ASSERVISSEMENTS À TEMPS CONTINU

Viviane CADENAT
Enseignant – chercheur à l'UPS
LAAS – CNRS
cadenat@laas.fr

Sommaire

Introduction & rappels

- Notions de base
  - **Système**
    - Définition : *tout procédé évoluant au cours du temps sous l'action de ses entrées de commande et produisant des sorties.*
    - Attention :
      - Sortie → capteur
      - Bien différencier entrées de commande et entrées exogènes

Entrées exogènes W(t)

U(t) → Système X(t) → Y(t)

- Grandeurs caractéristiques
  → Position, orientation
- Entrées de commande
  → Vitesse linéaire, Angle de braquage
- Sorties
  → selon capteurs
- Entrées exogènes
  → Perturbations de l'environnement : sol non plat, etc.

Introduction & rappels

- Notions de base
  - **Modèle**
    - Définition : *Représentation mathématique, + ou – fidèle, d'un système*
      → *Outil privilégié : équations différentielles car* ***système dynamique***
    - Représentation graphique : schéma-bloc

U(t) → Modèle → $Y_M(t)$

- 3 modèles
  - ***Représentation d'état***
  - ***Équation différentielle d'ordre n entrée/sortie***
  - ***Fonction de transfert (FT)***

+ complet

- complet

Introduction & rappels

NB : On se restreint aux systèmes linéaires invariants mono-entrée/mono-sortie

- Notions de base : analyse des modèles
  - **Représentation d'état**
    - Structure du modèle → **Modèle interne** $\begin{cases} \dot{X}(t)=AX(t)+BU(t) \\ Y(t)=CX(t)+DU(t) \end{cases}$
    - 3 propriétés essentielles : stabilité, commandabilité, observabilité
  - **Équation différentielle & fonction de transfert → Modèles externes**
    - Structure de l'équation différentielle (n < m)

$$a_n y^{(n)}(t)+\ldots+a_1\dot{y}(t)+a_0 y(t)=b_m u^{(m)}(t)+\ldots+b_1\dot{u}(t)+b_0 u(t)$$

    - Structure de la fonction de transfert (n < m) → TL <u>à CI=0</u> de l'éq. diff.

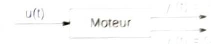
$$G(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{b_m p^m+\ldots+b_1 p+b_0}{a_n p^n+\ldots+a_1 p+a_0}$$

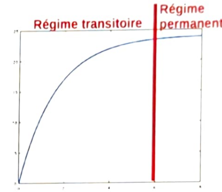
  - **Équivalence dépend de la commandabilité et de l'observabilité**

Introduction & rappels

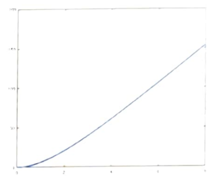
- Pourquoi vouloir commander un système ?
  - **Un exemple : un moteur à courant continu pour un manipulateur**

Moteur à courant continu Maxxon





Vitesse de rotation Ω(t) → stable



Angle de rotation θ(t) → instable

On envoie une tens[ion] constante au moteur
1/ L'angle θ(t) diverge
2/ Ω(t) converge vers une valeur liée à u(t) et aux paramètres du moteur

Commande nécessaire

~~stable~~ le régime permanent est possible ssi le système est stable

Systèmes asservis à temps continu

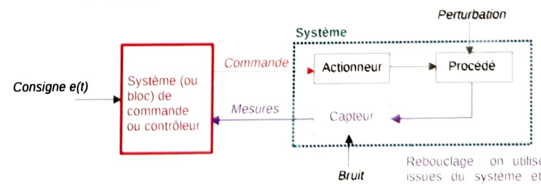
- Problématique de la commande
  - **Deux objectifs**
    - **O1 : <u>Stabiliser</u> le système d'origine si celui-ci n'est pas stable**
    - **O2 : Satisfaire un cahier des charges i.e., <u>des performances</u>**

<u>EN TEMPS</u>	<u>EN PRÉCISION</u>	<u>EN ROBUSTESSE</u>
DYNAMIQUE, TRANSITOIRE DE LA RÉPONSE TEMPORELLE	RÉGIME PERMANENT DE LA RÉPONSE TEMPORELLE	
Comment atteint-on le RP ? *- Temps de réponse (rapidité), temps de montée (raideur), dépassement* *→ Action sur les pôles*	*La sortie converge-t-elle vers la consigne ?* *- Erreur au RP : erreur de position, de vitesse, etc.*	*Quid de la stabilité et des autres performances en présence de perturbations ou en cas d'incertitude sur les paramètres ?*

→ Quelle structure de commande ?

Systèmes asservis à temps continu

- Structures générales de commande
  - **Commande en boucle fermée**



Rebouclage : on utilise les informations issues du système et fournies par les capteurs pour adapter la commande en fonction de l'évolution du système, de la consigne et des perturbations.

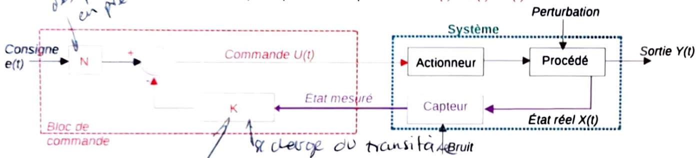
→ Quelles informations pour la boucle de retour ?

Que met-on dans le bloc de commande ?

Systèmes asservis à temps continu

- Structures générales de commande
  - Quelles informations utiliser pour la boucle de retour ?
    - ***Si le capteur mesure tout le vecteur d'état X(t)***
      - Le rebouclage est réalisé sur **tout l'état du système** → **RETOUR D'ÉTAT** → structure de commande plus performante
      - Utilisable *seulement* pour les représentations d'état
    - **Structure : U(t) = N e(t) – K X(t)**
      - Le correcteur est dans la chaîne de retour
      - L'erreur n'est pas après le comparateur → $\varepsilon(t) = e(t) - Y(t)$

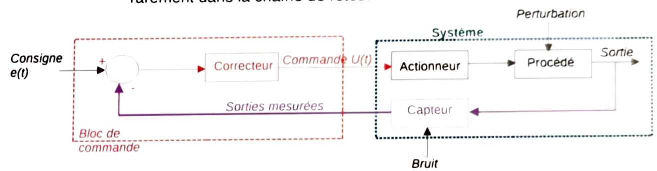
se charge des pôles en précision



se charge du transitoire
garantit les performances en temps → c'est lui qui nous change les pôles

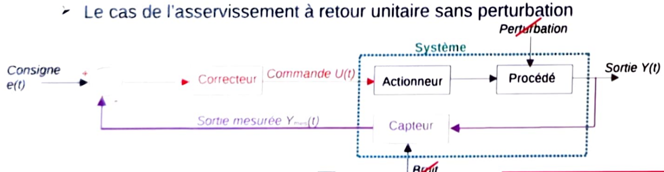
Systèmes asservis à temps continu

- Structures générales de commande
  - Quelles informations utiliser pour la boucle de retour ?
    - **Cas classique : *le capteur ne mesure pas tout l'état***
      - **On ne peut utiliser que les mesures à disposition** → **RETOUR DE SORTIE**
      - Informations « réduites » → structure de commande plus limitée
      - Structure de commande « classique » à base de P, PI, PID, … → FT
    - **Structure :** Le correcteur se trouve généralement dans la chaîne directe, plus rarement dans la chaîne de retour



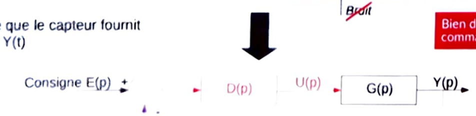
Systèmes asservis à temps continu

- Focus sur le retour de sortie
  - Le cas de l'asservissement à retour unitaire sans perturbation



On suppose que le capteur fournit directement Y(t)

Bien différencier le système à commander et l'asservissement



On a donc ici un asservissement à retour unitaire !

Systèmes asservis à temps continu

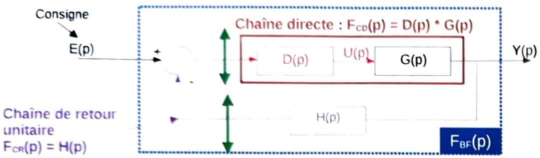
- Focus sur le retour de sortie
  - Structure générale d'un asservissement sans perturbation → retour non unitaire

Attention : V(p) n'est pas forcément homogène à l'erreur $\varepsilon(p)$ qui reste définie par E(p) - Y(p)

Systèmes asservis à temps continu

Bien différencier les fonctions de transfert !!

- Focus sur le retour de sortie
  - Asservissement à retour non unitaire : définitions

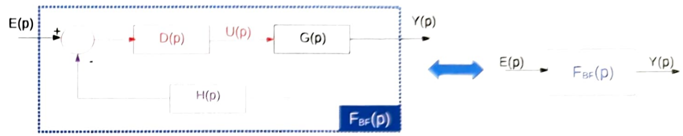


- Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) : $F_{BO}(p) = F_{CD}(p) * F_{CR}(p)$
- Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) : $F_{BF}(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{F_{CD}(p)}{1+F_{BO}(p)} = \frac{D(p)G(p)}{1+D(p)G(p)H(p)}$
  → Équation caractéristique de l'asservissement : $1 + F_{BO}(p) = 0$ → **Stabilité, dynamique**
- Erreur : $\varepsilon(p) = E(p) - Y(p)$ → Précision

Systèmes asservis à temps continu

Bien différencier les fonctions de transfert !!

- Focus sur le retour de sortie
  - Analyse en stabilité de l'asservissement



- L'asservissement = **système dynamique** d'entrée E et de sortie Y.
- ATTENTION :
  - Ce n'est pas parce que le système d'origine G(p) ou que la FTBO est stable que l'asservissement l'est aussi !
  - La stabilité de l'asservissement peut être étudiée soit directement à partir de la FTBF, soit à partir de la FTBO.
  - La précision ne peut s'étudier que si l'asservissement est stable.

Systèmes asservis à temps continu

Bien différencier les fonctions de transfert !!

- Focus sur le retour de sortie
  - Analyse en stabilité de l'asservissement
    - Critères exploitant la FTBF
      - **Calcul explicite des pôles** : $F_{BF}(p)$ stable ssi la partie réelle de **tous les pôles de la FTBF est strictement négative.**
      - **Critère de Routh-Hurwitz** : Tous les coefficients de la 1e colonne du tableau de Routh sont de même signe et non nuls. Le nombre de changements de signe donne le nombre de pôles à partie réelle positive.

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...	...
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...	...
p^{n-2}	b_1	b_2	...		
	c_1	c_2	...		
	...	...			
p^0	...	...			

1/ Calcul du dénominateur de $F_{BF}(p)$

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + + a_1 p + + a_0$$

2/ Calcul de la 1e colonne du tableau de Routh

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}a_n}{a_{n-1}} \qquad c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_{n-5}a_n}{a_{n-1}} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

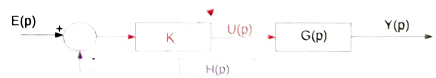
Si on a des pôles réels alors il n'y a pas d'oscillation dans la Réponse Temporelle

Systèmes asservis à temps continu

Bien différencier les fonctions de transfert !!

- Focus sur le retour de sortie
  - Analyse en stabilité de l'asservissement
    - Critères exploitant la FTBO → **Lieu des racines (ou lieu d'Evans)**

Définition : Si l'équation caractéristique de la FTBF peut se ramener sous la forme $1 + K F_{BO}(p) = 0$ cad si l'asservissement peut être ramené sous la forme suivante avec un gain K variable :



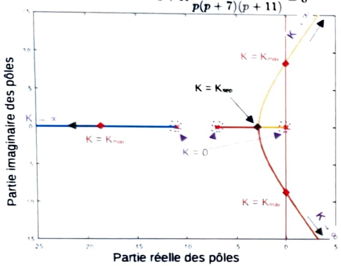
Alors il est possible de tracer la trajectoire effectuée par les pôles de la FTBF lorsque le gain K varie de 0 à l'infini et donc d'étudier la stabilité de la BF

→ Tracé via matlab ou octave (fonction rlocus)

Systèmes asservis à temps continu

- Focus sur le retour de sortie
  - Analyse en stabilité de l'asservissement
    - Critères exploitant la FTBO → **Lieu des racines (ou lieu d'Evans)**

Lieu des racines de $1 + K\dfrac{1}{p(p+7)(p+11)} = 0$



- **Condition de stabilité du <u>système asservi</u> :** le lieu reste dans le demi-plan gauche (au moins pour certaines valeurs de K).
- **Valeur maximale K_{max} de K avant instabilité de la BF :** la valeur de K pour laquelle le lieu intersecte l'axe imaginaire = marge de gain
- **Le lieu des racines est « gradué en K »**
- **NB :** Le lieu des racines peut être utilisé pour la synthèse du correcteur

Systèmes asservis à temps continu

$Y(p) = F_{BF}(p)\,E(p)$
$\Rightarrow \varepsilon(p) = E(p) - F_{BF}(p)E(p) = (1 - F_{BF}(p))E(p)$
$\varepsilon_{pos} = \lim_{p\to 0} p\,\frac{e_0}{p}(1 - F_{BF}(p)) = 1 - F_{BF}(0)$
gain statique de $F_{BF}(p)$

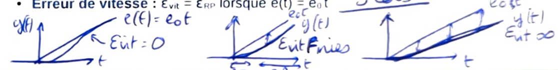
- Focus sur le retour de sortie
  - Analyse en précision de l'asservissement

E(p) → + → V(p) → D(p) → U(p) → G(p) → Y(p) ; H(p)

- **Erreur :** $\varepsilon(p) = \underbrace{E(p)}_{\text{appelée consigne ou référence}} - \underbrace{Y(p)}_{\text{sortie commandée}} = (1 - F_{BF}(p))E(p)$
- **Important : L'erreur s'évalue au régime permanent**
  - ⇒ Le système en BF doit être stable.
  - ⇒ Sous cette condition de stabilité, on peut appliquer le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_{RP} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p)$$

- L'erreur s'évalue pour des consignes données
  - **Erreur de position (ou erreur statique) :** $\varepsilon_{pos} = \varepsilon_{RP}$ lorsque $e(t) = e_0$
    - → A retenir : Si le gain statique de l'asservissement $F_{BF}(0) = 1$ alors $\varepsilon_{pos} = 0$
  - **Erreur de vitesse :** $\varepsilon_{vit} = \varepsilon_{RP}$ lorsque $e(t) = e_0 t$ 3 cas



Systèmes asservis à temps continu

Bien différencier les fonctions de transfert !!

- Focus sur le retour de sortie
  - Analyse en précision de l'asservissement à retour unitaire

E(p) → + → ε(p) → D(p) → U(p) → G(p) → Y(p) ; car retour unitaire ; K ; $\frac{1}{p(p+7)(p+11)}$

$\varepsilon(t) = e(t) - y(t)$
$\varepsilon(p) = E(p) - Y(p) = (1 - F_{BF}(p))E(p)$
Si le retour unitaire $F_{BF}(p) = \frac{D(p)G(p)}{1 + D(p)G(p)}$
$\varepsilon(p) = \frac{1 + D(p)G(p) - D(p)G(p)}{1 + D(p)G(p)}E(p)$
$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + D(p)G(p)}E(p)$

qui on peut aussi écrire $\frac{p^c D(p)}{p^c D(p) + K N(p)}$

- **Définition :** Erreur $\varepsilon(p) = E(p) - Y(p) = (1 - F_{BF}(p))E(p) \Rightarrow \varepsilon(p) = \dfrac{1}{1 + F_{BO}(p)}E(p)$ si un asservissement à retour unitaire
- **Lien entre l'erreur et le nombre d'intégrateurs** Le cas général on conserve $F_{BO}(p) = \frac{K}{p^c}\frac{N(p)}{D(p)}$
  - 1 intégrateur dans la BO : $\varepsilon_{pos} = 0$ et ε_{vit} finie
  - Au moins 2 intégrateurs dans la BO : $\varepsilon_{pos} = \varepsilon_{vit} = 0$
  - soit : Si $F_{BO}(p) = \dfrac{K}{s^c}\dfrac{1 + b_1 p + \cdots}{1 + a_1 p + \cdots}$ avec c = le nb d'intégrateurs isolés dans la BO = classe du système

$\varepsilon_{RP} = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{p^c D(p)}{p^c D(p) + K N(p)}E(p) = \lim_{p\to 0} \frac{p^{c+1} D(p)}{p^c D(p) + K N(p)}E(p) = \lim_{p\to 0} \frac{p^{c+1}}{p^c + K}E(p)$

- **A retenir**
  - Rajouter un intégrateur dans la BO est une manière d'annuler l'erreur de position et de vitesse → Action I
  - Plus K est grand, plus l'erreur diminue → Action P
  - Compromis stabilité/précision

Valeur de c (classe du système)	e(t) = e₀ E(p) = e₀/p	e(t) = e₀ t E(p) = e₀/p²
0	e₀/(1+K)	infini
1	0	e₀/(K)
2	0	0

Tout dépend de G et de E(p) → $\boxed{c=0}$ ⇒ pas d'intégrateur dans la BO ⇒ $\varepsilon_{RP} = \lim_{p\to 0} \frac{p}{1+K}E(p)$ → $\boxed{c=1}$ → $\varepsilon_{RP} = \lim_{p\to 0} \frac{p^2}{p+K}E(p)$

Donc | Err de position $E(p) = \frac{e_0}{p}$ ⇒ $\varepsilon_{pos} = \lim_{p\to 0} \frac{p}{1+K}\frac{e_0}{p} = \frac{e_0}{1+K}$; $\varepsilon_{pos} = 0$

Err de vitesse $E(p) = \frac{e_0}{p^2}$ ⇒ $\varepsilon_{vit} = \lim_{p\to 0} \frac{p}{1+K}\frac{e_0}{p^2} = \infty$; $\varepsilon_{vit} = \frac{e_0}{K}$

Systèmes asservis à temps continu

2 remarques imp

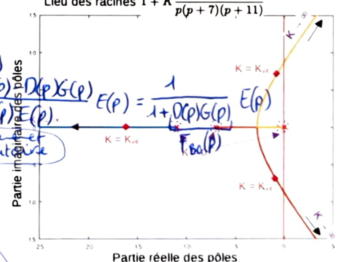
- Focus sur le retour de sortie
  - Analyse en précision de l'asservissement
    - Le compromis stabilité/précision : un exemple

Lien entre K et les erreurs
+K ↗ +ε ↘
mais + la stabilité de l'asservissement
sont dégradée → compromi stab/précision

Lien entre la valeur de l'erreur et le nb d'intégrateur présent dans la BO

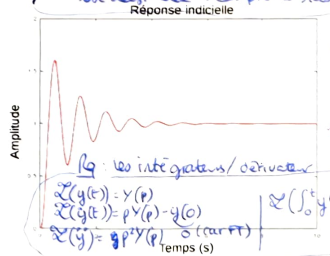
→ Déterminer K pour obtenir une erreur de vitesse de 10 % → K_{vit} = 770

Lieu des racines $1 + K\dfrac{1}{p(p+7)(p+11)}$



$\varepsilon(p) = \dfrac{1}{1 + D(p)G(p)}E(p)$; $F_{BO}(p)$

Réponse indicielle

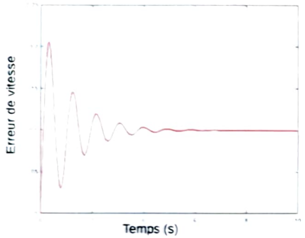


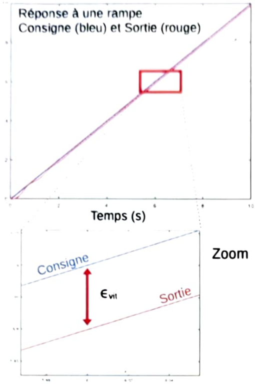
$F_{BO}(p) = K\frac{1}{p(p+7)(p+11)}$; 1 seul intégrateur

Rq : les intégrateurs/dérivateurs
$\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$
$\mathcal{L}(\dot y(t)) = pY(p) - y(0)$
$\mathcal{L}(\ddot y) = p^2 Y(p)$; 0 (car FT)
$\mathcal{L}\left(\int_0^t y'(\tau)\,d\tau\right) = \frac{Y(p)}{p}$

Systèmes asservis à temps continu

- Focus sur le retour de sortie
  - Analyse en précision de l'asservissement
    - Le compromis stabilité/précision : un exemple → Déterminer K pour obtenir une erreur de vitesse de 10 % → $K_{vit} = 770$





Systèmes asservis à temps continu

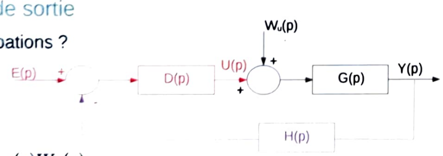
- Focus sur le retour de sortie
  - Des éléments pratiques pour la synthèse de PID $D(p) = K_p(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p)$
    - **Comprendre les trois actions**

Action P : Augmenter K	Action I : Rajouter un intégrateur dans la BO	Action D : Rajouter un dérivateur dans la BO
↘ erreur (sans l'annuler) ↘ stabilité ↘ Temps de montée, ↘ amortissement, ↗ oscillations	↘ erreur ↘ stabilité ↘ amortissement, ↗ oscillations Peut faire saturer le système	↗ stabilité ↗ amortissement, ↗ temps de réponse Peut ralentir le système Amplification du bruit

- **Que synthétiser ?**
  - P seul : loi de commande la plus simple, souvent insuffisante
  - PI pour les systèmes peu précis : annulation de l'erreur (en particulier, l'erreur statique)
  - PD pour les systèmes peu stables, oscillants : amélioration de la stabilité
  - PID pour les systèmes difficiles à corriger

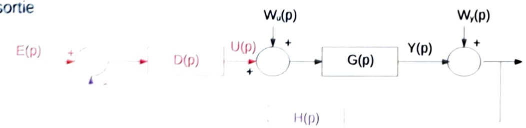
Systèmes asservis à temps continu

- Focus sur le retour de sortie
  - Et s'il y a des perturbations ?
    - Sur la commande



$$Y(p) = F_{e\to y}(p)E(p) + F_{w_u\to y}(p)W_u(p)$$

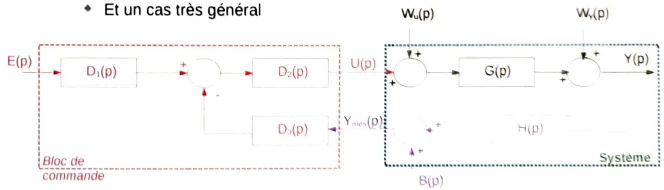
- Sur la sortie



$$Y(p) = F_{e\to y}(p)E(p) + F_{w_u\to y}(p)W_u(p) + F_{w_y\to y}(p)W_y(p)$$

Systèmes asservis à temps continu

- Focus sur le retour de sortie
  - Et s'il y a des perturbations ?
    - Et un cas très général



$$Y(p) = F_{e\to y}(p)E(p) + F_{w_u\to y}(p)W_u(p) + F_{w_y\to y}(p)W_y(p) + F_{b\to y}(p)B(p)$$

consigne → sortie perturbation → sortie perturbation → sortie bruit → sortie de mesure

$$Y(p) = \frac{W_y(p)}{1+F_{BO}(p)} + \frac{G(p)}{1+F_{BO}(p)}W_u(p) + \frac{D_1(p)D_2(p)G(p)}{1+F_{BO}(p)}E(p) - \frac{D_2(p)D_3(p)G(p)}{1+F_{BO}(p)}B(p)$$

$$F_{BO}(p) = G(p)D_2(p)D_3(p)H(p)$$