pour cela synthétiser un filtre numérique de réponse impulsionnelle finie (RIF).

1. Quel est le principal intérêt d'un filtre RIF ?
2. Tracer la réponse en fréquence du filtre numérique idéal. Calculer la réponse impulsionnelle du filtre numérique idéal correspondant.

3. Donner l'expression des coefficients du filtre RIF causal pour une troncature par fenêtre de pondération rectangulaire à $N = 2P+1$ coefficients non nuls.
4. Donner l'expression des coefficients du filtre si l'on utilise une fenêtre de pondération de Hanning ($w[n] = \frac{1}{2}(1-\cos(2\pi\frac{n}{N-1}))\mathbb{1}_{\{0,\dots N-1\}}[n]$) plutôt qu'une fenêtre rectangulaire. Quel est l'intérêt d'une telle opération ?
5. Dans une telle synthèse, sur quels paramètres peut-on jouer afin que le filtre satisfasse le gabarit ?
6. Quel est le temps de propagation de phase d'un tel filtre ? En déduire le retard entre l'entrée et la sortie du filtre...

Exercice 4 : Synthèse d'un filtre RII passe-bas

On dispose d'un filtre analogique passe-bas satisfaisant au plus près un gabarit (réponse en fréquence telle que $|\hat{h}_a(f)|_{\text{dB}} \geq \alpha_1$ pour $|f| \leq f_1 = 19$ kHz et $|\hat{h}_a(f)|_{\text{dB}} \leq \alpha_2$ pour $|f| \geq f_2 = 20$ kHz). On cherche maintenant, à partir de ce filtre analogique, à synthétiser un filtre numérique passe-bas satisfaisant ce même gabarit pour une fréquence d'échantillonnage $F_e = 100$ kHz.

I Synthèse par invariance impulsionnelle

1. Rappeler le principe de la synthèse d'un filtre par invariance impulsionnelle.
2. Pour un filtre d'ordre 1 de fonction de transfert $H_a(p) = \frac{A}{p-B}$, donner la fonction de transfert $H_n(z)$ du filtre numérique ainsi synthétisé.
3. En déduire la fonction de transfert du filtre numérique correspondant à la discrétisation d'un filtre analogique n'ayant que des pôles simples... Est-on assuré que ce filtre soit stable ?
4. Quel est l'effet d'une telle méthode de synthèse sur la réponse en fréquence du filtre ? Est-on assuré que le filtre numérique ainsi synthétisé satisfasse le gabarit ?

II Synthèse par transformation bilinéaire

1. Rappeler le principe de la synthèse d'un filtre par transformation bilinéaire.
2. Est-on assuré que le filtre numérique ainsi synthétisé soit stable ?
3. Quel est l'effet d'une telle méthode de synthèse sur la réponse en fréquence du filtre ? Pour quelles fréquences la réponse en fréquence du filtre numérique ainsi synthétisé vaut-elle $|\hat{h}_n(f)|_{\text{dB}} = \alpha_1$ et $|\hat{h}_n(f)|_{\text{dB}} = \alpha_2$? Est-on assuré que le filtre numérique ainsi synthétisé satisfasse le gabarit ?
4. Quel filtre analogique aurait-il fallu synthétiser pour que le filtre numérique synthétisé par transformation bilinéaire satisfasse le gabarit désiré ?

TDS
Filtres Numériques

TDS exercice 1

$H_1 : s[n] \; \frac{1}{2}(e[n] + e[n-1])$

① Est il causal ?

Définition : la sortie a un instant ~~t~~ n dépend uniquement des évènements en entrée ~~et en sortie~~ aux instants $\leq n \Rightarrow H_1$ est causal !

② Calculer $e[n] \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow s[n]$

Etape 1 : Calculer $h[n]$

Etape 2 : Calculer $H(z)$

Etape 3 : $\hat{h}(f)$

TDG
Analyse spectrale

Exercice 1 : Analyse spectrale par TFD

① Calculer et tracer la TF de $x_0(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

DSF : $\frac{A}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right) = \frac{A}{2}\left(e^{2j\pi f_0 t} + e^{-2j\pi f_0 t}\right)$

② Calculer la TF de $x_1[n]$

$x_1[n] = \begin{cases} x(nT_e) \text{ pour } n = 0 \dots N-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{Tps discret} \\ \text{Non périodique (durée finie)} \end{cases}$

TFSD

$\hat{x}_1(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] \, e^{-2j\pi n f/F_e} = \sum_{n=0}^{N-1} A\cos(2\pi f_0/F_e) \, e^{-2j\pi n f/F_e}$

on transforme le cos grâce aux formules d'Euler

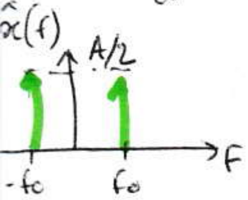
$= A \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{2j\pi n f_0/F_e} + e^{-2j\pi n f_0/F_e}}{2} e^{-2j\pi n f/F_e}$

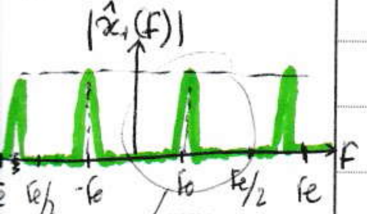
$= \frac{A}{2}\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi n(f_0 - f_0)/F_e} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{2j\pi n(f+f_0)/F_e}\right)$

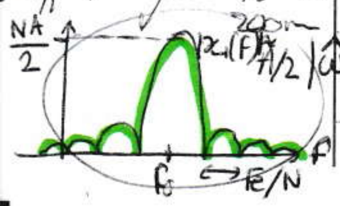
$= \frac{A}{2}\left(\hat{\omega}_r(f-f_0) + \hat{\omega}_r(f+f_0)\right)$ avec $\omega_r(f) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2j\pi f/F_e}$

$\hat{\omega}_r(f)$ correspondant a la TFSD de $\mathbb{1}_{\{0,N-1\}}[n]$

$|\hat{\omega}_r(f)| = \left|\frac{\sin(\pi N f/F_e)}{\sin(\pi f/F_e)}\right|$ (TD4 Exo1 Q2)







$|\hat{x}_1(f)| A/2 \; |\hat{\omega}_r(f-f_0)|$ = ~~sin πN~~ = 0 pour f multiple de F_e/N

$\rightarrow \hat{\omega}_r(0) = N$