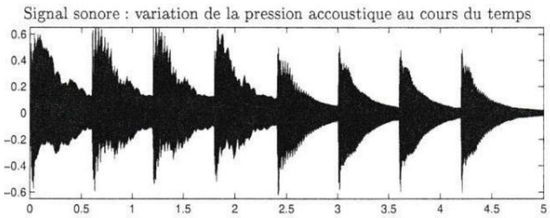
Fiche Traitement du signal

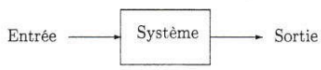
1 Introduction

Un signal est une fonction mathématique d'une ou plusieurs variables modélisant la variation d'une grandeur physique en fonction de certaines variables (au cours du temps ou dans l'espace par exemple).

Les grandeurs physiques sont mesurées à l'aide de capteurs qui les transforment en variation d'un signal électrique.

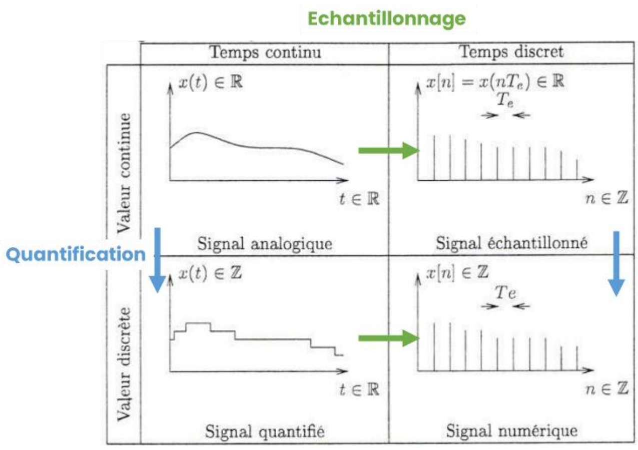


Un système est un modèle mathématique de type Entrée/Sortie modélisant la transformation d'un signal par un processus physique.



Ces signaux sont classés suivant plusieurs de leurs caractéristiques :

- Temps continu – Temps discret
- Valeur continu – Valeur discrète
- Signaux analogiques – signaux numériques



- Périodiques – non périodiques
- Déterministes (prédictibles) – Aléatoires (non exactement prédictible -> contiennent de l'information)
  - ➔ Dans ce cours on ne s'intéresse qu'aux signaux analogiques et numériques déterministes

2 Signaux et systèmes analogiques

2.1 Propriétés

2.1.1 Causalité

Un signal est dit causal s'il **ne dépend que des valeurs passées ou présentes**, et non des valeurs futures. Autrement dit, **un signal causal ne peut pas "prédire" les valeurs futures**. Formellement, un signal x(t) est causal si et seulement si :

$$\boxed{x(t) = 0, \forall t < 0}$$

Cela signifie que la valeur de $x(t)$ ne dépend pas de ce qui se passe après $t = 0$.

Exemple : une mesure de température enregistrée au cours du temps : la valeur de la température à un instant t ne dépend que des valeurs de température antérieures ou à l'instant t, et ne peut pas être influencée par des valeurs de température futures.

En pratique, pour savoir si un signal est causal, il suffit de vérifier que sa définition ne contient aucune dépendance vis-à-vis des valeurs futures. Si la définition du signal fait référence à des valeurs futures, ou si le signal a des "pics" ou des "creux" qui apparaissent avant leur cause supposée, alors le signal n'est pas causal.

Applications : il est préférable d'utiliser des signaux causaux, car ils sont plus faciles à traiter et à interpréter.

2.1.2 Stabilité

Un système est considéré comme stable si, **pour toute Entrée Bornée, la Sortie est également Bornée** $(EBSB)$ **et ne diverge pas vers l'infini.**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty}$$

La stabilité est une propriété critique dans de nombreuses applications de traitement du signal, notamment en communication numérique, en filtrage et en contrôle. Un système instable peut produire des sorties imprévisibles ou indésirables, ce qui peut entraîner des erreurs ou des pertes de données.

En pratique, la stabilité d'un système peut être analysée à l'aide de diverses techniques, telles que l'analyse de stabilité de Nyquist, la fonction de transfert, l'analyse de stabilité de Bode, la réponse impulsionnelle, etc. Des techniques de conception appropriées peuvent également être utilisées pour garantir la stabilité d'un système, comme la conception de filtres FIR ou IIR causaux et stables.

2.1.3 La convolution

Représente la façon dont l'un des signaux influence l'autre au cours du temps. Plus précisément, la convolution est définie comme suit : si x_1 et x_2 sont deux signaux, leur convolution est définie :

Signaux apériodiques

$$\boxed{x_1 * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau}$$

Signaux périodiques (convolution circulaire)

$$\boxed{x_1 \circledast x_2(t) = \int_{0}^{T_0} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau}$$

où * est l'opérateur de convolution et τ représentant le décalage temporel entre les signaux x_1 et x_2 au moment de leur multiplication.

Application : Cette opération est souvent utilisée en traitement du signal pour effectuer des filtrages ou pour détecter des caractéristiques dans les signaux. Elle permet également de calculer les réponses impulsionnelles des systèmes linéaires.

Matlab : Peut être calculée à l'aide d'un algorithme efficace appelé "transformée de Fourier rapide" (FFT), qui permet de calculer la convolution en un temps raisonnable même pour de grandes séries de données.

2.1.4 L'intercorrélation

Mesure statistique qui permet de quantifier la similitude entre deux signaux (ou séries de données). Elle est étroitement liée à la convolution, mais au lieu de mesurer la manière dont un signal influence un autre, elle mesure la corrélation entre deux signaux. Plus précisément, l'intercorrélation entre deux signaux $f(t)$ et $g(t)$ est définie comme :

Signaux apériodiques

$$\boxed{C_{f,g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t+\tau)d\tau}$$

Signaux périodiques

$$\boxed{C_{f,g}(t) = \int_{0}^{T_0} f(\tau)g(t+\tau)d\tau}$$

où τ est le décalage temporel entre les deux signaux. Cette formule exprime la mesure de la similitude entre les signaux f et g à chaque instant t.

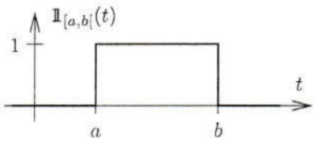
Si les signaux sont parfaitement corrélés, c'est-à-dire qu'ils ont la même forme, l'intercorrélation est maximale à un décalage nul. Si les signaux sont décalés l'un par rapport à l'autre, l'intercorrélation diminue en fonction du décalage temporel.

Application : la détection de motifs dans les signaux, l'alignement de séquences de données et la reconnaissance de formes. Elle permet également de mesurer la similarité entre les signaux bruités ou déformés, en comparant la forme des signaux plutôt que les valeurs exactes.

2.1.5 Signaux

2.1.5.1 Fonction indicatrice

- Fonction indicatrice sur l'intervalle $[a,b[$: $1_{[a,b[}(t) = \begin{cases} 1 \; si \; a \leq t < b, \\ 0 \; sinon \end{cases}$
- Fonction indicatrice de largeur L sur l'intervalle $[0,L[$: $1_{[0,L[}(t) = \begin{cases} 1 \; si \; 0 \leq t < L, \\ 0 \; sinon \end{cases}$



2.1.5.2 Echelon unité

- Echelon unité : $u(t) = 1_{[0,\infty[}(t) = \begin{cases} 1 \; si \; t \geq 0, \\ 0 \; sinon \end{cases}$ (Heavyside)

2.1.5.3 Fréquence pure

- Fréquence pure (signal monochromatique) -> modélisé par une exponentielle complexe :

$$x(t) = Ae^{2j\pi f_0 t}$$

Avec

- f_0 La fréquence,
- $A = \rho e^{j\phi}$ L'amplitude complexe avec
  - $|A| = \rho$ L'amplitude
  - $\arg\{A\} = \phi$ La phase a l'origine

Prendre le reflexe : $\boxed{\cos(2\pi f_0 t)} = \frac{e^{j(2\pi f_0 t)} + e^{-j(2\pi f_0 t)}}{2} \rightarrow$ 2 fréquences : f_0 et $-f_0$

2.1.5.4 Sinusoïde

$$\boxed{x(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \phi)} = \frac{e^{j(2\pi f_0 t+\phi)} - e^{-j(2\pi f_0 t+\phi)}}{2j} = \frac{e^{j(\phi)}}{2j}e^{2j\pi f_0 t} - \frac{e^{-j(\phi)}}{2j}e^{-2j\pi f_0 t}$$

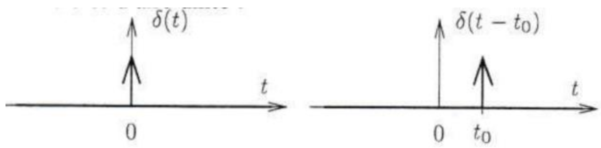
Avec

- f_0 La fréquence ($T_0 = \frac{1}{f_0}$ la période),
- A L'amplitude
- ϕ La phase a l'origine

2.1.6 Impulsion de Dirac

Le Dirac n'est pas une fonction mais une distribution qui peut être vu comme la limite de la suite des portes centrées d'aire unité lorsque la largeur tend vers 0. On l'utilisera comme une « fonction » nulle partout sauf en 0 et d'aire unité.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d\tau = 1\,(aire\ unité)$$
$$\delta(\tau)x(t) = \delta(t)x(0) \rightarrow localisé\ en\ 0, fonction\ crible$$



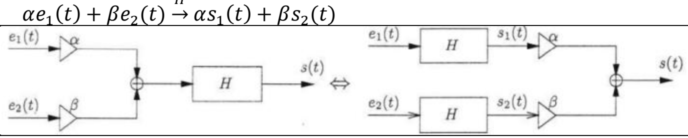
Important car il permet de modéliser une impulsion (cf : Automatique), il est utile pour l'échantillonnage (propriété de localisation) et **simplifie les calculs puisqu'il est simple de convoluer par un Dirac décalé**.

$$(\delta * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t)d\tau = x(t)$$
$$\delta(t-t_0) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t-t_0)d\tau = x(t-t_0)$$

Comme $\delta(t-t_0)$ est nul sauf en $\tau = t_0$ -> on ne gardera que la valeur en t_0 du signal $x(t)$, d'où

$$\boxed{\delta(t-t_0) * x(t) = x(t-t_0)}$$

2.2 Systèmes analogiques

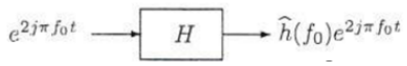
Linéaire	$\alpha e_1(t) + \beta e_2(t) \xrightarrow{H} \alpha s_1(t) + \beta s_2(t)$	
		
Invariant par translation	$e(t-\tau) \xrightarrow{H} s(t-\tau)$	On aura le même résultat qu'on démarre le système maintenant ou dans 5 min
		
Réponse impulsionnelle	$\delta(t) \xrightarrow{H} h(t)$	Sortie du système lorsque l'on met un Dirac en entrée
Stable	$e(t) borné \xrightarrow{H} s(t) borné$	
Causal	L'effet de la sortie ne peut pas précéder la cause (l'entrée). La sortie $s(t_0)$ dépend uniquement de l'entrée aux instants $t \leq t_0$ en particulier pour un système causal $e(t) causal \xrightarrow{H} s(t) causal$	
Sans mémoire	$s(t)$ dépend uniquement de l'entrée à l'instant t	
Inversible	On peut construire un système permettant de reconstruire l'entrée $e(t)$ à partir de la sortie $s(t)$ -> des entrées distinctes conduisent à des sorties distinctes	

2.2.1 Filtres, réponse impulsionnelle, réponse en fréquence

Un **filtre** c'est un système :

- **Linéaire, continu et invariant par translation**
- Dont la **relation E/S est une convolution**

- Entièrement caractérisé par sa **réponse impulsionnelle** (RI) $h(t)$;
- Dont les fonctions propres sont les exponentielles complexes : filtre a fréquence
  Fréquence pure en entrée
  Même fréquence en sortie atténuée et déphasée



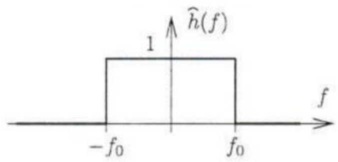
- Entièrement caractérisé par sa **réponse en fréquence** $\hat{h}(f)$

Démonstration : Soit $e(t) = e^{2j\pi f_0 t}$, la sortie correspondante est

$$s(t) = h(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{2j\pi f_0(t-\tau)}d\tau = e^{2j\pi f_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{2j\pi f_0 \tau}d\tau = e^{2j\pi f_0 \tau}\hat{h}(f_0)$$

Si l'entrée est une fréquence pure f_0 la sortie du filtre est également la fréquence pure f_0 dont l'amplitude est multipliée par $\hat{h}(f_0)$ (la réponse en fréquence du filtre)→ Filtre à fréquence, ainsi si $\hat{h}(f_0) = 0 \overset{alors}{\Longrightarrow} s(t) = 0$

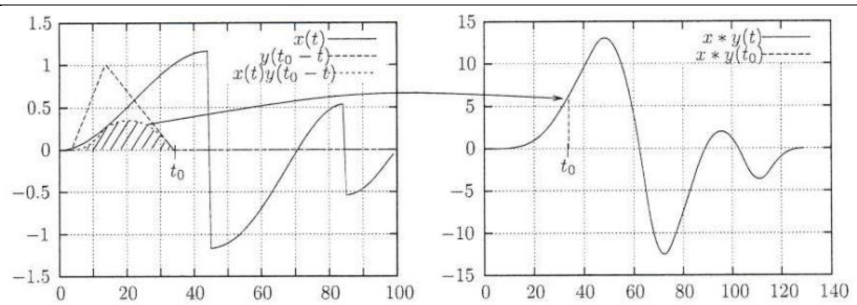
Exemple d'un filtre passe bas idéal (laisse passer toutes les fréquences inférieures à f_0 et atténue complètement toutes les fréquences supérieures à f_0)

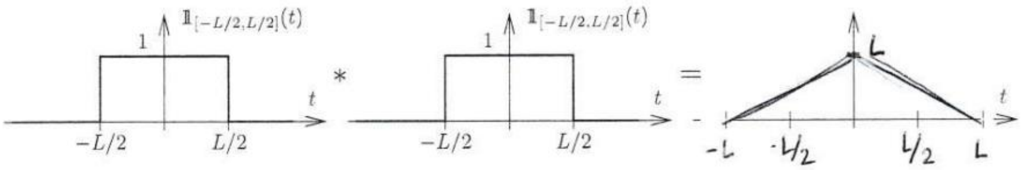


- Condition nécessaire et suffisante de causalité des filtres : Le filtre H est causal SSI sa RI $h(t)$ est causale ($h(t) = 0$ si $t < 0$)
- Condition nécessaire et suffisante de stabilité des filtres : Le filtre est stable SSI sa RI $h(t)$ est stable ($\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt < \infty$)

2.2.2 Illustration de la convolution

$$x * y(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t_0 - t)dt$$





2.2.3 Propriété de la convolution

- Commutativité : $x * y(t) = y * x(t)$
- Associativité : $(x * y) * z(t) = x * (y * z)(t)$

- Distributivité par rapport à l'addition : $x * (y + z)(t) = x * y(t) + x * z(t)$
- Convoluer avec un Dirac

$$h * \delta(t - t_0) = h(t - t_0) \rightarrow Décalage\ (retard)$$

Convoluer avec la fréquence f_0 -> fréquence pure f_0

$$e(t) = e^{2j\pi f_0 t} \overset{alors}{\Longrightarrow} s(t) = \hat{h}(f_0)e^{2j\pi f_0 t}$$

2.3 Représentation fréquentielle des signaux et systèmes analogiques

2.3.1 Signaux analogiques périodiques : le Développement en série de fourrier (DSF)

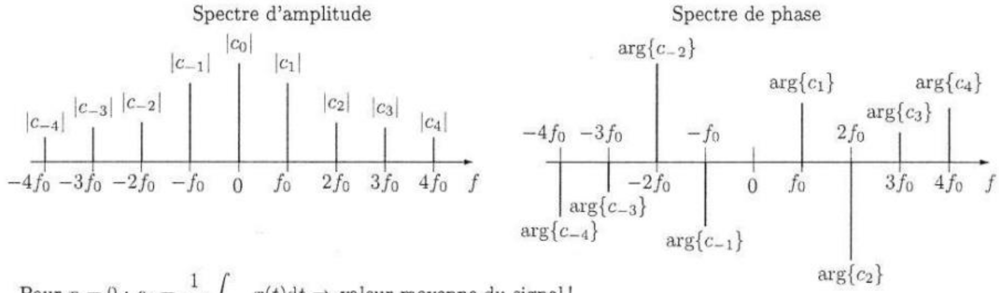
On appelle développement en série de fourrier d'une fonction périodique $x(t)$, de période T_0

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2j\pi n f_0 t}\ avec\ c_n = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)e^{-2j\pi n f_0 t}dt$$

Lorsque cette série converge.

Deux notions : fréquence fondamentale $f_0 = \frac{1}{T_0}$ et d'harmonique multiple de f_0

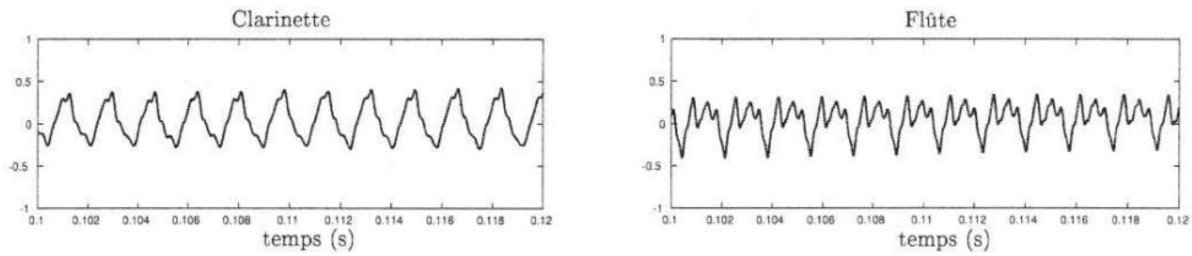
Représentation spectrale :



Pour $n = 0$: $c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{[T_0]} x(t)dt \Rightarrow$ valeur moyenne du signal !

Exemple sur des signaux réels :

- Représentations temporelles



- Représentations fréquentielles