Systèmes linéaires

Exercice 1 Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode de Gauss.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2\\ -x & + & 2y & + & 3z & = & 4\\ x & + & y & + & 2z & = & 5\end{array}\right. \qquad (S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 4\\ & & 3y & + & 3z & = & 6\\ 2x & - & y & + & z & = & 2\end{array}\right.$$

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 2\\ & & 3y & + & 3z & = & 1\\ 2x & - & y & + & z & = & 2\end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & 2z & & & = & 4\\ 2x & + & y & + & 3z & + & s & = & 7\\ 3x & + & y & + & 4z & + & 2s & = & 10\end{array}\right.$$

Solution de l'exercice 1

L'ensemble des solutions de (S_1) est $\mathcal{S}_1 = \{(1,-2,3)\}$.
L'ensemble des solutions de (S_2) est $\mathcal{S}_2 = \emptyset$.
L'ensemble des solutions de (S_3) est $\mathcal{S}_3 = \{(2,2,0) + z(-1,-1,1), z \in \mathbb{R}\}$.
L'ensemble des solutions de (S_4) est $\mathcal{S}_4 = \{(3,1,0,0) + z(-1,-1,1,0) + s(-1,1,0,1), z, s \in \mathbb{R}\}$.

Espaces vectoriels

Exercice 2 Les sous-ensembles ci-dessous sont-ils des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

1. $W_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big/ x \geq 0\right\}$.
2. $W_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big/ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$.
3. $W_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big/ x = 3y\right\}$ et $W_3' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big/ x = 3y + 2\right\}$.
4. $W_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big/ xy = 0\right\}$.

Solution de l'exercice 2

W_1 n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, parce que $u = (3,0,0) \in W_1$, mais avec $\lambda = -1$, $\lambda u = (-3,0,0) \notin W_1$.

W_2 n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$, parce que $u = (1,0,0)$ et $v = (0,1,0)$ appartiennent à W_2, mais pas leur somme.

$W_3 = \mathrm{Vect}((3,1,0),(0,0,1))$ donc W_3 est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. En revanche, comme $(0,0,0) \notin W_3'$, W_3' n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

W_4 n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$, parce que $u = (1,0,0)$ et $v = (0,1,0)$ appartiennent à W_4, mais pas leur somme.

Exercice 3 On note $C(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et on admettra ici que cet ensemble, muni de l'addition de deux fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Posons $W := \{f \in C(\mathbb{R}) \quad / \quad f(x) = 0 \text{ pour tout } x \leq 0\}$. Montrer que W, muni des mêmes opérations que ci-dessus, est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R})$.

Solution de l'exercice 3

- La fonction nulle est bien dans W, donc W est non vide ;
- Soit f et g deux fonctions de W. Comme $W \subset C(\mathbb{R})$ et $C(\mathbb{R})$ espace vectoriel, on a $f+g \in C(\mathbb{R})$.

  De plus pour tout x réel, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Et pour tout $x \leq 0$, comme $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$, on a bien $f(x) + g(x) = 0$ et donc $(f+g)(x) = 0$.

  Ainsi $f + g \in W$.

- Soit $f \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'appartenance de λf à $C(\mathbb{R})$ est immédiate.

  Pour tout réel x, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Et pour tout $x \leq 0$, comme $f(x) = 0$, on a $\lambda f(x) = 0$ et donc $(\lambda f)(x) = 0$.

  Ainsi, $\lambda f \in W$.

Etude de familles de vecteurs, bases

Exercice 4 Exprimer $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme CL[1] de $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 4

$v = -6u_1 + 3u_2 + 2u_3$.

Exercice 5 Pour chacune des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ données ci-dessous, dire si elles sont libres et/ou sont génératrices de $\mathbb{R}^n$. Lorsqu'elles ne forment pas une base de $\mathbb{R}^n$, déterminer l'espace vectoriel qu'elles engendrent (i.e. en donner la dimension et une base).

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{F}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{F}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathcal{F}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$\mathcal{F}_6 = \{$Proposez la famille de votre choix !$\}$.

Solution de l'exercice 5

$\mathcal{F}_1$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$, mais ce n'est pas une famille libre (elle est formée de 4 vecteurs et $4 > 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$).

$\mathcal{F}_2$ est libre et contient $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{F}_3$ n'est ni libre, ni génératrice de $\mathbb{R}^3$. En revanche, les deux premiers vecteurs de la famille sont libres. Ils constituent donc une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_3)$ qui est ainsi de dimension 2.

$\mathcal{F}_4$ est libre. Donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_4)$ est de dimension 3. Comme $3 < 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, $\mathcal{F}_4$ ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}^4$.

$\mathcal{F}_5$ n'est pas une famille libre (elle est formée de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $4 > 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$). Son troisième vecteur est la somme des deux premiers et le dernier vecteur est la différence des deux premiers. Comme les deux premiers vecteurs sont libres, ils sont générateurs de $\mathcal{F}_5$, et ainsi $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_5)$ est de dimension 2.

Tournez la page SVP

[1] combinaison linéaire

Pour vous entrainer ...

Exercice 6 Résoudre les systèmes linéaires suivants par la méthode de Gauss.

$$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & z & = & 5 \end{array}\right. \qquad (S_3)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_2)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & s & = & 0 \\ 2x & + & y & & & + & 3s & = & 0 \\ & & & + & z & - & s & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_4)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & + & z & - & s & = & 0 \\ & & y & + & z & + & s & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \end{array}\right.$$

Solution de l'exercice 6

L'ensemble des solutions de (S_1) est $\mathcal{S}_1 = \{(3/4, 3/2, -1/4)\}$.
L'ensemble des solutions de (S_2) est $\mathcal{S}_2 = \mathrm{Vect}(\{(-1,-1,1,1)\})$
L'ensemble des solutions de (S_3) est $\mathcal{S}_3 = \{(0,0,0)\}$.
L'ensemble des solutions de (S_4) est $\mathcal{S}_4 = \mathrm{Vect}(\{(-1,-1,1,0),(1,-1,0,1)\})$.

Exercice 7 Pour chacune des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ données ci-dessous, dire si elles sont libres et/ou sont génératrices de $\mathbb{R}^n$. Lorsqu'elles ne forment pas une base de $\mathbb{R}^n$, déterminer l'espace vectoriel qu'elles engendrent (i.e. en donner la dimension et une base).

$$\mathcal{F}_7 = \left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \mathcal{F}_{10} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\mathcal{F}_8 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad \mathcal{F}_{11} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$\mathcal{F}_9 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

Solution de l'exercice 7

$\mathcal{F}_7$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$, mais ce n'est pas une famille libre (elle est formée de 3 vecteurs et $3 > 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$).

$\mathcal{F}_8$ est libre, mais elle ne pas être génératrice de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle ne contient que 2 vecteurs et que $2 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$\mathcal{F}_9$ ne peut pas être une famille libre de $\mathbb{R}^3$, puisque elle contient $4 > 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs. Cependant, les trois premiers vecteurs de la famille sont libres. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, la famille $\mathcal{F}_9$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ et la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_9)$ est 3.

$\mathcal{F}_{10}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

$\mathcal{F}_{11}$ n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (trop de vecteurs), mais les trois premiers vecteurs sont libres. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, la famille $\mathcal{F}_{11}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ et la dimension de $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_{11})$ est 3.

Exercice 8 Exprimer $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme CL[2] de $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Solution de l'exercice 8

Il n'est pas possible d'exprimer v comme une CL de u_1, u_2 et u_3.

[2] combinaison linéaire