Fiche de Résumé pour l'examen Modélisation Robotique du 5 décembre 2023

Les attendus

- **MGD** : repères, paramètres DHM, matrices élémentaires, questions de compréhension.
- **MDD** : savoir calculer une jacobienne (pas de jacobienne analytique). Calculer une jacobienne (ou une jacobienne préférentielle qui utilise le même raisonnement et des formules similaires, voir poly).
- **MDI** : savoir calculer un MDI et/ou appliquer condition de compatibilité
- **Redondance**
- **Dynamique** : pas de calcul de la matrice C(q, dq) qui est trop complexe (calcul des dérivées) mais question sur A(q) ou G(q) ou de compréhension
- **Génération de mouvement**

Chapitre 1: Généralités sur les Bras Manipulateurs

Tâche Robotique

- Une tâche robotique englobe le placement d'objets dans l'environnement et la manipulation des repères attachés à ces objets.
- Il est nécessaire de définir un formalisme pour faciliter les opérations de changement de repères et savoir définir un repère attaché à un objet.
- Conventions
  - Utilisation de repères directs (règle de la main droite).
  - Sens positif pour une rotation dans le sens trigonométrique.

Pourquoi Construire des Modèles ?

- L'utilisateur décrit la tâche robotique sous forme de mouvements et d'actions que doit effectuer l'outil porté par le robot.
- Le robot doit coordonner le mouvement de l'ensemble de ses liaisons pour réaliser le mouvement désiré tout en respectant les contraintes liées à sa mécanique.
- La tâche est décrite dans l'espace opérationnel (X), tandis que le robot est contrôlé dans l'espace articulaire (Q). Il faut donc construire des modèles entre ces espaces.
  - Modèle géométrique direct ou inverse
  - Modèle différentiel direct ou inverse
  - Modèle dynamique direct ou inverse

Définitions

- **Structure Mécanique Articulée (SMA)**
  - Assemblage de n corps rigides reliés par des liaisons.
  - Chaque liaison est caractérisée par une coordonnée généralisée q_i (espace généralisé Q).
- **Organe Terminal (OT)**
  - Dernier corps destiné à manipuler l'outil.
  - Interface permettant au robot d'agir sur son environnement.
- **Type d'assemblage**
  - Chaînes série (simple) : 1 antécédent et 1 successeur.
  - Chaînes arborescentes : 1 antécédent et 1 ou plusieurs successeurs.
  - Chaînes complexes (parallèles) : 1 ou plusieurs antécédent et 1 ou plusieurs successeurs. (Dans ce cours, limité aux structures séries).
- **Situation**
  - position + orientation d'un corps par rapport à un repère de référence.
- **Liaison**
  - lie deux corps successifs en limitant le nombre de degrés de liberté (ddl) de l'un par rapport à l'autre.
- **Espace Généralisé (Q)**
  - Ensemble de toutes les coordonnées généralisées d'un bras manipulateur.
  - Chaque coordonnée généralisée représente la position ou l'angle d'une liaison dans le système. Pour un bras manipulateur avec N liaisons, il y a N coordonnées généralisées.
  - Le vecteur $q = (q_1, q_2, ..., q_n)^T$ représente ces N coordonnées généralisées sous forme d'un vecteur colonne.
- **L'espace opérationnel (X)**
  - Espace dans lequel l'organe terminal (OT) d'un bras manipulateur évolue.
  - Là où se trouvent les positions et orientations de l'outil ou de l'extrémité du robot.
- **Degré de liberté (ddl)**
  - Nombre de paramètres indépendants nécessaires pour décrire complètement la position et l'orientation de l'organe terminal.
  - Peuvent inclure les coordonnées de position (par exemple, x, y, z) et les paramètres d'orientation (par exemple, angles d'Euler).
- **Redondance**
  - Un bras manipulateur est redondant si D < M (nombre de ddl de l'OT inférieur au nombre de ddl du bras).
- **Configuration Singulière**
  - Dans certaines configurations, le nombre de ddl de l'OT peut être inférieur à D, conduisant à des configurations singulières.
- **Espace de Travail d'un Robot**
  - Ensemble des positions et orientations accessibles par un repère lié à l'organe terminal lorsque les paramètres articulaires prennent toutes

les valeurs permises.
    * Espace de travail primaire.
    * Dexterous workspace : Positions accessibles avec toutes les orientations possibles.

- **Caractéristiques des Bras Manipulateurs**
  - **Volume de Travail** : Étendue des positions et orientations que le robot peut atteindre.
  - **Charge Utile** : Capacité maximale de charge que le robot peut manipuler.
  - **Vitesse et Accélérations Maximales** : Contraintes sur la vitesse et les accélérations pour respecter le temps de cycle.
  - **Précision** : Écart moyen entre la position réelle et la position souhaitée.
  - **Répétabilité** : Dispersion des positions répétées pour la même tâche.

Modèle Géométrique Direct (MGD)

Objectif du MGD - Cherche le modèle permettant de passer de l'espace généralisé Q à l'espace opérationnel X. - X peut décrire la situation de l'OT ou de l'outil. - Calcul à réaliser : X = F(q).

Méthodoologie 1. **Calcul de T0,n(q) :** Ne dépend que du robot. 2. **Calcul de X en fonction de T0,n(q) :** Ne dépend que du choix des coordonnées opérationnelles.

Etape 1 : Calcul de T0,n

1.1 Mettre en place les repères

- Pour R_0 : imposé ou choisi selon la convention ($x0$ perpendiculaire à la liaison 1 et $z0$ porté par l'axe de la liaison)
- Pour R_{i-1} avec $i = 2...n$
  1. Numéroter les corps de 0 à n et les liaisons de 1 à n
  2. Mettre en place les axes des liaisons $\Delta_i \rightarrow$ DIRECTION DU MOUVEMENT
  3. Mettre en place les perpendiculaires $\perp_{i-1}, i$ communes à Δ_{i-1} et Δ_i $\rightarrow$ GÉOMÉTRIE
  4. O_{i-1} est le point d'intersection entre Δ_{i-1} et $\perp_{i-1}, i$
  5. x_{i-1} porté par $\perp_{i-1}, i$ et orienté de Δ_{i-1} vers Δ_i. Si Δ_{i-1} vers Δ_i sont concourantes, convention (AVANT, DROITE, HAUT).
  6. z_{i-1} porté par Δ_{i-1} et orienté selon la convention (AVANT, DROITE, HAUT)
  7. (y_{i-1} donné par le produit vectoriel de z_{i-1} par x_{i-1})
- Pour R_n
  - O_n est choisi arbitrairement sur la liaison.
  - z_n est porté par la liaison.

- x_n est choisi, si possible, dans le plan défini par l'axe de la liaison n et par le point O_{n+1} (point particulier de l'OT).

1.2 Constuire le tableau des paramètres de DHM

i	1	2	3	...	n
σ_i	σ_1	σ_2	σ_3	...	σ_n
a_{i-1}	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}
α_{i-1}	α_0	α_1	α_2	...	α_{n-1}
r_i	r_1	r_2	r_3	...	r_n
θ_i	θ_1	θ_2	θ_3	...	θ_n
q_{ifig}	q_1	q_2	q_3	...	q_n

- i : Numéro du corps
- σ_i : Type de liaison (1 pour liaison prismatique, 0 pour liaison rotoïde)
- a_{i-1} : $dist(O_{i-1}, Oi)$ suivant l'axe X_{i-1}
- α_{i-1} : $ang(Z_{i-1}, Zi)$ selon l'axe X_{i-1}
- r_i : $dist(O_{i-1}, Oi)$ suivant l'axe Z_{i-1}
- θ_i : $ang(X_{i-1}, Xi)$ selon l'axe Z_{i-1}
- q_i : $q_i = \theta_i$ si $\sigma_i = 0$ ou $q_i = r_i$ si $\sigma_i = 1$

1.3 Construire les matrices $T_{i-1,i}$

A l'aide de la matrice générale de passage entre repères associées aux paramètres de DHM.

$$T_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ \cos(\alpha_{i-1})\sin(\theta_i) & \cos(\alpha_{i-1})\cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_{i-1}) & -r_i\sin(\alpha_{i-1}) \\ \sin(\alpha_{i-1})\sin(\theta_i) & \sin(\alpha_{i-1})\cos(\theta_i) & \cos(\alpha_{i-1}) & r_i\cos(\alpha_{i-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note : Pour la configuration de la figure vérifier chaque matrice. Cette étape permet de trouver la quasi totalité des erreurs (placement de repères, écriture du tableau ou de la matrice).

1.4 Calculer $T_{0,n}$

Pour calculer la transformation $T_{0,n}(q)$ d'un bras manipulateur, on utilise la relation $T_{0,n}(q) = T_{0,1}(q_1) \cdot T_{1,2}(q_2) \cdot \ldots \cdot T_{n-1,n}(q_n)$. Cette transformation peut être représentée sous forme matricielle comme suit :

$$T_{0,n}(q) = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{0,n} & P_{0,n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Attention - Ne pas calculer la deuxième colonne de $T_{0,n}(q)$ - Calculer les produits de la **droite vers la gauche**. - Regrouper les rotations consécutives. - Dès qu'un coefficient apparaît, le mémoriser dans une variable intermédiaire Δ_{i-1}.

Une fois cette matrice obtenue, la situation du repère R_n en fonction des coordonnées généralisées q_i est calculée. Il reste ensuite à déterminer la transformation rigide pour passer du repère R_n au repère de l'organe terminal (OT).

Calcul de X

(...)

Modèle Différentiel Direct (MDD)

Le Modèle Différentiel Direct (MDD) est une représentation dynamique qui lie les mouvements des coordonnées de configuration $ q $ à ceux des coordonnées opérationnelles X. Il fait intervenir le temps, mais ne prend pas en compte les effets dynamiques tels que les masses, les frottements, ou les inerties.

Utilité du MDD : - Analyse du Comportement : Permet d'analyser le comportement du robot, y compris la détection de singularités et l'évaluation du domaine de travail. - **Commande :** Utilisé dans le contexte de la commande du robot, notamment pour la commande référencée tâche. - **Relation Statique :** Établit une relation statique entre les actions extérieures et les couples moteurs.

Définition de la Jacobienne

Le Modèle Géométrique Direct (MGD) traduit la fonction $q = (q_1, ..., q_n)^T$ vers $X = (x_1, …, x_m)^{T} = f(q) $, où les $ f_i $ sont des fonctions non-linéaires complexes.

Le Modèle Différentiel Direct (MDD) est la différentielle du MGD :

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_m}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dq_n}{dt} \end{bmatrix} = J(q) \cdot \frac{dq}{dt}$$

Où $J(q)$ est la matrice jacobienne de f en q.

- Si $\frac{dX}{dt}$ représente la vitesse de l'Effecteur Opérationnel (OT), la matrice $J(q)$ est appelée la **jacobienne analytique ($ J_a(q) $)**, étant la dérivée analytique du MGD. Ce calcul dépend du choix des coordonnées pour le MGD.
- Si $\frac{dX}{dt}$ représente la vitesse linéaire du point O_n et la vitesse de rotation du repère R_n par rapport au repère fixe R_0, la matrice $J(q)$ est appelée la **jacobienne géométrique** ou simplement la **jacobienne**.

Le calcul de $J(q)$ dépend explicitement de q. Notez que la matrice $J(q)$ peut ne pas être carrée ni inversible dans tous les cas.

Méthodes de calcul du MDD

Le calcul du Modèle Différentiel Direct (MDD) peut être effectué de différentes manières :

1. **Différentiation du MGD :** C'est une méthode simple lorsque le manipulateur est petit (n petit), mais elle peut devenir complexe pour des manipulateurs plus grands (n grand).
2. **Méthode directe :** Cette méthode utilise un schéma similaire à celui du Modèle Géométrique Direct (MGD). On sépare la partie robot du choix des coordonnées de l'Effecteur Opérationnel (OT), puis on calcule :
    - La vitesse linéaire du point O_n et la vitesse de rotation du repère R_n par rapport au repère de base à partir de la jacobienne géométrique J_g.
    - La vitesse de l'OT en fonction de J_g et du choix des coordonnées de situation utilisé.

Jacobienne (géométrique)

Pour calculer la **vitesse linéaire du point** O_n et la **vitesse de rotation du repère** R_n par rapport au repère fixe R_0, on souhaite exprimer la vitesse opérationnelle $\dot{X} = (\dot{p}, \omega) = (v, \omega)$ en fonction de $\dot{q}$.

Relations cinématiques pour une liaison

On examine l'effet du mouvement de la liaison i sur les autres liaisons en considérant que seule la liaison i bouge, les autres étant fixes.

Type de Liaison	Prismatique	Rotoïde	Détail
Vitesse Linéaire $\dot{p}_i$	$\dot{p}_i = \dot{q}_i \cdot z_i$	$\dot{p}_i = \dot{q}_i \cdot (z_i \times p_{i,n})$	Pour une liaison prismatique, la vitesse linéaire du point O_n ($\dot{p}_i$) est donnée par $\dot{q}_i$ multiplié par la direction de la liaison z_i, et la vitesse de rotation ω_i est nulle.

Type de Liaison	Prismatique	Rotoïde	Détail
Vitesse de Rotation ω_i	$\omega_i = 0$	$\omega_i = \bar{\sigma}_i \cdot (z_i \cdot \dot{q}_i)$	Pour une liaison rotoïde, la vitesse linéaire du point O_n ($\dot{p}_i$) est donnée par $\dot{q}_i$ multiplié par le produit vectoriel de la direction de la liaison z_i et du vecteur reliant O_n à $P_{i,n}$ ($ p_{i,n}$), et la vitesse de rotation ω_i est donnée par $\dot{q}_i$ multiplié par la direction de la liaison z_i.

On utilise le symbole σ_i (et son complémentaire $\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$ pour une liaison P / R) pour exprimer ces relations de manière compacte :

$$\boxed{\dot{p}_i = (\sigma_i z_i + \bar{\sigma}_i (z_i \times p_{i,n}))\dot{q}_i, \quad \omega_i = \bar{\sigma}_i \cdot (z_i \cdot \dot{q}_i)}$$

Calcul de la Jacobienne (géométrique)

On calcule séparément la vitesse linéaire du point O_n et la vitesse de rotation du repère R_n en utilisant le principe de superposition des vitesses :

$$\dot{p} = \sum_{i=1}^{n} (\sigma_i z_i + \bar{\sigma}_i z_i \times p_{i,n})\dot{q}_i, \quad \omega = \sum_{i=1}^{n} \bar{\sigma}_i z_i \cdot \dot{q}_i$$

Ces relations peuvent être écrites de manière matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} = J_g(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} J_P \\ J_O \end{bmatrix} \dot{q} = \begin{bmatrix} J_{P1} & J_{P2} & \dots & J_{Pn} \\ J_{O1} & J_{O2} & \dots & J_{On} \end{bmatrix} \dot{q}$$

Avec les blocs de la jacobienne définis comme suit :

Liaison Prismatique	Liaison Rotoïde
$J_{Pi} = \begin{bmatrix} z_i \\ 0 \end{bmatrix}$	$J_{Pi} = \begin{bmatrix} z_i \times (p_{i,n} - p_i) \\ z_i \end{bmatrix}$

Plus génériquement :

$$J(q) = \begin{bmatrix} \sigma_1 z_1 + \bar{\sigma}_1 z_1 \wedge O_1 O_n & \sigma_2 z_2 + \bar{\sigma}_2 z_2 \wedge O_2 O_n & \dots & \sigma_n z_n + \bar{\sigma}_n z_n \wedge O_n O_n \\ \bar{\sigma}_1 z_1 & \bar{\sigma}_2 z_2 & \dots & \bar{\sigma}_n z_n \end{bmatrix}$$

Exemple sur un robot RRR

Consigne

Soit un robot de type RRR avec les matrices homogènes suivantes :

$$T_{01}(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{12}(q_2) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{23}(q_3) = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On récupère les différents termes des matrice de rotations qu'on notera :

Pour T_{01} : $x_{1(0)} = \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $y_{1(0)} = \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $z_{1(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $O_0O_{1(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Pour T_{12} : $x_{2(1)} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 0 \\ s_2 \end{bmatrix}$ $y_{2(1)} = \begin{bmatrix} -s_2 \\ 0 \\ c_2 \end{bmatrix}$ $z_{2(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $O_1O_{2(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Pour T_{23} : $x_{3(2)} = \begin{bmatrix} c_3 \\ s_3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $y_{3(2)} = \begin{bmatrix} -s_3 \\ c_3 \\ 0 \end{bmatrix}$ $z_{3(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $O_2O_{3(2)} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Etape 1 : Mise au point et recherche des différents termes

D'après la formule du cours, pour un robot de type RRR on a donc

$$J(q) = \begin{bmatrix} \sigma_1 z_1 + \bar{\sigma}_1 z_1 \wedge O_1 O_3 & \sigma_2 z_2 + \bar{\sigma}_2 z_2 \wedge O_2 O_3 & \sigma_3 z_3 + \bar{\sigma}_3 z_3 \wedge O_3 O_3 \\ \bar{\sigma}_1 z_1 & \bar{\sigma}_2 z_2 & \bar{\sigma}_3 z_3 \end{bmatrix}$$

D'après la convention 1 pour liaison prismatique et 0 pour liaison rotoïde on obtient la matrice suivante

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_1 \wedge O_1 O_3 & z_2 \wedge O_2 O_3 & z_3 \wedge O_3 O_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

Donc si on cherche $J(q)_{(0)}$

$$J(q)_{(0)} = \begin{bmatrix} z_{1(0)} \wedge O_1O_3 & z_{2(0)} \wedge O_2O_3 & z_{3(0)} \wedge O_3O_3 \\ z_{1(0)} & z_{2(0)} & z_{3(0)} \end{bmatrix}$$

- **On cherche** $z_{1(0)}$
  - $z_{1(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
- **On cherche** $z_{2(0)}$
  - $z_{2(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T = -y_{1(0)}$
  - $z_{2(0)} = \begin{bmatrix} s_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}^T$
- **Inutile de chercher** $z_{3(0)}$ **car** $O_3O_3 = 0$**, ainsi** $z_{3(0)} \wedge O_3O_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- **On cherche** $O_2O_{3(0)}$ **(calcul des longueur de droite à gauche)**
  - $O_2O_{3(0)} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a.x_{2(0)} \rightarrow x_{2(0)} =???$
    * $x_{2(1)} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 0 \\ s_2 \end{bmatrix} = c_2.x_1 + s_2.z_1$
    * $x_{2(0)} = c_2.x_{1(0)} + s_2.z_{1(0)} = c_2 \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1c_2 \\ s_1c_2 \\ s_2 \end{bmatrix}$
    * $O_2O_{3(0)} = a \begin{bmatrix} c_1c_2 \\ s_1c_2 \\ s_2 \end{bmatrix}$
- **On cherche** $O_1O_{3(0)}$
  - $O_1O_{3(0)} = O_1O_{2(0)} + O_2O_{3(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 + a.x_{2(0)} = a \begin{bmatrix} c_1c_2 \\ s_1c_2 \\ s_2 \end{bmatrix}$

Etape 2 : Calcul des produits vectoriels

Les termes de la matrice jacobienne correspondent aux produits vectoriels des vecteurs z_i avec les vecteurs de translation $O_iO_{3(0)}$. Les produits vectoriels peuvent être calculés comme suit :

1. Pour la première colonne de la matrice jacobienne :
   - $z_{1(0)} \wedge O_1O_{3(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge a \begin{bmatrix} c_1c_2 \\ s_1c_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times s_2 - 1 \times as_1c_2 \\ 1 \times ac_1c_2 - 0 \times s_2 \\ 0 \times s_1c_2 - 0 \times c_1c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -as_1c_2 \\ ac_1c_2 \\ 0 \end{bmatrix}$
2. Pour la deuxième colonne de la matrice jacobienne :

- $z_{2(0)} \wedge O_2O_{3(0)} = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge a \begin{bmatrix} c_1c_2 \\ s_1c_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ac_1s_2 \\ -as_1s_2 \\ as_1s_1c_2 + ac_1c_1c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ac_1s_2 \\ -as_1s_2 \\ ac_2(s_1^2c_1^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ac_1s_2 \\ -as_1s_2 \\ ac_2 \end{bmatrix}$

  Rappel : d'après les formules trigonométrie : sinšx + cosšx = 1

3. Pour la troisième colonne de la matrice jacobienne :

   - $z_{3(0)} \wedge O_3O_{3(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Etape 3 : Construction de la Jacobienne

Ainsi on peut alors construire la Jacobienne tel que :

$$J(q)_{(0)} = \begin{bmatrix} -as_1c_2 & -ac_1s_2 & 0 \\ ac_1c_2 & -as_1s_2 & 0 \\ 0 & ac_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple sur un robot RRPRR

Pour un robot de type $RRPRR$, la matrice de la jacobienne \$ J(q) \$ serait la suivante

$$J(q) = \begin{bmatrix} z_1 \wedge O_1O_5 & z_2 \wedge O_2O_5 & z_3 & z_4 \wedge O_4O_5 & z_5 \wedge O_5O_5 \\ z_1 & z_2 & 0 & z_4 & z_5 \end{bmatrix}$$

Plus précisément et comme $O_5O_5 = 0$

$$J(q) = \begin{bmatrix} (z_1 \wedge O_1O_5).x & (z_2 \wedge O_2O_5).x & (z_3).x & (z_4 \wedge O_4O_5).x & 0 \\ (z_1 \wedge O_1O_5).y & (z_2 \wedge O_2O_5).y & (z_3).x & (z_4 \wedge O_4O_5).y & 0 \\ (z_1 \wedge O_1O_5).z & (z_2 \wedge O_2O_5).z & (z_3).x & (z_4 \wedge O_4O_5).z & 0 \\ (z_1).x & (z_2).x & 0 & (z_4).x & (z_5).x \\ (z_1).y & (z_2).y & 0 & (z_4).y & (z_5).y \\ (z_1).z & (z_2).z & 0 & (z_4).z & (z_5).z \end{bmatrix}$$

Exercice sur un robot PRPRR : Tiré de l'annale d'avril 2022

On considère un robot manipulateur représenté de type $PRPRR$ pour lequel l'opérateur décrit la tâche à l'aide des coordonnées (cartésiennes) de position du point O_6 dans le repère R_0 et de l'orientation de R_5 par rapport à R_0 (cosinus directeurs partiels). La modélisation du robot donne les résultats suivants :

Le tableau des **paramètres de DHM** du robot considéré :

i	1	2	3	4	5
σ_i	0	0	0	0	0
a_{i-1}	1	0	0	0	0
α_{i-1}	0	0	1	0	0
r_i	0	0	0	$\frac{\Pi}{2}$	0
θ_i	q_1	q_2	$-\frac{\Pi}{2}$	0	$-\frac{\Pi}{2}$
q_{ifig}	0	0	q_3	q_4	0

Les **matrices de transformation homogène** sont données par les expressions suivantes :

$$T_{01} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{12} = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{23} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{34} = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_{45} = \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & 0 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer la matrice jacobienne préférentielle $J_{3(2)}(q)$

Modèle Différentiel Inverse

Déterminer le rang de la matrice jacobienne $J(q)$ à la main peut être accompli en suivant ces étapes :

1. **Écriture de la Matrice Jacobienne :** Commencez par écrire la matrice jacobienne $J(q)$. Elle aura m lignes (correspondant aux degrés de liberté de l'effecteur) et n colonnes (correspondant aux degrés de liberté des articulations).

2. **Calcul des Dérivées Partielles :** Chaque élément de $J(q)$ est une dérivée partielle par rapport à une variable articulaire. Calculez chaque dérivée partielle en utilisant les équations cinématiques qui décrivent la relation entre les coordonnées articulaires q et les coordonnées de l'effecteur X.

3. **Élimination des Éventuelles Symétries :** Assurez-vous que les colonnes de $J(q)$ ne présentent pas de dépendances linéaires significatives. Si une colonne est une combinaison linéaire des autres, cela indique une redondance dans les articulations et peut réduire le rang.

4. **Détermination du Rang :** Utilisez des méthodes standard pour déterminer le rang de $J(q)$. Cela peut inclure la réduction de la matrice à sa forme échelonnée réduite par lignes (REF) ou à sa forme échelonnée par blocs (RREF). Le rang est égal au nombre maximum de colonnes linéairement indépendantes dans $J(q)$.

5. **Interprétation :** Comparez le rang obtenu (r) avec le nombre de degrés de liberté de l'effecteur (m). Si $r = m$, alors la matrice jacobienne est de rang complet, et son inverse existe dans la plupart des régions de l'espace des articulations. Si $r < m$, cela indique une singularité ou une redondance partielle dans le système.

6. **Analyse des Configurations Singulières :** Identifiez les configurations singulières en examinant les valeurs propres ou en analysant les zones de l'espace des articulations où $J(q)$ peut perdre son rang maximal.

Dynamique

1. **Matrice d'inertie ($A(q)$) :**
   - **Définition :** La matrice d'inertie, souvent notée $A(q)$, représente la distribution des masses et des moments d'inertie du robot par rapport à ses articulations.
   - **Impact :** Elle intervient dans l'équation dynamique $A(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)=\tau$, où $\ddot{q}$ est le vecteur des accélérations articulaires, $\dot{q}$ est le vecteur des vitesses articulaires, $C(q,\dot{q})$ est la matrice des termes d'inertie et de Coriolis, $G(q)$ est le vecteur des termes de gravité, et τ est le vecteur des couples appliqués.
2. **Termes de Coriolis-Centrifuge ($C(q,\dot{q})$) :**
   - **Définition :** Ces termes représentent les forces et les moments générés en raison de la combinaison des mouvements relatifs entre les différentes parties du robot.
   - **Impact :** Ils sont impliqués dans la compensation des forces centrifuges et des effets de Coriolis lors de la planification de trajectoires et du contrôle en boucle fermée.
3. **Termes de Gravité ($G(q)$) :**
   - **Définition :** Ces termes représentent les forces et les moments dus à la gravité.
   - **Impact :** Ils doivent être compensés pour maintenir le robot en équilibre sous l'effet de la gravité.
4. **Équation Dynamique :**
   - **Définition :** L'équation dynamique du robot relie les efforts articulaires (τ) aux mouvements articulaires $(\ddot{q})$ et aux vitesses $(\dot{q})$ à travers l'équation $A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$.
   - **Impact :** Comprendre cette équation est crucial pour concevoir des lois de commande robustes et pour planifier des trajectoires dynamiquement réalisables.

5. **Énergie Cinétique et Potentielle :**
   - **Définition :** L'énergie cinétique est liée au mouvement du robot, tandis que l'énergie potentielle est liée à sa position dans un champ gravitationnel.
   - **Impact :** Ces concepts peuvent être utilisés pour analyser l'énergie totale du système et optimiser les performances.
6. **Principes de Conservation :**
   - **Définition :** Les principes de conservation de l'énergie, du moment cinétique, etc., peuvent être appliqués pour analyser le mouvement du robot.
   - **Impact :** Ils fournissent des informations sur la stabilité, la consommation d'énergie et d'autres aspects du comportement dynamique.

Génération de trajectoires (mouvements)

- Input = q_0, q_f , K_v, K_a
- Output = τ , tf , $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$

Calcul de t_f

La vitesse est maximale pour $t = \frac{t_f}{2}$ et ne doit pas dépasser K_v

$$t_{Kv} mimimal = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta q}{K_v}$$

L'accélération est maximale pour $t = 0$ et $t = t_f$ et ne doit pas dépasser $\pm Ka$

$$t_{Ka} mimimal = \sqrt{\frac{6\Delta q}{K_a}}$$

$$t_f = max(tK_v, tK_a)$$

Sur un robot il faut faire ce calcul pour tous les axes i et prendre $t_f = max(t_{f_i})$

Exemple 1 : mouvement linéaire en position

$$t_1 = \frac{L}{V_M}$$
$$t_f = \frac{L}{V_M} + \frac{V_M}{A_M}$$

- Pour $0 \leq t \leq t_1$, la fonction $s(t)$ est définie comme $\frac{A_M}{2} \cdot t^2$.
- Pour $t_1 \leq t \leq (t_f - t_1)$, la fonction $s(t)$ est définie comme $V_M \cdot t - \frac{V_M^2}{2 \cdot AM}$.
- Pour $(t_f - t_1) \leq t \leq t_f$, la fonction $s(t)$ est définie comme $-\frac{A_M}{2} \cdot (t - t_f)^2 + V_M \cdot t - \frac{V_M^2}{A_M}$.

Exemple 2 : trajectoire en ligne brisée avec point de passage