第2章 连续信号与系统的时域分析

研究对象： **LTI系统**

研究步骤：

- **建立方程**

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mf^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1f^{(1)}(t)+b_0f(t)$$

- **求解方程**

与数学求解不同，卷积的引入

研究范围： **时域分析 t**

§2.1 连续信号的时域分解与卷积积分

- 信号的时域分解
- 卷积积分的数学描述
- 卷积的图解法
- 卷积积分的性质

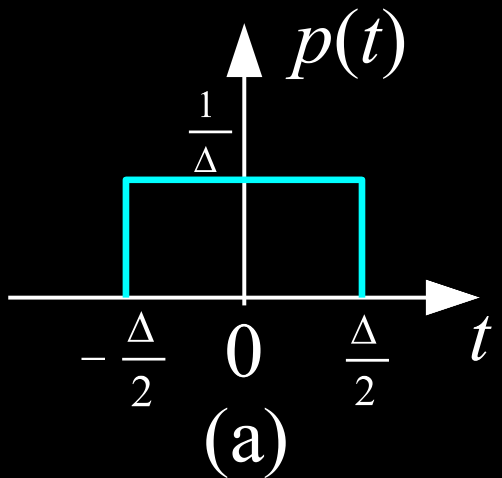
一、信号的时域分解

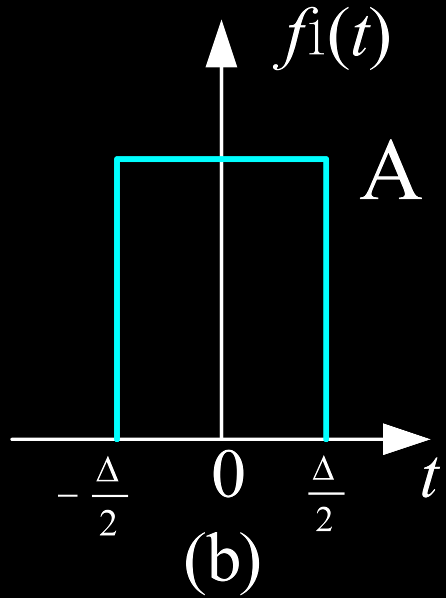
1. 信号的时域分解

问 $f_1(t) = ?\ p(t)$

- 预备知识

直观看出





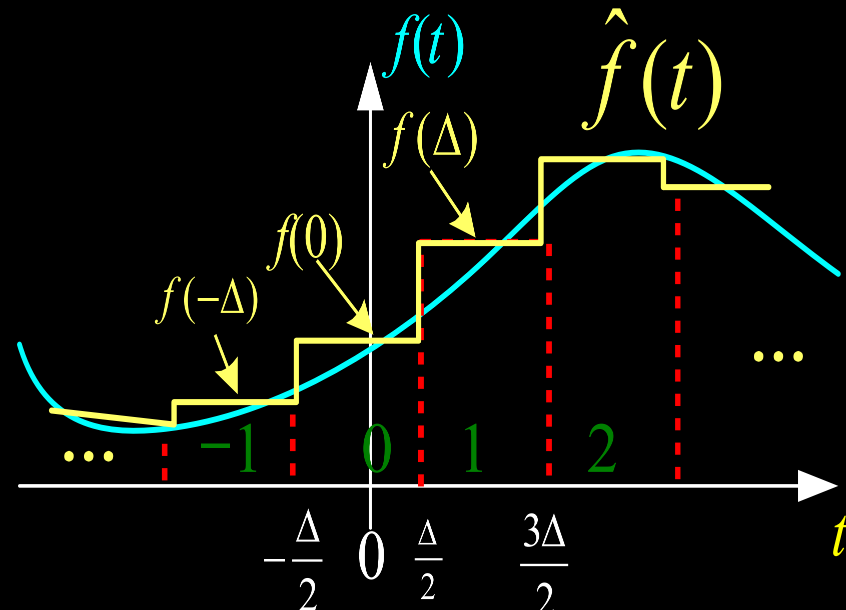
$$\boxed{f_1(t) = \mathrm{A}\Delta\ p(t)}$$

思考：$f_1(t)$右移t0个单位呢？？？

$$\boxed{f_1(t) = A\Delta P(t)}$$

•任意信号分解

“0”号脉冲高度$f(0)$,宽度为△,用$p(t)$表示为： $f(0)\Delta p(t)$



“1”号脉冲高度$f(\Delta)$,宽度为△，用$p(t-\Delta)$表示为：

$$f(\Delta)\Delta p(t-\Delta)$$

“−1”号脉冲高度$f(-\Delta)$ 、宽度为△，用$p(t+\Delta)$表示为:

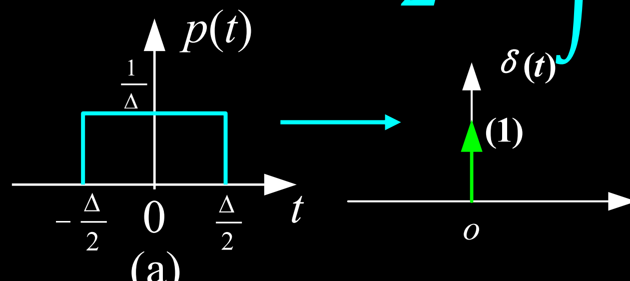
$$f(-\Delta)\Delta p(t+\Delta)$$

当 $\Delta \to 0$　有 $n\Delta \to \tau$

$$\hat{f}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta)\Delta p(t-n\Delta)$$

$\Delta \to \mathbf{d}\tau$　$\Sigma \to \int$

$$\boxed{\lim_{\Delta\to 0}\hat{f}(t)=f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$



2 .任意信号作用下的零状态响应

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI系统 零状态}} \longrightarrow y_{zs}(t)$$

根据h(t)的定义： $\delta(t) \longrightarrow h(t)$单位冲激响应

由时不变性： $\delta(t-\tau) \longrightarrow h(t-\tau)$

由齐次性： $f(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow f(\tau)\, h(t-\tau)$

由叠加性：$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$\begin{array}{ccc} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau & & \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ \parallel & & \parallel \\ f(t) & & y_{zs}(t) \end{array}$$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$ **卷积积分**

二、卷积积分的数学描述

已知定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的两个函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，则定义积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$$

为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积积分，简称卷积；记为

$$f(t)=f_1(t) * f_2(t)$$

注意：积分是在虚设的变量 τ 下进行的，τ 为积分变量，t 为参变量。结果仍为 t 的函数。

$$\boxed{y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t) * h(t)}$$

例

三、卷积的图解法

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

卷积过程可分解为四步：

（1）换元： t换为τ→得 $f_1(\tau)$， $f_2(\tau)$

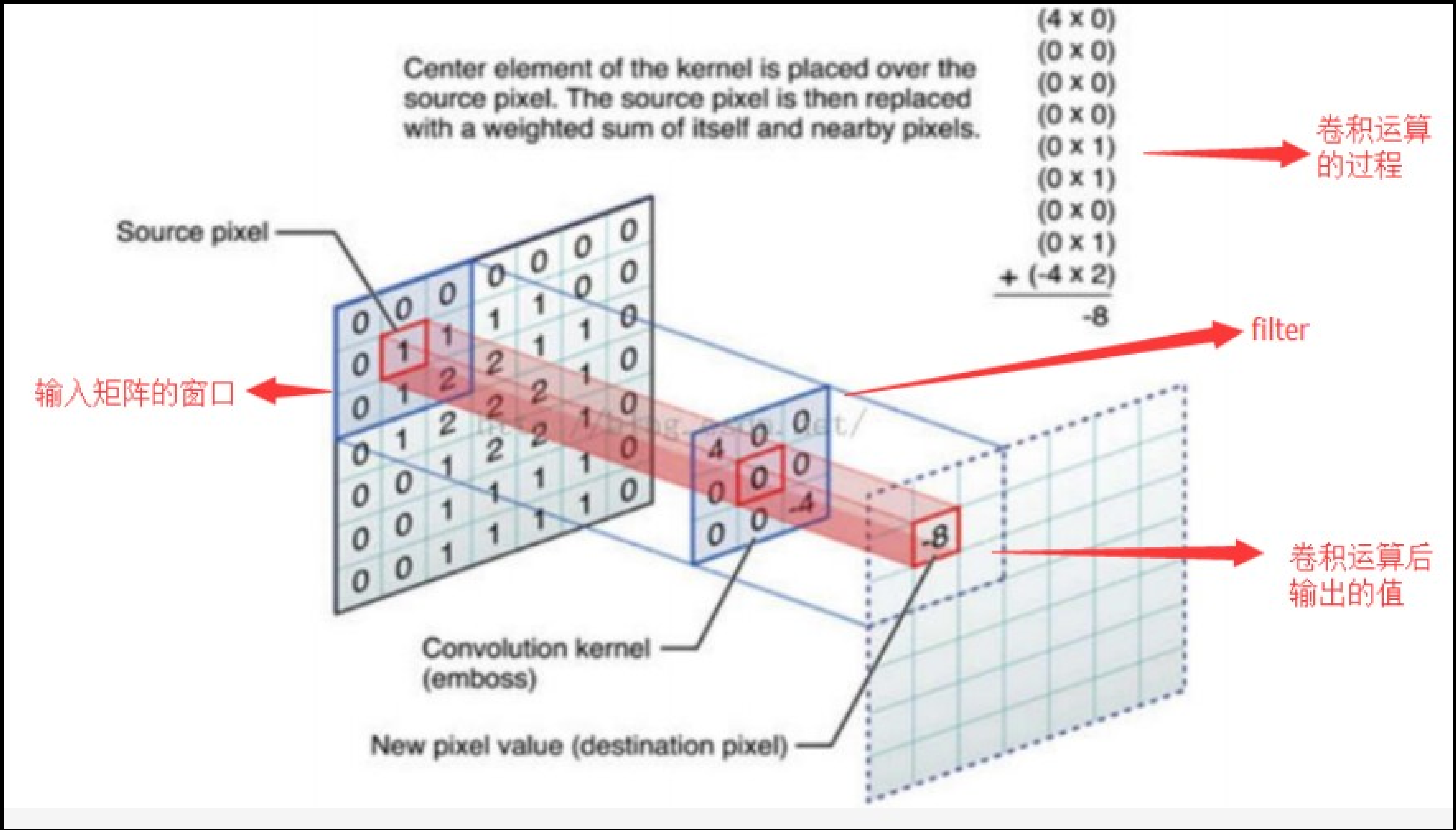
（2）反转平移：由$f_2(\tau)$反转→ $f_2(-\tau)$右移t → $f_2(t-\tau)$

（3）乘积： $f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)$

（4）积分： τ从 $-\infty$到∞对乘积项积分。

注意：t为参变量。繁琐，求时刻值

例


Center element of the kernel is placed over the source pixel. The source pixel is then replaced with a weighted sum of itself and nearby pixels.
(4 x 0)
(0 x 0)
(0 x 0)
(0 x 0)
(0 x 1)
(0 x 1)
(0 x 0)
(0 x 1)
+ (-4 x 2)
-8
卷积运算的过程
filter
Source pixel
输入矩阵的窗口
卷积运算后输出的值
Convolution kernel (emboss)
New pixel value (destination pixel)

卷积算子
（均值滤波）

```
clear all;
figure
I=rgb2gray(imread('C:\Users\bjut\Des
ktop\2.jpg'));
I=imnoise(I,'salt & pepper',0.1);
I1=filter2(fspecial('average',3),I)/255;
subplot(1,2,1),imshow(I);subplot(1,2,2)
,imshow(I1);
```

1.低通滤波器

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} * \frac{1}{9} \qquad \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} * \frac{1}{10} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 4 & 2\\1 & 2 & 1\end{bmatrix} * \frac{1}{16}$$

2.高通滤波器

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\-1 & 5 & -1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

3.平移和差分边缘检测

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

4.匹配滤波边缘检测

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

5.边缘检测

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\0 & 4 & 0\\-1 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\-1 & 8 & -1\\-1 & -1 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\-1 & 9 & -1\\-1 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

6.梯度方向边缘检测

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -2 & 1\\-1 & -1 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & -2 & 1\\-1 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\-1 & -2 & 1\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\1 & -2 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\1 & -2 & -1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -2 & -1\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

四、卷积积分的性质

卷积积分是一种数学运算，它有许多重要的性质（或运算规则），灵活地运用它们能简化卷积运算。

- 卷积的运算法则
- 任意信号与奇异信号的卷积
- 卷积的微分与积分
- 卷积的时移
- 卷积的数值计算

1. 卷积的运算法则

1. 卷积的运算法则

1. 交换律

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

证明

2. 分配律

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

系统并联运算

3. 结合律

$$[f(t)*f_1(t)]*f_2(t)=f(t)*[f_1(t)*f_2(t)]$$

系统级联运算

系统级联运算

2. 任意信号与奇异信号的卷积

1. $f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=f(t)$

证： $\delta(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(t)$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

2. $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$

证： $\delta'(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f'(t)$

$$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$

注：**δ**函数的**n**阶导数与一个信号函数卷积等于这个信号函数的**n**阶导数

3. $f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\varepsilon(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$\varepsilon(t)*\varepsilon(t)=t\varepsilon(t)$$

注：**ε**函数与一个信号函数卷积等于这个信号函数的积分

3. 卷积的微分与积分

$$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$

1. $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[f_1(t)*f_2(t)]=\frac{\mathrm{d}^n f_1(t)}{\mathrm{d}t^n}*f_2(t)=f_1(t)*\frac{\mathrm{d}^n f_2(t)}{\mathrm{d}t^n}$$

$$f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

2. $$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau=[\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)\mathrm{d}\tau]*f_2(t)=f_1(t)*[\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)\mathrm{d}\tau]$$

3. 在 $f_1(-\infty)=0$ 或 $f_2^{(-1)}(\infty)=0$ 的前提下，

$$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

例1 例2

4. 卷积的时移

若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$

则 $f(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f_1(t-t_1-t_2)*f_2(t)$

$$=f_1(t)*f_2(t-t_1-t_2)$$

$$=f(t-t_1-t_2)$$

例

求解卷积的方法可归纳为：

（1）**利用定义式，直接进行积分**。对于容易求积分的函数比较有效。如指数函数，多项式函数等。

（2）**图解法**。特别适用于求某时刻点上的卷积值。

（3）**利用性质**。比较灵活。