零输入响应和零状态响应举例

例： 描述某系统的微分方程为

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$$

已知 $y(0-)=2, y'(0-)=0, f(t)=\varepsilon(t)$。求该系统的零输入响应和零状态响应。

解: 1）零输入响应 $y_{zi}(t)$

激励为0，故 $y_{zi}(t)$满足 $y''_{zi}(t)+3y'_{zi}(t)+2y_{zi}(t)=0$

$$y_{zi}(0+)=y_{zi}(0-)=y(0-)=2$$

$$y'_{zi}(0+)=y'_{zi}(0-)=y'(0-)=0$$

该齐次方程的特征根为–1， – 2，故

$$y(0-)=2, y'(0-)=0, f(t)=\varepsilon(t)$$

$y_{zi}(t)=C_{zi1}e^{-t}+C_{zi2}e^{-2t}$

代入初始值并解得系数为 $C_{zi1}=4$，$C_{zi2}=-2$，代入得

$$y_{zi}(t)=4e^{-t}-2e^{-2t}, t<0$$

2）零状态响应 $y_{zs}(t)$

$y''_{zs}(t)+3y'_{zs}(t)+2y_{zs}(t)=2\delta(t)+6\varepsilon(t)$

$y_{zs}(0-)=y'_{zs}(0-)=0$

由于上式右端含有冲激函数，因此 $y''_{zs}(t)$ 含有冲激函数，从而 $y'_{zs}(t)$ 跃变，即 $y'_{zs}(0-)\neq y'_{zs}(0+)$，但 $y_{zs}(t)$ 在 t=0处连续，有 $y_{zs}(0-)=y_{zs}(0+)$

$$y_{zs}(0-)=y'_{zs}(0-)=0$$

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2f'(t)+6f(t)$$

$$y'_{zs}(0-)\neq y'_{zs}(0+)$$

$$y_{zs}(0-)=y_{zs}(0+)$$

等式两端积分得

$$\left[y'_{zs}(0+)-y'_{zs}(0-)\right]+3\left[y_{zs}(0+)-y_{zs}(0-)\right]+2\int_{0-}^{0+}y_{zs}(t)dt$$

$$=2\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt+6\int_{0-}^{0+}\varepsilon(t)dt$$

因此，$y'_{zs}(0+)=y'_{zs}(0-)+2=2$

对t>0时，有 $y''_{zs}(t)+3y'_{zs}(t)+2y_{zs}(t)=6$

求得其齐次解为 $C_{zs1}e^{-t}+C_{zs2}e^{-2t}$，

其特解为常数3，

$$y_{zs}(t)=C_{zs1}e^{-t}+C_{zs2}e^{-2t}+3$$

代入初始值求得 $y_{zs}(t)=-4e^{-t}+e^{-2t}+3$ **t≥0**