§3.2 周期信号的连续时间傅里叶级数

一、傅里叶级数的三角形式

1. 三角函数集

$$\{1，\cos(n\Omega t)，\sin(n\Omega t)，n=1,2,\ldots\}$$

在一个周期内是一个完备的正交函数集。

由积分可知 $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\Omega t)\cdot\sin(m\Omega t)dt = 0$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\Omega t)\cdot\cos(m\Omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\Omega t)\cdot\sin(m\Omega t)dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

2. 级数形式

设周期信号$f(t)$，其周期为T，角频率$\Omega=2\pi/T$，当满足狄里赫利(Dirichlet)条件时，它可分解为如下三角级数—— 称为$f(t)$的傅里叶级数

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

系数a_n , b_n称为**傅里叶系数**

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$b \quad C_i=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}\,t}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\,\mathrm{d}\,t} \quad (n\Omega t)\,\mathrm{d}\,t$$

可见， a_n 是n的偶函数， b_n是n的奇函数。

其他形式

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

将上式同频率项合并，可写为

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

式中，$A_0=a_0\quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\quad \varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$

可见：A_n是n的偶函数， φ_n是n的奇函数。

$$a_n=A_n\cos\varphi_n\quad b_n=-A_n\sin\varphi_n\quad n=1,2,\cdots$$

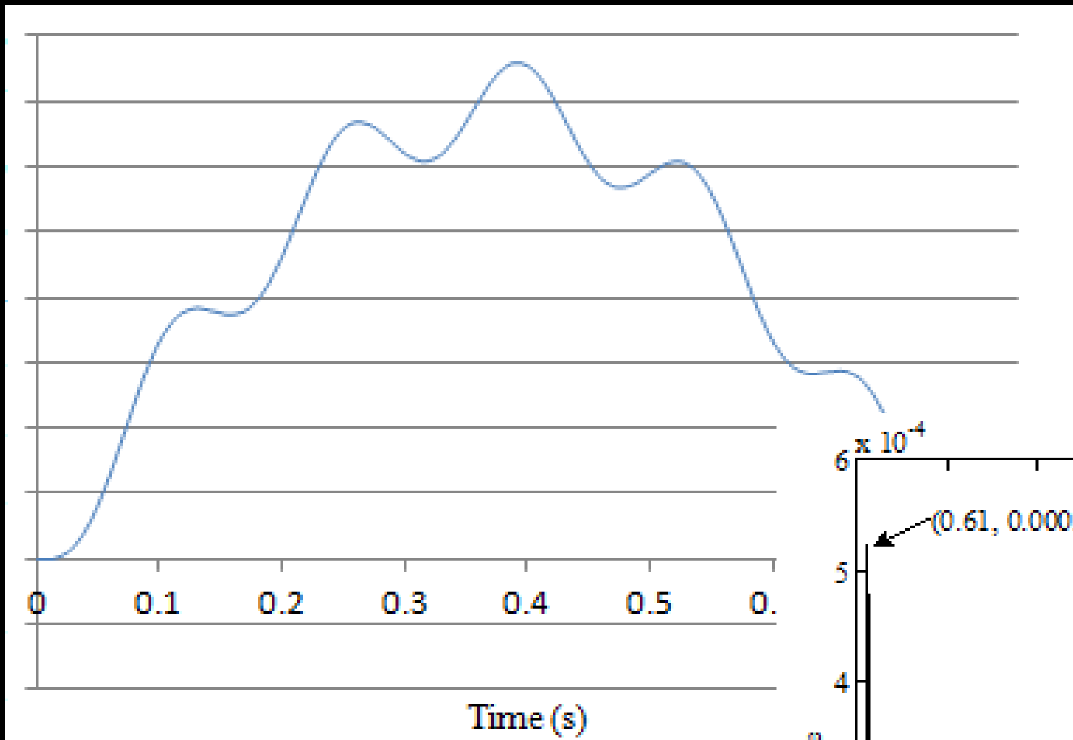
上式表明，周期信号可分解为直流和许多余弦分量。

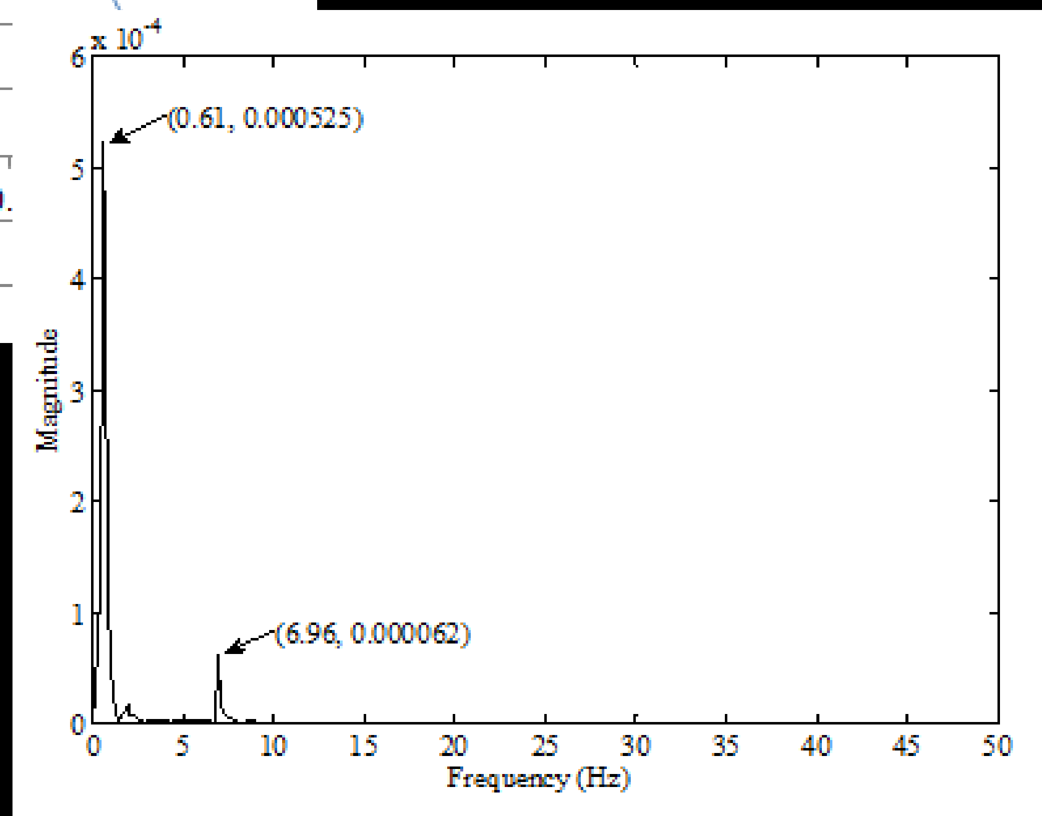
$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

- $A_0/2$为直流分量
- $A_1\cos(\Omega t+\varphi_1)$ 称为基波或一次谐波，其角频率与原周期信号相同
- $A_2\cos(2\Omega t+\varphi_2)$ 称为二次谐波，其频率是基波的2倍

一般而言，$A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$称为$n$次谐波。

视频解释


0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Time (s)


x 10^-4
Magnitude
Frequency (Hz)
(0.61, 0.000525)
(6.96, 0.000062)
0
1
2
3
4
5
6
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

二、傅里叶级数的指数形式

三角形式的傅里叶级数，含义比较明确，但运算常感不便，因而经常采用指数形式的傅里叶级数。

虚指数函数集 $\left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \right\}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$$

系数F_n称为**复傅里叶系数**

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t} \, \mathrm{d}t$$

推导

利用 $\cos x = (e^{jx} + e^{-jx})/2$ 可从三角形式推出：

傅里叶系数之间关系

$$F_n = |F_n| \mathrm{e}^{\varphi_n} = \frac{1}{2} A_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{j} b_n)$$

$$|F_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \qquad a_n = A_n \cos\varphi_n$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \qquad b_n = -A_n \sin\varphi_n$$

***n*的偶函数：** a_n , A_n , $|F_n|$

***n*的奇函数：** b_n , φ_n

三、奇、偶函数的傅里叶系数

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

1 . *f*(t)为偶函数——对称纵坐标

$$f(t) = f(-t)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

b_n=0，展开为余弦级数。

2 . *f*(t)为奇函数——对称于原点

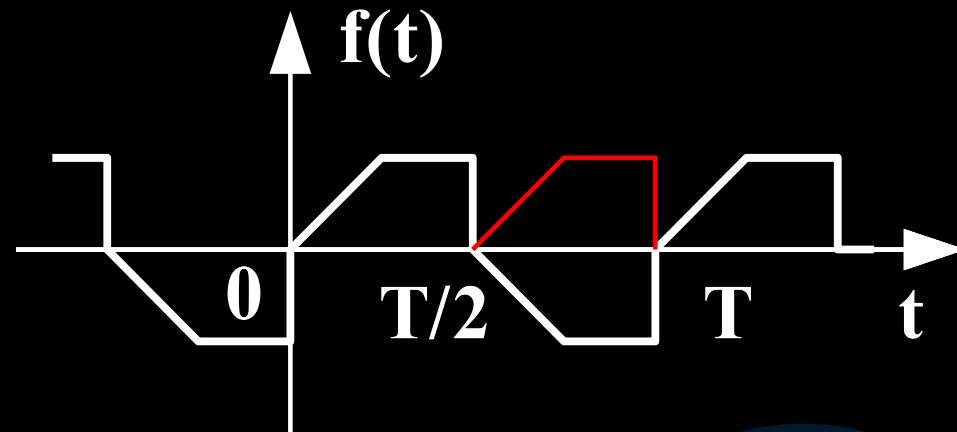
$$f(t) = -f(-t)$$

a_n=0，展开为正弦级数。

3 .f(t)为奇谐函数——$f(t) = -f(t \pm T/2)$

此时 其傅里叶级数中**只含奇次**谐波分量，而**不含偶次**谐波分量即

$a_0=a_2=\ldots=b_2=b_4=\ldots=0$



例

4. f(t)为偶谐函数——$f(t) = f(t \pm T/2)$

此时 其傅里叶级数中**只含偶次**谐波分量，而**不含奇次**谐波分量即

$a_1=a_3=\ldots=b_1=b_3=\ldots=0$