UNIVERSITÉ PAUL SABATIER **F.S.I.**

EXAMEN D'ESTIMATION STOCHASTIQUE – M2 RODECO/IARF

1° session – Jeudi 17 Octobre 2019 – Durée 1h15mn

Tous documents de Cours, TD, TP autorisés – Tablettes et objets communicants interdits

Les questions 1,2,3,4,5,6,7a,8a,9 sont indépendantes.
Une copie soignée est l'assurance d'une correction bienveillante.

I/ Questions de cours : répondre *en trois phrases maximum convenablement construites, sans nécessairement invoquer des formules mathématiques,* à chacune des questions suivantes.

1. Soient Θ et Z deux variables aléatoires. Quelle signification peut-on accorder à la loi *a priori* $\mathrm{p}_\Theta(\theta)$ de Θ et à sa loi *a posteriori* $\mathrm{p}_{\Theta|Z}(\theta|z)$?
2. Expliquer en langage simple ce que sont le biais et la covariance d'un estimateur.
3. À quoi sert l'inégalité de Cramér-Rao ?
4. Soient X une variable aléatoire vectorielle et $X_1, \dots, X_N$ ses composantes. On suppose que $X \sim \mathcal{N}(\bar{x}, P)$, c.-à-d. que X suit la loi Gaussienne réelle multidimensionnelle de moyenne $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_N \end{pmatrix}^T$ et de covariance $P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{1N} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix}$. Comment la densité de probabilité $p_X(x)$ de X se simplifie-t-elle si $X_1, \dots, X_N$ sont de plus indépendantes et identiquement distribuées ?

II. Estimation de distance par maximum de vraisemblance/

Un télémètre et sa suite logicielle délivrent des mesures de distance selon un axe horizontal. Les données constructeur permettent d'établir que lorsqu'on effectue en séquence N mesures $z_1, \dots, z_N$ d'une même distance inconnue $\theta \in \mathbb{R}_+$, on obtient en fait N échantillons indépendants et identiquement distribués selon la loi Gaussienne d'espérance θ et d'écart-type $\rho\theta$, <u>où le paramètre ρ est connu</u>. On note alors

$$z_1, \dots, z_N \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}\big(\theta, (\rho\theta)^2\big). \tag{1}$$

Dans tout le sujet, on ne dispose d'aucune connaissance a priori sur θ.
Le symbole « := » signifie « égal par définition à ».

Répondre aux questions suivantes.

5. (a) Caractériser qualitativement, en langage naturel et en trois phrases maximum, la distribution de probabilité des observations correspondant à θ caché pour $\rho = \frac{1}{300}$.
   (b) Préciser en quoi le capteur considéré diffère, qualitativement et en trois phrases maximum, d'un capteur délivrant une mesure de θ avec une erreur relative distribuée uniformément dans l'intervalle $[-1\%; +1\%]$.
6. Le vecteur $z = (z_1, \dots, z_N)^T$ des observations effectuées peut être considéré comme la réalisation d'un vecteur aléatoire $Z = (Z_1, \dots, Z_N)^T$ lié à θ par un modèle d'observation $\mathrm{p}_{Z|\theta}(z|\theta)$.
   (a) Montrer que
   $$\mathrm{p}_{Z|\theta}(z|\theta) = \prod_{n=1}^{N} \mathrm{p}_{Z_n|\theta}(z_n|\theta). \tag{2}$$
   (b) Développer l'expression de $\mathrm{p}_{Z|\theta}(z|\theta)$ en tenant compte de (1)–(2).
7. Disposant de $z = (z_1, \dots, z_N)^T$, on souhaite calculer l'estimé du maximum de vraisemblance de θ caché, ci-après noté $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$.

(a) Montrer que $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$ est la solution de

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}} = \arg\min_{\theta} J(\theta), \text{ avec } J(\theta) := N \ln \theta + \frac{1}{2\rho^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{(z_n - \theta)^2}{\theta^2}. \tag{3}$$

(b) Préciser le lien qui unit $J(\theta)$ et $\mathrm{NLL}(\theta; z) = -\ln \mathrm{p}_{Z|\theta}(z|\theta)$, lequel pourra être exploité plus loin dans la question 9.

(c) Écrire *soigneusement* les conditions d'optimalité du premier ordre. Développer les expressions mathématiques obtenues. Conclure *soigneusement* sur les conclusions qu'elles permettent d'obtenir. On rappelle, à toutes fins utiles, que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{(x - \theta)^2}{\theta^2} \right) = \frac{2x(\theta - x)}{\theta^3}. \tag{4}$$

(d) On conserve pour l'estimé $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}$ celui qui semble « intuitivement le plus judicieux » parmi le(s) candidat(s) obtenu(s) à la question précédente. Donner son expression.

(e) Exprimer l'estimateur $\hat{\Theta}_{\mathrm{MLE}}$ du maximum de vraisemblance obtenu en fonction de ρ et des deux variables aléatoires

$$U_N := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n, \qquad V_N := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n^2. \tag{5}$$

8. Les variables aléatoires U_N, V_N définies en (5) se réalisent respectivement en la moyenne empirique des $z_1, \ldots, z_N$ et en la moyenne empirique des carrés des $z_1, \ldots, z_N$. En vertu de la loi des grands nombres, lorsque la dimension N du vecteur Z tend vers $+\infty$, leurs « limites » sont

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} U_N = U_\infty := \mathbb{E}[Z_n], \qquad \lim_{N \longrightarrow +\infty} V_N = V_\infty := \mathbb{E}\big[Z_n^2\big]. \tag{6}$$

(a) Établir les expressions de U_∞ et V_∞ en fonction de ρ et θ.

(b) Exploiter ce résultat afin de montrer que $\hat{\Theta}_{\mathrm{MLE}}$ est asymptotiquement non biaisé (i.e., non biaisé lorsque $N \longrightarrow +\infty$).

9. Quelle est la borne inférieure de Cramér-Rao du problème ?