

## ΕΡΓΑΣΙΑ

Έστω  $M$  ο  $n \times n$  πίνακας συνδεσιμότητας μεταξύ  $n$  ιστοσελίδων. Δηλαδή  $M_{ij} = 1$  αν υπάρχει σύνδεση μεταξύ της ιστοσελίδας  $i$  και  $j$ , αλλιώς  $M_{ij} = 0$ . Αν  $N_j$  το πλήθος των σελίδων που δείχνει η σελίδα  $j$  τότε κατασκευάζουμε τον πίνακα  $A$  ως εξής: Αν  $N_j > 0$ , τότε

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N_j} & \text{αν } M_{ij} = 1 \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

ενώ αν  $N_j = 0$ , δηλαδή η σελίδα δεν δείχνει κάπου, τότε

$$A_{ij} = \frac{1}{n}.$$

Υπό τις παραπάνω συνθήκες ο πίνακας Google  $G$  ορίζεται ως

$$G = aA + (1 - a)\frac{1}{n}ee^T, \quad (1)$$

όπου  $0 \leq a \leq 1$  μια παράμετρος εξισορρόπησης και  $e = [1, \dots, 1]$ .

- Προφανώς το διάνυσμα  $\frac{1}{n}e$  στον ορισμό του  $G$  σημαίνει ότι με ίδια πιθανότητα μπορούμε να μεταβούμε σε οποιαδήποτε άλλη σελίδα. Αν από τα λογς είχαμε μια άλλη κατανομή πως θα μπορούσε αυτό να περάσει στον ορισμό του  $G$  χωρίς να χάσει την στοχαστικότητά του; Να γραφεί συνάρτηση που θα δέχεται ως όρισμα τον πίνακα μετάβασης  $M$  ως αραιό πίνακα και την παράμετρο  $a$  και θα υπολογίζει τον -γεμάτο- πίνακα  $G$  και όλες τις ιδιοτιμές του. Για την εύρεση αυτών μπορείτε να χρησιμοποιήσετε έτοιμη συνάρτηση της γλώσσας. Να χρησιμοποιήσετε ως πίνακα τον πίνακα Google που σας δίνεται που είναι σχετικά μικρός ( $500 \times 500$ ). Χρησιμοποιώντας ως  $a = 0.85$  να κάνετε την γραφική παράσταση των -γενικά μιγαδικών- ιδιοτιμών του. Να επαναλάβετε την διαδικασία αυτή για  $a = 0.5, 0.25$  με διαφορετικά χρώματα στο ίδιο γράφημα. Να βάλετε σχετικούς τίτλους και λεζάντες. Τέλος να κάνετε κύκλους ακτίνας  $a$  με αντίστοιχα χρώματα και διακεκομένης γραμμής.
- Για κάθε  $a = 0.85, 0.5$  και  $0.25$ , θέστε ως  $x$  την στήλη του  $X$  (πίνακας ιδιοδιανυσμάτων) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 (προσοχή οι ιδιοτιμές μπορεί να μην είναι διατεταγμένες), κανονικοποιήστε την ως προς την νόρμα 1, ( $\|x\|_1 = 1$ ) και βεβαιωθείτε ότι το  $x$  περιέχει μόνο πραγματικές θετικές (αν είναι όλες αρνητικές απλά πολλαπλασιάστε με -1) τιμές. Ποια θεωρία μας εξασφαλίζει το συγκεκριμένο γεγονός; Ταξινομήστε τις συνιστώσες του σε φθίνουσα τάξη και εκτυπώστε τις 10 πρώτες (που αντιπροσωπεύουν ιστοσελίδες) για κάθε  $a$ . Τα αποτελέσματα μπορεί να αλλάζουν σε σχέση με το  $a$ . Γιατί συμβαίνει αυτό;

- Να δημιουργήσετε συνάρτηση που θα υλοποιεί το προηγούμενο ερώτημα αλλά πλέον χρησιμοποιώντας για την εύρεση του μεγαλύτερου ιδιοσιανύσματος την μέθοδο των δυνάμεων χρησιμοποιώντας ως νόρμα κανονικοποίησης την 1, και κριτήριο τερματισμού η διαφορά στην νόρμα αυτή δύο διαδοχικών εκτιμήσεων του κυρίαρχου ιδιοδιανύσματος να είναι μικρότερη από π.χ  $10^{-6}$ . Προσοχή: Να λάβετε σοβαρά υπόψη σας την μορφή του πίνακα G για να εκμεταλευτείτε την ειδική μορφή που έχει λόγω της 1 ώστε να υλοποιηθεί ο αλγόριθμος των δυνάμεων όσο πιο αποτελεσματικά μπορείτε. Να αναφέρετε για κάθε  $a$  τις επαναλήψεις που χρειάστηκαν και να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά του προηγούμενου ερωτήματος.