

# ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>2</b>
<b>2. ALLAN VARIANCE</b>	<b>3</b>
2.1. REPRESENTACIÓN DE TÉRMINOS DE RUIDOS EN ALLAN VARIANCE . . .	4
2.2. QUANTIZATION NOISE . . . . .	4
2.3. ANGLE RANDOM WALK . . . . .	5
2.4. BIAS INSTABILITY . . . . .	5
2.5. RATE RANDOM WALK . . . . .	5
2.6. DRIFT RATE RAMP . . . . .	6
2.7. UNIDADES . . . . .	6
<b>3. SIMULADOR DE ALLAN VARIANCE</b>	<b>7</b>
<b>4. ANÁLISIS DE DATOS DE UN GIRÓSCOPO</b>	<b>12</b>
<b>5. CONCLUSIONES</b>	<b>15</b>
<b>6. REFERENCIAS</b>	<b>16</b>

Instituto Bailseiro	Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas	TP N°1 Página: 2 de 16
------------------------	---	---------------------------

## 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de navegación inerciales son capaces de proveer la posición, velocidad y actitud con gran exactitud sobre cortos períodos de tiempo. Sin embargo, esta exactitud se degrada a medida que el tiempo transcurre. Los requerimientos para una estimación exacta de la información para la navegación requiere modelar los errores del sensor.

*Allan variance* (AV) es la manera más simple de realizar este modelado. AV es un método para representar el valor cuadrático medio (RMS) del error en función del tiempo promedio. AV presenta la ventaja que es simple de calcular y analizar. Realizando operaciones sencillas a lo largo de un conjunto de datos de la lectura de un sensor inercial, se obtiene una curva que permite caracterizar varios errores aleatorios característicos de este tipo de sensores.

Instituto Bailseiro	Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas	TP N°1 Página: 3 de 16
------------------------	---	---------------------------

## 2. ALLAN VARIANCE

Supóngase que se tienen  $N$  valores de la lectura de velocidad angular  $\Omega$  de un sensor inercial que fueron muestreados con un período de muestreo  $t_0$ . A partir de este conjunto de datos, se forman subconjuntos de  $n$  elementos (con  $n < N/2$ ). El tiempo asociado a cada subconjunto es  $T = nt_0$ . El promedio  $\bar{\Omega}$  es

$$\bar{\Omega}_k(T) = \frac{1}{T} \int_{t_k}^{t_k+T} \Omega(t) dt \quad (1)$$

El promedio del siguiente subconjunto es

$$\bar{\Omega}_{next}(T) = \frac{1}{T} \int_{t_{k+1}}^{t_{k+1}+T} \Omega(t) dt \quad (2)$$

donde  $t_{k+1} = t_k + T$ . Luego, se define “el” Allan variance como

$$\sigma^2(T) = \frac{1}{2(N-2n)} \sum_{k=1}^{N-2n} [\bar{\Omega}_{next}(T) - \bar{\Omega}_k(T)]^2 \quad (3)$$

Otra manera de calcular Allan variance es utilizar la posición angular en lugar de la velocidad angular. Para esto, se debe integrar esta última puesto que es la lectura del sensor

$$\theta(t) = \int \Omega(\xi) d\xi \quad (4)$$

donde  $\xi$  es una variable de integración. El límite inferior de la integral no se especifica ya que se utilizan las diferencias de velocidad angular. Las Ec.(1) y Ec.(2) resultan ahora

$$\bar{\Omega}_k(T) = \frac{\theta_{k+n} - \theta_k}{T} \quad (5)$$

$$\bar{\Omega}_{next}(T) = \frac{\theta_{k+2n} - \theta_{k+n}}{T} \quad (6)$$

Reemplazando en la Ec.(3)

$$\sigma^2(T) = \frac{1}{2T^2(N-2n)} \sum_{k=1}^{N-2n} [\theta_{k+2n} - 2\theta_{k+n} + \theta_k]^2 \quad (7)$$

En los sensores inerciales se conoce cuales son algunas de las fuentes características de ruido. Los cinco más básicos son: quantization noise, angle random walk, bias instability, rate random walk y drift rate ramp<sup>1</sup>. Cada una de estas componentes de ruido está caracterizada por su función de densidad espectral de frecuencia (PSD)  $S_\Omega(f)$ . La relación de esta con  $\sigma^2(T)$  es

$$\sigma^2(T) = 4 \int_0^\infty S_\Omega(f) \frac{\sin^4(\pi f T)}{(\pi f T)^2} df \quad (8)$$

Las hipótesis requeridas sobre la Ec.(8) es que el proceso aleatorio  $\Omega(t)$  sea estacionario. Esto implica que la función de autocorrelación  $\Omega(t)$  no depende del tiempo y que sea par.

---

<sup>1</sup>No se los traduce al español por la costumbre de emplear estos términos en inglés

Instituto Bailseiro	Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas	TP N°1 Página: 4 de 16
------------------------	---	---------------------------

La Ec.(8) establece que  $\sigma^2(T)$  es proporcional a la potencia de salida de la señal aleatoria  $\Omega(t)$  al pasar por un filtro con función transferencia de la forma  $\sin^4(x)/x^2$ . Esta función transferencia es consecuencia del método empleado para crear y operar los subconjuntos.

En la Ec.(8) se encuentra la principal ventaja del método de AV. Por un lado, si se conoce la PSD de cualquier proceso aleatorio, se puede conocer como debe ser su AV. En sentido opuesto, dado que  $\sigma(T)$  se puede calcular a partir de mediciones de un sensor (Ec.(7)) se crea un gráfico de AV y se puede inferir información sobre el proceso aleatorio.

La Ec.(8) también manifiesta que el ancho de banda del filtro depende del tiempo  $T$  del subconjunto. De esta manera, se pueden examinar distintos tipos de procesos aleatorios variando  $T$  (para así variar el ancho de banda). Por lo tanto, AV permite identificar y cuantificar diferentes tipos de errores presentes en las mediciones del sensor.

## 2.1. REPRESENTACIÓN DE TÉRMINOS DE RUIDOS EN ALLAN VARIANCE

## 2.2. QUANTIZATION NOISE

Es un error que se produce al digitalizar una señal analógica. Es causado por las pequeñas diferencias entre los valores reales de la señal siendo muestreada y la resolución del conversor analógico digital. Para la salida de un giróscopo, la PSD de la posición angular es

$$S_\theta = T_s Q_z^2 \left[ \frac{\sin(\pi f t)}{\pi f t} \right]^2 \approx T_s Q_z^2; f < \frac{1}{2T_s} \quad (9)$$

donde  $T_s$  es el período de muestreo y  $Q_z$  es el coeficiente de quantization noise. El límite teórico para  $Q_z$  es  $S/\sqrt{12}$ , donde  $S$  es el coeficiente de escala del giróscopo en pruebas con tiempo de muestreo fijo y uniforme.

La relación entre la PSD de la velocidad angular y la de la posición angular es

$$S_\Omega = (2\pi f)^2 S_\theta (2\pi f) \approx (2\pi f)^2 T_s Q_z^2; f < \frac{1}{2T_s} \quad (10)$$

Reemplazando la Ec.(10) en la Ec.(8) y resolviendo la integral se obtiene

$$\sigma^2(T) = \frac{3Q_z^2}{T} \quad (11)$$

Tomando logaritmo en base 10

$$\log[\sigma(T)] = \log(\sqrt{3}) + \log(Q_z) - \log(T) \quad (12)$$

Es decir, en un gráfico en escala log-log de  $\sigma(T)$  vs.  $T$ , el ruido de quantization noise está representado por una recta de pendiente de  $-1$ . Construyendo la gráfica a partir de lecturas de un sensor, se puede conocer el valor de  $Q_z$  en  $T = \sqrt{3}$ .

Instituto Bailseiro	Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas	TP N°1 Página: 5 de 16
------------------------	---	---------------------------

### 2.3. ANGLE RANDOM WALK

Las componentes de ruido de alta frecuencia que tienen un tiempo de correlación menor que el período de muestreo pueden contribuir al angle random walk (ARW) del giróscopo o acelerómetro. Estas componentes de ruido se caracterizan como ruido blanco en la medición de velocidad angular (o aceleración del acelerómetro). Su PSD es

$$S_{\Omega} = Q^2 \quad (13)$$

donde  $Q$  es el coeficiente de ARW. Reemplazando Ec.(13) en Ec.(8) y resolviendo la integral se obtiene:

$$\sigma^2(T) = \frac{Q^2}{T} \quad (14)$$

$$\log[\sigma(T)] = \log(Q) - \frac{1}{2}\log(T) \quad (15)$$

En el gráfico en escala log-log, el ruido ARW está representado por una recta con pendiente  $-1/2$ . Construyendo los datos con datos sensados, se puede conocer el valor de  $Q$  en  $T = 1$ .

### 2.4. BIAS INSTABILITY

El origen de este ruido es de los componentes electrónicos susceptibles al ruido *flicker*. La PSD asociada es

$$\begin{cases} \left(\frac{B^2}{2\pi}\right) \frac{1}{f}; f < f_0 \\ 0; f > f_0 \end{cases} \quad (16)$$

donde  $B$  es el coeficiente de bias instability y  $f_0$  es la frecuencia de corte del ruido. Reemplazando Ec.(16) en Ec.(8) se obtiene:

$$\sigma^2(T) = \frac{2B^2}{\pi} \left[ \ln(2) - \frac{\sin^3(x)}{2x^2} (\sin(x) + 4x \cos(x) + C_i(x) - C_i(4x)) \right] \quad (17)$$

donde  $x = \pi fT$  y  $C_i$  es la función integral del coseno. La gráfica en escala log-log correspondiente a la Ec.(17) alcanza una región plana (pendiente nula) que marca el límite del BI. En esta región la relación entre  $\sigma(T)$  y  $B$  es:  $\sigma = 0,664B$ . Por lo tanto, construyendo la gráfica a partir de datos sensados se puede conocer  $B$ .

### 2.5. RATE RANDOM WALK

Este es un proceso aleatorio de origen desconocido, posiblemente un caso límite de un ruido correlacionado exponencialmente con un tiempo de correlación demasiado largo. La PSD asociada es

$$S_{\Omega} = \left(\frac{K}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{f^2} \quad (18)$$

donde  $K$  es el coeficiente del rate random walk (RRW). Reemplazando Ec.(18) en Ec.(8) y resolviendo la integral:

$$\sigma^2(T) = \frac{K^2 T}{3} \quad (19)$$

$$\log [\sigma(T)] = \log(K) + \frac{1}{2}\log(T) - \frac{1}{2}\log(3) \quad (20)$$

En el gráfico log-log, RRW está representado por un recta de pendiente 1/2. Construyendo la gráfica con datos sensor, se puede conocer el valor de  $K$  en  $T = 3$ .

## 2.6. DRIFT RATE RAMP

Los ruidos considerados hasta aquí son de carácter aleatorio. También es útil determinar el comportamiento de  $\sigma(T)$  ante ruido sistemático (determinístico). Uno de estos es el *drift rate ramp* (DRR), definido como

$$\Omega(t) = Rt \quad (21)$$

donde  $R$  es el coeficiente de DRR. Si se tiene un conjunto de datos que responde a la Ec.(21), formando subconjuntos y operando se obtiene

$$\sigma^2(T) = \left(\frac{RT}{2}\right)^2 \quad (22)$$

$$\log [\sigma(T)] = \log(R) + \log(T) - \log(\sqrt{2}) \quad (23)$$

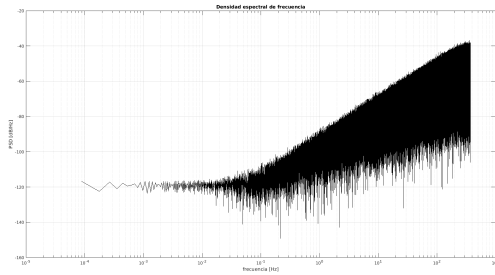
Por lo tanto, DRR está representado por un recta con pendiente 1 en el gráfico en escala log-log. Construyendolo a partir de datos sensados, se puede conocer el valor de  $R$  en  $T = \sqrt{2}$ .

## 2.7. UNIDADES

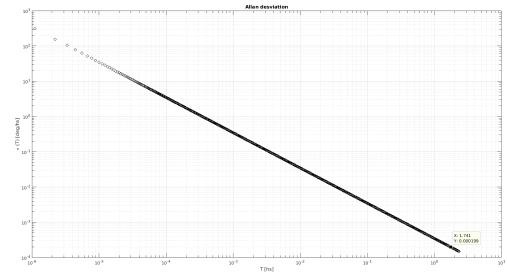
Para el caso de un giróscopo,  $\sigma(T)$  se especifica comúnmente en  $deg/hs$ . Luego, para conocer las unidades de los coeficientes de cada una de las componentes de ruido se puede operar sobre cada una de las ecuaciones que los relaciona con  $\sigma(T)$ . En la tabla N°1 se especifican cada una de las unidades. En caso que se utilice la lectura del acelerómetro en lugar de la del giróscopo se debe cambiar  $deg$  por  $m/s$ .

**Tabla 1:** Unidades de los coeficientes para el caso de un giróscopo

Tipo de ruido	Coeficiente	Unidad
Quantization noise	$Q_z$	$deg$
Angle random walk	$Q$	$deg/\sqrt{hs}$
Bias instability	$B$	$deg/hs$
Rate random walk	$K$	$deg/(hs\sqrt{hs})$
Drift rate ramp	$R$	$deg/hs^2$

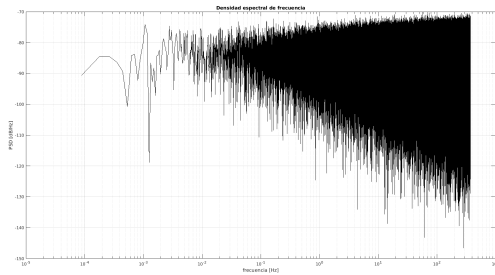


(a) PSD: quantization noise

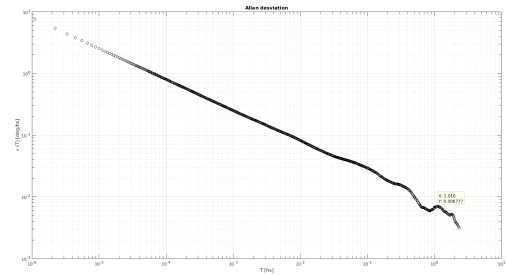


(b) Allan deviation: quantization noise

**Figura 1:** Simulación quantization noise



(a) PSD: angle random walk



(b) Allan deviation: angle random walk

**Figura 2:** Simulación angle random walk

### 3. SIMULADOR DE ALLAN VARIANCE

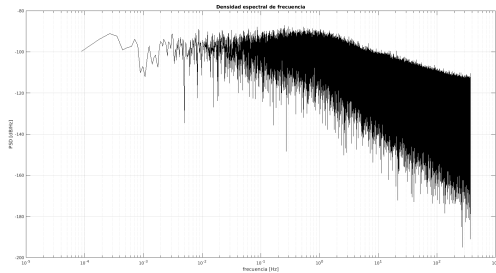
Conociendo las PSD de cada una de las componentes de ruido involucradas en un sensor inercial, es posible crear señales aleatorias que se correspondan a cada PSD. A partir de estas y haciendo uso de la Ec.(3) o Ec.(7) se calcula  $\sigma(T)$  y se pueden construir las gráficas en escala log-log de  $\sigma(T)$  vs.  $T$ . Por lo tanto, es factible realizar simulaciones de los distintos ruidos y conocer su AV (o más apropiadamente, “Allan deviation”).

Para realizar las simulaciones se utilizó como guía [3]. En la tabla N°2 se muestran los valores utilizados para los coeficientes. También, en cada figura se muestra la gráfica de AV junto a su correspondiente PSD. Conocer el comportamiento en frecuencia de la señal permite inferir que pendientes serían capaces de observarse en el gráfico de AV.

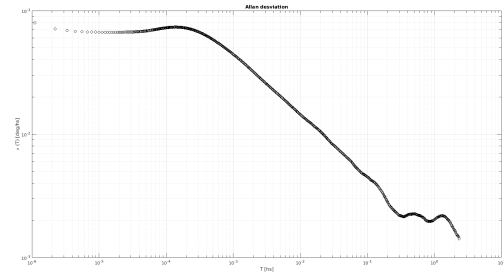
**Tabla 2:** Valores de los coeficientes para las simulaciones

Tipo de ruido	Coficiente	Valor
Quantization noise	$Q_z$	$2e - 4 \text{ deg}$
Angle random walk	$Q$	$8e - 3 \text{ deg}/\sqrt{hs}$
Bias instability	$B$	$0,1 \text{ deg}/hs$
Rate random walk	$K$	$1 \text{ deg}/(hs\sqrt{hs})$
Drift rate ramp	$R$	$5 \text{ deg}/hs^2$

En la Fig. N°6 se muestra el aporte de todas las componentes; es decir, la suma de todos los ruidos

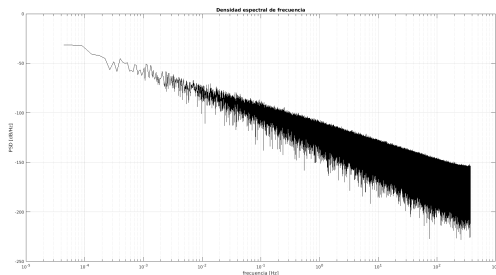


(a) PSD: bias instability

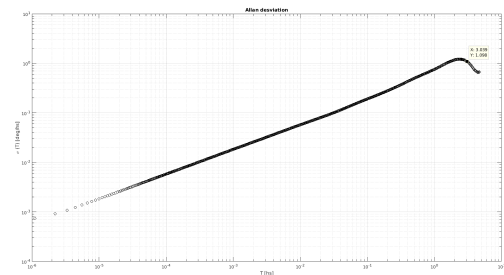


(b) Allan deviation: bias instability

**Figura 3:** Simulación bias instability

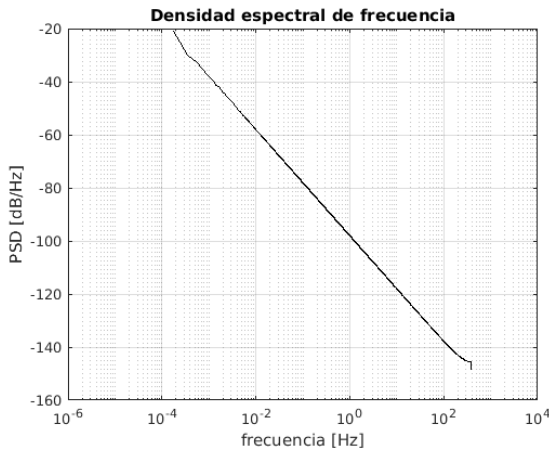


(a) PSD: rate random walk

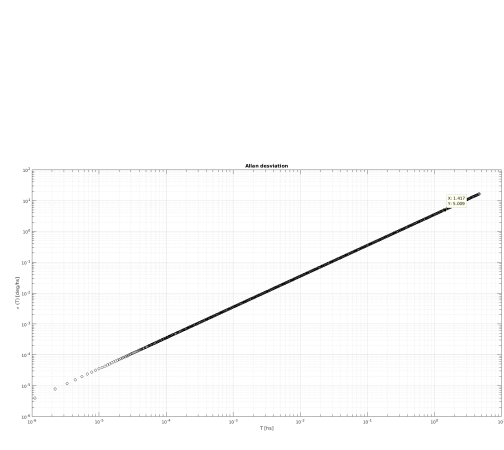


(b) Allan deviation: rate random walk

**Figura 4:** Simulación rate random walk



(a) PSD: drift rate ramp



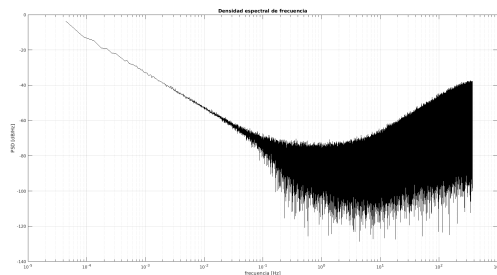
(b) Allan deviation: drift rate ramp

**Figura 5:** Simulación drift rate ramp

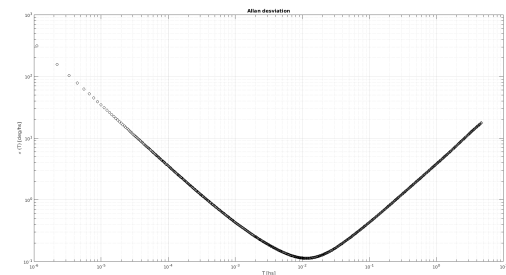
anteriormente simulados. En la Fig. N°7 se añadieron las rectas con las pendientes características más cercanas a los valores teóricos. Para esto, se calculó cada pendiente entre dos puntos consecutivos.

Las simulaciones de cada una de las componentes permiten verificar lo que predice cada uno de los resultados teóricos. Para cada uno de los valores de  $T$  correspondientes se puede verificar el valor del coeficiente utilizado (como así también la relación indicada para el caso de bias instability). Sin embargo, al tratar con todas las componentes en simultáneo se nota como algunas acaban predominando más que otras. Por ello es útil observar la PSD. En la PSD de la Fig. N°6 se aprecia que los ruidos mejor distinguibles son del tipo drift rate rap, angle random walk y quantization noise. La Fig. N°7



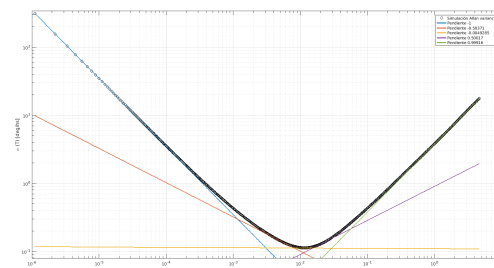


(a) PSD: contribución de todas las componentes



(b) Allan deviation: contribución de todas las componentes

**Figura 6:** Simulación de la contribución de todas las componentes



**Figura 7:** Allan deviation de la contribución de todas las componentes junto con las rectas características.

expone este resultado con una mejor mayor aproximación a lo largo del tiempo promedio  $T$  de las rectas características, principalmente para “el” quantization noise y “el” drift rate ramp.

Las hojas de datos de los giróscopos proporcionan los valores de algunos de los coeficientes de ruido. De los cinco coeficientes que se han mostrado, es difícil en la práctica poder determinarlos a todos, y por ello los fabricantes sólo especifican algunos.

Se cuenta con la hoja de datos de dos giróscopos de distintas tecnologías: MEMS y Ring Laser Gyro (RLG). De acuerdo a estas, se tiene que:

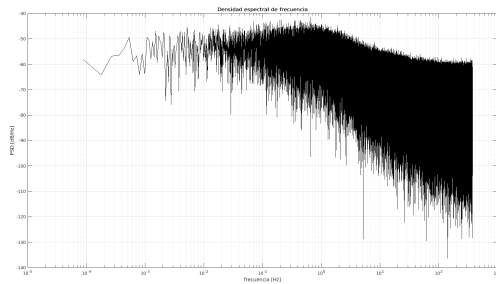
#### ■ MEMS

- Bias instability  $18 \text{ deg/hs}$ .
- Noise density  $0,03 \text{ deg/} \left( \text{seg} \sqrt{\text{Hz}} \right)$ . (Se utiliza este valor para el coeficiente de angle random walk).

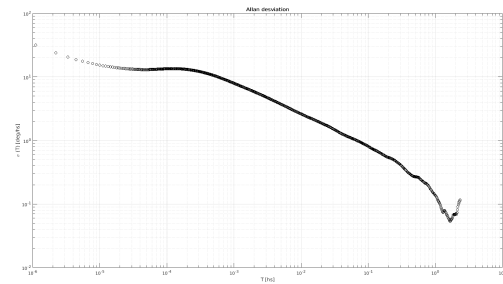
#### ■ RLG

- Angle random walk no debe exceder  $0,015 \text{ deg}/\sqrt{\text{hs}}$ .
- Quantization noise  $1,62 \text{ rad} = 92,82 \text{ deg}$

En las Figs. N°8 y N°9 se observa como predomina el coeficiente de bias instability sobre angle random walk. De hecho, en la Fig. N°9 la recta con pendiente  $-1/2$  se situó en una región que carece de sentido. Para obtener el coeficiente ARW se debe hacer el cálculo sobre alguno de los puntos a la izquierda de la región plana.



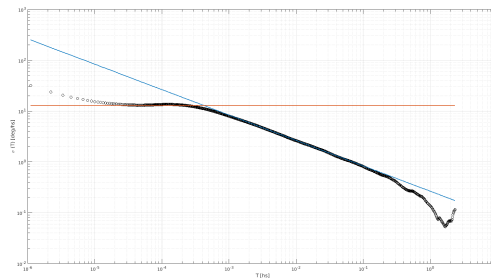
(a) PSD



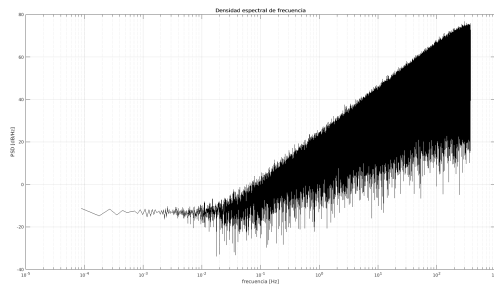
(b) Allan deviation

**Figura 8:** Simulación del sensor de tecnología MEMS

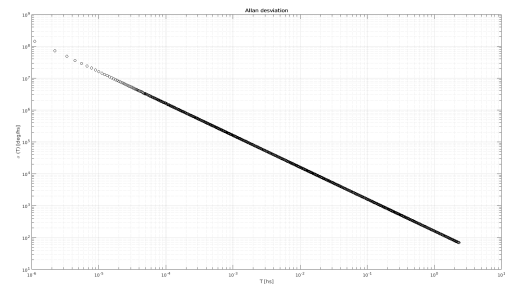
En las Figs. N°10 y N°11 también se observa como el coeficiente de quantization noise predomina sobre ARW, a tal punto que en los gráficos de Allan deviation no se aprecian puntos correspondientes a una pendiente de  $-1/2$ . En ambos casos, al ser un coeficiente mucho mayor que el otro, el primero predominará en la gráfica de Allan.



**Figura 9:** Simulación del sensor de tecnología MEMS - Allan deviation con rectas

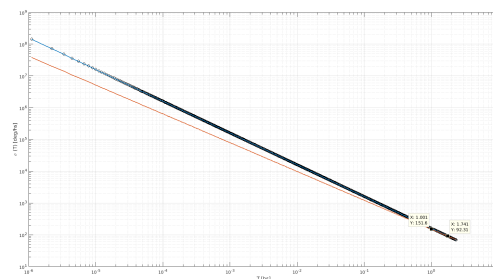


(a) PSD

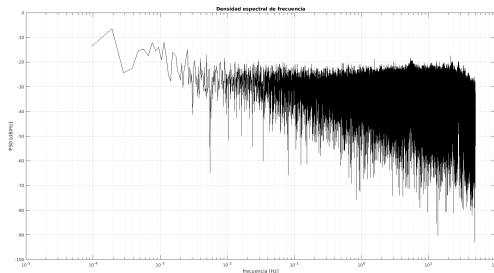


(b) Allan deviation

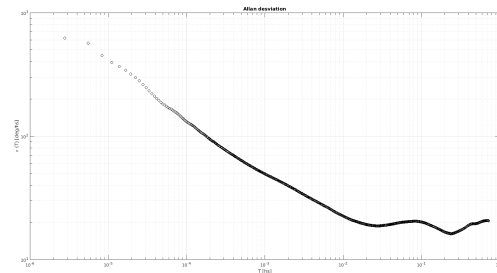
**Figura 10:** Simulación del sensor de tecnología RLG



**Figura 11:** Simulación del sensor de tecnología RLG - Allan deviation con rectas



(a) PSD: lecturas eje x



(b) Allan deviation: lecturas eje x

Figura 12: Lectura del eje x

## 4. ANÁLISIS DE DATOS DE UN GIRÓSCOPO

Se cuenta con lecturas del giróscopo I3DM-GX3-35 de tecnología MEMS. Estas lecturas se realizaron con el dispositivo adquiriendo datos en reposo; es decir, sin movimiento. Se asume que los datos se encuentran en unidades de  $rad/s$ . Dado que el código construido se concibió para operar en  $deg/s$ , los datos se multiplican por un factor de  $180/\pi$ .

En las figuras N°12, N°14 y N°16 se muestran las PSD y “el” Allan deviation para las lecturas de cada eje ( $x$ ,  $y$  y  $z$ ) y en las figuras N°13, N°15 y N°17 se muestra el Allan deviation junto con las rectas características.

De acuerdo a las gráficas de PSD, las componentes que mejor se exhiben son principalmente angle random walk y en menor medida, bias instability. Claramente esto se verifica en cada uno de los gráficos de Allan deviation. En las figuras donde se añaden las rectas, se aprecia como las rectas con pendientes cercanas a  $-1/2$  y  $0$  se *unen* a los puntos del gráfico en las regiones que son de esperar, mientras que para las restantes pendientes las rectas se adhieren a puntos que carecen de sentido.

De las figuras N°13, N°15 y N°17 se puede inferir el valor de algunos de los coeficientes de las componentes que se distinguen; es decir,  $Q$  y  $B$  para los tres ejes, y  $Q_z$  solo para el eje  $x$ . Los valores inferidos se muestran en la tabla N°3.

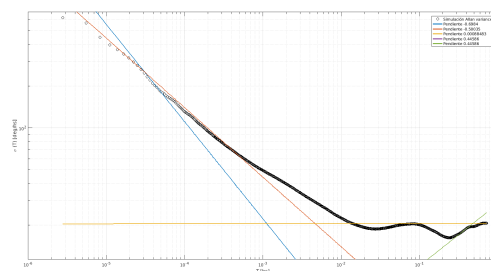
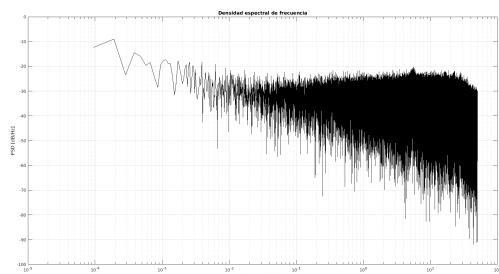
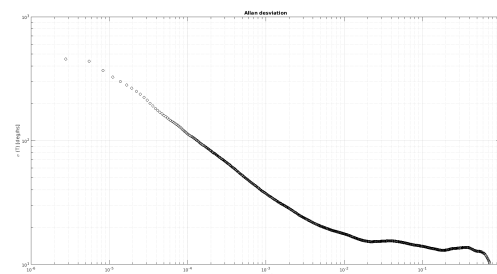


Figura 13: Allan deviation del eje x junto con las rectas características

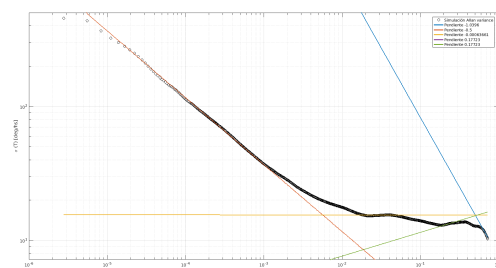


(a) PSD: lecturas eje y

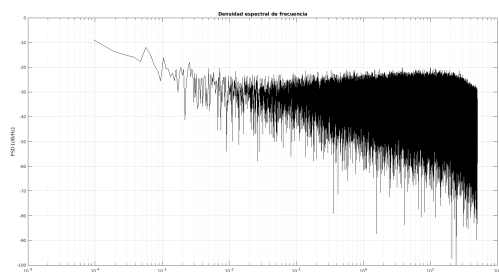


(b) Allan deviation: lecturas eje y

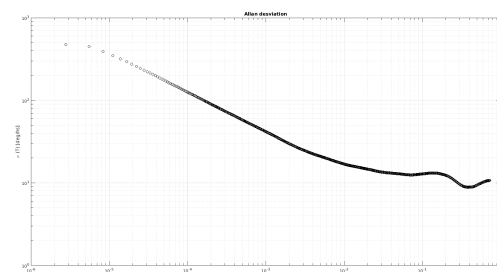
**Figura 14:** Lectura del eje y



**Figura 15:** Allan deviation del eje y junto con las rectas características

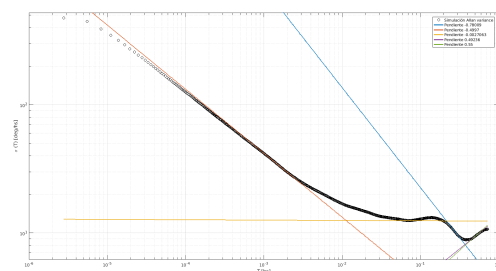


(a) PSD: lecturas eje z



(b) Allan deviation: lecturas eje z

**Figura 16:** Lectura del eje z



**Figura 17:** Allan deviation del eje z junto con las rectas características

Instituto Bailseiro	Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas	TP N°1 Página: 14 de 16
------------------------	---	----------------------------

**Tabla 3:** Valores de los coeficientes registrados

Tipo de ruido	Coeficiente	Eje x	Eje y	Eje z
Quantization noise [ $deg$ ]	$Q_z$	0,7528	-	-
Angle random walk [ $deg/\sqrt{hs}$ ]	$Q$	1,4	-	-
Bias instability [ $deg/hs$ ]	$B$	30,75	23,34	18,81

<p><b>Instituto Bailseiro</b></p>	<p><b>Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas</b></p>	<p>TP N°1 Página: 15 de 16</p>
---------------------------------------	--	------------------------------------

## 5. CONCLUSIONES

<b>Instituto Bailseiro</b>	<b>Elementos de matemáticas aplicada para aplicaciones tecnológicas</b>	TP N°1 Página: 16 de 16
--------------------------------	---	----------------------------

## 6. REFERENCIAS

- [1] Naser El-Sheimy, Haiying Hou, Xiaoji Niu, 2008, “Analysis and Modeling of Intertial Sensors Using Allan Variance”.
- [2] IEEE, std 952-1997,2003 “IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros”.
- [3] Juan Jurado, 2019 “Tools for Inertial Allan Variance Analysis and Simulation”.  
<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/61777-tools-for-inertial-allan-variance-analysis-and-simulation>