Annale 20xx Traitement du signal

1 Exercice 1 : Un drôle de système

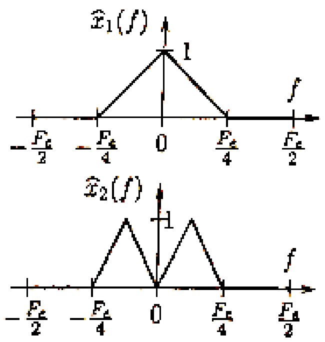
Soit un système à temps discret dont la relation E/S s'écrit $s[n] = (-1)^n e[n]$. Nous allons étudier le système ainsi que son utilisation.

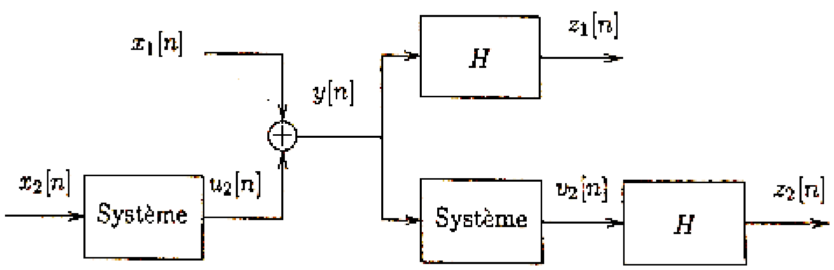
1.1 Etude du système

1. Montrer, en détaillant les calculs que la relation E/S du système donne dans le domaine fréquentiel : $\hat{s}(f) = \hat{e}\left(f + \frac{F_e}{2}\right)$. On peut utiliser pour cela le fait que $-1 = e^{j\pi}$.
2. Le système est-il stable ? Justifier votre réponse.
3. Le système est-il linéaire ? Justifier votre réponse.
4. Le système est-il invariant ? Justifier votre réponse.
5. Le système est-il un filtre ? Justifier votre réponse.

1.2 Utilisation du système

On va utiliser ce système dans le schéma ci-dessous ou H est un filtre numérique de réponse en fréquence (périodique de période F_e) $h(f) = \begin{cases} 1 \; si \; |f| < \frac{F_e}{4} \\ 0 \; sinon \end{cases}$. On place en entrée de ce schéma les signaux $x_1[n]$ et $x_2[n]$ dont les spectres sont représentés ci-dessous.





1. Tracer la réponse fréquentielle du signal $u_2[n]$.
2. En déduire la représentation fréquentielle du signal $y[n]$.
3. Tracer la représentation fréquentielle du signal $z_1[n]$.
4. Tracer la représentation fréquentielle du signal $v_2[n]$.
5. En déduire la représentation fréquentielle du signal $z_2[n]$.
6. Conclure sur l'utilité d'un tel schéma.

2 Exercice 2 : Un filtre spécial

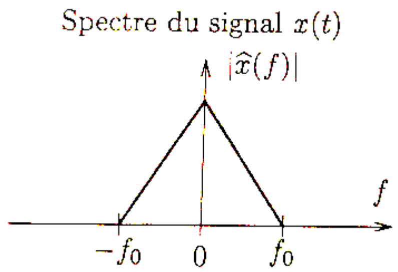
Dans cet exercice, on étudie le filtre analogique H de réponse en fréquence $\hat{h}(f) = -j.sign(f)$, ou la fonction signe est définie par $sign(f) = \begin{cases} 1 \; si \; f \geq 0 \\ -1 \; si \; f < 0 \end{cases}$. Il est difficile de montrer que sa réponse impulsionnelle est $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ et cela sera admis dans cet exercice.

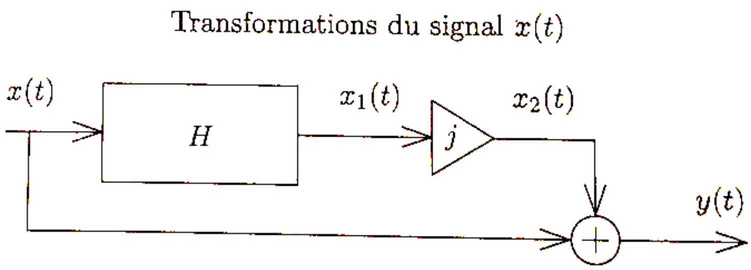
2.1 Etude du filtre

1. Tracer la réponse fréquentielle de ce filtre, en module et en phase.
2. Calculer le temps de propagation de phase de ce filtre.
3. Ce filtre est-il stable ? Justifiez votre réponse.
4. Ce filtre est-il causal ? Justifiez votre réponse.

2.2 Utilisation du filtre

On fait subir à un signal $x(t)$, dont le spectre est représenté ci-dessous, les transformations décrites dans le schéma ci-dessous ou le symbole triangulaire signifie la multiplication par el nombre complexe j (qui est une constante).





1. Calculer l'expression de $\hat{x}_1(f)$ et $\hat{x}_2(f)$. En déduire l'expression de $\hat{y}(f)$.
2. Tracer l'allure du spectre du signal $y(t)$.

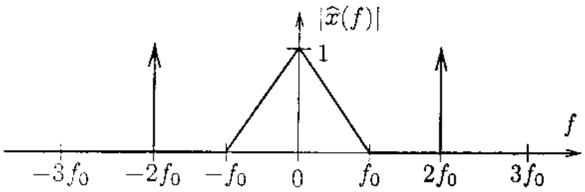
2.3 Filtrage d'un signal sinusoïdal

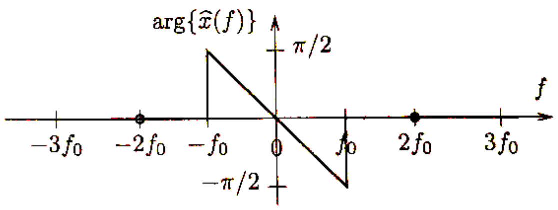
On place en entrée du filtre H le signal $e(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ et l'on obtient en sortie le signal $s(t)$.

1. Rappeler l'expression de $\hat{e}(f)$ et tracer la représentation fréquentielle du signal.
2. Calculer l'expression de $\hat{s}(f)$. En déduire l'expression de $s(t)$. Était-il possible de déduire cette expression du temps de propagation de phase ?
3. Tracer sur le même graphe la représentation temporelle des signaux $e(t)$ et $s(t)$. Conclure sur l'utilité d'un tel filtre pour un signal cosinus.

3 Echantillonnage et reconstruction d'un signal

Soit un signal $x(t) = a(t) + b(t)$, dont le spectre $\hat{x}(f)$ est représenté sur les figures suivantes (modules et en phase). Le signal $a(t)$ est un signal non périodique d'énergie finie dont le spectre correspond à la partie continue de $\hat{x}(f)$ (spectre de support borné dans $[-f_0, f_0]$)





1. Donner l'expression de $b(t)$
2. Soit $y[n]$ correspondant au signal $x(t)$ échantillonné à la fréquence $F_e = 3f_0$: représenter le spectre $\hat{y}(f)$ du signal échantillonné.
3. Soit $z(t)$ correspondant au filtrage du signal $y[n]$ par le filtre passe bas idéal de fréquence de coupure $\frac{3f_0}{2}$ (reconstruction du signal) : représenter le spectre $\hat{z}(f)$ du signal ainsi reconstruit.
4. Exprimer $z(t)$ en fonctionde $a(t)$. Expliquer brièvement ce qu'il s'est passé.