

# Descripción de filtro de Kalman de Actitud

## Tabla de Contenidos

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>1</b>   | <b>INTRODUCCIÓN</b> .....  | <b>2</b>  |
| <b>1.1</b> | <b>Objetivo</b> .....  | <b>2</b>  |
| <b>1.2</b> | <b>Documentos de referencia</b> .....  | <b>2</b>  |
| <b>2</b>   | <b>INTRODUCCIÓN AL FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO Y MULTIPLICATIVO</b> .....                                   | <b>3</b>  |
| <b>3</b>   | <b>MODELADO DE LOS SENSORES</b> .....  | <b>4</b>  |
| <b>3.1</b> | <b>Modelado del Giróscopo</b> .....  | <b>4</b>  |
| <b>3.2</b> | <b>Modelado del Star Tracker</b> .....   | <b>4</b>  |
| <b>4</b>   | <b>DESCRIPCIÓN EN VARIABLES DE ESTADO DEL VECTOR DE ESTADO DE ERROR <math>\Delta x</math></b> .....        | <b>5</b>  |
| <b>5</b>   | <b>DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL FILTRO DE ACTITUD</b> .....   | <b>7</b>  |
| <b>5.1</b> | <b>Actualización</b> .....   | <b>7</b>  |
| <b>5.2</b> | <b>Actualización de la matriz de covarianza del error de estimación de <math>\Delta x_k k</math></b> ..... | <b>8</b>  |
| 5.2.1      | Cálculo de la matriz de salida <b><math>H</math></b> .....   | 8         |
| 5.2.2      | Cálculo de la matriz de covarianza del error de medición <b><math>R</math></b> .....                       | 9         |
| <b>5.3</b> | <b>Reset del Filtro</b> .....  | <b>10</b> |
| <b>5.4</b> | <b>Propagación</b> .....   | <b>11</b> |
| 5.4.1      | Propagación de los Estados Globales .....  | 11        |
| 5.4.1.1    | Propagación del cuaternión .....   | 11        |
| 5.4.1.2    | Propagación del Bias del Giróscopo:.....   | 11        |
| 5.4.2      | Propagación de los Estados Locales.....  | 12        |
| 5.4.2.1    | Propagación de <b><math>\Delta b</math></b> .....  | 12        |
| 5.4.2.2    | Propagación de <b><math>\Delta q</math></b> .....  | 12        |
| 5.4.3      | Propagación de la matriz de covarianza del error de estimación <b><math>P</math></b> .....                 | 12        |
| <b>6</b>   | <b>RESUMEN: ESTRUCTURA, INICIALIZACIÓN Y ECUACIONES FINALES DEL FILTRO DE ACTITUD</b> .....                | <b>13</b> |
| <b>6.1</b> | <b>Estructura</b> .....  | <b>13</b> |
| <b>6.2</b> | <b>resumen de ecuaciones</b> .....   | <b>13</b> |
| 6.2.1      | Inicialización .....   | 13        |
| 6.2.2      | Propagación .....  | 13        |
| 6.2.3      | Actualización .....  | 14        |
| 6.2.4      | Reset.....   | 14        |

# **1 INTRODUCCIÓN**

## **1.1 OBJETIVO**

1. El objetivo de este documento es describir la estructura y funcionamiento del filtro de Kalman de actitud.

## **1.2 DOCUMENTOS DE REFERENCIA**

[RD01]. Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation. E. J. Lefferts, F. L. Markley, M. D. Shuster. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 5, No. 5, pp. 417–429, 1982.

[RD02]. Multiplicative vs. Additive Filtering for Spacecraft Attitude Determination. F. Landis Markley, NASA's Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD, USA.

[RD03]. Optimal Filtering. Brian D.O.Anderson, John B. Moore.

[RD04]. Indirect Kalman Filter for 3D Attitude Estimation. Nikolas Trawny and Stergios I. Roumeliotis.

[RD05]. Gelb, A., Ed., Applied Optimal Estimation, MIT Press, Cambridge,Mass., 1974.

[RD06]. Attitude Error Representation for Kalman Filtering. F. Landis Markley

[RD07]. Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control. F. Landis Markley. John L. Crassidis. Space Tecnology Library

## 2 INTRODUCCIÓN AL FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO Y MULTIPLICATIVO

1. El filtro de Kalman de Actitud implementado en los algoritmos de AOCS es un “Filtro de Kalman Extendido, Multiplicativo” (MEKF) por sus siglas en ingles.
2. Este filtro utiliza las mediciones de los giróscopos para reemplazar el modelo dinámico, y así evitar los inconvenientes y posibles errores que presenta un modelado detallado de la dinámica del satélite. Luego, las ecuaciones cinemáticas son utilizadas para obtener el cuaternión de actitud filtrado. También el vector de estados es aumentado agregando el bias del giróscopo como variables de estado del sistema. En este contexto, la información provista por el giróscopo no es utilizada como observación, y el ruido de la medición es tratado como ruido del sistema [RD01].
3. El filtro es un filtro de Kalman extendido debido a la no linealidad del problema de actitud. El filtro de Kalman extendido utiliza las ecuaciones no lineales de la dinámica del problema para propagar el estado estimado, pero usa la misma corrección lineal del filtro de Kalman lineal.
4. Como explica [RD01], la mejor opción para realizar la estimación de actitud es el uso de los cuaterniones. Sin embargo esto conlleva ciertas dificultades en la aplicación de las ecuaciones del filtro. Esto se debe a la falta de independencia entre las cuatro componentes del cuaternión de actitud, las cuales se encuentran relacionadas a través de la restricción de que su norma sea unitaria. Esto conlleva a singularidades en la matriz de covarianza. **La solución aquí implementada es el filtro de Kalman multiplicativo (MEKF por sus siglas en inglés).**
5. La idea básica de MEKF es usar el cuaternión como una representación “global” de la actitud y utilizar un vector de estados  $\Delta \mathbf{q}$  de 3 componentes como una representación “local” de la actitud. Además, en vez de escribir el verdadero cuaternión como la suma del cuaternión estimado y un error, se define este como el producto de un “cuaternión error” y el cuaternión estimado [RD07].

$$\mathbf{q}_{bi}^{true} = \delta \mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}}_{bi} \quad (2-1)$$

$$\delta \boldsymbol{\theta} = 2 \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \end{bmatrix} = 2\Delta \mathbf{q} = 2\delta \mathbf{q}_{1:3} \quad (2-2)$$

6. El hecho de que  $\delta \mathbf{q}$  se encuentre a la izquierda, pre multiplicando a  $\hat{\mathbf{q}}_{bi}$  indica que el error está definido en el sistema de referencia del satélite.
7. El filtro de Kalman Multiplicativo actualiza el “vector de estado de error”:

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

8. Donde  $\mathbf{b}$  es el bias del giróscopo y:

$$\mathbf{b}^{true} = \hat{\mathbf{b}} + \Delta \mathbf{b}. \quad (2-4)$$

9. De esta manera se obtiene un EKF convencional que calcula una estimación de  $\Delta \mathbf{x}$ . La normalización del cuaternión  $\hat{\mathbf{q}}_{bi}$  no es parte del EKF, pero una operación de “reset” transfiere la información en  $\Delta \mathbf{x}$  dentro de la variable global  $\hat{\mathbf{q}}_{bi}$  manteniendo  $\delta \mathbf{q}$  pequeño, lejos de cualquier singularidad, Es importante remarcar que  $\hat{\mathbf{q}}_{bi}$  no está definido como una expectación, con lo que se evitan los problemas del Filtro Extendido de Kalman Aditivo [RD07].

### 3 MODELADO DE LOS SENSORES

1. Antes de seguir con la descripción del MEKF es necesario desarrollar un modelo de los sensores involucrados.

#### 3.1 MODELADO DEL GIRÓSCOPO

1. El giróscopo es el sensor que mide la velocidad angular del satélite, este es modelado según Farrenkopf, el cual plantea un modelo simple pero realista:

$$\omega_m = \omega^{true} + b^{true} + \eta_1 \quad (3-1)$$

$$\dot{b}^{true} = \eta_2 \quad (3-2)$$

2. Dónde:

$\omega^{true}$ : Velocidad angular real [rad/s]

$\omega_m$ : es la velocidad angular medida en [rad/s]

$b = [b_1 \ b_2 \ b_3]$ : Es el bias del giróscopo en [rad/s]

$\eta_1$ : Ruido blanco gaussiano de media 0.

$\eta_2$ : Ruido blanco gaussiano de media 0.

#### 3.2 MODELADO DEL STAR TRACKER

1. El Star Tracker es un sensor que entrega directamente el cuaternión de actitud que transforma vectores desde el sistema inercial al sistema local del sensor.
2. La medición se encuentra afectada por bias y errores de baja frecuencia y ruido blanco. Debido a que en el filtro de actitud el STR aporta la medición inercial, sus bias no pueden ser detectados. Por lo tanto el modelo del STR a utilizar es:

$$q_{li}^{med} = \delta q_{local}^{noise} \otimes q_{li}^{true} \quad (3-3)$$

$$\delta q_{local}^{noise} = \frac{\delta q_{aux}^{noise}}{\|\delta q_{aux}^{noise}\|} \quad (3-4)$$

$$\delta q_{aux}^{noise} = \begin{bmatrix} \eta_{x_{STR}} \\ \eta_{y_{STR}} \\ \eta_{z_{STR}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

3. Donde

$\eta_{x_{STR}}$ : Es el ruido de medición en el eje x del STR, gaussiano, blanco con media 0 y covarianza  $\sigma_x^2$

$\eta_{y_{STR}}$ : Es el ruido de medición en el eje y del STR, gaussiano, blanco con media 0 y covarianza  $\sigma_y^2$

$\eta_{z_{STR}}$ : Es el ruido de medición en el eje z del STR, gaussiano, blanco con media 0 y covarianza  $\sigma_z^2$

#### 4 DESCRIPCIÓN EN VARIABLES DE ESTADO DEL VECTOR DE ESTADO DE ERROR $\Delta x$

1. En esta sección se desarrolla la descripción en variables de estados de la cinemática del satélite a partir del vector de estado  $\Delta x$ .
2. Derivando la ecuación ( 2-1 ) queda:

$$\dot{q}_{bi}^{true} = \delta \dot{q} \otimes \hat{q}_{bi} + \delta q \otimes \dot{\hat{q}}_{bi} \quad (4-1)$$

3. Tanto como el cuaternión de actitud real y su estimación cumplen con la ecuación cinemática:

$$\dot{q}_{bi}^{true} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega^{true} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q_{bi}^{true} \quad (4-2)$$

$$\dot{\hat{q}}_{bi} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{q}_{bi} \quad (4-3)$$

4. Dónde  $\omega^{true}$  y  $\hat{\omega}$  son la velocidad angular real y la estimada.
5. Reemplazando queda:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega^{true} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q_{bi}^{true} = \delta \dot{q} \otimes \hat{q}_{bi} + \delta q \otimes \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{q}_{bi} \quad (4-4)$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega^{true} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q_{bi}^{true} - \delta q \otimes \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{q}_{bi} = \delta \dot{q} \otimes \hat{q}_{bi} \quad (4-5)$$

$$\delta \dot{q} \otimes \hat{q}_{bi} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \omega^{true} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q_{bi}^{true} - \delta q \otimes \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{q}_{bi} \right) \quad (4-6)$$

$$\delta \dot{q} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \omega^{true} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes q_{bi}^{true} - \delta q \otimes \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{q}_{bi} \right) \otimes \hat{q}_{bi}^{-1} \quad (4-7)$$

$$\delta \dot{q} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \omega^{true} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q - \delta q \otimes \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4-8)$$

6. Siendo que se utiliza el gir6scopo para medir la velocidad angular se define:

$$\hat{\omega} \equiv \omega_m - \hat{b} \quad (4-9)$$

7. Luego de las ecuaciones ( 3-1 ), ( 3-2 ) y ( 4-9 ) se obtiene:

$$\omega^{true} = \omega_m - b^{true} - \eta_1 \quad (4-10)$$

$$\omega^{true} = \omega_m - \hat{b} - b^{true} + \hat{b} - \eta_1 \quad (4-11)$$

$$\omega^{true} = \hat{\omega} - \Delta b - \eta_1 \quad (4-12)$$

8. Reemplazando ( 4-12 ) en ( 4-8 ) (ver [RD04] sección 2.4)

$$\delta \dot{q} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \hat{\omega} - \Delta b - \eta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q - \delta q \otimes \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4-13)$$

$$\delta \dot{q} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q - \delta q \otimes \begin{bmatrix} \hat{\omega} \\ 0 \end{bmatrix} \right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta b + \eta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q \quad (4-14)$$

$$\delta \dot{q} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} -[\hat{\omega} \times] & \hat{\omega} \\ -\hat{\omega}^t & 0 \end{bmatrix} \delta q - \begin{bmatrix} +[\hat{\omega} \times] & \hat{\omega} \\ -\hat{\omega}^t & 0 \end{bmatrix} \delta q \right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta b + \eta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q \quad (4-15)$$

$$\delta \dot{q} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} -2[\hat{\omega} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \delta q \right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta b + \eta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta q \quad (4-16)$$

$$\delta \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} -2[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} \right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -[(\Delta \mathbf{b} + \boldsymbol{\eta}_1) \times] & (\Delta \mathbf{b} + \boldsymbol{\eta}_1) \\ -(\Delta \mathbf{b} + \boldsymbol{\eta}_1)^t & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} \quad (4-17)$$

$$\delta \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} -2[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} \right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\Delta \mathbf{b} + \boldsymbol{\eta}_1) \\ 0 \end{bmatrix} - O(|\Delta \mathbf{b}| |\delta \mathbf{q}|, |\boldsymbol{\eta}_1| |\delta \mathbf{q}|) \quad (4-18)$$

9. Ignorando los errores de segundo orden se obtiene:

$$\delta \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} -2[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} \right) - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\Delta \mathbf{b} + \boldsymbol{\eta}_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

$$\delta \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \Delta \mathbf{q} - \frac{(\Delta \mathbf{b} + \boldsymbol{\eta}_1)}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-20)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} = -\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \Delta \mathbf{q} - \frac{(\Delta \mathbf{b} + \boldsymbol{\eta}_1)}{2} \quad (4-21)$$

10. Por otro lado:

$$\Delta \mathbf{b} = \mathbf{b}^{true} - \hat{\mathbf{b}} \quad (4-22)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{b}}^{true} - \dot{\hat{\mathbf{b}}} = \boldsymbol{\eta}_2 - \mathbf{0} = \boldsymbol{\eta}_2 \quad (4-23)$$

11. Finalmente:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{q}} \\ \Delta \dot{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & -\frac{I_{3 \times 3}}{2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{I_{3 \times 3}}{2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{bmatrix} \quad (4-24)$$

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & -\frac{I_{3 \times 3}}{2} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4-25)$$

$$\mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{I_{3 \times 3}}{2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

12. La matriz de covarianza de ruido del proceso queda:

$$\mathbf{Q}(t) = E \left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1^t & \boldsymbol{\eta}_2^t \end{bmatrix} \right) \quad (4-27)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} C_{bl_{GYRO}} & 0 \\ 0 & C_{bl_{GYRO}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ARW_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ARW_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ARW_z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & RRW_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & RRW_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & RRW_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{bl_{GYRO}}^t & 0 \\ 0 & C_{bl_{GYRO}}^t \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

13. Dónde

$ARW$ : es el parámetro "Angular Random Walk" en  $rad/\sqrt{s}$ . Este parámetro caracteriza el ruido de la medición del giróscopo en la velocidad, y se puede interpretar como la densidad espectral del ruido.

$RRW$ : es el parámetro "Rate Random Walk" en  $rad/\sqrt{s^3}$ . Este parámetro caracteriza el "Bias Random Walk" del giróscopo. También puede ser interpretado como la densidad espectral de este ruido.

$C_{bl_{GYRO}}$ : Matriz de transformación que pasa vectores desde el sistema local del GYRO al sistema satélite

## 5 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES DEL FILTRO DE ACTITUD

1. El MEKF consiste en tres pasos iterativos:

- **Actualización** con la medición: se actualiza el vector de estados de error  $\Delta x$ .
- **Reset** del vector de estados: se transfiere la información desde  $\widehat{\Delta x}$  hacia  $\widehat{q}_{bi}$  y  $\widehat{b}$  y se resetea a 0  $\widehat{\Delta x}$ .
- **Propagación** de los estados: se propagan el vector de estados global  $[\widehat{q}_{bi} \ \widehat{b}]$  y la matriz de covarianza del error de estimación  $P$ . Debido a que  $\widehat{\Delta x}$  fue resetado a 0 y permanece constante durante la propagación (cómo se demuestra en la sección 5.4) no necesita ser propagado y permanece en 0 durante esta etapa.

### 5.1 ACTUALIZACIÓN

1. La actualización del vector de estados  $\Delta x$  en el filtro de Extendido de Kalman se realiza de la siguiente manera:

$$\widehat{\Delta x}_{k|k} = \widehat{\Delta x}_{k|k-1} + K_k(y_k^{med} - \widehat{y}_{k|k-1}) \quad (5-1)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^t (H_k P_{k|k-1} H_k^t + R_k)^{-1} \quad (5-2)$$

2. Dónde:

$y_k^{med}$ : es el conjunto de mediciones en el instante k

$K_k$ : Ganancia de Kalman del instante k.

$P_{k|k-1}$ : es la matriz de covarianza del error de estimación propagada en el instante k.

$R_k$ : es la matriz de covarianza del error de medición del instante k.

$H_k$ : es la matriz de salida del modelo en variables de estados en el instante k.

3. El modelo de observación no lineal para la estimación de actitud está dado por:

$$y^{med} = y + v = h(q_{bi}^{true}, b^{true}) + v \quad (5-3)$$

4. Donde  $y$  es el valor real de la variable medida,  $y^{med}$  es el conjunto de mediciones y  $v$  es un vector de errores gaussianos con una matriz de covarianza  $R$ .

5. El MEKF actualiza  $\Delta x$  y no la representación global, por lo tanto:

$$y_k^{med} = \Delta q_k^{med} = (\delta q_k^{med})_{1:3} = (q_{bi_k}^{med} \otimes \widehat{q}_{bi_k|k-1}^{-1})_{1:3} \quad (5-4)$$

$$q_{bi_k}^{med} = \delta q^{noise} \otimes q_{bi_k}^{true} \quad (5-5)$$

6. Donde  $\delta q^{noise}$  es el ruido de la medición representado en pequeña rotaciones.

$$\delta q_k^{med} = \delta q^{noise} \otimes q_{bi_k}^{true} \otimes \widehat{q}_{bi_k|k-1}^{-1} \quad (5-6)$$

$$\delta q_k^{med} = \delta q^{noise} \otimes \delta q_k \quad (5-7)$$

7. Por lo que se demuestra en la sección siguiente (Ecuación ( 5-33 )) queda que:

$$\widehat{\Delta x}_{k|k} = \widehat{\Delta x}_{k|k-1} + K_k(\Delta q_k^{med} - [I_{3 \times 3} \ 0_{3 \times 3}]\widehat{\Delta x}_{k|k-1}) \quad (5-8)$$

$$\widehat{\Delta x}_{k|k} = \begin{bmatrix} \widehat{\Delta q}_{k|k} \\ \widehat{\Delta b}_{k|k} \end{bmatrix} = \widehat{\Delta x}_{k|k-1} + K_k(\Delta q_k^{med} - \widehat{\Delta q}_{k|k-1}) \quad (5-9)$$

8. En la sección 5.4 se demuestra que  $\widehat{\Delta x}_{k|k-1} = 0$ , por lo tanto:

$$\widehat{\Delta \mathbf{x}}_{k|k} = \begin{bmatrix} \widehat{\Delta \mathbf{q}}_{k|k} \\ \widehat{\Delta \mathbf{b}}_{k|k} \end{bmatrix} = K_k \Delta \mathbf{q}_k^{med} \quad (5-10)$$

## 5.2 ACTUALIZACIÓN DE LA MATRIZ DE COVARIANZA DEL ERROR DE ESTIMACIÓN DE $\widehat{\Delta \mathbf{x}}_{k|k}$

1. Según las ecuaciones del filtro de Kalman la actualización de la matriz de covarianza del error de estimación es

$$P_{k|k} = (I_{6 \times 6} - K_k H_k) P_{k|k-1} (I_{6 \times 6} - K_k H_k)^t + K_k R K_k^t \quad (5-11)$$

### 5.2.1 Cálculo de la matriz de salida $H$

1. Para calcular la matriz  $H$  es necesario encontrar  $\mathbf{y}$  en función de  $\Delta \mathbf{x}$ .
2. Por ecuaciones (2-1), (2-4) y (5-3):

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\delta \mathbf{q} \otimes \widehat{\mathbf{q}}_{bi}, \widehat{\mathbf{b}} + \Delta \mathbf{b}) \quad (5-12)$$

3. Luego por Taylor:

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{h}(\delta \mathbf{q}_0 \otimes \widehat{\mathbf{q}}_{bi}, \widehat{\mathbf{b}} + \Delta \mathbf{b}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Delta \mathbf{x}} \right|_{\Delta \mathbf{x}_0} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{b} \end{bmatrix} + \mathbf{v} \quad (5-13)$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Delta \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Delta \mathbf{q}} & \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Delta \mathbf{b}} \end{bmatrix} = [H_{\Delta \mathbf{q}} \quad H_{\Delta \mathbf{b}}] \quad (5-14)$$

4. Tomando

$$\Delta \mathbf{x}_0 = [\Delta \mathbf{q}_0 \quad \Delta \mathbf{b}_0] = \mathbf{0} \quad (5-15)$$

5. Aproximando por ángulos pequeños

$$\delta \mathbf{q} \approx \mathbf{I}_q + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

6. Se tiene que:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{q}_{bi}^{true}, \mathbf{b}^{true}) \approx \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{q}}_{bi}, \widehat{\mathbf{b}}) + H(\widehat{\mathbf{q}}_{bi}, \widehat{\mathbf{b}}) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{b} \end{bmatrix} + \mathbf{v} \quad (5-17)$$

7. Tomando el valor esperado:

$$\widehat{\mathbf{y}} = E(\mathbf{y}) \approx \mathbf{h}(\widehat{\mathbf{q}}_{bi}, \widehat{\mathbf{b}}) + H(\widehat{\mathbf{q}}_{bi}, \widehat{\mathbf{b}}) \begin{bmatrix} \widehat{\Delta \mathbf{q}} \\ \widehat{\Delta \mathbf{b}} \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

8. Luego

$$\mathbf{h}(\widehat{\mathbf{q}}_{bi}, \widehat{\mathbf{b}}) = \left( \widehat{\mathbf{q}}_{bi|k|k-1} \otimes \widehat{\mathbf{q}}_{bi|k|k-1}^{-1} \right)_{1:3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

9. Dado que  $\mathbf{h}$  no es función de  $\mathbf{b}$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Delta \mathbf{b}} = H_{\Delta \mathbf{b}} = 0_{3 \times 3} \Rightarrow H(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Delta \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Delta \mathbf{q}} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

10. La expresión  $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Delta \mathbf{q}}$  se puede calcular usando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Delta \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \mathbf{q}} \quad (5-21)$$



11. Siendo:

$$\mathbf{q}_{bi}^{true} = \delta \mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}}_{bi} \approx \left( \mathbf{I}_q + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \otimes \hat{\mathbf{q}}_{bi} = \hat{\mathbf{q}}_{bi} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \hat{\mathbf{q}}_{bi} \quad (5-22)$$

12. Se puede demostrar que (ver [RD07] ec. 2.98)

$$\mathbf{q}_{bi}^{true} \approx \hat{\mathbf{q}}_{bi} + \Xi(\hat{\mathbf{q}}_{bi}) \Delta \mathbf{q} \quad (5-23)$$

13. Dónde:

$$\Xi(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_4 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix} \quad (5-24)$$

14. Luego:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \mathbf{q}} \approx \Xi(\hat{\mathbf{q}}_{bi}) \quad (5-25)$$

15. Por otro lado

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}}^{-1})_{1:3} \quad (5-26)$$

16. Se puede demostrar que (Ver [RD07] sección 2.7)

$$\mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}}^{-1} = [\Xi(\hat{\mathbf{q}}^{-1}) \quad \hat{\mathbf{q}}^{-1}] \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \Xi(\hat{\mathbf{q}})^t \\ \hat{\mathbf{q}}^t \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad (5-27)$$

$$(\mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}}^{-1})_{1:3} = \Xi(\hat{\mathbf{q}})^t \mathbf{q} \quad (5-28)$$

17. Luego

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} (\mathbf{q} \otimes \hat{\mathbf{q}}^{-1})_{1:3} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \Xi(\hat{\mathbf{q}})^t \mathbf{q} = \Xi(\hat{\mathbf{q}})^t \quad (5-29)$$

18. Finalmente

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Delta \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \mathbf{q}} = \Xi(\hat{\mathbf{q}}_{bi})^t \Xi(\hat{\mathbf{q}}_{bi}) = H_{\Delta \mathbf{q}} \quad (5-30)$$

19. Se puede demostrar que (Ver [RD07] sección 2.7)

$$\Xi(\mathbf{q})^t \Xi(\mathbf{q}) = \|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (5-31)$$

20. Por lo tanto

$$H_{\Delta \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Delta \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Delta \mathbf{q}} = \Xi(\hat{\mathbf{q}}_{bi})^t \Xi(\hat{\mathbf{q}}_{bi}) = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (5-32)$$

21. Finalmente reemplazando ( 5-19 ), ( 5-20 ), y ( 5-32 ) en ( 5-18 ) se obtiene

$$\hat{\mathbf{y}} \approx [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}] \begin{bmatrix} \hat{\Delta \mathbf{q}} \\ \hat{\Delta \mathbf{b}} \end{bmatrix} = \hat{\Delta \mathbf{q}} \quad (5-33)$$

22. La matriz de salida queda:

$$\mathbf{H}_k = [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 3}] \quad (5-34)$$

## 5.2.2 Cálculo de la matriz de covarianza del error de medición $R$

1. Tomando la ecuación ( 5-7 ) y aproximando por ángulo pequeños

$$\delta \mathbf{q}_k^{med} \approx \left[ I_q + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}^{noise} \\ 0 \end{bmatrix} \right] \otimes \delta \mathbf{q}_k \quad (5-35)$$

$$\delta \mathbf{q}_k^{med} \approx \delta \mathbf{q}_k + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}^{noise} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \delta \mathbf{q}_k \quad (5-36)$$

$$\delta \mathbf{q}_k^{med} \approx \delta \mathbf{q}_k + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}^{noise} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \left[ I_q + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_k \\ 0 \end{bmatrix} \right] \quad (5-37)$$

$$\delta \mathbf{q}_k^{med} \approx \delta \mathbf{q}_k + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}^{noise} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}^{noise} \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-38)$$

2. Despreciando los errores de segundo orden:

$$\delta \mathbf{q}_k^{med} \approx \delta \mathbf{q}_k + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q}^{noise} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-39)$$

3. Luego:

$$\mathbf{y}_k^{med} \approx \Delta \mathbf{q}_k + \Delta \mathbf{q}^{noise} \quad (5-40)$$

4. Por lo tanto la matriz de covarianza del error de medición  $R$  queda:

$$R = E \left( \Delta \mathbf{q}^{noise} \Delta \mathbf{q}^{noise^t} \right) = C_{bl_{STR}} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_y^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_z^2}{4} \end{bmatrix} C_{bl_{STR}}^t \quad (5-41)$$

5. Dónde:

$\sigma_x^2$ : Covarianza del error en el eje “x” del STR en  $rad^2$

$\sigma_y^2$ : Covarianza del error en el eje “y” del STR en  $rad^2$

$\sigma_z^2$ : Covarianza del error en el eje “z” del STR en  $rad^2$

$C_{bl_{STR}}$ : Matriz de transformación que pasa vectores del sistema local del STR al sistema del satélite.

### 5.3 RESET DEL FILTRO

1. Esta operación es la particularidad del filtro de kalman multiplicativo.

2. En la actualización se asignan valores a  $\widehat{\Delta \mathbf{x}}_{k|k}$ , pero no se actualiza el estado global  $[\widehat{\mathbf{q}}_{bi_{k|k-1}} \ \widehat{\mathbf{b}}_{k|k-1}]$ . La operación del reset es utilizada para transferir la información contenida en  $\widehat{\Delta \mathbf{x}}_{k|k}$  al estado global y lleva a 0  $\widehat{\Delta \mathbf{x}}_{k|k}$ .

3. La secuencia de reset es:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \widehat{\Delta \mathbf{q}}_{k|k} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \otimes \widehat{\mathbf{q}}_{bi_{k|k-1}} \quad (5-42)$$

$$\widehat{\mathbf{q}}_{bi_{k|k}} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}^*\|} \quad (5-43)$$

$$\widehat{\mathbf{b}}_{k|k} = \widehat{\mathbf{b}}_{k|k-1} + \widehat{\Delta \mathbf{b}}_{k|k} \quad (5-44)$$

$$\widehat{\Delta \mathbf{q}}_{k|k} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (5-45)$$

$$\widehat{\Delta \mathbf{b}}_{k|k} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (5-46)$$

- La operación del reset rota el sistema de referencia de la covarianza de la actitud. Sin embargo, según lo que indica [RD07] en la sección 6.2.1.2 la matriz de covarianza del error de estimación no se encuentra afectada por la operación de reset ya que depende de la estadística asumida de las mediciones y no de las mediciones en sí mismas. Por lo tanto dado que la media de la actualización es 0, la rotación media causada por el reset es también 0, por lo tanto la covarianza no es afectada.
- Es importante remarcar que en esta operación también el error de estimación es traspasado desde  $\hat{\mathbf{q}}_{k|k}$  a  $\hat{\mathbf{q}}_{bi_{k|k}}$ , por lo tanto la matriz de covarianza del error de estimación  $\mathbf{P}_{k|k}$  representa el error de estimación de  $\hat{\mathbf{q}}_{bi_{k|k}}$**

## 5.4 PROPAGACIÓN

- El EKF debe propagar la expectación de los estados y la covarianza del error. En este punto, el MEKF debe propagar los estados globales y locales. Sin embargo, como será demostrado, los estado locales se mantienen constantes en 0 durante la propagación.

### 5.4.1 Propagación de los Estados Globales

#### 5.4.1.1 Propagación del cuaternión

- Considerando que la velocidad es constante durante el período de integración, se puede calcular  $\hat{\mathbf{q}}(t_{k+1})$  como ver ([RD04] sec 1.6.1):

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1|k} = M(\Delta\boldsymbol{\varphi}_k)\hat{\mathbf{q}}_k \quad (5-47)$$

$$M(\Delta\boldsymbol{\varphi}_k) = \cos\left(\frac{|\Delta\boldsymbol{\varphi}_k|}{2}\right)I_{4 \times 4} + \frac{\sin\left(\frac{|\Delta\boldsymbol{\varphi}_k|}{2}\right)}{|\Delta\boldsymbol{\varphi}_k|}\Omega(\Delta\boldsymbol{\varphi}_k) \quad (5-48)$$

Dónde:

$\Delta\boldsymbol{\varphi}$ : es el ángulo que rotó el satélite desde el ciclo anterior hasta el ciclo actual:

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}_k = \int_t^{t+Tp} \boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau \cong Tp \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} \quad (5-49)$$

Y la matriz  $\Omega$  viene dada por:

$$\Omega(\Delta\boldsymbol{\varphi}_k) = Tp \begin{bmatrix} 0 & \omega_Z & -\omega_Y & \omega_X \\ -\omega_Z & 0 & \omega_X & \omega_Y \\ \omega_Y & -\omega_X & 0 & \omega_Z \\ -\omega_X & -\omega_Y & -\omega_Z & 0 \end{bmatrix} \quad (5-50)$$

- Debido a que  $\Delta\boldsymbol{\varphi}$  es desconocido, se estima como:

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\varphi}}_k = \hat{\boldsymbol{\omega}}_k Tp = \boldsymbol{\omega}_{m_k} Tp - \hat{\mathbf{b}}_{k|k-1} Tp \quad (5-51)$$

Dónde:

$Tp$ : es el tiempo de muestreo del giróscopo en segundos.

- Nota: En [RD04] se presenta una opción más simple, posiblemente con menores errores para el caso de velocidades angulares muy bajas.**

#### 5.4.1.2 Propagación del Bias del Giróscopo:

- Debido a que  $\dot{\mathbf{b}}^{true} = \boldsymbol{\eta}_2$ , al tomar la expectación para calcular la derivada del bias estimado queda que  $\dot{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{0}$  por lo tanto el bias estimado es constante durante el período de integración:

$$\hat{\mathbf{b}}_{k+1|k} = \hat{\mathbf{b}}_k \quad (5-52)$$

## 5.4.2 Propagación de los Estados Locales

### 5.4.2.1 Propagación de $\Delta \mathbf{b}$

1. Recordemos que

$$\Delta \mathbf{b} = \mathbf{b}^{true} - \hat{\mathbf{b}} \quad (5-53)$$

2. Luego

$$\dot{\Delta \mathbf{b}} = \dot{\mathbf{b}}^{true} - \dot{\hat{\mathbf{b}}} = \boldsymbol{\eta}_2 \quad (5-54)$$

3. Por lo tanto

$$\dot{\hat{\Delta \mathbf{b}}} = 0 \quad (5-55)$$

4. Esto indica que  $\hat{\Delta \mathbf{b}}$  permanece constante durante el período de propagación, y dado que en la operación de reset  $\hat{\Delta \mathbf{b}}_{k|k} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ , al siguiente paso de tiempo queda que

$$\hat{\Delta \mathbf{b}}_{k|k-1} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (5-56)$$

### 5.4.2.2 Propagación de $\Delta \mathbf{q}$

1. La ecuación (4-21) indica que:

$$\Delta \dot{\mathbf{q}} = -\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \Delta \mathbf{q} - \frac{(\Delta \mathbf{b} + \boldsymbol{\eta}_1)}{2} \quad (5-57)$$

2. Tomando la expectación de lo anterior queda:

$$\Delta \dot{\hat{\mathbf{q}}} = -\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \Delta \hat{\mathbf{q}} \quad (5-58)$$

3. Esto indica que si  $\Delta \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$  al inicio del período de integración, permanecerá en 0

4. Dado que luego de la operación de reset  $\hat{\Delta \mathbf{q}}_{k|k} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$ , entonces en el siguiente paso, al propagar queda que

$$\hat{\Delta \mathbf{q}}_{k|k-1} = \mathbf{0}_{3 \times 1} \quad (5-59)$$

## 5.4.3 Propagación de la matriz de covarianza del error de estimación $P$

1. Según las ecuaciones del filtro de Kalman continuo (ver [RD07] sección 4.3):

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F(t) + G(t)Q(t)G^t(t) \quad (5-60)$$

2. En este filtro, para propagar la matriz de covarianza simplemente se la integra numéricamente, haciendo la siguiente aproximación:

$$P_{k|k-1} = (F_k P_{k-1|k-1} + P_{k-1|k-1} F_k^t + G_k Q_k G_k^t) T_p + P_{k-1|k-1} \quad (5-61)$$

Dónde:

$$T_p = t_k - t_{k-1} \quad (5-62)$$

3. En los documentos de referencia normalmente se opta por la versión discreta del filtro de Kalman.

## 6 RESUMEN: ESTRUCTURA, INICIALIZACIÓN Y ECUACIONES FINALES DEL FILTRO DE ACTITUD

1. En esta sección se muestran los resultados y las ecuaciones finales del filtro.

### 6.1 ESTRUCTURA

2. La Figura 6-1 muestra la estructura del filtro de kalman en forma de dos lazos de control anidados. La línea en color roja es necesaria para comprender conceptualmente cómo está conformado el filtro y cómo se hace la propagación de la matriz de covarianza. Sin embargo, como se ha demostrado  $\hat{\Delta x}_{k|k-1} = \mathbf{0}_{6 \times 1}$  por lo que no existe realimentación real a través del lazo interno.

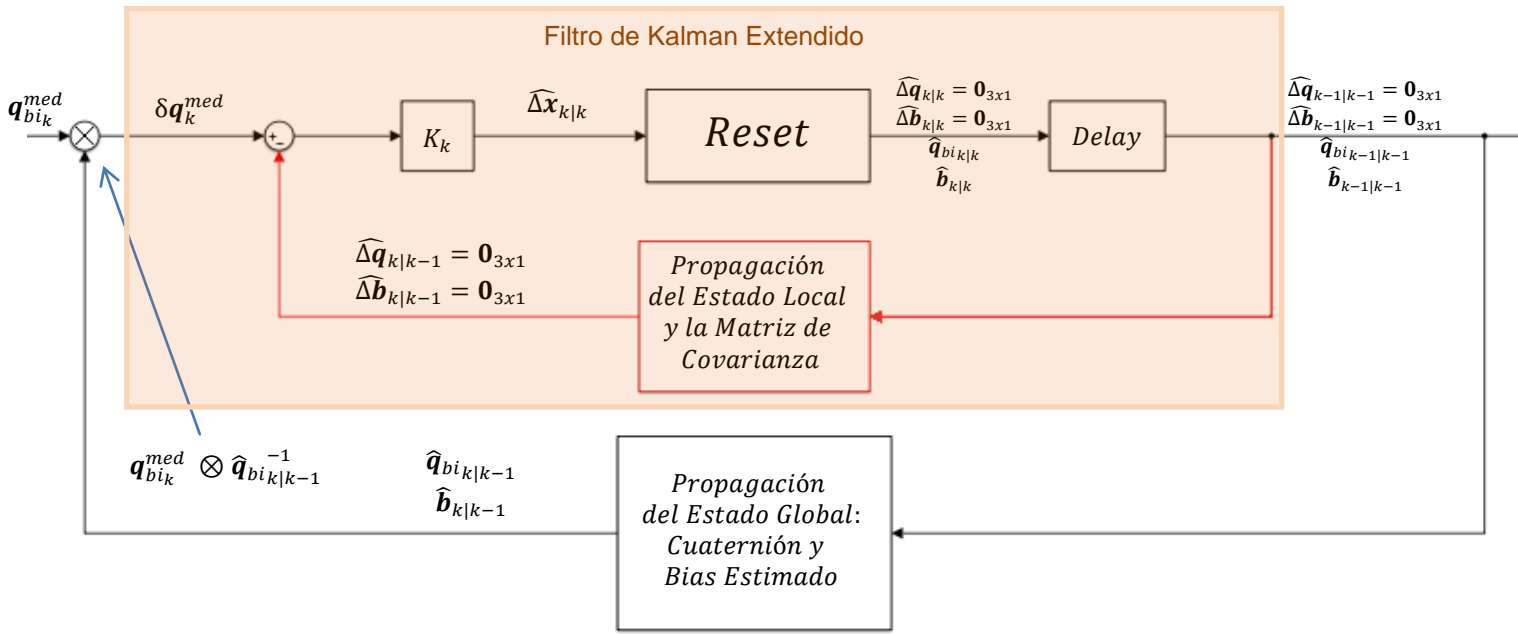


Figura 6-1. Estructura del Filtro de Kalman de Actitud

### 6.2 RESUMEN DE ECUACIONES

1. Finalmente, todas las ecuaciones del filtro de Kalman implementado son:

#### 6.2.1 Inicialización

1. Esta es la inicialización implementada actualmente

$$P_{0|0} = \mathbf{0}_{6 \times 6}$$

$$\hat{q}_{bi_{0|0}} = q_{bi_0}^{med}$$

$$\hat{b}_{0|0} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$$

#### 6.2.2 Propagación

$$Tp = t_k - t_{k-1}$$

$$\hat{b}_{k|k-1} = \hat{b}_{k-1|k-1}$$

$$\Delta \hat{\phi}_k = (\omega_{m_k} - \hat{b}_{k|k-1})Tp$$

$$M(\Delta \hat{\phi}_k) = \cos\left(\frac{\Delta \hat{\phi}_k}{2}\right) I_{4 \times 4} + \frac{\sin\left(\frac{|\Delta \hat{\phi}_k|}{2}\right)}{|\Delta \hat{\phi}_k|} \Omega(\Delta \hat{\phi}_k)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{k+1|k} = M(\Delta\hat{\boldsymbol{\phi}}_k)\hat{\mathbf{q}}_k$$

$$P_{k|k-1} = (F_k P_{k-1|k-1} + P_{k-1|k-1} F_k^t + G_k Q_k G_k^t) T p + P_{k-1|k-1}$$

Dónde:

$$F(t) = \begin{bmatrix} -[\hat{\boldsymbol{\omega}} \times] & -\frac{I_{3 \times 3}}{2} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$[\hat{\boldsymbol{\omega}}_k \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\omega}_{k3} & \hat{\omega}_{k2} \\ \hat{\omega}_{k3} & 0 & -\hat{\omega}_{k1} \\ -\hat{\omega}_{k2} & \hat{\omega}_{k1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(t) = \begin{bmatrix} -\frac{I_{3 \times 3}}{2} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} C_{bl_{GYRO}} & 0 \\ 0 & C_{bl_{GYRO}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ARW_x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ARW_y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ARW_z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & RRW_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & RRW_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & RRW_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{bl_{GYRO}}^t & 0 \\ 0 & C_{bl_{GYRO}}^t \end{bmatrix}$$

### 6.2.3 Actualización

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^t (H_k P_{k|k-1} H_k^t + R_k)^{-1}$$

$$\Delta \mathbf{q}_k^{med} = (\delta \mathbf{q}_k^{med})_{1:3} = (\mathbf{q}_{bi_k}^{med} \otimes \hat{\mathbf{q}}_{bi_k|k-1}^{-1})_{1:3}$$

$$\widehat{\Delta \mathbf{x}}_{k|k} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{q}}_{k|k} \\ \Delta \hat{\mathbf{b}}_{k|k} \end{bmatrix} = K_k \Delta \mathbf{q}_k^{med}$$

$$P_{k|k} = (I_{6 \times 6} - K_k H_k) P_{k|k-1} (I_{6 \times 6} - K_k H_k)^t + K_k R K_k^t$$

$$H_k = [I_{3 \times 3} \quad 0_{3 \times 3}]$$

$$R = C_{bl_{STR}} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_y^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_z^2}{4} \end{bmatrix} C_{bl_{STR}}^t$$

### 6.2.4 Reset

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{q}}_{k|k} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \otimes \hat{\mathbf{q}}_{bi_k|k-1}$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{bi_k|k} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}^*\|}$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{k|k} = \hat{\mathbf{b}}_{k|k-1} + \Delta \hat{\mathbf{b}}_{k|k}$$

$$\Delta \hat{\mathbf{q}}_{k|k} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$$

$$\Delta \hat{\mathbf{b}}_{k|k} = \mathbf{0}_{3 \times 1}$$