0-和0+初始值举例1

例1：描述某系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$$

已知 $y(0-)=2$，$y'(0-)=0$, $f(t)=\varepsilon(t)$，求$y(0+)$和$y'(0+)$

解：将输入 $f(t)=\varepsilon(t)$代入上述微分方程得

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta(t)+6\varepsilon(t)$$

利用系数匹配法分析：

上式对于 $t=0-$也成立，在 $0-<t<0+$ 区间等号两端 $\delta(t)$项的系数应相等。

由于等号右端为$2\delta(t)$，故 $y''(t)$ 应包含冲激函数，从而 $y'(t)$ 在 $t=0$处将发生跃变，即 $y'(0+)\neq y'(0-)$

但 $y'(t)$不含冲激函数，否则$y''(t)$ 将含有 $\delta'(t)$ 项。由于 $y'(t)$中不含 $\delta(t)$ ，故$y(t)$在$t=0$ 处是连续的（没有阶跃）。

$$y(0+)=y(0-)=2$$

故

对式(1)两端积分有

$$\int_{0-}^{0+} y''(t)dt + 3\int_{0-}^{0+} y'(t)dt + 2\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 2\int_{0-}^{0+} \delta(t)dt + 6\int_{0-}^{0+} \varepsilon(t)dt$$

由于积分在无穷小区间 $[0-,0+]$ 进行的，且 $y(t)$ 在 $t=0$ 连续，故

$$\int_{0-}^{0+} y(t)dt = 0, \int_{0-}^{0+} \varepsilon(t)dt = 0$$

于是由上式得

$$[y'(0+) - y'(0-)] + 3[y(0+) - y(0-)] = 2$$

由于: $y(0+) = y(0-) = 2$，所以

$$y'(0+) - y'(0-) = 2$$

$$y'(0+) = 2 + y'(0-) = 2$$