TD 3 : Numérisation des signaux

Exercice 1 : Échantillonnage et condition de Shannon

Soit un signal analogique $x(t)$ dont la transformée de Fourier est nulle pour $|f| > 4$ Hz. Les signaux analogique suivants sont générés à partir de $x(t)$:

$y_1(t) = x(t) + x(t-1)$, $y_2(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$, $y_3(t) = x^2(t)$, $y_4(t) = x(t)\cos(8\pi t)$,

Ces signaux sont échantillonnés avec une période $T_e = 0,1$ s.
Pour chacun de ces signaux échantillonnés, vérifier s'il est possible de reconstruire le signal analogique original en utilisant un filtre passe-bas. Justifier votre réponse...

Exercice 2 : Échantillonneur naturel et bloqueur

On a vu en cours l'échantillonnage idéal comme multiplication du signal $x(t)$ analogique par un peigne de Dirac. Ce point de vue idéal est intéressant pour comprendre le théorème de Shannon, mais n'est bien sur pas utilisable en pratique.

I Échantillonnage naturel a faire par après les vacances

Il consiste à multiplier le signal $x(t)$ – dont le spectre est de support $[-f_m, f_m]$ – par $r(t)$, un train d'impulsions rectangulaires de hauteur $\frac{1}{\tau}$ et de largeur τ : $\frac{1}{\tau}\mathbb{1}_{[-\tau/2,\tau/2]}(t)$, et de période $T_e = \frac{1}{2f_m}$.

1. En considérant que ce train d'impulsion rectangulaires $r(t)$ est la convolution d'une simple impulsion rectangulaire par un peigne de Dirac de période T_e, calculer la Transformée de Fourier $\widehat{r}(f)$ de $r(t)$.
2. En déduire l'expression de la Transformée de Fourier du signal $x_{en}(t) = x(t)r(t)$ échantillonné (naturel).
3. Illustrer sur un schéma la représentation fréquentielle du signal échantillonné.
4. Dans l'hypothèse d'un filtrage idéal, peut-on reconstruire le signal x(t) sans déformations.
5. Comment est affecté le spectre de $x_{en}(t)$ si l'on utilise un train d'impulsions triangulaires plutôt que rectangulaires ?

II Échantillonnage bloqueur

Avec la technique d'échantillonnage naturel étudiée ci-dessus, le sommet des impulsions du signal échantillonné n'est pas constant et on utilise plutôt une technique d'échantillonnage bloquage. Cette technique peut être modélisée par une suite d'opérations : échantillonnage idéal par un peigne de Dirac de période T_e puis filtrage par un filtre de réponse impulsionnelle rectangulaire de largeur τ et de hauteur $\frac{1}{\tau}$: $h(t) = \frac{1}{\tau}\mathbb{1}_{[-\tau/2,\tau/2]}(t)$.

1. Exprimer le signal $x_{eb}(t)$ échantillonné (bloqué) en fonction de x(t) et de $h(t)$.

2. Montrer que la Transformée de Fourier de ce signal peut se mettre sous la forme :

$$\widehat{x}_{eb}(f) = K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(\tau, f)\beta(n, T_e, f).$$

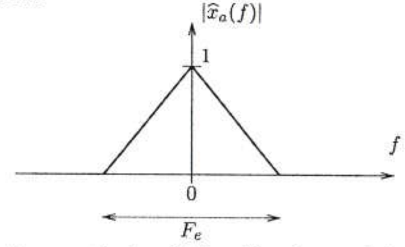
Que représente le terme $\beta(n, T_e, f)$ par rapport au spectre $\widehat{x}(f)$?

3. Comparer $\widehat{x}_{eb}(f)$ et $\widehat{x}_e(f)$ et expliquer les différences en terme de distorsion du spectre.
4. Sur quel paramètre peut-on agir pour limiter les distorsions basses fréquences du spectre de $\widehat{x}_{eb}(f)$ et espérer une reconstruction parfaite ?

a faire après les vacances

Exercice 3 : Conversion Numérique Analogique par bloqueur

Soit le signal $x_e(t)$ issu de l'échantillonnage idéal d'un signal analogique $x_a(t)$ ayant un spectre de la forme ci-dessous.



On modélise mathématiquement le signal échantillonné par $x_e(t) = x_a(t).\text{Ш}_{T_e}(t)$, avec $\text{Ш}_{T_e}(t)$ peigne de Dirac de période $T_e = \frac{1}{F_e}$ (où F_e est la fréquence d'échantillonnage).

1. Donner et interpréter la relation entre la transformée de Fourier $\widehat{x}_e(f)$ du signal échantillonné et la transformée $\widehat{x}_a(f)$ du signal analogique.
2. Tracer sur le schéma de la Fig. 1 le spectre du signal échantillonné.

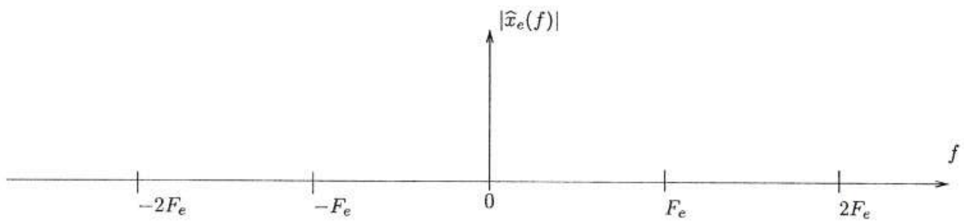


FIGURE 1 – Représentation fréquentielle du signal échantillonné

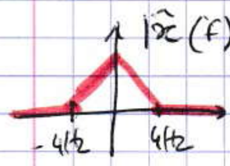
On va chercher à reconstruire le signal analogique à partir du signal échantillonné. Pour cela, on le place en entrée d'un bloqueur, qui va conserver la même valeur durant la période T_e. Cela se modélise mathématiquement par la convolution du signal échantillonné par la porte $\mathbb{1}_{[0,T_e]}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0, T_e[, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ soit le signal ainsi reconstruit : $x_r(t) = x_e(t) * \mathbb{1}_{[0,T_e]}(t)$.

TD3 - Traitement du signal
Numérisation des signaux

Exercice 1 : Echantillonnage et condition de Shannon

Théo Shannon $\checkmark$ $(2\times f_{max})$

① Rappel : Quand on échantillonne en temps on périodise



→ il faut échantillonner $x(t)$ à une $F_e > 8$ Hz pour ne pas perdre d'information

$y_1(t) = x(t) + x(t-1)$
$\hat{y}_1(f) = \hat{x}(f) + \hat{x}(f)\times e^{2j\pi f}$
$\hat{x}(f) = 0$ si $|f|>4$ donc
$f_{max} = 4$ donc $\hat{y}_1 = 0$ si $|f|>4$
$T_e = 0{,}1 \Rightarrow \frac{1}{T_e} = 10 = f_e \Rightarrow 2f_{max} < f_e$
$\Rightarrow 8 < 10$ ✓
donc la $\boxed{\text{condition est vérifiée}}$

$y_2(t) = \frac{dx}{dt}$
↳ propriété de dérivation
$\hat{y}_2(f) = (2j\pi f)\hat{x}(f)$
$\hat{x}(f) = 0$ si $|f|>4$
$(2j\pi f)\hat{x}(f) = 0$ si $|f|>4$
donc $f_{max} = 4$ et $f_e = 10$
donc $2 f_{max} < f_e$ $\boxed{✓ \text{ ok}}$

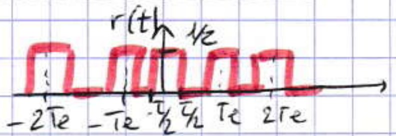
$y_3(t) = (x(t))^2$
~~$\hat{x}(f)$~~
$\hat{y}_3(f) = \hat{x}(f) * \hat{x}(f)$
$f_{max} = 8$ Hz
$f_e = 10$ Hz
$f_e < 2 f_{max}$ donc le signal n'est pas reconstructible

$y_4(t) = x(t)\cos(8\pi t)$
$= x(t)\cos(2\pi 4 t)$
$\hat{y}_4(f) = \hat{x}(f) * \frac{1}{2}(\delta(f-4) + \delta(f+4))$
$= \frac{1}{2}\hat{x}(f-4) + \frac{1}{2}\hat{x}(f+4)$

$f_{max} = 8$ Hz
$f_e = 10$ Hz
$\boxed{\text{Condition non satisfaisante}}$

Exercice 2 : Echantillonneur naturel et bloqueur

① train d'impulsion



$r(t) = \frac{1}{\tau}\mathbb{1}_{[-\tau/2,\tau/2]} * Ш_{T_e}(t)$ (Convoluer par Ш → périodisation)

↳ $\hat{r}(f) = TF\left\{\frac{1}{\tau}\mathbb{1}_{[-\tau/2,\tau/2]}(t)\right\}\cdot TF\left\{Ш_{T_e}(t)\right\}$

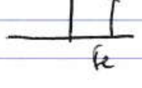
$= \cancel{\frac{1}{\tau}}\cdot\cancel{\tau}\ \mathrm{sinc}(f\tau)\cdot F_e Ш_{F_e}(f)$ (c'est un sinus cardinal échantillonné)

② $x_{en} = x(t)\cdot r(t)$
↳ $\hat{x}_{en}(f) = \hat{x}(f) * \hat{r}(f) = \hat{x}(f) * (F_e\ \mathrm{sinc}(f\tau)Ш_{F_e}(f))$

$Ш_{F_e}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nF_e)$ donc $\hat{x}_{en}(f) = \hat{x}(f)*(F_e\cdot\mathrm{sinc}(f\tau)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nF_e))$

$= \hat{x}(f)*(F_e\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}(f\tau)\delta(f-nF_e))$

$= \hat{x}(f)*(F_e\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}(nF_e\tau)\delta(f-nF_e))$

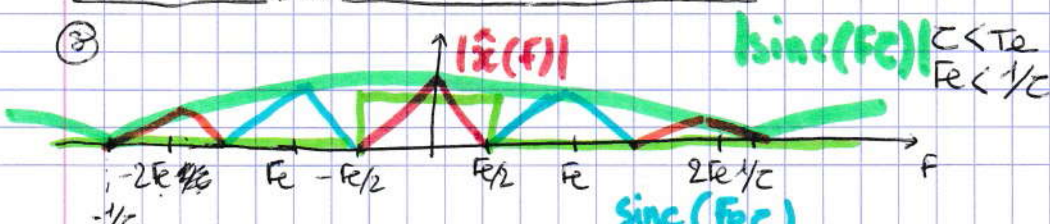


$\hat{x}_{en}(f) = \hat{x}(f)*(F_e\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}(nF_e\tau)\,\delta(f-nF_e))$

$= F_e\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\mathrm{sinc}(nF_e\tau)}_{\text{nombre pas une fonction}}\cdot\underbrace{\hat{x}(f)*\delta(f-nF_e)}_{\hat{x}(f-nF_e)}$

$$\boxed{\hat{x}_{en}(f) = F_e\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}(nF_e\tau)\,\hat{x}(f-nF_e)}$$

③



④ Si on filtre $x_{en}(t)$ par un filtre de réponse ~~impulsionnelle~~ en fréquence

$$\hat{h}(f) = \frac{1}{Fe} \mathbb{1}_{[-Fe/2, Fe/2]}(f)$$

On peut retrouver $x(t)$ sans déformation

$$\hat{z}(f) = \hat{x}_{en}(f) \cdot \frac{1}{Fe} \mathbb{1}_{[-Fe/2, Fe/2]}(f) = \hat{x}(f)$$

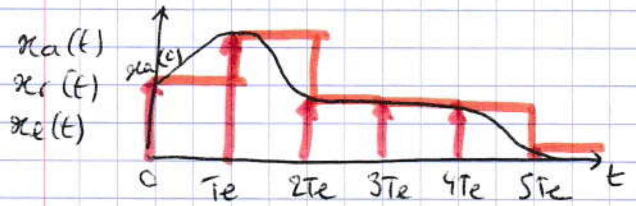
Exercice 3

$$x_e(t) = x_a(t) \cdot Ш_{Te}(t) \quad \text{(échantillonnage idéal)}$$

$$\hat{x}_e(f) = \hat{x}_a(f) * Fe\, Ш_{Fe}(f)$$
$$= Fe \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}_a(f - nFe) \quad \text{périodisation du spectre}$$

③ $x_r(t) = x_e(t) * \mathbb{1}_{[0, Te[}(t)$
$= (x_a(t) \cdot Ш_{Te}(t)) * \mathbb{1}_{[0, Te[}(t)$

$$x_r(t) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} x_a(nTe)\, \delta(t - nTe)\right) * \mathbb{1}_{[0, Te[}(t)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nTe) \underbrace{\delta(t - nTe) * \mathbb{1}_{[0, Te[}(t)}_{\mathbb{1}_{[0, Te[}(t - nTe)}$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} x_a(nTe)\, \mathbb{1}_{[0, Te[}(t - nTe)$$



(voir photo)