冲激响应求解举例

求系统 $\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}t}+2f(t)$ 的冲激响应。

解：将$f(t)\to\delta(t)$， $y(t)\to h(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}\,h(t)}{\mathrm{d}t}+3h(t)=\frac{\mathrm{d}\,\delta(t)}{\mathrm{d}t}+2\delta(t)$$

求特征根 $\lambda^2+4\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_1=-1,\lambda_2=-3$

$n=2,m=1,n>m$ $h(t)$中不包含冲激项

带$\varepsilon(t)$

冲激响应 $h(t)=(C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$

两种求待定系数方法：•求0_+法 •奇异函数项相平衡法

法一：求0_+值确定系数

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=\frac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}t}+2f(t)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2}=a\delta'(t)+b\delta(t)+r_1(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}\,h(t)}{\mathrm{d}t}=a\delta(t)+r_2(t)\\ h(t)=r_3(t)\end{cases}$$

$a=1$

$b=-2$

$\therefore\quad h(0_+)=1\;,\quad h'(0_+)=-2$

代入 $h(t)=(C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$ ，确定系数C_1,C_2，得

$$h(t)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

法二：用奇异函数项相平衡法求待定系数

$$h(t)=\left(C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

$$h'(t)=\left(C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\delta(t)+\left(-C_1\mathrm{e}^{-t}-3C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$
$$=\left(C_1+C_2\right)\delta(t)+\left(-C_1\mathrm{e}^{-t}-3C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

$$h''(t)=\left(C_1+C_2\right)\delta'(t)+\left(-C_1-3C_2\right)\delta(t)+\left(C_1\mathrm{e}^{-t}+9C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

将$h(t),h'(t),h''(t)$代入原方程

$$\left(C_1+C_2\right)\delta'(t)+\left(3C_1+C_2\right)\delta(t)+0\cdot\varepsilon(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$$

根据系数平衡，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=1\\3C_1+C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\dfrac{1}{2}\\C_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$h(t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

法三：线性时不变性质法

求系统 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\dfrac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=\dfrac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}t}+2f(t)$ 的冲激响应。

解：设 $h_1(t)$ 满足简单方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 h_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}\,h_1(t)}{\mathrm{d}t}+3h_1(t)=\delta(t)$$

$$h_1(t)=\left(C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t) \qquad h_1'(0_+)=1 \qquad h_1(0_+)=0$$

将边界条件代入 $h_1(t)$ 式，解得 $C_1=1/2$， $C_2=-1/2$，

$$h_1(t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$

则由系统的线性时不变特性

$$h(t)=\frac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t}+2h_1(t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t}\right)\varepsilon(t)$$