
Pour être comptabilisée, toute réponse devra être justifiée.

Exercice 1 (4 pts)

Ma vieille voiture est en train de me lâcher ! Il va falloir que j'en rachète une et j'hésite entre motorisation essence ou motorisation électrique.

1. Exprimez sous la forme d'une base de formules en logique propositionnelle les connaissances suivantes :
 - les voitures électriques sont chères à l'achat
 - l'alimentation d'une voiture électrique n'est pas chère si j'ai des panneaux photovoltaïques
 - les voitures à essence ne sont pas chères à l'achat
 - l'alimentation d'une voiture à essence est chère et écologiquement mauvaise pour la planète
 - les voitures électriques ont une autonomie faible en kilométrage ce qui n'est pas le cas des voitures à essence
2. Exprimez le problème *Etant données les connaissances précédentes et sachant que j'ai des panneaux photovoltaïques et que je veux une solution écologiquement satisfaisante, vais-je acheter une voiture électrique ?*
3. Quelle méthode et quel outil pouvez-vous utiliser pour résoudre ce problème ?
4. Donnez la réponse au problème en la justifiant.

Exercice 2 (4 pts)

J'ai choisi la marque et le modèle de voiture que je voudrais acheter et je suis maintenant en train de choisir les options. Sur le catalogue présenté par le concessionnaire, apparaissent par exemple les options suivantes : motorisation sport, 2 places escamotables dans le coffre, toit ouvrant, système anti-crevaison . . .

Bien-sûr chaque option a un prix et mon budget ayant une limite, je ne pourrai pas dépasser la somme de MAX euros.

Chaque option a aussi une valeur qui représente mes préférences (par exemple, le système anti-crevaison aura plus de valeur pour moi que le toit ouvrant).

Le problème à résoudre : *trouver l'ensemble des options qui maximisent mes préférences tout en ne dépassant pas mon budget*

1. De quel type de problème s'agit-il ?
2. A quel problème connu, ce problème vous fait-il penser ?
3. Pour pouvoir utiliser l'algorithme A^* , on part de l'idée suivante :

Au départ, on prend toutes les options. Puis, si le budget est dépassé, on enlève des options.

 - (a) En exploitant cette idée, exprimez le problème sous la forme d'un espace d'états en donnant la définition *précise* de chaque état et de chaque opérateur.
 - (b) Donnez l'état initial et la caractérisation des états solutions (au sens de l'algorithme A^*).
 - (c) En vous basant sur l'idée d'utilisation du A^* décrite précédemment, donnez la formule mathématique caractérisant le coût d'un état.
 - (d) Quelle serait une heuristique admissible simple pour ce problème ?

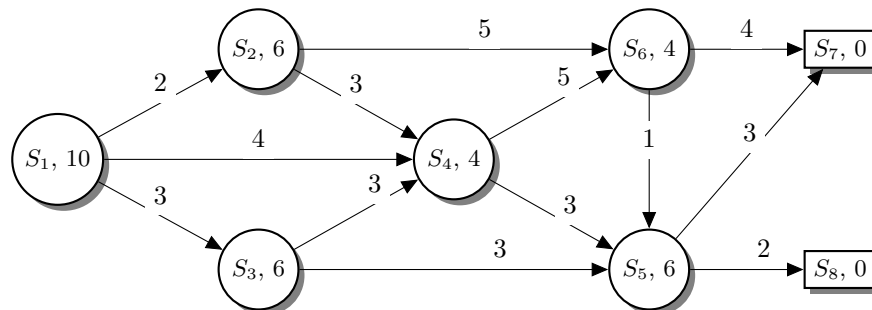
La liste des options étant énorme (plus d'une centaine), le concessionnaire propose alors d'appliquer une méthode approchée pour m'aider à faire mon choix.

4. Donnez une formalisation des solutions recherchées et de leur évaluation.
5. Proposez une méthode pour construire une première solution qui soit intéressante (c'est-à-dire une solution qui ne serait pas triviale).

Exercice 3 (4 pts)

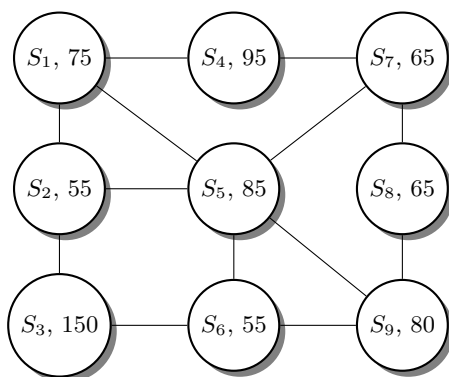
On considère l'espace d'états donné par la figure suivante. Le graphe est orienté, les valeurs sur les arcs donnent le coût de passage d'un état à un autre. Les valeurs sur les sommets correspondent à l'heuristique h évoquée ci-après. L'état initial est S_1 . On considère qu'on dispose d'une fonction qui reconnaît les états finaux (indiqués par un rectangle sur la figure).

1. Décrivez l'application du A* sur cet espace et donnez le résultat obtenu en utilisant l'heuristique h donnée pour chaque sommet dans le graphe (donnez le chemin solution et son poids).
2. h est-elle admissible ? Qu'en concluez-vous sur la réponse obtenue à la question 1 ?



Exercice 4 (4 pts)

On considère le graphe suivant :



Chaque nœud correspond à une solution. Le voisinage d'une solution e est constitué de l'ensemble des solutions e' qui ont une arête allant de e à e' (le graphe est non-orienté). La valeur de chaque solution est indiquée dans le nœud. On part d'une solution donnée et on cherche la solution dont la valeur est **la plus grande**.

1. Donnez l'ordre des solutions visitées en utilisant le *steepest hill climbing*, sans reprise, en partant de S_1 .
2. Décrivez l'exécution de *tabou* (solutions visitées + liste de tabous à chaque étape) avec une taille de liste égale à 3 en partant de S_1 . Arrêtez-vous quand l'algorithme boucle (c'est-à-dire quand on retrouve le même état courant avec la même liste de tabous que lors d'une étape précédente) ou que la liste de tabous atteint la taille de 3.

Attention, en cas d'égalité de valeur, vous privilégiez le sommet ayant le plus petit numéro.

Exercice 5 (4 pts)

J'ai trouvé la configuration de la voiture de mes rêves : un magnifique cabriolet rose bonbon avec les systèmes anti-crevaison et multi-media, un toit ouvrant, le GPS, une motorisation sport avec des sièges en tissu et un coffre de grande capacité.

Malheureusement, le concessionnaire m'informe que mon choix n'est pas réalisable car :

- sur un modèle équipé avec une motorisation sport, on ne peut mettre qu'une sellerie cuir
- d'autre part la couleur rose bonbon est réservée uniquement aux motorisations basiques, alors que le rouge Ferrari ou le jaune canari sont possibles pour une motorisation sport
- pour que le système anti-crevaison fonctionne il faut que la voiture soit équipée avec un ordinateur de bord
- l'ordinateur de bord fait double-emploi avec le système multi-media

Mon problème : *Quelle(s) configuration(s) puis-je avoir ?*

1. De quel type de problème s'agit-il ?
2. Comment pouvez-vous le représenter ? Vous donnerez tous les composants de cette représentation.
3. Quels algorithmes pouvez-vous utiliser pour résoudre le problème ?
4. Faites dérouler l'un de ces algorithmes et trouvez une solution. Est-ce la seule ? Expliquez et justifiez.

Corrigé

Exercice 1 (4 pts)

Ma vieille voiture est en train de me lâcher ! Il va falloir que j'en rachète une et j'hésite entre motorisation essence ou motorisation électrique.

1. Exprimez sous la forme d'une base de formules en logique propositionnelle les connaissances suivantes :
 - les voitures électriques sont chères à l'achat
 - l'alimentation d'une voiture électrique n'est pas chère si j'ai des panneaux photovoltaïques
 - les voitures à essence ne sont pas chères à l'achat
 - l'alimentation d'une voiture à essence est chère et écologiquement mauvaise pour la planète
 - les voitures électriques ont une autonomie faible en kilométrage ce qui n'est pas le cas des voitures à essence

Etape 1 : trouver le vocabulaire.

- VE : voiture électrique
- VAE : voiture à essence
- PAC : prix à l'achat cher
- AC : alimentation chère
- PV : avoir des panneaux photovoltaïques
- AFK : autonomie faible en kilométrage
- ECO : solution écologiquement bonne

Etape 2 : traduire chaque phrase en une formule de la logique propositionnelle

- les voitures électriques sont chères à l'achat : $VE \rightarrow PAC$
- l'alimentation d'une voiture électrique n'est pas chère si j'ai des panneaux photovoltaïques : $PV \rightarrow (VE \rightarrow \neg AC)$
- les voitures à essence ne sont pas chères à l'achat : $VAE \rightarrow \neg PAC$
- l'alimentation d'une voiture à essence est chère et écologiquement mauvaise pour la planète : $VAE \rightarrow (AC \wedge \neg ECO)$
- les voitures électriques ont une autonomie faible en kilométrage : $VE \rightarrow AFK$
- les voitures à essence n'ont pas une autonomie faible en kilométrage : $VAE \rightarrow \neg AFK$

2. Exprimez le problème *Etant données les connaissances précédentes et sachant que j'ai des panneaux photovoltaïques et que je veux une solution écologiquement satisfaisante, vais-je acheter une voiture électrique ?*

Cela correspond à la requête :

$$BC \cup \{ PV, ECO \} \models VE ?$$

(donc est-ce qu'à partir de BC qui est l'ensemble des 6 formules et des faits PV et ECO , je peux déduire que j'aurai une voiture électrique)

3. Quelle méthode et quel outil pouvez-vous utiliser pour résoudre ce problème ?

Répondre à la requête en étudiant la satisfiabilité de la formule :

$$BC \cup \{ PV, ECO, \neg VE \}$$

Si cette formule est satisfiable, alors la réponse à la requête est NON.

Si cette formule n'est pas satisfiable, alors la réponse à la requête est OUI.

On peut donc utiliser un solveur SAT comme outil.

4. Donnez la réponse au problème en la justifiant.

Ici on peut exhiber un modèle de $BC \cup \{ PV, ECO, \neg VE \}$ qui est le suivant : mettre à vrai PV et ECO et à faux toutes les autres variables propositionnelles.

Donc la réponse est NON (il existe au moins un modèle dans lequel je n'achète pas de voiture électrique)

Exercice 2 (4 pts)

J'ai choisi la marque et le modèle de voiture que je voudrais acheter et je suis maintenant en train de choisir les options. Sur le catalogue présenté par le concessionnaire, apparaissent par exemple les options suivantes : motorisation sport, 2 places escamotables dans le coffre, toit ouvrant, système anti-crevaison ...

Bien-sûr chaque option a un prix et mon budget ayant une limite, je ne pourrai pas dépasser la somme de MAX euros.

Chaque option a aussi une valeur qui représente mes préférences (par exemple, le système anti-crevaison aura plus de valeur pour moi que le toit ouvrant).

Le problème à résoudre : trouver l'ensemble des options qui maximisent mes préférences tout en ne dépassant pas mon budget

1. De quel type de problème s'agit-il ?

Il s'agit d'un problème d'optimisation

2. A quel problème connu, ce problème vous fait-il penser ?

Le problème du sac à dos : les objets sont les options, le poids est le budget

3. Pour pouvoir utiliser l'algorithme A*, on part de l'idée suivante :

Au départ, on prend toutes les options. Puis, si le budget est dépassé, on enlève des options.

- (a) En exploitant cette idée, exprimez le problème sous la forme d'un espace d'états en donnant la définition précise de chaque état et de chaque opérateur.

Un état sera un ensemble d'options $\{o_1, \dots, o_n\}$, $n = 1$ à N (N étant le nb total d'options disponibles).

La valeur de e sera notée $V(e) = \sum_{i=1}^n v_i$, v_i étant la valeur de l'option o_i .

Le poids de e sera noté $P(e) = \sum_{i=1}^n p_i$, p_i étant le prix de l'option o_i .

*Un opérateur SUPPRIMEROPTION défini par : soit $e = \{o_1, \dots, o_n\}$ un état,
 $SUPPRIMEROPTION(e) = \{e' | e' = e \setminus \{o_i\} \text{ avec } o_i \in e\}$*

- (b) Donnez l'état initial et la caractérisation des états solutions (au sens de l'algorithme A*).

L'état initial sera $e_0 = \{o_1, \dots, o_N\}$

Un état solution sera un état $e = \{o_1, \dots, o_n\}$ tel que $P(e) \leq MAX$

- (c) En vous basant sur l'idée d'utilisation du A* décrite précédemment, donnez la formule mathématique caractérisant le coût d'un état.

On cherche à supprimer des objets dont la valeur est la plus faible. Donc, pour un état e , $\text{coût}(e) = V(e_0) - V(e)$

- (d) Quelle serait une heuristique admissible simple pour ce problème ?

On peut prendre $h(e) = 0$, quel que soit l'état e (même si ce n'est pas très efficace).

Trouver une bonne heuristique est difficile car il faudrait qu'elle soit coïncidente (donc = 0 sur les états solutions) mais il n'existe pas de moyen de lier la valeur et le poids (et les états solutions ne sont caractérisés que par leur poids).

La liste des options étant énorme (plus d'une centaine), le concessionnaire propose alors d'appliquer une méthode approchée pour m'aider à faire mon choix.

4. Donnez une formalisation des solutions recherchées et de leur évaluation.

Une solution sera un ensemble $e = \{o_{i_1}, \dots, o_{i_n}\}$ tel que $P(e) \leq MAX$

Son évaluation sera $V(e)$

5. Proposez une méthode pour construire une première solution qui soit intéressante (donc non triviale).

Ranger par ordre décroissant les objets o_i en fonction du ratio $\frac{v_i}{p_i}$. Puis remplir le sac en respectant cet ordre jusqu'à ne plus pouvoir rien mettre sans dépasser la borne MAX.

Exercice 3 (4 pts)

On considère l'espace d'états donné par la figure suivante. Le graphe est orienté, les valeurs sur les arcs donnent le coût de passage d'un état à un autre. Les valeurs sur les sommets correspondent à l'heuristique h évoquée ci-après. L'état initial est S_1 . On considère qu'on dispose d'une fonction qui reconnaît les états finaux (indiqués par un rectangle sur la figure).

1. Décrivez l'application du A* sur cet espace et donnez le résultat obtenu en utilisant l'heuristique h donnée pour chaque sommet dans le graphe (donnez le chemin solution et son poids).

Pour chaque sommet, on donne son père, son coût et son heuristique.

$A\text{Voir}$	Vu	s
$s_1(-, 0, 10)$	\emptyset	
\emptyset	$s_1(-, 0, 10)$	$s_1(-, 0, 10)$
$s_2(s_1, 2, 6), s_4(s_1, 4, 4), s_3(s_1, 3, 6)$	$s_1(-, 0, 10)$	$s_1(-, 0, 10)$
$s_4(s_1, 4, 4), s_3(s_1, 3, 6)$	$s_1(-, 0, 10), s_2(s_1, 2, 6)$	$s_2(s_1, 2, 6)$
$s_4(s_1, 4, 4), s_3(s_1, 3, 6), s_6(s_2, 7, 4)$	$s_1(-, 0, 10), s_2(s_1, 2, 6)$	$s_2(s_1, 2, 6)$
$s_3(s_1, 3, 6), s_6(s_2, 7, 4)$	$s_1(-, 0, 10), s_2(s_1, 2, 6), s_4(s_1, 4, 4)$	$s_4(s_1, 4, 4)$
$s_3(s_1, 3, 6), s_6(s_2, 7, 4), s_5(s_4, 7, 6)$	$s_1(-, 0, 10), s_2(s_1, 2, 6), s_4(s_1, 4, 4)$	$s_4(s_1, 4, 4)$
$s_6(s_2, 7, 4), s_5(s_4, 7, 6)$	$s_1(-, 0, 10), s_2(s_1, 2, 6), s_4(s_1, 4, 4), s_3(s_1, 3, 6)$	$s_3(s_1, 3, 6)$
$s_6(s_2, 7, 4), s_5(s_3, 6, 6)$	$s_1(-, 0, 10), s_2(s_1, 2, 6), s_4(s_1, 4, 4), s_3(s_1, 3, 6)$	$s_3(s_1, 3, 6)$
$s_5(s_3, 6, 6)$	$s_1(-, 0, 10), s_2(s_1, 2, 6), s_4(s_1, 4, 4), s_3(s_1, 3, 6), s_6(s_2, 7, 4)$	$s_6(s_2, 7, 4)$
$s_5(s_3, 6, 6), s_7(s_6, 11, 0)$	$s_1(-, 0, 10), s_2(s_1, 2, 6), s_4(s_1, 4, 4), s_3(s_1, 3, 6), s_6(s_2, 7, 4)$	$s_6(s_2, 7, 4)$
$s_5(s_3, 6, 6)$	$s_1(-, 0, 10), s_2(s_1, 2, 6), s_4(s_1, 4, 4), s_3(s_1, 3, 6), s_6(s_2, 7, 4), s_7(s_6, 11, 0)$	$s_7(s_6, 11, 0)$

Fin puisque s_7 est une solution

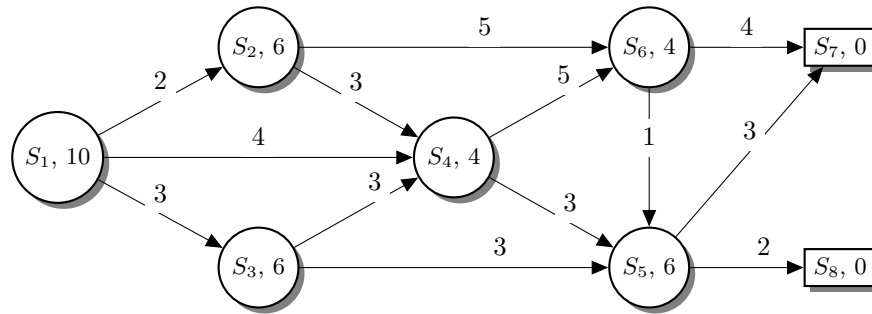
Le chemin solution est donc $s_1 - s_2 - s_6 - s_7$ de poids 11.

2. h est-elle admissible? Qu'en concluez-vous sur la réponse obtenue à la question 1?

h est coïncidente (l'heuristique des états finaux = 0)

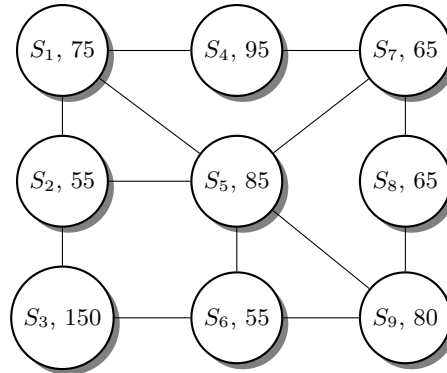
Par contre, h n'est pas monotone car $h(s_5) \not\leq h(s_8) + 2$.

Donc le chemin solution trouvé précédemment n'est pas forcément le meilleur. Et effectivement, il existe un meilleur chemin : $s_1 - s_3 - s_5 - s_8$ de poids 8.



Exercice 4 (4 pts)

On considère le graphe suivant :



Chaque nœud correspond à une solution. Le voisinage d'une solution e est constitué de l'ensemble des solutions e' qui ont une arête allant de e à e' (le graphe est non-orienté). La valeur de chaque solution est indiquée dans le nœud. On part d'une solution donnée et on cherche la solution dont la valeur est **la plus grande**.

1. Donnez l'ordre des solutions visitées en utilisant le *steepest hill climbing*, sans reprise, en partant de S_1 .

*On part de s_1 (75). Le meilleur voisin est s_4 (95), donc on repart de là. Et cela s'arrête car aucun voisin de s_4 n'est meilleur que s_4 .
Donc la meilleure solution obtenue avec le SHC est : s_4 (95).*

2. Décrivez l'exécution de *tabou* (solutions visitées + liste de tabous à chaque étape) avec une taille de liste égale à 3 en partant de S_1 . Arrêtez-vous quand l'algorithme boucle (c'est-à-dire quand on retrouve le même état courant avec la même liste de tabous que lors d'une étape précédente) ou que la liste de tabous atteint la taille de 3.

*On part de s_1 (75) avec la liste des tabous = \emptyset
On sélectionne s_4 (95) avec la liste des tabous = \emptyset
On sélectionne s_1 (75) avec la liste des tabous = $\{s_4\}$
On sélectionne s_5 (85) avec la liste des tabous = $\{s_4\}$
On sélectionne s_9 (80) avec la liste des tabous = $\{s_4, s_5\}$
On sélectionne s_8 (65) avec la liste des tabous = $\{s_4, s_5, s_9\}$
On s'arrête car la liste des tabous a atteint la taille de 3.
Donc la meilleure solution obtenue avec le Tabou est encore : s_4 (95).*

Attention, en cas d'égalité de valeur, vous privilégiez le sommet ayant le plus petit numéro.

Exercice 5 (4 pts)

J'ai trouvé la configuration de la voiture de mes rêves : un magnifique cabriolet rose bonbon avec les systèmes anti-crevaisson et multi-media, un toit ouvrant, le GPS, une motorisation sport avec des sièges en tissu et un coffre de grande capacité.

Malheureusement, le concessionnaire m'informe que mon choix n'est pas réalisable car :

- sur un modèle équipé avec une motorisation sport, on ne peut mettre qu'une sellerie cuir
- d'autre part la couleur rose bonbon est réservée uniquement aux motorisations basiques, alors que le rouge Ferrari ou le jaune canari sont possibles pour une motorisation sport

- pour que le système anti-crevaison fonctionne il faut que la voiture soit équipée avec un ordinateur de bord
 - l'ordinateur de bord fait double-emploi avec le système multi-media
- Mon problème : *Quelle(s) configuration(s) puis-je avoir ?*

1. De quel type de problème s'agit-il ?

Un problème de satisfaction de contraintes

2. Comment pouvez-vous le représenter ? Vous donnerez tous les composants de cette représentation.

On ne représente que les éléments impliqués dans des contraintes.

Les variables : la motorisation M , la couleur de la carrosserie C , le revêtement des sièges S , l'équipement électronique E

Les domaines : $D(M) = \{\text{sport}, \text{basique}\}$, $D(C) = \{\text{rose}, \text{rouge}, \text{jaune}\}$, $D(S) = \{\text{cuir}, \text{tissu}\}$, $D(E) = \{\text{ordi}, \text{xmedia}\}$

Les contraintes : la traduction de chacune des phrases en impact sur les domaines (tuples interdits) :

- *sur un modèle équipé avec une motorisation sport, on ne peut mettre qu'une sellerie cuir*

tuples interdits : $C_{MS} = \{(\text{sport}, \text{tissu})\}$

- *d'autre part la couleur rose bonbon est réservée uniquement aux motorisations basiques, alors que le rouge Ferrari ou le jaune canari sont possibles pour une motorisation sport*

tuples interdits : $C_{MC} = \{(\text{sport}, \text{rose})\}$

- *pour que le système anti-crevaison fonctionne il faut que la voiture soit équipée avec un ordinateur de bord : ceci n'est pas vraiment une contrainte, cela donne plutôt une valeur supplémentaire au domaine de E*
- *l'ordinateur de bord fait double-emploi avec le système multi-media : ceci n'est pas vraiment une contrainte ; cela indique juste que ordi et xmedia sont 2 valeurs distinctes de la même variable*

3. Quels algorithmes pouvez-vous utiliser pour résoudre le problème ?

On peut utiliser le backtrack (avec ou sans ordonnancement)

4. Faites dérouler l'un de ces algorithmes et trouvez une solution. Est-ce la seule ? Expliquez et justifiez.

On pourrait choisir d'utiliser le backtrack avec ordonnancement. On commence donc par compter pour chaque variable le nb de contraintes qui la concernent.

Pour M , on a 2 contraintes.

Pour C et S , on a 1 contrainte.

Pour E , on n'a pas de contrainte.

Le déroulement du backtrack donnerait :

- *pour M : choix de sport, passage à C*
- *pour C : rose impossible, choix de rouge, passage à S*
- *pour S : choix de cuir, passage à E*
- *pour E : choix de ordi et FIN*

Remarque : ici backtrack inutile

Solution finale : (M : sport, C : rouge, S : cuir, E : ordi)

Ce n'est pas la seule solution. On aurait aussi pu avoir par exemple : (M : sport, C : rouge, S : cuir, E : xmedia). Il y a encore d'autres solutions possibles.