冲激响应求解举例2

例2 描述某系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)= f''(t) + 2f'(t) + 3f(t)$$

求其冲激响应h(t)。

解 根据h(t)的定义 有

$$h''(t) + 5h'(t) + 6h(t) = \delta''(t)+ 2\delta'(t)+3\delta(t) \quad (1)$$

$$h'(0-) = h(0-) = 0$$

先求h'(0+)和h(0+)。

由方程可知， h(t) 中含δ(t)

故令 $h''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t)+ r_1(t)$

$$h'(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + r_2(t)$$

$h(t) = a\delta(t) + r_3(t)$ [$r_i(t)$ 为不含δ(t) 的某函数]

代入式(1)，有

$$a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + r_1(t) + 5[a\delta'(t) + b\delta(t) + r_2(t)] + 6[a\delta(t) + r_3(t)] = \delta''(t) + 2\delta'(t) + 3\delta(t)$$

整理得

$$a\delta''(t) + (b+5a)\delta'(t) + (c+5b+6a)\delta(t) + r_1(t) + 5r_2(t) + 6r_3(t) = \delta''(t) + 2\delta'(t) + 3\delta(t)$$

利用$\delta(t)$ 系数匹配，得 $a=1$， $b=-3$， $c=12$

所以 $h(t) = \delta(t) + r_3(t)$ （2）

$h'(t) = \delta'(t) - 3\delta(t) + p_2(t)$ （3）

$h''(t) = \delta''(t) - 3\delta'(t) + 12\delta(t) + r_1(t)$ （4）

对式(3)从0-到0+积分得 $h(0+) - h(0-) = -3$

对式(4)从0-到0+积分得 $h'(0+) - h'(0-) = 12$

故 $h(0+) = -3$， $h'(0+) = 12$

对t>0时，有　$h''(t) + 6h'(t) + 5h(t) = 0$

微分方程的特征根为– 2，– 3。故系统的冲激响应为

$$h(t)= C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}\ , \quad t>0$$

代入初始条件

$$h(0+) = -3,\quad h'(0+) =12$$

求得$C_1=3$，$C_2= -6$, 所以

$$h(t)= 3e^{-2t} - 6e^{-3t}\ , t > 0$$

结合式(2)得

$$h(t)= \delta(t) + (3e^{-2t} - 6e^{-3t})\varepsilon(t)$$