

**Elementos de matemáticas aplicadas para aplicaciones
tecnológicas**

2019

***Trabajo práctico N°0: propagación de ruido en
sistema LTI***

Docentes:

José Relloso

Agustín Casquero

Estudiante:

Augusto Conrado Sardá

ÍNDICE

1. MEMORIA DESCRIPTIVA	2
2. MEMORIA TÉCNICA	3
2.1. Funciones transferencia	3
2.2. Cálculo analítico del valor cuadrado medio	4
2.2.1. Entrada WN_{RS}	4
2.2.2. Entrada WN_{PS}	5
2.2.3. Entrada WN_{RW}	5
2.3. Simulaciones	6
2.4. Resultados	7
3. CONCLUSIONES	8
4. REFERENCIAS	9

1. MEMORIA DESCRIPTIVA

En el presente informe se analiza la respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a una entrada estocástica. La motivación surge de que en cualquier sistema que se desea controlar, se deberán medir las variables de interés. Para esto será necesario utilizar los sensores pertinentes, cuya medición estará sujeta a ruido, ya sea inherente a su principio de funcionamiento o a condiciones externas. Por lo tanto, asumiendo que la medición presentará ruido, se puede conocer como responderá el sistema frente a este.

Se utiliza como ejemplo de un sistema de control de altitud de [1]. El modelo del sistema se muestra en la Fig. N°1, donde se supone que las mediciones de la velocidad y posición angular presentan ruido, y las perturbaciones en el torque se modelan también como ruido. Para calcular el valor esperado del valor cuadrado medio ¹ de la respuesta del sistema a cada una de estas entradas aleatorias, se utilizan resultados de [2].

También se analiza el caso en que no se dispone de la medición de la velocidad angular, como muestra la Fig. N°2. Si se pretende estimarla a partir de la medición de la posición angular, se analiza la respuesta de la posición también frente a ruido en este sensor y perturbaciones de torque.

De aquí en adelante, los sistemas de las Figs. N°1 y N°2 serán llamados sistema I y sistema II.

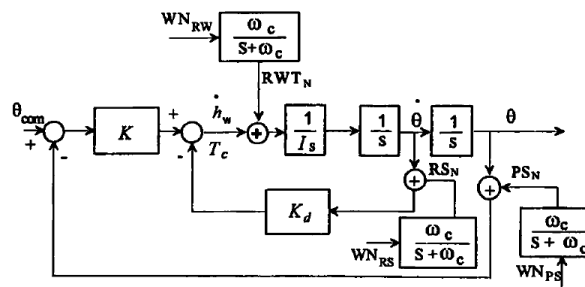


Figura 1: Esquema de control de altitud con ruido en los sensores y perturbaciones en la rueda de torque.

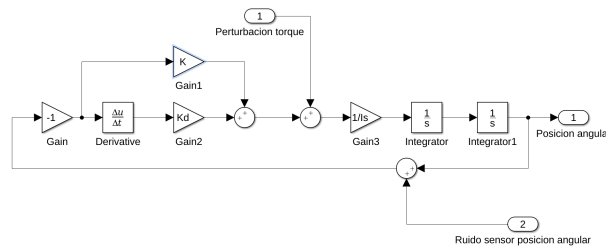


Figura 2: Mismo sistema pero sin medición de la velocidad angular

¹Valor cuadrado medio = $mean\ square = (root\ mean\ square)^2$

Instituto Bailseiro	Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas	TP N°0 Página: 3 de 9
------------------------	---	--------------------------

2. MEMORIA TÉCNICA

En referencia a la figura N°1 se tiene:

- WN_{RS} : ruido del sensor de velocidad angular.
- WN_{PS} : ruido del sensor de posición angular.
- WN_{RW} : ruido de torque inherente a la rueda de reacción.

De acuerdo a [1], cada uno de estos tres ruidos es idealmente blanco, y por lo tanto tienen una densidad espectral de potencia (PSD) plana. Desafortunadamente, en la realidad el ruido blanco no existe.

En cambio, se puede asumir que el ruido es coloreado; es decir, que su PSD varía en función de la frecuencia. Para ejemplificar esto en la Fig. N°1 se tienen los bloques de un filtro de primer orden con frecuencia de corte ω_c , lo que no implica que los tres filtros posean el mismo valor de ω_c .

2.1. Funciones transferencia

A partir de la Fig. N°1 considerando como entrada cada una de las entradas aleatorias y como salida la velocidad y la posición angular, se tienen las funciones transferencia de las ecuaciones Ec.(1), Ec.(2), Ec.(3), Ec.(4), Ec.(5) y Ec.(6) para el sistema I:

$$\frac{\dot{\Theta}(s)}{WN_{RS}(s)} = -\frac{\omega_c}{s + \omega_c} \frac{2\xi\omega_n s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

$$\frac{\Theta(s)}{WN_{RS}(s)} = -\frac{\omega_c}{s + \omega_c} \frac{2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

$$\frac{\dot{\Theta}(s)}{WN_{PS}(s)} = -\frac{\omega_c}{s + \omega_c} \frac{\omega_n^2 s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3)$$

$$\frac{\Theta(s)}{WN_{PS}(s)} = -\frac{\omega_c}{s + \omega_c} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4)$$

$$\frac{\dot{\Theta}(s)}{WN_{RW}(s)} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \frac{\frac{s}{I_s}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5)$$

$$\frac{\Theta(s)}{WN_{RW}(s)} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \frac{\frac{1}{I_s}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6)$$

Donde:

$$\begin{cases} I_s \text{ es dato} \\ \xi = \frac{K_d}{2\sqrt{I_s K}} \\ \omega_n^2 = \frac{K}{I_s} \end{cases} \quad (7)$$

Para el sistema II:

$$\frac{\Theta(s)}{WN_{PS}(s)} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \frac{2\xi\omega_n + s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8)$$

$$\frac{\Theta(s)}{WN_{RW}(s)} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \frac{\frac{1}{I_s}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (9)$$

Instituto Bailseiro	Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas	TP N°0 Página: 4 de 9
------------------------	---	--------------------------

2.2. Cálculo analítico del valor cuadrado medio

Si se tiene un sistema LTI cuya función transferencia es $G(s)$ y se le aplica como entrada una señal ruidosa cuya función PSD es $S_i(s)$, la función PSD $S_o(s)$ de la salida de acuerdo a [2] es:

$$S_o(s) = G(s)G(-s)S_i(s) \quad (10)$$

Escribiendo a $S_o(s)$ como un cociente de polinomios:

$$S_o(s) = \frac{c(s)}{d(s)} \frac{c(-s)}{d(-s)} \quad (11)$$

Y bajo las hipótesis de que los ceros y polos de $c(s)/d(s)$ se hayan en el semiplano izquierdo y también que $d(s)$ no tiene raíces sobre el eje $j\omega$, se puede calcular el valor cuadrado medio como:

$$E(salida^2) = RMS^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} S_o(s) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{c(s)}{d(s)} \frac{c(-s)}{d(-s)} ds \quad (12)$$

La potencia del resultado de la Ec.(12) se haya en la disponibilidad de tablas de integrales para la resolución de la integral. Estas se hayan en [2].

Aplicando este resultado a las funciones transferencia recién descriptas, se obtienen los valores cuadrados medios de la velocidad y de la posición para cada entrada.

2.2.1. Entrada WN_{RS}

Para el sistema I, utilizando la Ec.(1) en la Ec.(12), se obtiene el valor cuadrado medio de la velocidad angular:

$$E(\dot{\theta}^2) = \frac{(\xi\omega_n\omega_c)^2}{\xi\omega_n^3 + 2\xi^2\omega_n^2\omega_c + \xi\omega_c^2\omega_n} WN_{RS} \quad (13)$$

Si se toma

$$\lim_{\omega_c \rightarrow \infty} E(\dot{\theta}^2)$$

se obtiene el valor de $E(\dot{\theta}^2)$ para el caso ideal de ruido blanco. Se obtiene entonces:

$$\lim_{\omega_c \rightarrow \infty} E(\dot{\theta}^2) = \xi\omega_n WN_{RS} \quad (14)$$

Procediendo de manera análoga para la posición angular:

$$\begin{cases} E(\theta^2) = \frac{2\xi^3\omega_n\omega_c + \xi^2\omega_c^2}{\xi\omega_n^3 + 2\xi^2\omega_n^2\omega_c + \xi\omega_c^2\omega_n} WN_{RS} \\ \lim_{\omega_c \rightarrow \infty} E(\theta^2) = \frac{\xi}{\omega_n} WN_{RS} \end{cases} \quad (15)$$

Instituto Bailseiro	Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas	TP N°0 Página: 5 de 9
------------------------	---	--------------------------

2.2.2. Entrada WN_{PS}

Para el sistema I:

$$\begin{cases} E(\dot{\Theta}^2) = \frac{\omega_n^4 \omega_c^2}{4(\xi \omega_n^3 + 2\xi^2 \omega_n^2 \omega_c + \xi \omega_n \omega_c^2)} WN_{PS} \\ \lim_{\omega_c \rightarrow \infty} E(\dot{\Theta}^2) = \frac{\omega_n^3}{4\xi} WN_{PS} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} E(\Theta^2) = \frac{2\xi \omega_n^3 \omega_c + \omega_n^2 \omega_c^2}{4(\xi \omega_n^3 + 2\xi^2 \omega_n^2 \omega_c + \xi \omega_n \omega_c^2)} WN_{PS} \\ \lim_{\omega_c \rightarrow \infty} E(\Theta^2) = \frac{\omega_n}{4\xi} WN_{PS} \end{cases} \quad (17)$$

Para el sistema II:

$$E(\Theta^2) = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0(d_1 d_2 - d_0 d_3)} WN_{RW} \quad (18)$$

Donde:

$$\begin{cases} c_0 = \omega_n^2 \omega_c \\ c_1 = 2\xi \omega_n \omega_c \\ d_0 = \omega_c \omega_n^2 \\ d_1 = \omega_n^2 + 2\xi \omega_c \omega_n \\ d_2 = 2\xi \omega_n + \omega_c \\ d_3 = 1 \end{cases} \quad (19)$$

2.2.3. Entrada WN_{RW}

Para el sistema I:

$$\begin{cases} E(\dot{\Theta}^2) = \frac{\omega_c^2}{4I_s^2(\xi \omega_n^3 + 2\xi^2 \omega_n^2 \omega_c + \xi \omega_n \omega_c^2)} WN_{RW} \\ \lim_{\omega_c \rightarrow \infty} E(\dot{\Theta}^2) = \frac{1}{4\xi I_s^2 \omega_n} WN_{RW} \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} E(\Theta^2) = \frac{2\xi \omega_n \omega_c + \omega_c^2}{4I_s^2 \omega_n^2(\xi \omega_n^3 + 2\xi^2 \omega_n^2 \omega_c + \xi \omega_n \omega_c^2)} WN_{RW} \\ \lim_{\omega_c \rightarrow \infty} E(\Theta^2) = \frac{1}{4\omega_n^3 I_s^2 \xi} WN_{RW} \end{cases} \quad (21)$$

Para el sistema II:

$$E(\Theta^2) = \frac{c_0^2 d_2}{2d_0(d_1 d_2 - d_0 d_3)} WN_{RW} \quad (22)$$

Donde:

$$\begin{cases} c_0 = \frac{\omega_c}{I_s} \\ d_0 = \omega_c \omega_n^2 \\ d_1 = \omega_n^2 + 2\xi \omega_c \omega_n \\ d_2 = 2\xi \omega_n + \omega_c \\ d_3 = 1 \end{cases} \quad (23)$$

Instituto Bailseiro	Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas	TP N°0 Página: 6 de 9
------------------------	---	--------------------------

2.3. Simulaciones

Para poder realizar simulaciones en *Simulink* es necesario primero comprender como utilizar el bloque *Band Limited White Noise* (BLWN), que como su nombre lo indica, genera ruido blanco con un ancho de banda limitado. Haciendo uso de este, se simulan las señales aleatorias. Los parámetros que requiere son:

- Noise power.
- Sample time.
- Seed: una semilla para generar números aleatorios.

Los primeros dos parámetros definen el valor RMS del ruido:

$$RMS = \sqrt{\frac{Noise\ power}{Sample\ time}} \quad (24)$$

Por otra parte, si se tiene ruido blanco cuya densidad espectral de potencia tiene ancho de banda limitado como el de la Fig. N°3, se sabe que su valor RMS es:

$$RMS = \sqrt{2fA} \quad (25)$$

Desafortunadamente, si uno pretende definir un ruido de acuerdo a la Fig. N°3, no es directo asociarlo

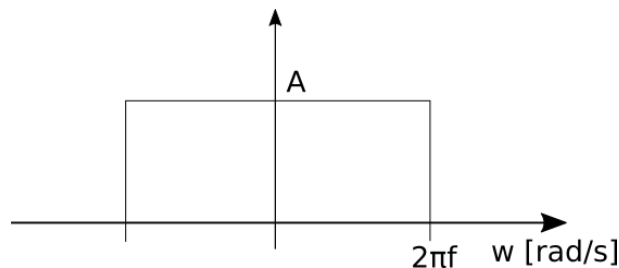


Figura 3: Densidad espectral de potencia de ruido blanco con ancho de banda limitado

al bloque BLWN como $Noise\ power = A$ y $Sample\ time = 1/f$. Entonces, teniendo presente que uno desea construir un ruido con una PSD como la de la Fig. N°3, ¿cómo se definen los parámetros del bloque BLWN?.

Llamando A y T_s los parámetros *Noise power* y *Sample time* del bloque BLWN, resulta $RMS = \sqrt{\frac{A}{T_s}}$. A su vez, las Figs. N°4a y N°4b muestran dos opciones que de acuerdo a la Ec.(25) también tienen $RMS = \sqrt{\frac{A}{T_s}}$. De acuerdo a la práctica adquirida y a que los valores de las ecuaciones del valor cuadrado medio (sección 2.2) depende del valor de A , se debe utilizar la PSD de la Fig. N°4a.

En la tabla N°1 se muestran los valores adoptados de I_s , ξ y ω_n y los valores calculados de K y K_d . A su vez, se toma $\omega_c = 100\omega_n = 1\ rad/s = 0,16\ Hz$ y se pretende que la PSD del ruido generado por el bloque BLWN tenga un ancho de banda de banda de 100 veces $\omega_c\ [Hz]$. De esta manera, $Sample\ time = \frac{1}{2*100*\omega_c\ [Hz]} = 0,0314\ s$.

Los valores adoptados del desvío o valor RMS de las distintas señales aleatorias se muestran en la tabla N°2.

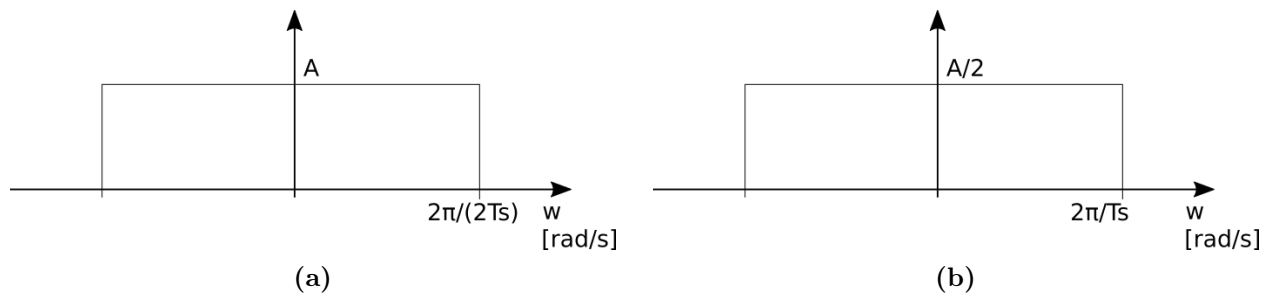


Figura 4: Dos opciones para relacionar los parámetros del bloque BLWN con la PSD de la Fig. N°3.

Tabla 1: Valores adoptados de I_s , ξ y ω_n y valores calculados de K y K_d .

Parámetro	Valor
I_s	1000 kg m^2
ξ	0,7
ω_n	$0,01 \text{ rad/s}$
K	0,1
K_d	14

Tabla 2: Valores adoptados para el desvío de las distintas señales aleatorias

Señal aleatoria	Desvío
Posición angular	$0,1 \text{ rad}$
Velocidad angular	$0,1 \text{ rad/s}$
Torque	1 Nm

2.4. Resultados

En la tablas N°3 y N°4 se muestran los resultados y errores para las simulaciones del sistema I, y en la tabla N°5 los resultados y errores del sistema II. Los errores se calculan respecto del resultado de la simulación.

El tiempo de simulación se ajusto en cada una para permitir que el sistema evolucione y así lo haga también el valor esperado de la salida considerada. De lo contrario, se tienen errores mayores. A su vez, se requieren *grandes* tiempos de simulación debido a la respuesta *lenta* del sistema ($\omega_n = 0,01 \text{ rad/s}$); y cuánto mayor el tiempo de simulación, mayor el tiempo que requiere la ejecución de la misma.

Tabla 3: Resultados del sistema I

Entrada	WN_{RS}	WN_{RS}	WN_{PS}	WN_{PS}	WN_{RW}	WN_{RW}
T. de sim.	10000 s	10000 s	100000 s	100000 s	100000 s	100000 s
Parámetro	$E(\dot{\theta}^2)$	$E(\theta^2)$	$E(\dot{\theta}^2)$	$E(\theta^2)$	$E(\dot{\theta}^2)$	$E(\theta^2)$
Cálculo explícito	$2,17 \cdot 10^{-6}$	0,022	$1,11 \cdot 10^{-}$	$1,12 \cdot 10^{-6}$	$1,11 \cdot 10^{-6}$	0,012
$\lim_{\omega_c \rightarrow \infty}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	0,022	$1,12 \cdot 10^{-10}$	$1,22 \cdot 10^{-6}$	$1,12 \cdot 10^{-6}$	0,0112
Simulación	$2,05 \cdot 10^{-6}$	0,0228	$1,16 \cdot 10^{-10}$	$1,24 \cdot 10^{-6}$	$1,16 \cdot 10^{-6}$	0,012

Tabla 4: Errores del sistema I

Entrada	WN_{RS}	WN_{RS}	WN_{PS}	WN_{PS}	WN_{RW}	WN_{RW}
Parámetro	$E(\dot{\Theta}^2)$	$E(\Theta^2)$	$E(\dot{\Theta}^2)$	$E(\Theta^2)$	$E(\dot{\Theta}^2)$	$E(\Theta^2)$
Cálculo explícito	5,98 %	3,46 %	4,33 %	9,53 %	3,49 %	0,19 %
$\lim_{\omega_c \rightarrow \infty}$	7,47 %	3,45 %	2,98 %	9,52 %	2,23 %	0,2 %

Tabla 5: Resultados y errores del sistema II

Entrada	WN_{PS}	WN_{RW}
T. de sim.	10000 s	100000 s
Parámetro	$E(\Theta^2)$	$E(\Theta^2)$
Cálculo explícito	$3,29 \cdot 10^{-4}$	0,0112
Simulación	$3,51 \cdot 10^{-4}$	0,0112
Error	6,55 %	0,19 %

3. CONCLUSIONES

El presente trabajo permitió comprender como calcular la respuesta de un sistema LTI frente a entradas estocásticas. Para poder llevar a cabo las simulaciones primero fue necesario entender el funcionamiento del bloque BLWN de Simulink y cómo asociarlo a la densidad espectral de potencia del ruido que se pretende simular. De hecho, en primera instancia había mal interpretado el funcionamiento del bloque, lo que significó varios resultados erróneos y un gran malgasto del tiempo invertido.

Los resultados de las simulaciones ratifican los resultados de los valores esperados calculados mediante las ecuaciones de la sección 2.2 dentro de un margen de error. En primera instancia es esperable, puesto que estas ecuaciones tienen como hipótesis que el ruido en la entrada del sistema es blanco. Como se mencionó anteriormente, este en realidad no existe y tampoco se puede simular. De todas maneras, al utilizar un ancho de banda para el ruido lo suficientemente mayor al ancho de banda del sistema, es una hipótesis adecuada.

También, otro factor de importancia en el error es el tiempo de simulación. Cuánto mayor sea este, menor será el error. De todas maneras, el valor esperado del valor cuadrado medio de la salida de interés alcanza un valor estacionario, por lo que el error nunca convergirá a cero.

Otra consideración respecto al tiempo de simulación, es la relación de este con el tiempo real que le toma a la computadora llevarla a cabo. En el ejemplo que se trató, esto es un tanto desfavorable por el bajo ancho de banda del sistema (proporcional a ω_n). De esta manera, cada vez que se requería un tiempo de simulación mayor, se debía esperar varios minutos a que la computadora resolviera.

Finalmente, una aplicación provechosa de lo aquí aprendido es en el diseño del sistema. Si se observan las ecuaciones Ec.(14), Ec.(15), Ec.(16), Ec.(17), Ec.(20) y Ec.(21) en los casos que ω_c tiende a infinito, el valor esperado de cada salida de interés depende de ω_n . Dado que ω_n da idea del ancho de banda del sistema, se puede hallar encontrar un valor para este que minimice la respuesta del ruido. Esta solución será de compromiso puesto que la dependencia de las ecuaciones citadas respecto de ω_n en algunos casos es proporcional y en otros inversamente proporcional.

Instituto Bailseiro	Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas	TP N°0 Página: 9 de 9
--------------------------------	---	--------------------------

4. REFERENCIAS

- [1] Marcel J. Sidi, 1997. "Spacecraft Dynamics And Control".

- [2] Robert Grover Brown, Patrick Y. C. Hwang, 4th edition "Introduction to Random Signals And Applied Kalman Filtering ".