Fiche Automatique Continue

Problématique de la boucle fermée

- Assurer une réponse acceptable pour des consignes d'entrée définies en fonction du temps ;
- Fournir des caractéristiques fréquentielles (gains, déphasage) demandées dans une bande de fréquences donnée

Idée : ajout de pôles et de zéros dans la boucle fermée.

Spécifications imposées pour les systèmes asservis formulées (temporel/fréquentiel)

- **La rapidité** (temps de réponse, bande passante) ;
- **L'allure de la réponse** (régime transitoire peu oscillant).
- **La précision en régime établi** (écart de position, de vitesse) ;

1 Les pôles dans le plan complexe

Influence de la position des pôles sur la rapidité et l'amortissement d'un système du deuxième ordre

$$G(p) = \frac{N(p)}{\big(p-(r+j\omega)\big)\big(p-(r-j\omega)\big)} = \frac{N(p)}{p^2 - 2r + (r^2+\omega^2)}$$

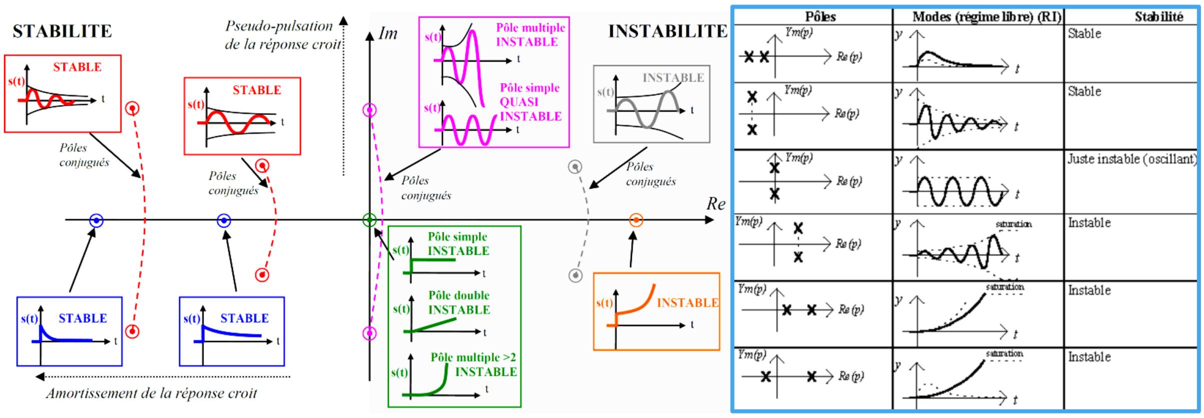
Un système du second ordre s'écrit :

$$\frac{1}{1 + m\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

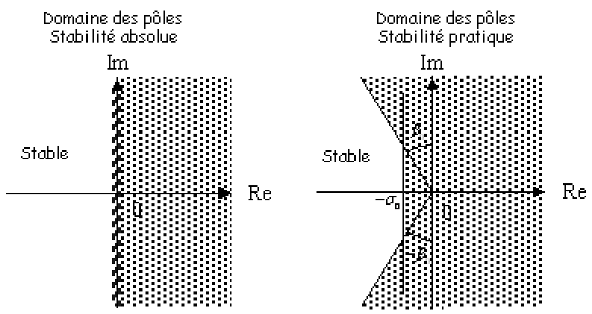
m : représente le facteur d'amortissement avec $m = -\frac{r}{\omega_0}$

ω_0 : représente la pulsation caractéristique avec $\omega_0^2 = r^2 + \omega^2$

Influence de la position des pôles sur la rapidité et l'amortissement d'un système du 2nd **ordre**



- Le système est d'autant moins amorti que le pôle s'éloigne de l'axe $Re(p)$.
- Le système est d'autant plus rapide que le pôle s'éloigne de l'axe $Im(p)$.



Le **temps de disparition** de la composante transitoire associée à un mode définit la **rapidité** de ce mode

$$\tau_i = -\frac{1}{Re[p_i]} \; avec \; \forall i{:}\, \tau_i < \tau_{max}$$

Chaque pole réel p_i de multiplicité m_i est un **mode apériodique**

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j t^{j-1} e^{p_i t} \text{, } constante\ de\ temps\ \tau_i = \frac{1}{p_i}$$

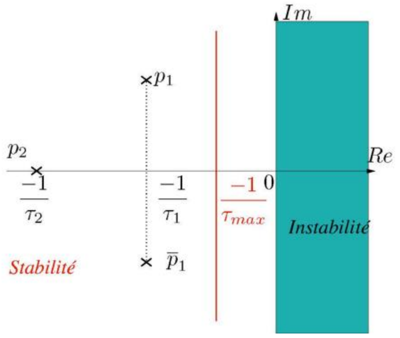
Chaque paire de pôle complexe conjugué $(p_i, \overline{p_i})$ de multiplicité m_i est un **mode oscillant**

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j t^{j-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t) + \mu_j t^{j-1} e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t) \text{, } pulsation\ \omega_i$$

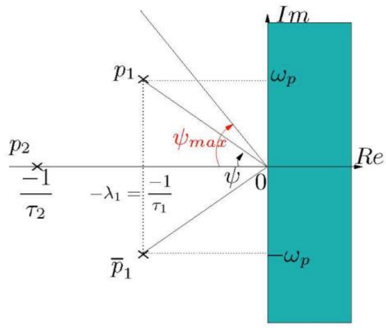
Pour un **mode oscillatoire**, la **convergence des oscillations** est caractérisée par le paramètre $0 < \zeta < 1$ appelé facteur d'amortissement.

$$\zeta = \left|\frac{Re[p_i]}{p_i}\right| = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i^2 + \omega_{pi}^2}} \; avec\ \forall i : \zeta_i \geq \zeta_{min} = \cos(\psi_{max})$$

Temps de disparition



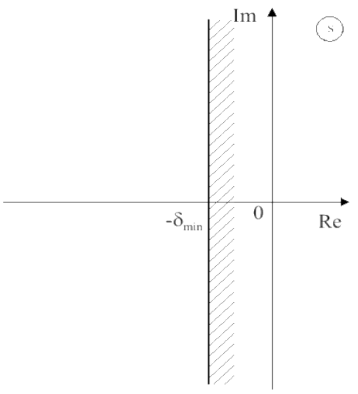
Convergence des oscillations pour $p_i = -\lambda_i + j\omega_{pi}$

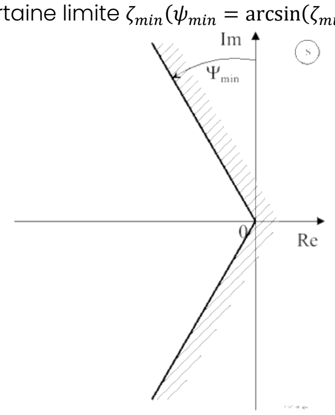


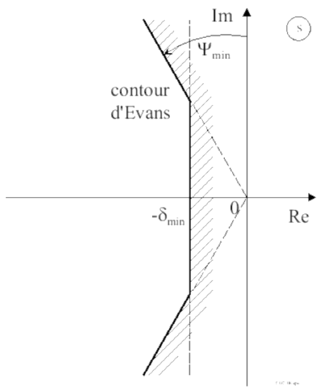
Marge de stabilité absolue
Garantir que tous les modes temporels sont plus rapides que $e^{\delta_{min} t}$.

Marge de stabilité relative
Garantir que tous les modes temporels ont un taux d'amortissement ζ supérieur à une certaine limite $\zeta_{min} (\psi_{min} = \arcsin(\zeta_{min}))$.

La combinaison des marges forme le **contour d'Evans**.

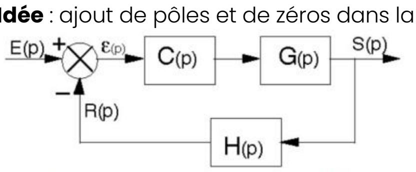






2 Problématique de la boucle fermée : vision globale des actions

Idée : ajout de pôles et de zéros dans la boucle fermée.



Schématique simple (série) d'une boucle fermée.

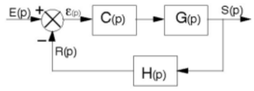
Remarques : Actions en cascade (série) et/ou parallèle ;
Cas des compensations erreur et perturbation

1. **Actions** classiques : proportionnelle, intégration, dérivation, combinaison d'actions ;
2. **Retours** de **sortie statique** et **dynamique**, combinaison d'action : tachymétrique et proportionnelle ;
3. **Retour d'état**, combinaison d'action : retour d'état et effet intégral (2A) ;
4. Cas du retour d'état avec un **observateur** (2A) ;

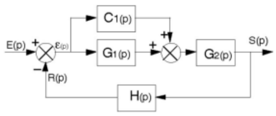
2.1 1ère Réponse à la problématique de la boucle fermée

Idée : ajout de pôles et de zéros dans la boucle fermée. Comment ? Pour quoi faire ?

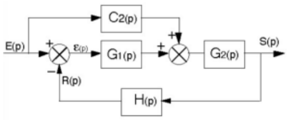
Correcteur en cascade ou série



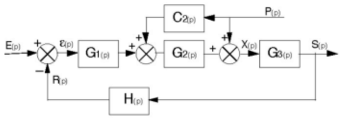
Correcteur en parallèle



Compensation de l'erreur



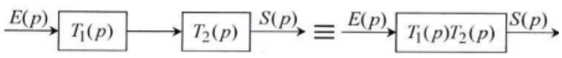
Compensation des perturbations



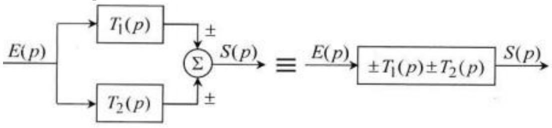
	Compensation des perturbations	Compensation de l'erreur
Hypothèses	L'entrée $E(p)$ est nulle ; La perturbation $P(p)$ est mesurable	Les perturbations sont nulles
Objectif	Éliminer l'influence de la perturbation $P(p)$ par le correcteur $C_2(p)$. Soit $X(p)$ le signal apparaissant en aval de l'application de la perturbation. On a alors : $X(p) = P(p) + C_2(p)G_2(p)P(p) + \varepsilon(p)G_1(p)G_2(p)$	On souhaite annuler $\varepsilon(p)$ et pour cela on utilise un correcteur par anticipation. Et pour annuler $\varepsilon(p)$ il suffit de choisir $\boxed{C_2(p) = \frac{1}{H(p)G_2(p)}}$. C'est-à-dire, dans ce cas, le système asservi suit parfaitement la loi d'entrée sans avoir besoin de placer un intégrateur dans la chaine directe.
Idée/Remarque	On pose : $C_2(p) = -\frac{1}{G_2(p)}$ Problème : physiquement peu réalisable, ce qui oblige le concepteur à adopter une forme approchée ; donc pas de compensation parfaite du régime transitoire des perturbations.	Physiquement peu réalisable, ce qui oblige le concepteur à adopter une forme approchée ; donc pas de compensation parfaite du régime transitoire.

2.2 Simplification de schéma bloc

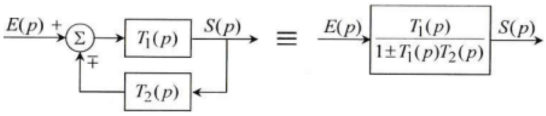
Mise en série



Mise en parallèle

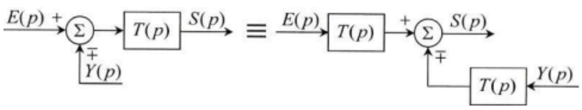


Mise en contre réaction

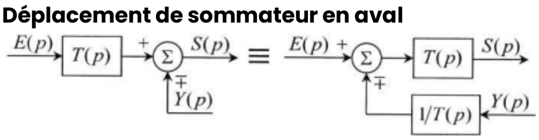


Permutation de sommateur

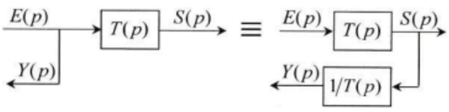
Déplacement de sommateur en amont



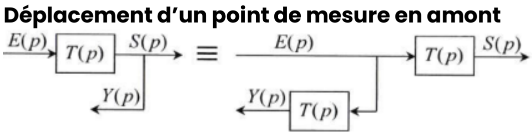
Déplacement de sommateur en aval



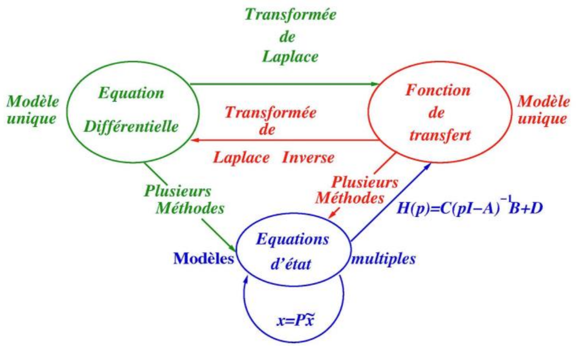
Déplacement d'un point de mesure en aval



Déplacement d'un point de mesure en amont



3 Représentations utiles de systèmes : Variétés des commandes



Action Tachymétrique
Correcteur tachymétrique

Action Tachymétrique + P
Correcteur par retour d'état

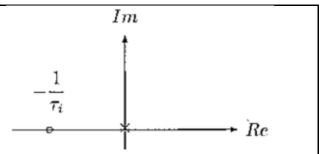
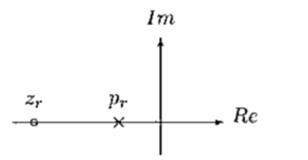
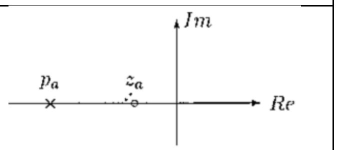
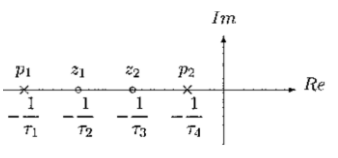
Action proportionnelle
Correcteur par retour de sortie statique

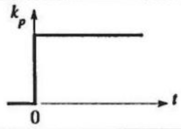
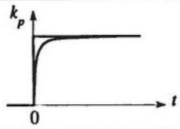
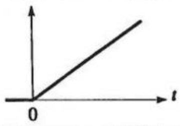
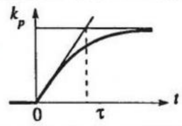
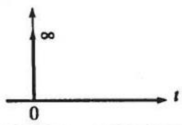
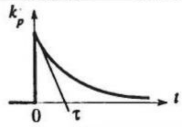
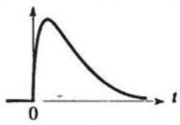
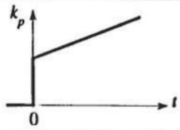
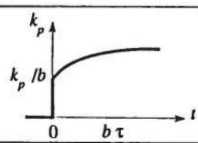
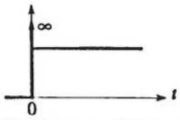
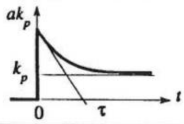
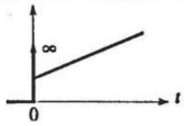
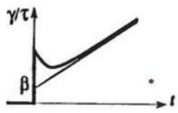
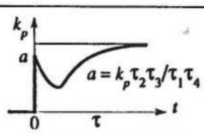
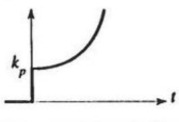
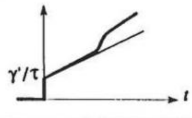
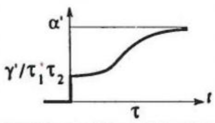
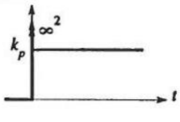
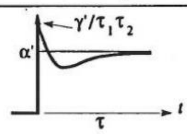
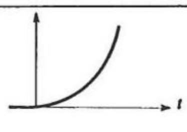
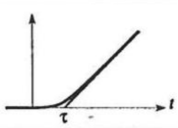
Accès total aux états (2A)
Correcteur par retour d'état
Correcteur par retour d'état + effet Intégral I

Accès partiel aux états (2A)
Correcteur par retour de sortie dynamique + retour d'état : mise en place d'un observateur

Remarques : Le choix du réseau correcteur peut être également effectué en vue de modifier ou simplifier la disposition des pôles stables :

- On désire améliorer la bande passante ou le temps de réponse du système : simplifier les pôles les plus près de l'axe imaginaire pour les remplacer par des pôles plus éloignés ;
- On souhaite diminuer l'erreur en régime permanent : remplacer un pôle proche de l'origine par un pôle encore plus proche ;
- Le choix des pôles substitués peut également s'effectuer en vue de modifier l'amortissement.

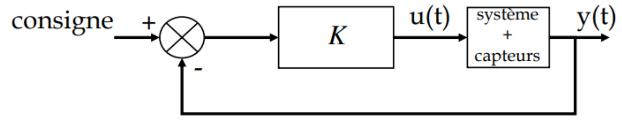
Action Proportionnelle (P)	Cf cours 1A et Lieu des Racines	Un pôle à l'origine et un zéro $-\frac{1}{\tau_i}$	
Action Intégrale (PI)			
Correcteur intégral pur	Cf cours 1A et Lieu des Racines	$z_r = \frac{1}{\tau}$ $p_r = -\frac{1}{b\tau}$ $b > 1$	
Correcteur proportionnel intégral	$H(s) = \left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right)$ $= \frac{1+\tau_i s}{\tau_i s}$		
Correcteur retard de phase	$H(s) = b\frac{1+\tau s}{1+b\tau s}$		
Action Dérivée (D)			
Correcteur Proportionnel Dérivé	Cf cours 1A	$z_a = -\frac{1}{a\tau}$ $p_a = -\frac{1}{\tau}$ $a > 1$	
Correcteur à avance de phase	$H(s) = \frac{1}{a}\frac{1+a\tau s}{1+\tau s}$		
Action (PID)			
Correcteur Proportionnel Dérivé Intégral (PID)	Cf cours Tuning PID	$z_1 = -\frac{1}{\tau_2}, z_2 = -\frac{1}{\tau_3}$ $p_1 = -\frac{1}{\tau_1}, p_2 = -\frac{1}{\tau_4}$ $\tau_2\tau_3 = \tau_1\tau_4$ $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_4$	
Correcteur à avance-retard de phase	$H(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$		

ACTION THÉORIQUE	ACTION EXACTE THÉORIQUE: transmittance $H_T(s)$	ACTION EXACTE THÉORIQUE: réponse indicielle	ACTION APPROCHÉE: transmittance $H_A(s)$	ACTION APPROCHÉE: réponse indicielle
P	k_p		$\frac{k_p}{1+\tau s}$	
I	$\frac{1}{\tau_i s}$		$\frac{k_p}{1+\tau s}$	
D	$\tau_d s$		$\frac{k_p \tau s}{1+\tau s}$	
			$\frac{k_p s}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$	
PI	$k_p\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right)$		$k_p\frac{1+\tau s}{1+b\tau s}$, $b>1$	
PD	$k_p(1+\tau_d s)$		$k_p\frac{1+a\tau s}{1+\tau s}$, $a>1$	
PID	$k_p\left(1+\frac{1}{\tau_i s}+\tau_d s\right)$		$\frac{\alpha+\beta s+\gamma s^2}{s(1+\tau s)}$ $\tau^2<\gamma/\alpha$	
			$k_p\frac{(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_4 s)}$ $\tau_1>\tau_2>\tau_3>\tau_4$	
PII^2	$k_p\left(1+\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{s^2}\right)$		$\frac{\alpha'+\beta' s+\gamma' s^2}{s(1+\tau s)}$ $\tau^2>\gamma/\alpha$	
			$\frac{\alpha'+\beta' s+\gamma' s^2}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ $\tau_1>\tau_2>\sqrt{\gamma'/\alpha'}$	
PDD^2	$k_p(1+\alpha s+\beta s^2)$		$\frac{\alpha'+\beta' s+\gamma' s^2}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ $\tau_1<\tau_2<\sqrt{\gamma'/\alpha'}$	
I^2	$\frac{\alpha}{s^2}$		$\frac{k_p}{s(1+\tau s)}$	

Note : Transmittance = Fonction de transfert

4 Correction proportionnelle : simple mais « limitée »

Comment « bien » choisir la valeur de K ? Mise en place d'une technique automatique du tracé des pôles de la BF. Le lieu des racines (appelé également lieu d'Evans) est le nom donné au tracé, dans le plan complexe, de l'évolution des pôles de la boucle fermée en fonction d'un gain K variant de 0 à +∞.

Le lieu des racines Système + capteurs : $\boxed{G(p) = \frac{\prod_{i=1}^{m}(p - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(p - p_i)}}$ où m : nombre de zéros et n : nombre de pôles	

Equation caractéristique de la boucle fermée $F(p)$: $\boxed{1 + KG(p) = 0}$

- $KG(p)$: Boucle ouverte
- $G(p)$ peut s'écrire avec 2 polynômes $Num(p)$ et $Den(p)$ tels que: $\boxed{1 + \frac{KN(p)}{D(p)} = 0}$
- Les pôles de $F(p)$ sont les racines de $D(p) + KN(p) = 0$.

2 règles importantes :

- Les points de départ des branches sont les pôles de la BO.
  - Quand $K = 0$ les pôles de $F(p)$ sont les pôles de $G(p)$.
- Les points d'arrivée des branches sont les zéros de la BO.
  - Quand K tend vers +∞ ,les pôles de $F(p)$ sont les racines de $N(p) = 0$ (zéros de $G(p)$).

Ce qui est important : on ne peut pas placer les pôles où l'on veut dans le plan complexe (notion de commande « limitée ») et les uns par rapport aux autres. Cependant, il est facile de définir un gain K ayant de « bonnes » performances (régime transitoire, stabilité, précision).

5 Rappels de synthèse sur la réponse temporelle et fréquentielle

Définition : **La réponse temporelle est la sortie $y(t)$ délivrée par le système sous l'action de la commande envoyée $u(t)$**

Méthode de calcul : dépends du type de modèle :

- Représentation d'état : Calculer la solution de l'équation d'état $X(t)$ puis en déduire $y(t)$
- Equation différentielle d'ordre n : résoudre l'équation différentielle
- Fonction de transfert : écrire $Y(p) = F(p)U(p)$ et déduire $y(t)$ à l'aide de tables de transformée de Laplace

Deux types de réponses :

- Impulsionnelle : $u(t) = \delta(t)$ avec δ impulsion de Dirac
- Indicielle : $U(t) = u_0 U(t)$ avec $U(t)$ échelon unitaire

5.1 Caractéristiques de la réponse indicielle

Temps de montée T_m

Temps que met la réponse indicielle pour passer de 10 à 90% de sa valeur finale. Elle évalue la rapidité de « démarrage du système »

Temps de réponse à $n\%$ T_r

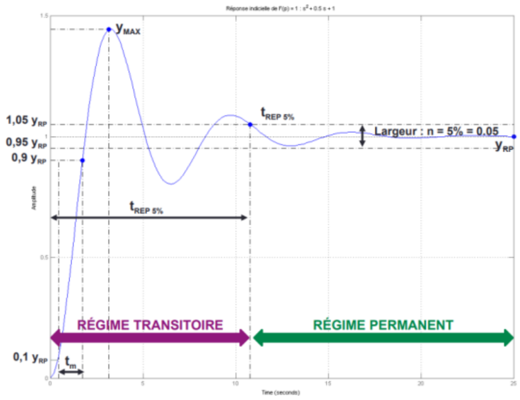
Temps nécessaire à la réponse indicielle pour atteindre sa valeur finale à $\pm n$ % près ($n = 5$ dans la plupart des cas). Elle évalue la rapidité du système à se stabiliser

Premier dépassement D

Se mesure lorsque la réponse indicielle dépasse sa valeur finale. Elle évalue si le système est oscillatoire

Valeur au régime permanent

Valeur y_{RP} de $y(t)$ lorsque le système est stabilisé. Nécessite que le système soit stable



$$D_{1\%} = 100\frac{y_{max} - y_{RP}}{y_{RP}}$$

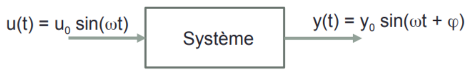
$$y_{RP} = \lim_{t \to \infty} y(t)$$

5.2 Réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle (ou harmonique) suppose que :

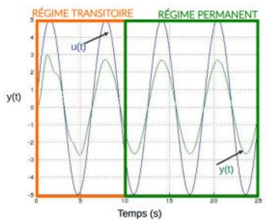
- Le système est excité avec une entrée sinusoïdale $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$
- Le système est stable
- La fonction de transfert $F(p)$ du système est connue

Réponse fréquentielle = Régime permanent de la réponse à $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$
On montre que le régime permanent s'écrit $\boxed{y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi)}$ ou $y_0 = |F(j\omega)|u_0$ et $\varphi = \arg(F(j\omega))$
L'amplitude y_0 et le décalage φ (phase) dépendent de la pulsation (et donc de la fréquence) du signal d'entrée et des caractéristiques du système.



Hypothèse : entrée sinusoïdale $(u(t))$ et **système linéaire invariant stable**
Au régime permanent, la sortie $(y(t))$ est :

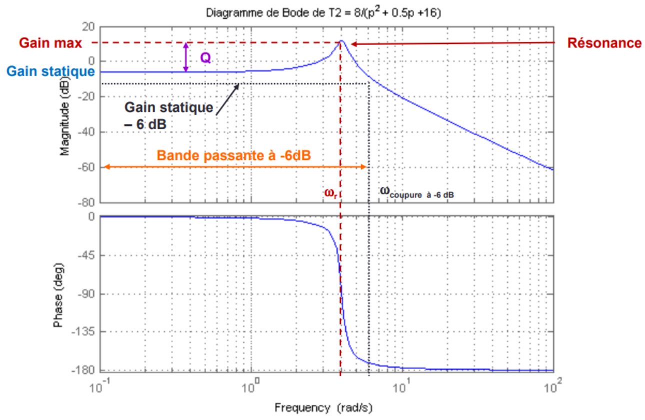
- Sinusoïdale, de même pulsation que l'entrée
- Avancée/ retardée en fonction de la phase
- Amplifiée/réduite en fonction du gain

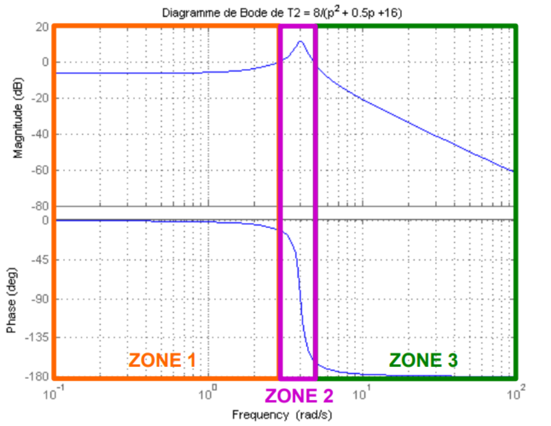


5.2.1 Représentation graphique

La réponse fréquentielle dépend de $|F(j\omega)|$ et φ

- Diagramme de **Bode** : Gain G en dB $\left(G = 20\log|F(j\omega)|\right)$ et phase φ en fonction de la pulsation ω



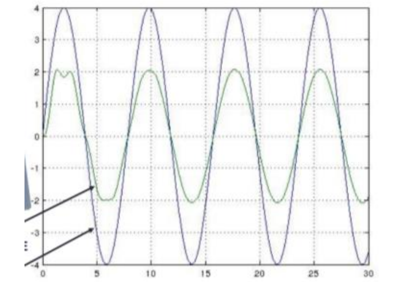
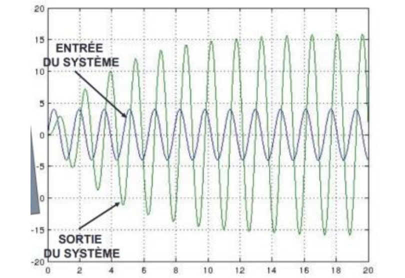
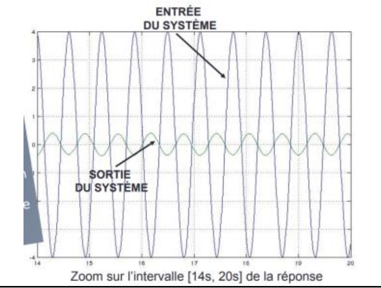


- Diagramme de **Black** : Tracé du gain en fonction de la phase
- Diagramme de **Nyquist** : Tracé de la partie imaginaire de $F(j\omega)$ en fonction de la partie réelle de $F(j\omega)$ en remarquant que $F(j\omega) = Re\left(F(j\omega)\right) + j\,Im\left(F(j\omega)\right)$

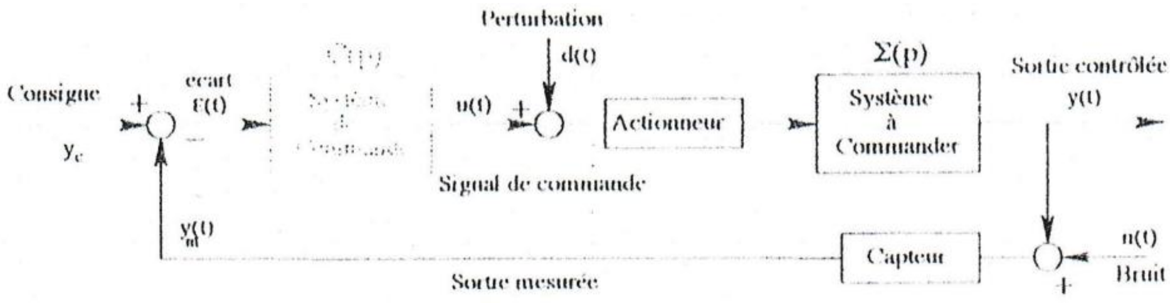
5.2.2 Caractéristiques de la réponse fréquentielle

Gain statique	**Pulsation de coupure à $-xdB$ ω_C**	**Pulsation de résonance ω_r**	**Coefficient de surtension**
En dB: $G_{dB}(0) = \lim\limits_{\omega\to 0} G_{dB}(\omega)$	Valeur ω_C de ω telles que $G_{dB}(0) - x$ Valeurs usuelles en automatique : $x = -3\left(\frac{signal\ de\ sortie}{\sqrt{2}}\right)$ $x = -6\left(\frac{signal\ de\ sortie}{2}\right)$ L'intervalle $[0, \omega_C]$ définit la bande passante à $-xdB$ -> **une grande bande passante est le signe d'un système rapide**	Valeur ω_r de ω etlle que $G_{dB}(\omega_r)$ est maximum	$Q_{dB} = G_{dB}(\omega_r) - G_{dB}(0)$ Une résonnance est un coefficient de surtension sont le **signe d'un système oscillant qui comporte donc des pôles complexes conjugués**

Voir diagramme de Bode ci-dessus pour lire les différentes caractéristiques

Zone 1	**Zone 2**	**Zone 3**
Basses fréquences : $\omega = 0.8\ rd/s$	Résonnance $\omega = 4\ rd/s$	Hautes fréquences : $\omega = 10\ rd/s$
$G < 0 \rightarrow$ Amplitude de la sortie < amplitude de l'entrée	$G = G_{max} > 0 \rightarrow$ Amplitude de la sortie > amplitude de l'entrée	$G < 0 \rightarrow$ Amplitude de la sortie < amplitude de l'entrée
$\varphi = 0 \rightarrow$ La sortie et l'entrée sont en phase (elles sont maximales ou minimales au même instant)	$\varphi < 0 \rightarrow$ Sortie retardée par rapport à l'entrée	$\varphi \approx 180 \rightarrow$ Sortie retardée et en opposition de phase (la sortie est maximale quand l'entrée est minimale et inversement)
		

5.3 Synthèse d'un correcteur



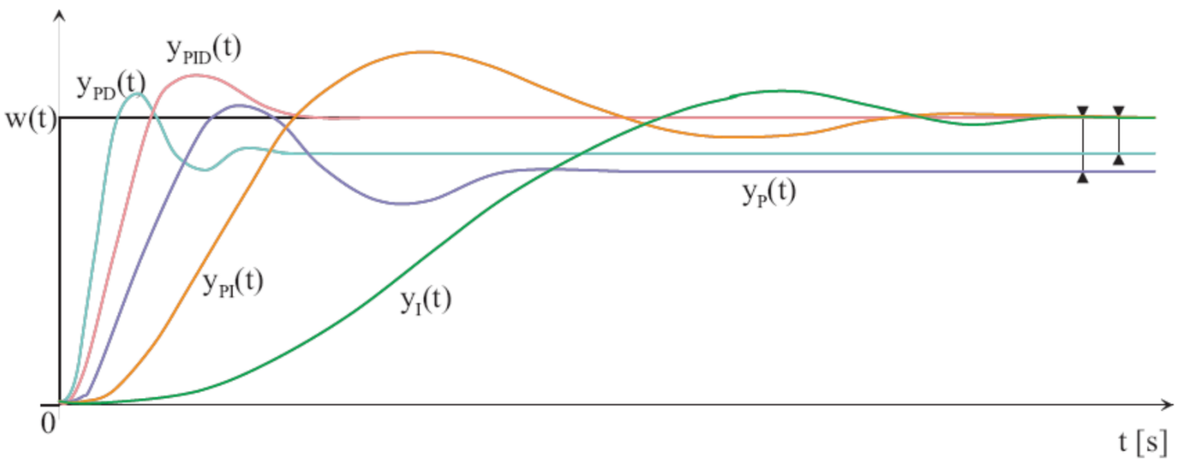
- **Synthèse** : Réalisation d'un système de commande et amélioration des performances -> Trouver le correcteur tel que le système bouclé ait le comportement souhaité.
- **Validation** : Simulation et tests

Un système de commande a pour objectif de doter le système asservi de certaines propriétés telles que :

- La **stabilité** du système asservi
- La **rapidité** de la réponse temporelle (régime transitoire)
- La **précision** en régime permanent
- La **robustesse** (marges de stabilité, rejet de perturbation)

Ici seule la synthèse par méthode fréquentielle traditionnelles est considéré. D'autres méthodes temporelles et fréquentielles issues de la représentation par espace d'état, de la commande optimale et robuste permettent la mise en place de lois de commande plus évoluées (Retour d'état, observateurs, LQ, LQG, synthèse H_2/H_∞). Cependant, les méthodes traditionnelles sont les plus utilisées en entreprises du fait de :

- Leur aspect pratique,
- L'existence de techniques de synthèse simples ou empiriques,
- La possibilité de régler les gains intuitivement.



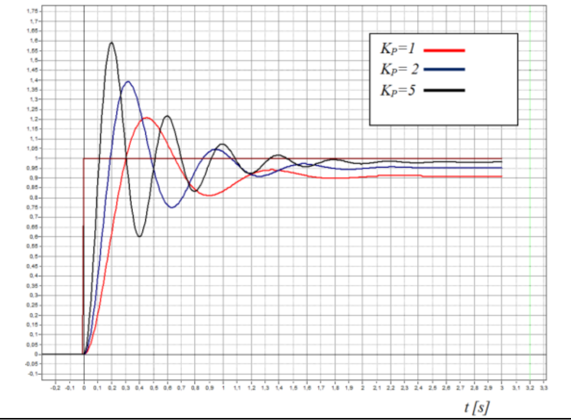
Action	Avantage	Désavantage
P	Dynamique	Ne permet pas d'annuler une erreur statique
I	Annulation d'erreur statique, amélioration de la robustesse	Action lente, ralentit le système (effet déstabilisant)
D	Action très dynamique, améliore la rapidité (effet stabilisant)	Sensibilité aux bruits, forte sollicitation de l'organe de commande

5.3.1 Action proportionnelle

Ce correcteur est un simple amplificateur de gain réglable $u(t) = K_P C(t) \rightarrow \boxed{C(p) = K_P}$

Avantages et inconvénients

- Accélère la réponse du système asservi,
- Diminue l'erreur de position
- Si $K_P > 1$ les marges de stabilités diminues (jusqu'à déstabiliser le système)
- Si $K_P > 1$, cela peut entrainer des oscillations et un dépassement préjudiciable
- Si $K_P < 1$, il agit en atténuateur : stabilité du système améliorée mais réponse temporelle dégradée



Exemple

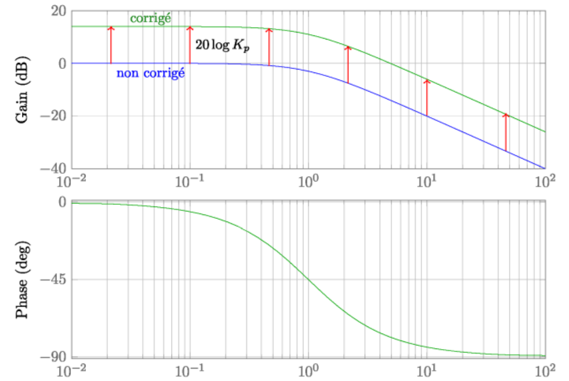
Soit le système à commander $\sum(p) = \frac{1}{p^2+p+1}$ et le système de commande $C(p) = K_P$. Le système en boucle fermée s'exprime par :

$$\boxed{\sum_{BF}(p) = \frac{K_P}{p^2+p+1+K_P}}$$

Cette nouvelle fonction de transfert est caractérisée par :

$$K_{statique} = \frac{K_P}{K_P+1}, \omega_n = \sqrt{1+K_P}, \zeta = \frac{1}{2\sqrt{1+K}}$$

Donc si $K_P \uparrow$ alors $\zeta \downarrow$, les marges $\downarrow$ et l'erreur de position $\varepsilon_P = \frac{1}{t+K_P} \downarrow$



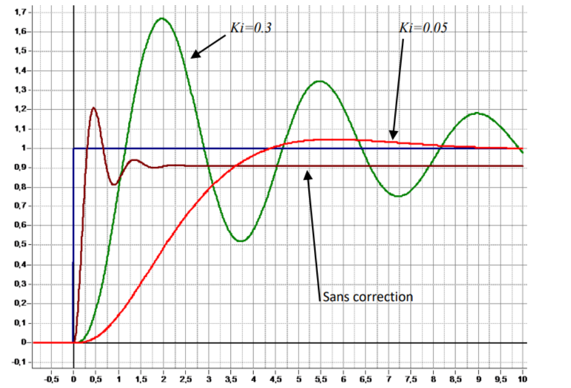
5.3.2 Action Intégrale

Ce correcteur introduit un intégrateur qui ajoute un pôle à la fonction de transfert en boucle ouverte

$$u(t) = \int_0^t e(t)dt \rightarrow \boxed{C(p) = \frac{1}{p}}$$

Avantages et inconvénients

- Erreur de position nulle en boucle fermée (BF),
- Diagramme de phase décalé de $-90°$: marge de stabilités dégradées,
- Peut provoquer des oscillations et du dépassement

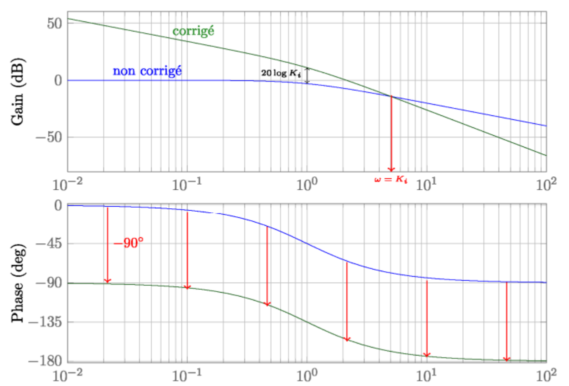


Exemple

Soit le système à commander $\sum(p) = \frac{0,8}{p^2+p+1}$ et le système de commande $C(p) = \frac{1}{p}$. Le système en boucle fermée s'exprime par :

$$\boxed{\sum_{BF}(p) = \frac{0,8}{p^3+p^2+p+0,8}}$$

$\sum_{BF}(p)$ est un ordre 3 : La marge de gain est finie,
Courbe plus proche du point critique : marges dégradées, oscillations et dépassement,
Apparition d'un phénomène de surtension
Pas d'erreur de position



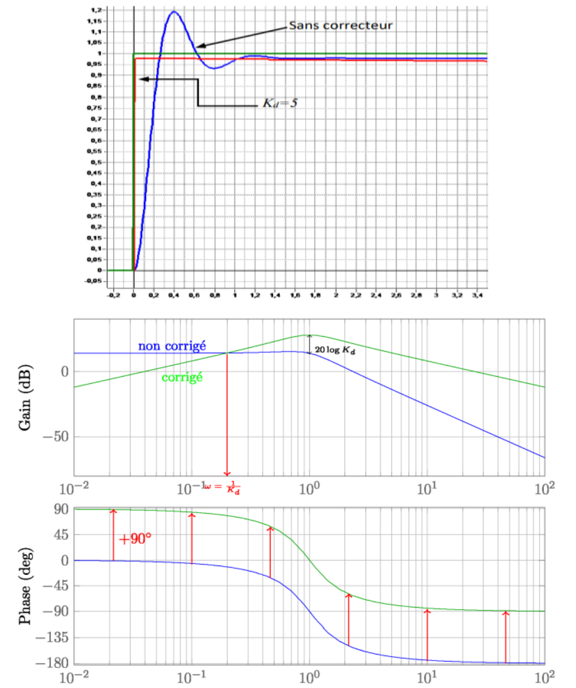
5.3.3 Action dérivée

Ce correcteur introduit un dérivateur qui ajoute un zéro nul à la fonction de transfert en boucle ouverte

$$u(t) = \frac{\mathrm{de(t)}}{\mathrm{dt}} \rightarrow \boxed{C(p) = p}$$

Avantages et inconvénients

- Ajoute de la phase : marges susceptibles d'être augmentées,
- A tendance à accélérer la réponse du système : temps de montée diminué
- Le gain statique est diminué : précision dégradée



5.3.4 Correcteur Proportionnel Intégral PI

Ce correcteur a pour objectif de tirer profit des avantages de l'effet intégral I sans ses inconvénients :

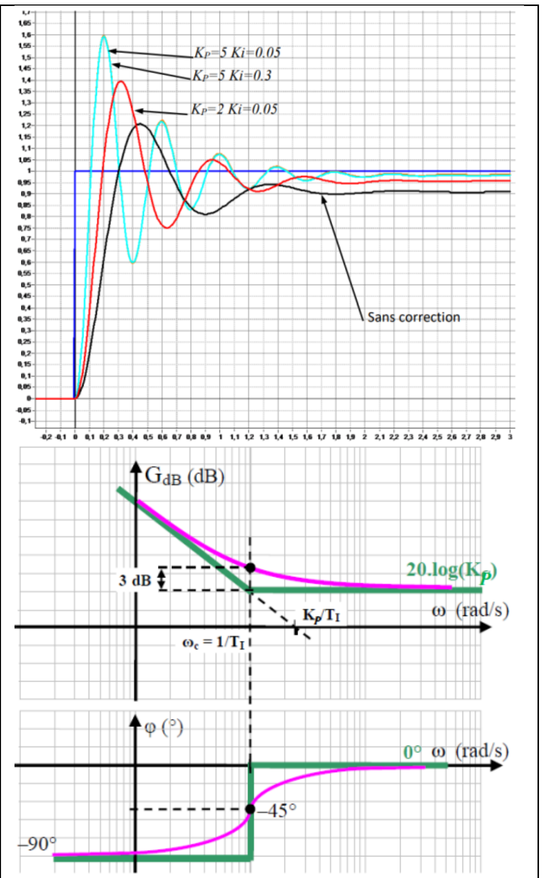
$$\boxed{C(p) = K_P \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}}$$

Idée du correcteur

- Utiliser les avantages de l'intégrateur en basse fréquence : précision infinie,
- L'action intégrale ne doit plus avoir d'effet dans les fréquences élevées, en particulier dans la région du point critique

Réglage intuitif du correcteur

- Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction
    - Le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
    - L'augmenter pour améliorer la rapidité du système.
- Ensuite, la partie I est ajoutée en réglant le zéro $\frac{1}{\tau_i}$ de façon à ce que la correction ne se fasse qu'en basses fréquences.



5.3.5 Correcteur Proportionnel Dérivé PD

Ce correcteur a pour objectif d'apporter du gain et de la phase dans les moyennes et hautes fréquences :

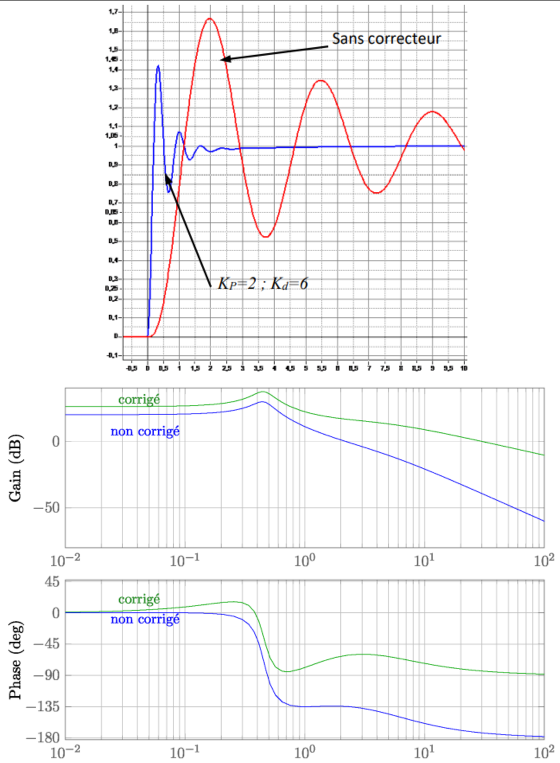
$$\boxed{C(p) = K_P(1 + \tau_d p)}$$

Idée du correcteur

- Accroit le degré de stabilité (marges de gain et de phase),
- Améliore le comportement transitoire (oscillations, dépassement rapidité),
- Problèmes : correcteur non propre, amplification du bruit (gain très grand en HF)

Réglage intuitif du correcteur

- Ajuster le gain proportionnel en fonction de l'objectif et des caractéristiques du système avant correction
  - Le diminuer pour augmenter les marges de stabilité,
  - L'augmenter pour améliorer la rapidité et/ou la précision du système.
- Ensuite, la partie D est ajoutée en réglant le zéro $\frac{1}{\tau_d}$ de façon à ce que la correction ne se fasse que dans la région du point critique.



5.3.6 Correcteur a retard de phase (exemple)

Ce correcteur est une approximation du PI et peut être réalisé physiquement

$$\boxed{C(p) = K_P \frac{1 + aTp}{1 + Tp}, a < 1}$$

Idée du correcteur

- Ce correcteur a donc le même objectif que le PI,
- Généralement, il n'a pas la capacité d'annuler l'erreur en régime permanent.

Méthode de réglage du correcteur

- Ajuster les paramètres $K_P a$ pour régler la marge de phase,
- Calculer K_P en fonction de la précision souhaitée (réglage du gain statique),
- Choisir T de sorte que la phase négative du correcteur n'intervienne pas au niveau du point critique ($\frac{1}{aT} \ll \omega_{0\,dB}$)

Exemple

Soit la fonction de transfert :

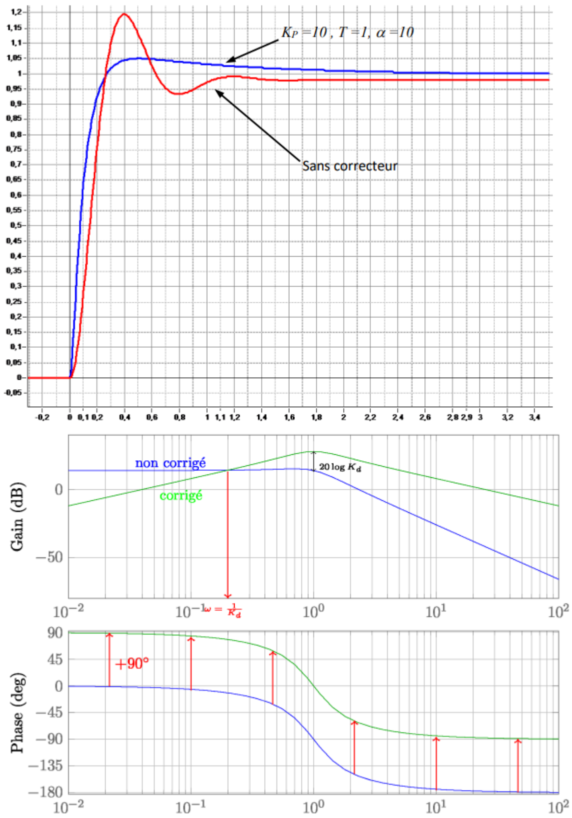
$$G(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{10}\right)^3}$$

On souhaite que le système en boucle fermé ait une erreur $\varepsilon_P = 5\%$ et une marge de phase $\Delta\varphi = 45°$

- On règle $K_P a$ pour faire la condition sur M_φ

$$M_\varphi = \pi - 3\arctan\frac{\omega_{0\,dB}}{10} = \frac{\pi}{4} \rightarrow \omega_0\ rad/s$$

$$G(\omega_{0\,dB}) = \frac{K_P a}{\left(\sqrt{1 + \frac{\omega_{0\,dB}}{100}}\right)^3} = 1 \rightarrow K_P a = 2.8$$



- Erreur de position résultante

$$\varepsilon_P = \lim_{p \to 0} \left[1 - \frac{K_P a}{K_P a \left(1 + \frac{p}{10}\right)^3} \right] = \frac{1}{1 + K_P a} = 26\%$$

- On règle K_P pour satisfaire la condition sur la précision (puis a est déduit)

$$\varepsilon_P = \frac{1}{1 + K_P} = 0.05 \to K_P = 19 \to a = 0.147$$

- Enfin, il faut choisir T suffisamment grand pour que l'apport de gain $20\log(K_P)$ ne soit effectif qu'en BF

$$\frac{1}{aT} \ll \omega_{0\,dB} \to T = 6.8$$

5.3.7 Correcteur à avance de phase

Ce correcteur est une approximation du PD et peut être réalisé physiquement

$$\boxed{C(p) = K_P \frac{1 + aTp}{1 + Tp}, a > 1}$$

Idée du correcteur

- Ce correcteur a donc le même objectif que le PD,
- Ajoute de la phase près du point critique ($M_\varphi \uparrow$).

Méthode de réglage du correcteur

- Ajuster les paramètres K_P pour la précision et/ou la rapidité,
- Calculer a en fonction de la quantité de phase à apporter $a = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m}$,
- Calculer T de sorte que ω_m coïncide avec $\omega_{0\,dB}$ ($\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}}$)

Exemple

Soit la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{100}{(1+p)^2}$$

On souhaite que le système en boucle fermé ait une marge de phase $M_\varphi = 45°$

- Calculons la marge de phase avant correction

$$G(\omega) = \frac{100}{1 + \omega_{0\,dB}^2} = 1 \to \omega_{0\,dB} = 9.95\ rad/s$$

$$M_\varphi = \pi - 2\arctan(\omega_{0\,dB}) = 11°$$

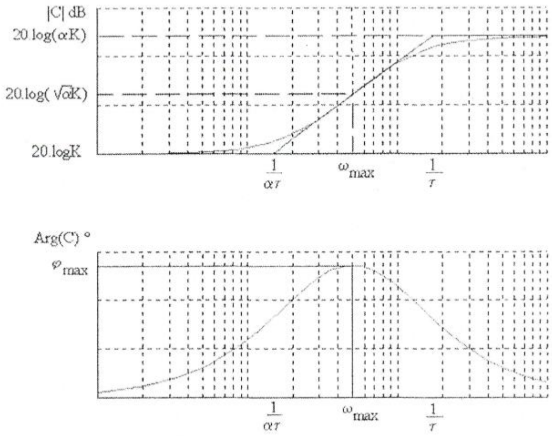
- La marge est insuffisante, il faut donc remonter la phase de $\varphi_m = 34°$ à la pulsation $\omega_{0\,dB}$

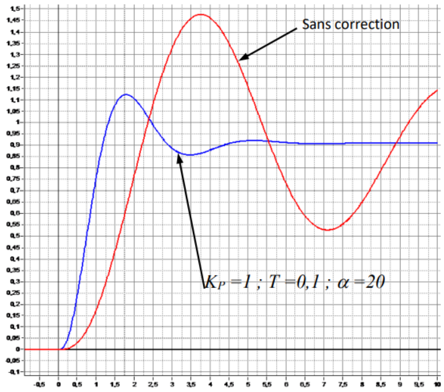
$$a = \frac{1 + \sin\varphi_m}{1 - \sin\varphi_m} = \frac{1 + \sin 34°}{1 - \sin 34°} = 3.54$$

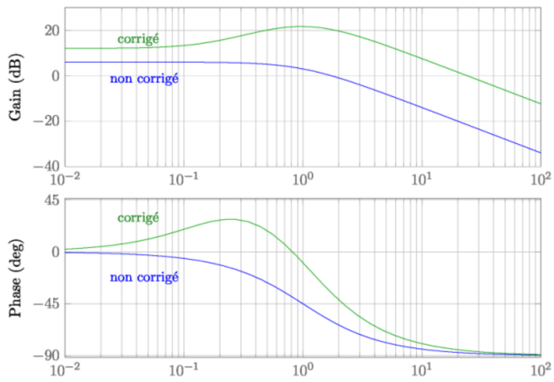
- Puis, on règle T afin d'ajouter la quantité φ_m au bon endroit

$$\frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{0\,dB} \to T = 0.053$$

- Souvent on choisit $\varphi_m = 1.2\varphi_{necessaire}$ pour compenser le décalage de $\omega_{0\,dB}$ après correction.







- [Plus d'info sur la correction des systèmes asservis]
- [Plus d'info sur la stabilité]