特解举例

例：给定微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}+3y(t)=\dfrac{\mathrm{d}\,f(t)}{\mathrm{d}t}+f(t)$

如果已知： $(1)\ f(t)=t^2;\ (2)\ f(t)=\mathrm{e}^t,$ **分别求两种情况下此方程的特解。**

解: (1)由于$f(t)=t^2$，故特解函数式为

$$y_{\mathrm{p}}(t)=P_2t^2+P_1t+P_0$$

这里，P_2，P_1，P_0，将此式代入方程得到

$$3P_2t^2+\left(4P_2+3P_1\right)t+\left(2P_2+2P_1+3P_0\right)=t^2+2t$$

等式两端各对应幂次的系数应相等，于是有

$$\begin{cases} 3P_2 = 1 \\ 4P_2 + 3P_1 = 2 \\ 2P_2 + 2P_1 + 3P_0 = 0 \end{cases}$$

联解得到

$$P_2 = \frac{1}{3},\ P_1 = \frac{2}{9},\quad P_0 = -\frac{10}{27}$$

所以，特解为

$$y_p(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{10}{27}$$

(2)当$f(t)=\mathrm{e}^t$时

特解为$y_p(t)=P\,\mathrm{e}^t$，这里，P是待定系数。
代入方程后有：

$$P\mathrm{e}^t+2P\mathrm{e}^t+3P\mathrm{e}^t=\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^t$$

$$P=\frac{1}{3}$$

于是，特解为$\frac{1}{3}\mathrm{e}^t$。