§2.2 系统微分方程的经典解

- 微分方程的齐次解和特解
- 微分方程的全解
- 关于微分方程的初始值

2 .任意信号作用下的零状态响应

根据h(t)的定义：

由时不变性：

由齐次性：

由叠加性：$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$ 卷积积分

研究对象： LTI系统

研究步骤：

- 建立方程

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mf^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1f^{(1)}(t)+b_0f(t)$$

- 求解方程

与数学求解不同，卷积的引入

研究范围： 时域分析 t

研究方法： 卷积积分

一、微分方程的经典解

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mf^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1f^{(1)}(t)+b_0f(t)$$

微分方程的经典解：完全解 = 齐次解 + 特解。

1. 齐次解

由特征方程→求出特征根→写出齐次解形式

$$y_h(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}$$

***n* 阶常系数齐次线性方程 的通解情况表：**

特征方程 $\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+p_1\lambda+p_0=0$	*n* 阶常系数齐次线性方程 $y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_1y'+p_0y=0$
(i) 单实根 λ	一项：$Ce^{\lambda x}$
(ii) 一对单复根 $\alpha\pm i\beta$	两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
(iii) k 重实根 λ	k 项：$e^{\lambda x}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
(iv) k 重复根 $\alpha\pm i\beta$	$2k$ 项：$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x$ $(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

注意重根情况处理方法。

举例

2. 特解

根据微分方程右端函数式形式，设含待定系数的特解函数式→**代入原方程**，比较系数定出特解。

举例

激励$f(t)$	响应$y(t)$的特解$y_p(t)$
F(常数)	P(常数)
t^m	$P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0$(特征根均不为0） $t^r (P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0)$(有$r$重为0的特征根）
$\mathrm{e}^{\alpha t}$	$P\mathrm{e}^{\alpha t}$(α不等于特征根） （$P_1 t + P_0$)$\mathrm{e}^{\alpha t}$(α等于特征单根） （$P_r t^r + P_{r-1} t^{r-1} + \cdots + P_0$)$\mathrm{e}^{\alpha t}$($\alpha$等于$r$重特征根）
$\cos(\beta t)$ $\sin(\beta t)$	$P_1 \cos(\beta t) + P_2 \sin(\beta t)$(特征根不等于$\pm \mathrm{j}\beta$)

3. 全解

完全解 = 齐次解 + 特解

由初始值定出齐次解中的待定常数C_i。

举例

- **齐次解**的函数形式仅与系统本身的特性有关，而与激励$f(t)$的函数形式无关，称为系统的**固有响应**或**自由响应**；

- **特解**的函数形式由激励确定，称为**强迫响应**。

二. 微分方程的初始值

若输入$f(t)$是在t=0时接入系统，则确定待定系数C_i时用$t = 0_+$时刻的**初始值**，即$y^{(j)}(0_+)$ (j=0,1,2…, n−1)。

而$y^{(j)}(0_+)$包含了输入信号的作用，不便于描述系统的历史信息。

在t=0-时，激励尚未接入，该时刻的值$y^{(j)}(0_-)$反映了**系统的历史情况**而与激励无关。称这些值为**初始状态**或**起始值**。

通常，需要从已知的初始状态$y^{(j)}(0_-)$设法求得$y^{(j)}(0_+)$。

例1 例2

➢当微分方程右端含有冲激函数（及其各阶导数）时，响应y(t)及其各阶导数中，有些在t=0处将发生跃变。否则如果右端不含冲激函数时，不会跃变。