Elementos de matematica aplicada

Probabilidad

Definición: Supongamos un experimento E, que tiene un conjunto de salidas que pueden ser discretas o continuas. Consideramos en un principio el de salidas discretas s_n. El número completo de resultados es el conjunto universal S

$E \rightarrow \text{conjunto de salida} \rightarrow s_1, s_2 \ldots, s_n$

El número completo de resultados $\rightarrow$ S

Ej: Moneda que se tira 3 veces

Posibilidades: $a \quad a$

ξ_1CCC ξ_5NCC ξ_2CCN ξ_6NCN ξ_3CNC ξ_7NNC ξ_4CNN ξ_8NNN $\rightarrow$ 8 elementos $S = [\xi_1, \ldots \xi_8]$

Si bien tengo el conjunto universal S, se podrían definir subconjuntos.

Eventos $\rightarrow$ Subconjuntos del conjunto S.

En este ejemplo se podría definir:

evento A $\rightarrow$ A={ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4}

evento B "solo dos N" $\rightarrow$ A={ξ_4,ξ_6,ξ_7}

Definición axiomática de la probabilidad:

Axioma 1) Pr(A) $\geq$ 0

Axioma 2) Pr(S) = 1

Axioma 3) si (A⋂B) = ∅ $\rightarrow$ P(A⋂B) = P(A) +P(B)

A partir de estos axiomas se pueden demostrar los siguientes corolarios:

C1) P(A') = 1-P(A)

C2) P($A \cup B$) = P(A)+P(B)-P($A \cap B$)

Matriz de probabilidad conjunta

	B1	B2	Bm	
A1	P(A1∩ B1)			P(A1)
A2	P(A2∩ B1)			P(A2)
Am				
	P(B1)	P(B2)		

Probabilidad de dos eventos independientes

$$P(A_i/B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)}$$

$$P(B_j/A_i) = \frac{P(B_j \cap A_i)}{P(A_i)}$$

Si A y B son independientes, si P(A∩B) = P(A) P(B)

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

Ej: cuatro pelotitas dos negras y dos rojas. Hago dos extracciones. A⟶Extracción 1, B⟶ Extracción 2 (sin reposición).

A\B	R	N	
R	2/4 1/3 = 1/6	2/4 2/3 = 1/3	1/2
N	2/4 2/3 = 1/3	2/4 1/3 = 1/6	1/2
	1/2	1/2	

Como 1/2.1/2 no es 1/6 los eventos no son independientes (no se cumple P(A∩B) = P(A) P(B))

Ej: Si ahora repetimos el anterior pero con reposición

A\B	R	N	
R	1/2 1/2 = 1/4	1/2 1/2 = 1/4	1/2
N	1/2 1/2 = 1/4	1/2 1/2 = 1/4	1/2
	1/2	1/2	

Probabilidad continua o distribución de probabilidad

$$F_x(\theta) \to P(X \leq \theta)$$

$F_x(\theta) \to 0 \qquad \theta \to -\infty$

$F_x(\theta) \to 1 \qquad \theta \to +\infty$

$\dot{F}_x(\theta) \geq 0$

$f_x(\theta) = \frac{d}{d\theta}(F_x(\theta))$

Grafiquin de funcion de proabilidad

P($x_0 < x < x_0 + dx$) = $f_x(x_0)$ dx

Valor esperado de X:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$
$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 F_x(x) dx$$
$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) F_x(x) dx$$

Varianza:

$V(x) = E[(x - E(x))^2] = E(x^2) - (E(x))^2$

Función característica:

$$\psi_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{j\omega x} dx$$

$\frac{d\psi_x}{d\omega}(\omega = 0) = (\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) e^{j\omega x} dx)(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} jxf(x)dx$

$\frac{d^2\psi_x}{d\omega^2}(\omega = 0) = (\int_{-\infty}^{\infty} (jx)^2 f_x(x) e^{j\omega x} dx)(\omega = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} (jx)^2 f(x)dx$

$E(x) = \frac{1}{j}\left(\frac{d\psi_x}{d\omega}\right)\Big|_{\omega=0}$

$E(x^2) = \frac{1}{j^2}\left(\frac{d^2\psi_x}{d\omega^2}\right)\Big|_{\omega=0}$

Distribución Gaussiana

$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m_x)^2}$

$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xF_x(x)dx = m_x$

$E((x - m_x)^2) = \sigma^2$

Variables random multiples

$F_{x,y} = P(X \leq x, Y \leq y)$

$F_{xy}(-\infty, -\infty) = 0$

$F_{xy}(\infty, \infty) = 1$

F_{xy} Creciente en X y en Y

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{xy}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

P(x,y) $\in$ cuadradito de x+dx por y+dy $\rightarrow \int_{x_0}^{x_0+dx} \int_{y_0}^{y_0+dx} f_{xy}(x,y)dxdy$

$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dy$

$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y)dx$

$$f_x\Big|_y(x) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_y(y)}$$

$$f_y\Big|_x(y) = \frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)}$$

X, Y son independientes si $f_{xy}(x,y) = f_x x f_y y$

E(X.Y) = $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_{xy}(x,y)dxdy$

si X,Y son independientes $\rightarrow E(x.y) = \int xf_x dx \int yf_y dy = E(X)E(Y)$

Si E(XY) = E(X)E(Y) $\Rightarrow$ X,Y no son correlacionados

X,Y independientes $\Rightarrow$ E(XY) = E(X)E(Y) $\Rightarrow$ X,Y son no correlacionados. La relacion inversa no es siempre valida, es decir si son no correlacionados, pueden no ser independientes.

Covarianza de X,Y = E((x-E(x)(y-E(y))

Es una definicion importante para saber cuan correlacionado esta una cosa con otra (x con y)

ρ = coef. de correlación = $\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(x9)}\sqrt{V(y)}} = \dfrac{E((x-m_x)(y-m_y))}{\sqrt{E(x-m_x)^2}\sqrt{E(y-m_y)^2}}$

Algunos casos:

Y=X $\rightarrow \rho = 1$

Y=-X $\rightarrow \rho = -1$

E(XY)=E(X)E(Y)

$E(XY - m_x Y - m_y X + m_x m_y) \rightarrow \rho = 0$

Suma de variables independientes

Z = X+Y

$P(z < Z < z + dz) = \int \int f_x(x) f_y(y) dx dy$

y = Z-X

= $\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z-x) dx\right] dz$

$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(X) f_y(z-x) dx$

Otra forma de calcular la distribución de probabilidad de la suma(creo q dijo) independientes:

F es la transforada de fourier

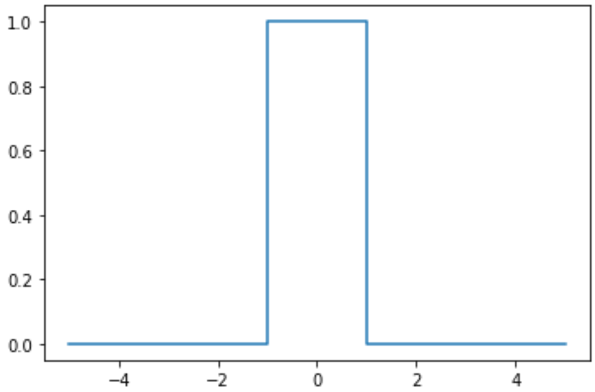
$$F(f(z)) = F(f_x) F(f_y)$$

Ejemplo con funciones cuadraditas

In [2]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

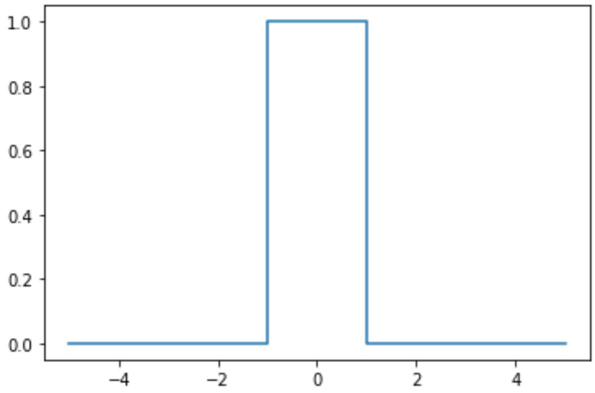
In [16]:
```
X = [0, 0, 1,  1,0,0]
x = [-5,-1 , -1,1, 1 ,5]
plt.plot(x,X)
```

Out[16]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f4e14c92f98>]



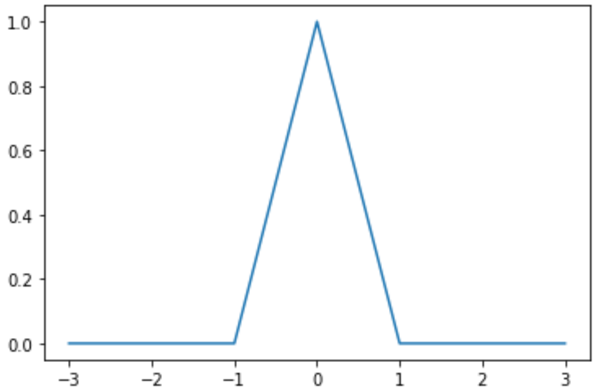
In [9]:
```
Y = [0, 0, 1,  1,0,0]
x = [-5,-1 , -1,1, 1 ,5]
plt.plot(x,Y)
```

Out[9]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f4e15012ba8>]



In [12]:
```
X = [0, 0, 1,0,0]
x = [-3,-1 , 0 , 1 ,3]
plt.plot(x,X)
```

Out[12]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f4e14cd5a20>]



y = g(x) X aleatoria con distribución $f_x(x)$

x = h(y) (es invertible)

$$f_x(x)dx = f_y(y)|dy|$$

$$f_y dy = \left|\frac{dx}{dy}\right| f_x(h(y)) = |h'(y)|\, f_x(h(y)) = f_y(y)$$

Ejemplito y = K X = g(x) $f_x = N(0, \sigma^2)$

$$x = \frac{1}{K}y = h(y)$$

$$f_y = \frac{1}{|K|}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-y^2 2k^2\sigma^2}$$

$$f_y = N(0, (K\sigma)^2)$$

$$y = x^2 \; f_x = N(0, \sigma^2)$$

$$X = \{ \begin{matrix} \sqrt{y} & x \geq 0 & dy = 2xdx \\ -\sqrt{y} & < 0 & dx = dy/2x \end{matrix}$$

$$f_y(y_0)dy = f_x(\sqrt{y_0})\frac{1}{2\sqrt{y_0}}dy +$$

$$f_y(y) = \{ \begin{matrix} 1/\sqrt{y} f_x(\sqrt{y}) & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{matrix}$$

Normal multivariable

Vector de variables aleatorias

$$X = [X_1, \ldots.., X_n]^T \; m = [m_1, \ldots, m_n]^T \; \sigma = [\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$$

Matriz de covarianza $C = \begin{bmatrix} E[(X_1 - m_1)^2] & E[(X_1 - m_2)^2] & \ldots \\ \vdots & & \\ \vdots & & E[(X_n - m_n)^2] \end{bmatrix}$

$$f_x(X) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}} e^{-1/2[x-m]^T C^{-1}[x-m]}$$

Caso 2 variables:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$|C| = (1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$C^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & -\rho/\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho/\sigma_1\sigma_2 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

$$f_{x_1 x_2} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{2\rho(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]}$$

si $\rho = 0$ x_1 y x_2 no correlacionadas

$\rightarrow f_{x_1x_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$

= $\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}\right]} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{-1}{2}\left[\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$

= $f_{x_1}(x_1) + f_{x_2}(x_2)$

$\Rightarrow x_1$,x_2 son independientes

Procesos aleatorios (22/10)

Proceso estocástico:

- Si el tiempo es variable y el numero de experimento es variable, entonces es un proceso estocástico.
- Si el tiempo es variable y el experimento es uno fijo, es una visualización de la realización concreta del proceso estocástico.
- Si el tiempo es fijo y el experimento es varialbe, entonces vemos la variable aleatoria (y tiene una distribución de probabilidades sobre el valor que toma para un tiempo dado)

Funciones de distribución de probabilidad de 1er y 2do orden

$x(t,E) = x(t)$ es un oricesi estocástico (E es el número de experimento)

$F(x,t) = P(X(t) \leq x)$ Probabilidad de primer orden

Función de probabilidad conjunta:

$$F(X_1,X_2,t_1,t_2) = P(x(t_1) < x_1, x(t_2) < x_2)$$

Funcion de densidad de probabilidad:

$$f(x,t) = \frac{dF(x,t)}{dx}$$

$P(x_0 < X(t) < x_0 + dx) = f(x,t_0)dx$ Para esto sirve la función densidad de probabilidad

$f(x_1,x_2,t_1,t_2) = \frac{d^2F(x_1,x_2,t_1,t_2)}{dx_1dx_2}$

Valores estadísticos de 1er orden

Media: $m_x(t) = E(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x,t) dt$

Valor cuadrático medio: $E(x^2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,t) dt$

Varianza en zona: $E((x - E(x))^2) = \sigma_x^2 = E(x^2(t)) - E^2(x(t))$

Valores estadísticos de 2do orden

Autocorrelación:

dos variables aleatorias $X(t_1)$, $X(t_2)$ (son dos set de datos de la variable x en muchos experimentos para un tiempo fijo t_1 y t_2)

La correlación entre los valores de la variable en t_1 y t_2 es:

$$R(t_1, t_2) = E(x(t_1).\, x(t_2))$$

Autocovarianza:

$$C(t_1, t_2) = E\left([x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)]\right)$$
$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m_x(t_1) m_x(t_2)$$

Si el valor de la media es cero, coinciden la autocovarianza con la autocorrelación.

Suponiendo dos procesos distintos X e Y (prender la radio y encender la calefa por ejemplo)

Correlación cruzada:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E(x(t_1), y(t_2))$$

Covarianza cruzada:

$$C_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - E(x(t_1))E(y(t_2))$$

> 2 procesos se dicen que son icorrelados: si $\forall\, t_1, t_2$: $R_{xy}(t_1, t_2) = E(x(t_1).\, E(y(t_2)) \Rightarrow C_{xy}(t_1, t_2) = 0$

Procesos estacionarios

En sentido estricto. $\longrightarrow$ Las estadísticas de cualquier orden del proceso no se ven afectadas por traslaciones en el tiempo.

$x_1 = x(t_1) \quad x_1' = x(t_1 + \tau) \quad f_{x_1} = f_{x_1'} \quad f_{x_1 x_2} = f_{x_1' x_2'} \quad f_{x_1 x_2 x_3} = f_{x_1' x_2' x_3'}$

$x_2 = x(t_2) \quad x_1' = x(t_1 + \tau) \quad f_{x_2} = f_{x_2'} \quad f_{x_1 x_3} = f_{x_1' x_3'}$

$x_k = x(t_k) \quad x_1' = x(t_1 + \tau) \quad f_{x_k} = f_{x_k'}$

EN sentido amplio:

- Las estadísticas de primer orde no dependen del tiempo
- Las varialbes estadísticas de 2do orden no depende de la diferencia de tiempo $t_1 - t_2 = \tau$

$m_x(t) = m_x$

$\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2$

$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau)$

$C_x(t_1, t_2) = C_x(\tau)$

$R_x(\tau) = E(x(t)x(t-\tau)) = E(x(t)x(t+\tau))$

Propiedades de $R_x(\tau)$ de procesos estacionarios en sentido amplio:

- $R_x(\tau)$ par $\rightarrow R(\tau) = R_x(-\tau)$
- Maximo $R(\tau) = R(0)$; $R(0) = E(x^2(t))$

Dos procesos $X(t), Y(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio si:

$E(x(t)) = cte$

$E(y(t)) = cte \qquad R_{xy} = E(x(t)y(t+\tau))$

$R_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau)$

$|R_{xy}(\tau)| = \sqrt{R_x(0)R_y(0)}$

Ergodicidad

Se dice que un proceso $x(t)$ es ergódico, si todos sus parametros estadísticos se pueden determinar con una única realización del proceso (t, E_i).

Un sistema tiene *Ergodicidad respecto a la media* si se cumple:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} xdx$$

Un sistema es *Ergodico respecto a la varianza* si:

$E(x^2(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x)dx = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2 dx$

Ergódica respecto a la autocorrelación: (No necesito conocer la funcion de probabilidad $E(x(t)x(t+\tau)) =$

Ejemplo:

$X(t) = Asen(\omega t) \qquad A = N(0, \sigma^2) \qquad \omega = cte$

Tomo 1 muestra:

$A = A_1$

$X_A(t) = A_1 sen(\omega t)$

$R_{TX_A}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A_1 sen(\omega t) A_1 sen(\omega t + \tau) dt$ (el subindice indica que se realiza en respecto al tiempo o algo así dijo)

$R_T(\tau) = \frac{A_1^2}{2} cos(\omega \tau)$

$R_x(t_1, t_2) = E(x(t_1)x(t_2))$

$= E(A.\, sen(\omega t_1), A.\, sen(\omega t_2))$

$R_x(t_1, t_2) = \sigma^2 A.\, sen(\omega t_1) A.\, sen(\omega t_2)$

vemos que $R(t_1, t_2) \neq R_x(t_1 - t_2)$

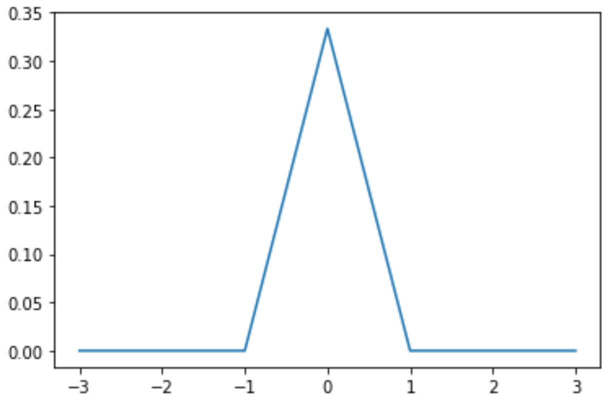
y ademas $R_T(\tau) \neq R(x_1, x_2)$ no es ergódico

Ejemplo: Onda cuadrada con variacion de amplitud cada 1 segundo. donde la amplitud tiene una densidad uniforme entre -1 y 1 y la probabilidad de comienzo en un tiempo t es uniforme entre -1 y 1.

$R_X(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_A(t) x_A(t + \tau) dt$

In [8]:
```
X = [0, 0, 1/3,0,0]
x = [-3,-1 , 0 , 1 ,3]
plt.plot(x,X)
```

Out[8]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f2990769048>]



Clase 29/08

$R_x(\tau)$

Si tiene media cero: $R_0(\tau) = \sigma^2(x)$

Densidad espectral de potencia o relación de Wiener-Khinechinel $S_x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$

$\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt = \bar{p}$

Por teorema de párceval:

$\int_{-j\omega}^{j\omega} v^2(\omega)d\omega$

Teniendo 3 realizaciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$

Queremos calcular el valor esperado para alguna de las realizaciones:

$$E\left(\frac{1}{T}|F(x_T(t))|^2\right) = S_x(j\omega)$$

(utilizo el teorema de párceval con la transformada de Fourier

Cuando t$\rightarrow$ ∞

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = S_x(j\omega)$$

$$E\left(\frac{1}{T}|F(x_T(t))|^2\right) = S_x(j\omega) = E\left[\frac{1}{T}\int_0^T X(t)e^{-j\omega t}dt\int_0^T X(s)e^{j\omega s}ds\right]$$

$= F.F^*$

$= \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^T E\left(x(t)x(s)\right)e^{-j\omega(t-s)}dsdt$

SI el proceso es estacionario el producto solo es funcion de la diferencia de tiempos:
$E\left(x(t)x(s)\right) = R_x(t-s) = R_x(\tau)$

$\tau = t - s \qquad ds = -dt$

$\rightarrow \frac{-1}{T}\int_0^T\int_t^{t-T} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}$

$= \frac{1}{T}\int_T^0\int_0^{\tau+T} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau} + \frac{1}{T}\int_0^T\int_\tau^T R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}$

$\frac{1}{T}\int_T^0(\tau+T)R_x(\tau)e^{-j\omega\tau} + \int_0^T(T-\tau)R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}$

$$E\left(\frac{1}{T}|F(x_T(t))|^2\right) = \int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$\lim_{T\to\infty} E\left(\frac{1}{T}|F(x_T(t))|^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = S_x(j\omega)$$

Este límite va a existir en los procesos físicos porque estan límitados para algun umbral de potencia (esto es valido para procesos estacionarios).

Ej: $R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$

$S_x(j\omega) = F(R_x(\tau)) = \dfrac{2\sigma^2\beta}{\omega^2 + \beta^2}$

$s = j\omega$

$s^2 = -\omega^2$

Ruido blanco (wn):

$S_{WN}(j\omega) = A$

$R_{WN}(\tau) = A\delta(\tau)$ (Función impulso)

$F^{-1}(S_x(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = R_x(\tau)$

$R_x(0) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_x(j\omega)d\omega = \sigma^2(x)$

Band limited white noise

$S_{BWN} = \begin{matrix} A & \text{si } |\omega| < 2\pi W \\ 0 & \text{si } |\omega| > 2\pi W \end{matrix}$

$R_{BWN} = 2WA\dfrac{sin(2\pi W\tau)}{2\pi\omega\tau}$ (Función sinc)

Gauss-markov Gaussiano

$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\beta|\tau|}$

$S_x(j\omega) = \dfrac{2\sigma^2\beta}{\omega^2 + \beta^2}$

Si la distribución de la variable aleatoria es gaussiana $\Rightarrow R_x(\tau)$ Define completamente el proceso (Es decir se puede cualquier densidad de probabilidad de cualquier orden)

Ej:

$R_x(\tau) = 100e^{-2|\tau|}$ $\rightarrow$ todas las densidades de probabilidades son gausianas.

$x_1 = x(0)$

$x_2 = x(1/2)$

$x_3 = x(1)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow C_x = \begin{bmatrix} E(x_1^2) & E(x_1x_2) & E(x_1x_3) \\ E(x_1x_2) & E(x_2^2) & E(x_2x_3) \\ E(x_1x_2) & E(x_1x_2) & E(x_3^2) \end{bmatrix}$$

$f(\bar{x}) = \dfrac{1}{2\pi^{3/2}|C_x|^{1/2}} e^{-1/2x^T C_x x}$

$C_x = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1/2) & R_x(1) \\ R_x(1/2) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$

$C_x = \begin{bmatrix} 100 & 100e^{-1} & 100e^{-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$

Sistemas LTI

Respuesta al impulso: $h(t)$

$y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\eta)h(t-\eta)d\eta$

$F_y(\omega) = F_x(\omega).\, H(\omega)$ (propiedad de la transformada)

$R_y(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * R_x(\tau)$

$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$

$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$