第三章 连续信号与系统的频域分析

§3.2　周期信号的连续时间傅里叶级数

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

三角形式的傅里叶级数（**n≥1**）

周期信号可分解为直流和许多余弦分量。

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$$

指数形式的傅里叶级数

第三章 连续信号与系统的频域分析

§3.1 信号在正交函数空间的分解

§3.2 周期信号的连续时间傅里叶级数

§3.3 周期信号与非周期信号的频谱分析

§3.4 LTI系统的频域分析

§3.5 取样定理

§3.3 周期信号与非周期信号的的频谱分析

- 周期信号的频谱分析
- 周期信号的功率谱分析
- 非周期信号的频谱分析

一、周期信号的频谱分析

- 周期信号的频谱
- 周期矩形脉冲的频谱

周期信号的频谱

从广义上说，信号的某种特征量随信号频率变化的关系，称为信号的频谱，所画出的图形称为信号的频谱图。

周期信号的频谱是指周期信号中各次谐波幅值、相位随频率的变化关系，即

图示

将A_n~ω和φ_n~ω的关系分别画在以ω为横轴的平面上得到的两个图，分别称为振幅频谱图和相位频谱图。因为$n \geq 0$，所以称这种频谱为单边谱。

也可画$|F_n|$~ω和φ_n~ω的关系，称为双边谱。若F_n为实数，也可直接画F_n 。

单边频谱图例1

例： 周期信号 $f(t)=1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$

试求该周期信号的$f(t)$周期T，基波角频率Ω，画出它的单边频谱图，并求$f(t)$ 的平均功率P。

解 首先应用三角公式改写$f(t)$的表达式，即

$$f(t)=1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)$$

显然1是该信号的直流分量。

$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期$T_1=8$　　$\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)$ 的周期$T_2=6$

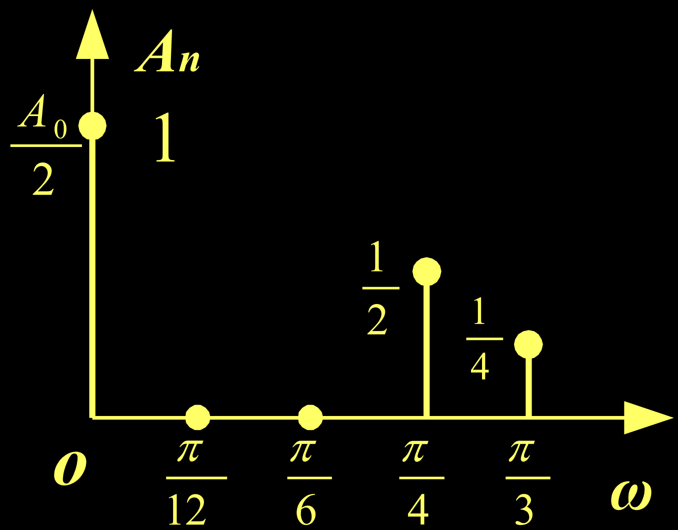
所以$f(t)$的周期$T=24$，基波角频率$\Omega=2\pi/T=\pi/12$

$$f(t)=1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{2\pi}{3}\right)$$

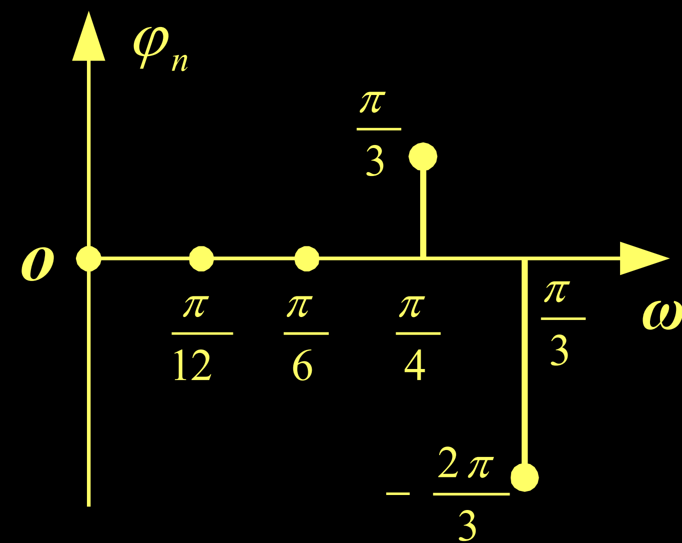
$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$ **是$f(t)$的(π/4)/(π/12)=3次谐波分量；**

$\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{2\pi}{3}\right)$ **是$f(t)$的(π/3)/(π/12)=4次谐波分量；**

画出$f(t)$的单边振幅频谱图、相位频谱图如图



(a)

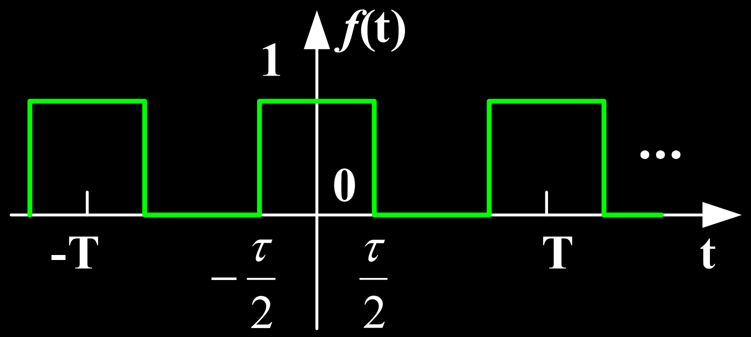


(b)

$$P=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{37}{32}$$

周期矩形脉冲的频谱

举例：有一幅度为1，脉冲宽度为τ的周期矩形脉冲，其周期为T，如图所示。求频谱。



$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \mathrm{e}^{-jn\Omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\left.\frac{\mathrm{e}^{-jn\Omega t}}{-jn\Omega}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{2}{T}\frac{\sin(\frac{n\Omega\tau}{2})}{n\Omega} = \frac{\tau}{T}\frac{\sin\frac{n\Omega\tau}{2}}{\frac{n\Omega\tau}{2}}$$

令 $Sa(x) = \sin(x)/x$ (取样函数）

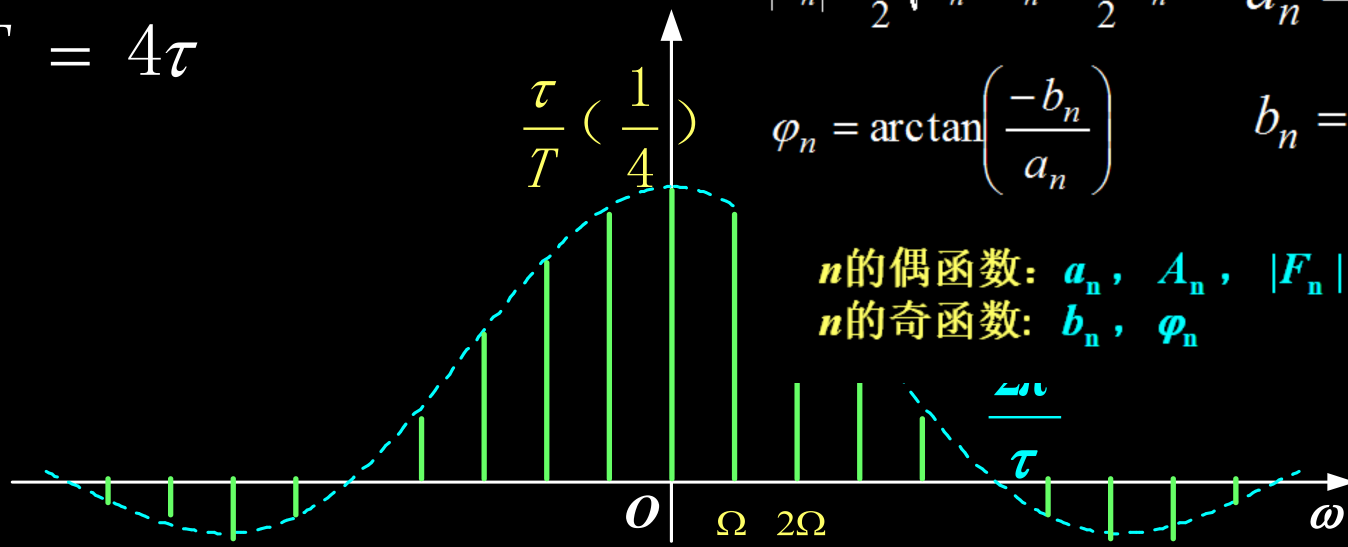
$$F_n = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$

$$F_n = |F_n| e^{\varphi_n} = \frac{1}{2} A_n e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$|F_n| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} A_n \qquad a_n = A_n \cos\varphi_n$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \qquad b_n = -A_n \sin\varphi_n$$

图中 $T = 4\tau$



n的偶函数：a_n， A_n， $|F_n|$

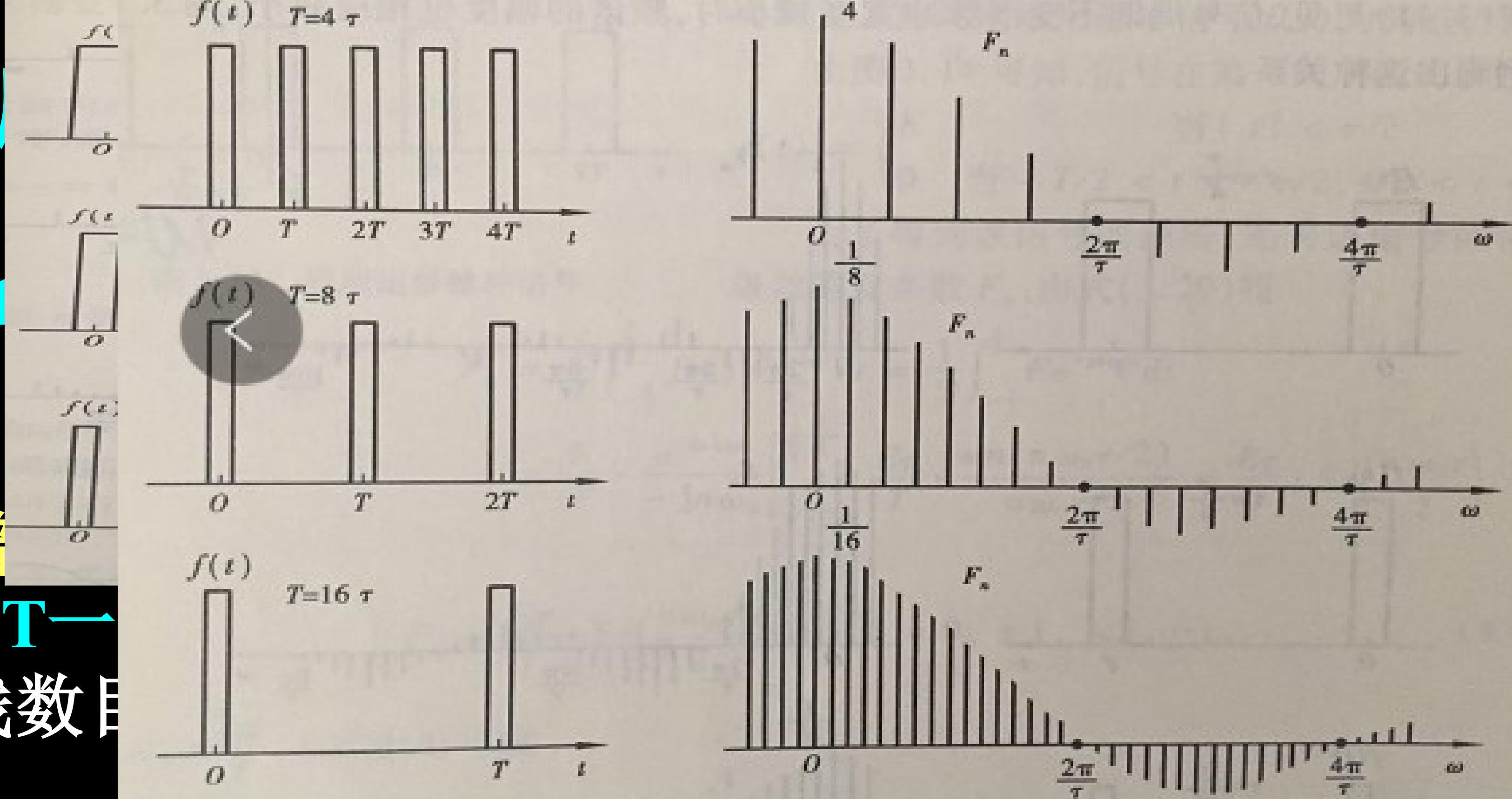
n的奇函数：b_n， φ_n

(1)包络线形状：抽样函数　**(2)其最大值在$n = 0$ 处**

(3)离散谱（谐波性）　**(4)第一个零点坐标：$\frac{2\pi}{\tau}$ 带宽**

当$\omega = n\Omega$时取值　令$\frac{n\Omega\tau}{2} = \pi \rightarrow \omega = n\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$

(5)F_n是复函数(此处为实函数)，幅度/相位，$F_n > 0$，相位为0，$F_n < 0$，相位为 $\pm\pi$



(1 … 基频

Ω …

谱 …

➢T一 … 的谱

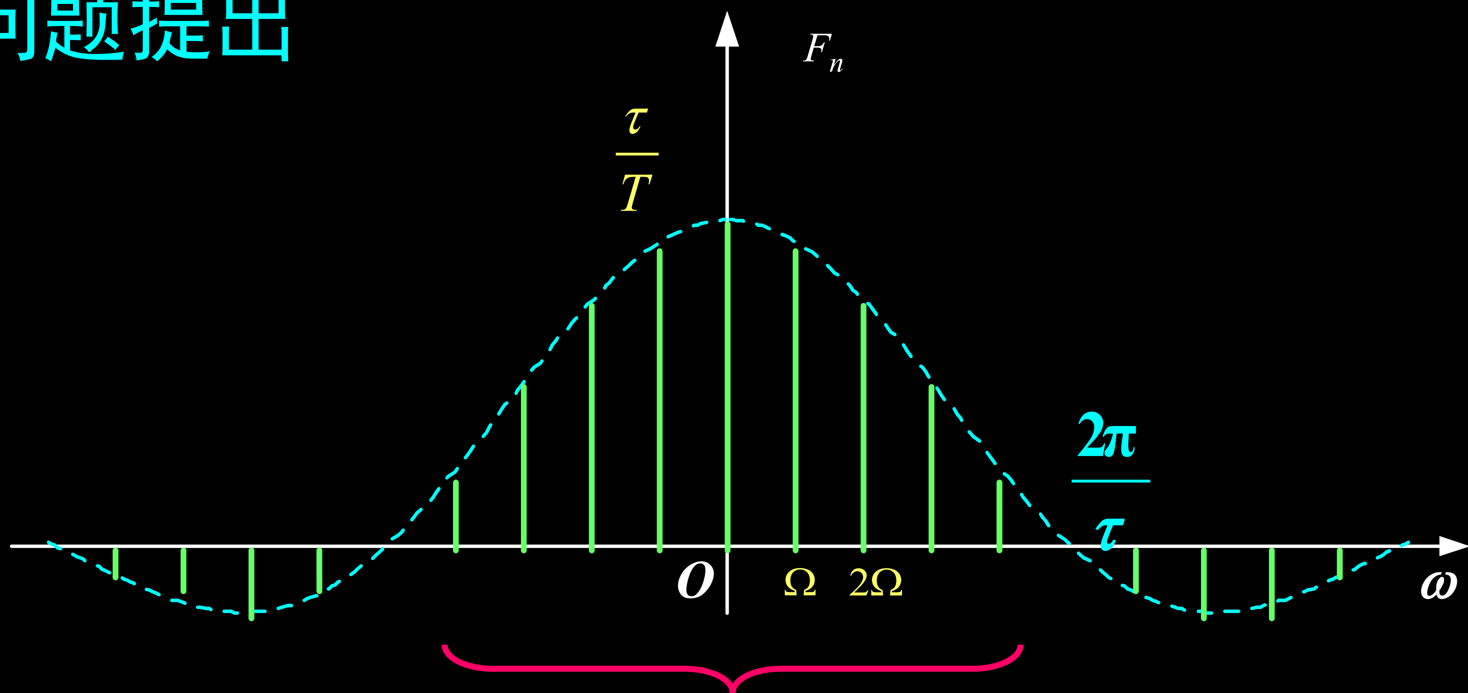
线数目 …

➢τ一定，T增大，间隔 Ω减小，频谱变密。幅度减小。

如果周期T无限增长（这时就成为非周期信号），那么，谱线间隔将趋近于零，周期信号的**离散频谱**就过渡到非周期信号的**连续频谱**。各频率分量的幅度也趋近于无穷小。

二、周期信号的功率谱分析

1. 问题提出



第一个零点内集中了信号绝大部分能量（平均功率）

由频谱的收敛性可知，信号的功率集中在低频段。

周期矩形脉冲信号的功率

Parseval定理 $$P=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$$

以$\tau=\frac{1}{20}s, T=\frac{1}{4}s$为例，取前 5 次谐波

$$P_{5n}=F_0^2+|F_1|^2+|F_2|^2+|F_3|^2+|F_4|^2+|F_{-1}|^2+|F_{-2}|^2+|F_{-3}|^2+|F_{-4}|^2$$

$$F_n=\frac{\tau}{T}Sa(\frac{n\Omega\tau}{2})=\frac{\tau}{T}Sa(\frac{n\pi\tau}{T})$$

$$=0.181$$

而总功率 $$P=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t=0.2$$

二者比值 $$\frac{P_{5n}}{P}=90.5\%$$

2. 频带宽度

在满足一定失真条件下，信号可以用某段频率范围的信号来表示，此频率范围称为频带宽度。

★一般把第一个零点作为信号的频带宽度。记为：

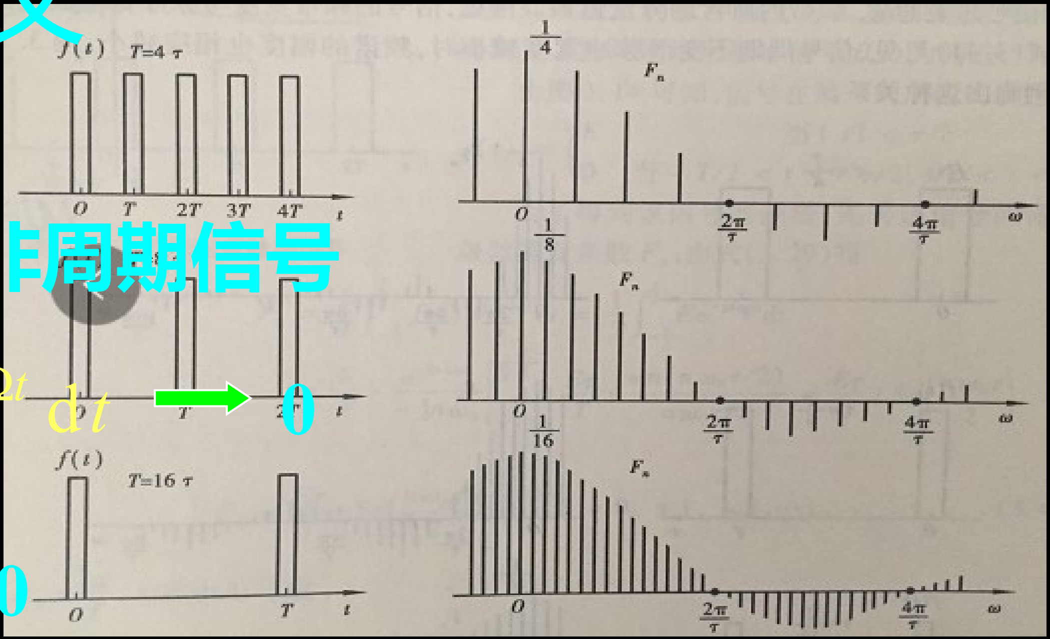
$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau} \text{或} B_f = \frac{1}{\tau}$$，带宽与脉宽成反比P75。

★ 对于一般周期信号，将幅度下降为$0.1|F_n|_{max}$的频率区间定义为频带宽度。

三、非周期信号频谱

- 傅里叶变换的定义
- 典型信号的频谱分析
- 傅里叶变换的性质及其应用

傅里叶变换的定义



1. 引出 $T \to \infty$

$f(t)$：**周期信号** → **非周期信号**

频谱 $F_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t$ → 0

谱线间隔 $\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$ → 0

离散谱 → **连续谱，幅度无限小；**

再用F_n表示频谱就不合适了，虽然各频谱幅度无限小，但相对大小仍有区别，引入频谱密度函数。令

$$F(\mathrm{j}\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{F_n}{1/T} = \lim_{T\to\infty} F_n T$$ (单位频率上的频谱）

称为**频谱密度函数。**

由傅里叶级数 $F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$

$$F_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-jn\Omega t}\mathrm{d}t \qquad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n T\,\mathrm{e}^{jn\Omega t}\frac{1}{T}$$

考虑到：$T\to\infty$，$\Omega\to$无穷小，记为 $\mathrm{d}\omega$；

$n\Omega\to\omega$（由离散量变为连续量），而

$$\frac{1}{T} = \frac{\Omega}{2\pi} \to \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$ 同时，$\sum\to\int$

于是，$F(\mathrm{j}\,\omega) = \lim\limits_{T\to\infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\,t$ 傅里叶变换式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\,\omega$$ 傅里叶反变换式

$F(j\omega)$称为$f(t)$的傅里叶变换或频谱密度函数，简称频谱。

$f(t)$称为$F(j\omega)$的傅里叶反变换或原函数。

也可简记为

$$F(\mathrm{j}\omega) = \lim_{T\to\infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \mathrm{F}[f(t)]$$

$$f(t) = \mathrm{F}^{-1}[F(j\omega)]$$

$F(j\omega)$一般是复函数，写为

$$F(j\omega) = F(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$\begin{cases} R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t \\ X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

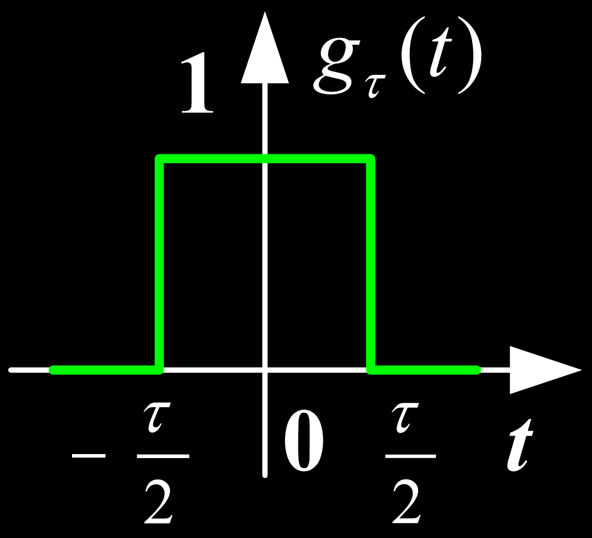
$$\begin{cases} F(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) = \arctan\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)} \\ R(\omega) = F(\omega)\cos\varphi(\omega) \\ X(\omega) = F(\omega)\sin\varphi(\omega) \end{cases}$$

函数f(t)傅里叶变换存在的充分条件: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$

典型信号的频谱分析

1. 矩形脉冲（门函数）

记为 $g_\tau(t)$



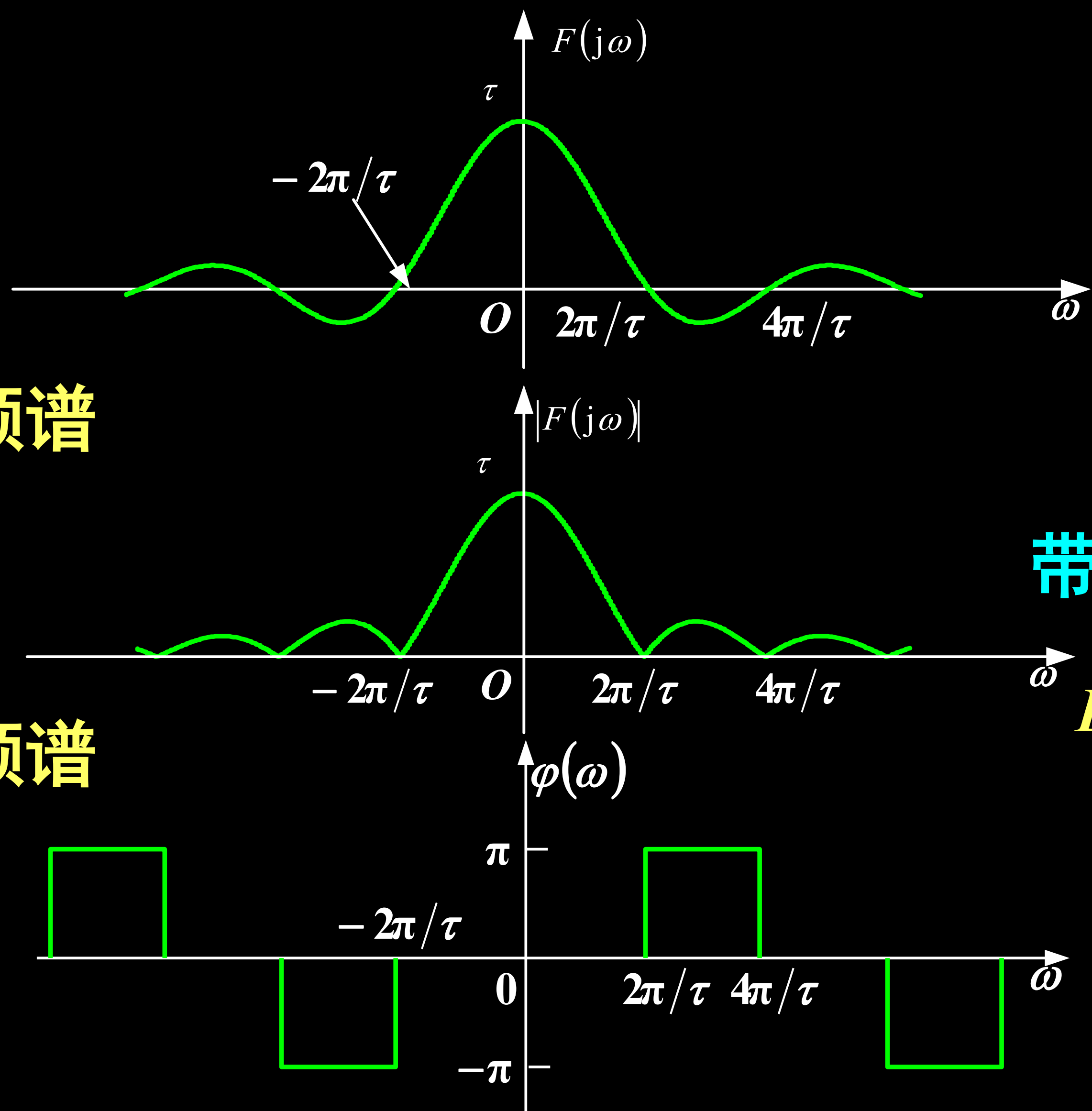
$$F(\mathrm{j}\omega) = \lim_{T\to\infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}}{-\mathrm{j}\omega}$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\omega} = \tau\ \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$g_\tau(t) \leftrightarrow \tau\ \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

频谱图



幅度频谱

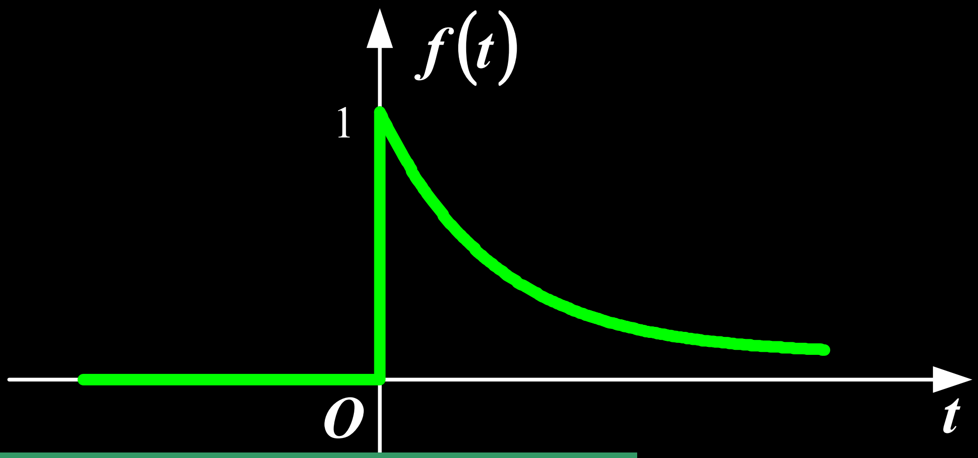
相位频谱

带宽：

$$B_\omega \approx \frac{2\pi}{\tau} \text{或} B_f \approx \frac{1}{\tau}$$

2. 单边实指数函数脉冲

$f(t) = e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$， $\alpha > 0$的实数



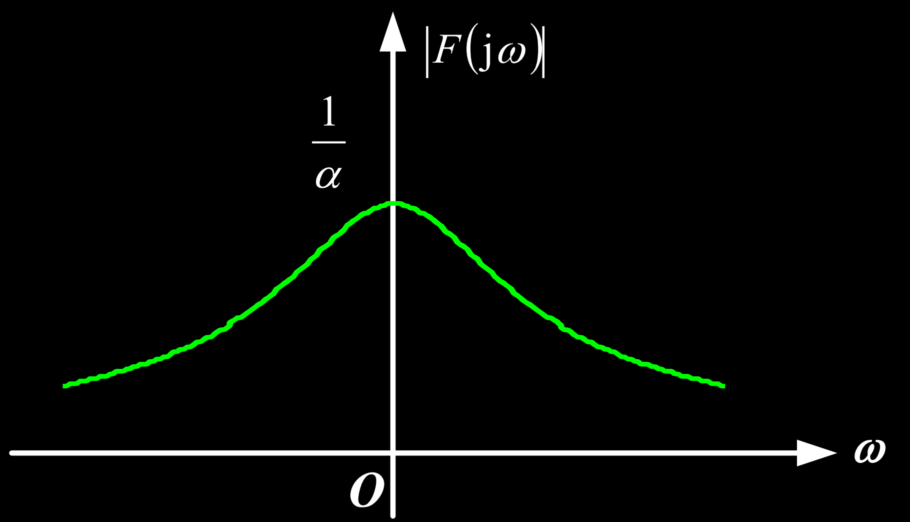
$$F(\mathrm{j}\omega) = \lim_{T\to\infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$F(\mathrm{j}\omega) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha + \mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + \mathrm{j}\omega}$$

频谱图

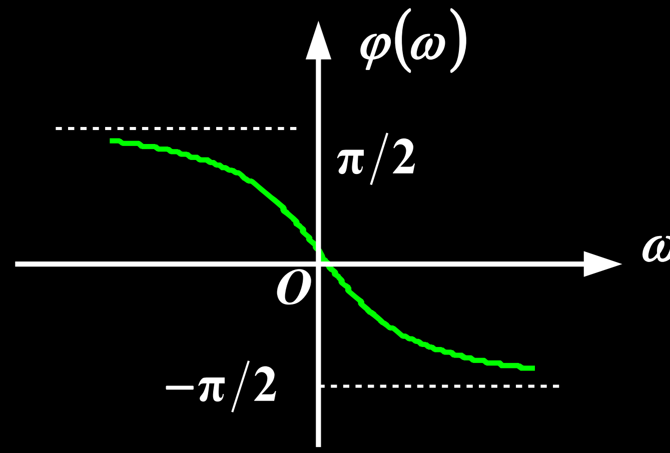
幅度频谱： $$\left|F(\mathrm{j}\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$\begin{cases} \omega = 0, & \left|F(\mathrm{j}\omega)\right| = \dfrac{1}{\alpha} \\ \omega \to \pm\infty, & \left|F(\mathrm{j}\omega)\right| \to 0 \end{cases}$$



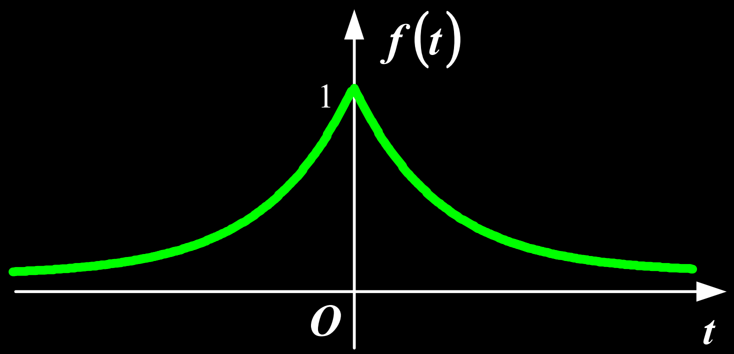
相位频谱： $$\varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\alpha}$$

$$\begin{cases} \omega \to 0, & \varphi(\omega) = 0 \\ \omega \to +\infty, & \varphi(\omega) \to -\dfrac{\pi}{2} \\ \omega \to -\infty, & \varphi(\omega) \to \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



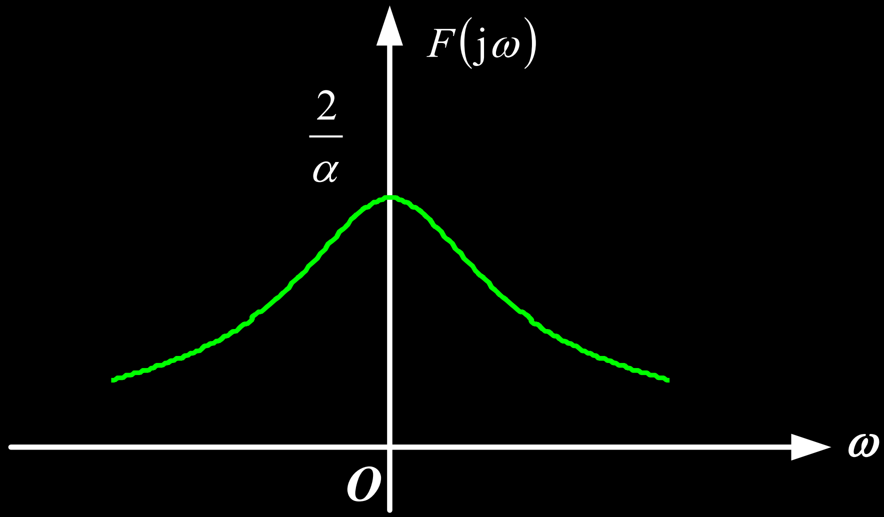
3. 双边指数函数

$$f(t) = e^{-\alpha|t|}，\quad \alpha > 0$$



$$F(j\omega) = \lim_{T\to\infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t}\,dt = \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$



4. 单位冲激函数δ(t)、δ′(t)

$$F(\mathrm{j}\omega) = \lim_{T\to\infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = 1$$

$$\delta'(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\Big|_{t=0} = \mathrm{j}\omega$$

冲激偶的性质 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t)\,\mathrm{d}t = -f'(0)$

5. 直流信号$1 \leftrightarrow ?$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\,\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\, t}\,\mathrm{d}\,\omega$$

将$\delta(t) \leftrightarrow 1$代入反变换定义式，有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\, t}\,\mathrm{d}\,\omega = \delta(t)$$

$$F(\mathrm{j}\,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\, t}\,\mathrm{d}\,t$$

将 $\omega \to t, t \to -\omega$ 有

$$F(\mathrm{j}\,\omega) = \lim_{T\to\infty} F_n T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\, t}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\, t}\,\mathrm{d}\,t = \delta(-\omega)$$

再根据傅里叶变换定义式，得

偶函数

$$1 \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\, t}\,\mathrm{d}\,t = 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

5．直流信号

讨论：

有一些函数不满足绝对可积这一充分条件，如1，$\varepsilon(t)$等，但傅里叶变换却存在。直接用定义式不好求解。

可构造一函数序列$\{f_n(t)\}$逼近$f(t)$，即

$$f(t)=\lim_{n\to\infty} f_n(t)$$

而$f_n(t)$满足绝对可积条件，并且$\{f_n(t)\}$的傅里叶变换所形成的序列$\{F_n(j\omega)\}$是极限收敛的。则可定义$f(t)$的傅里叶变换$F(j\omega)$为

$$F(j\omega)=\lim_{n\to\infty} F_n(j\omega)$$

这样定义的傅里叶变换也称为广义傅里叶变换。

推导 $1 \leftrightarrow ?$

构造 $f_a(t) = e^{-\alpha|t|}, \alpha > 0 \leftrightarrow F_\alpha(j\omega) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$

$$f(t) = 1 = \lim_{\alpha \to 0} f_\alpha(t)$$

所以 $F(j\omega) = \lim_{\alpha \to 0} F_\alpha(j\omega) = \lim_{\alpha \to 0} \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0 \\ \infty, & \omega = 0 \end{cases}$

δ(ω)

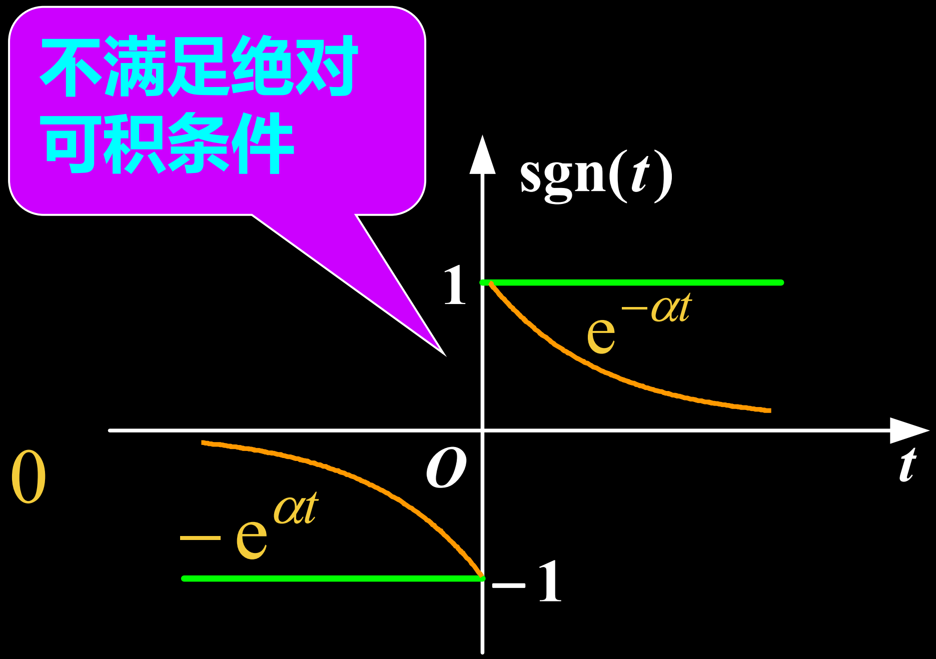
$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1 + \left(\dfrac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\frac{\omega}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} 2\arctan \frac{\omega}{\alpha}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\pi$$

因此，$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

6. 符号函数

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}-1, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

$$f_\alpha(t)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{\alpha t}, & t<0\\ \mathrm{e}^{-\alpha t}, & t>0\end{cases}\qquad \alpha>0$$



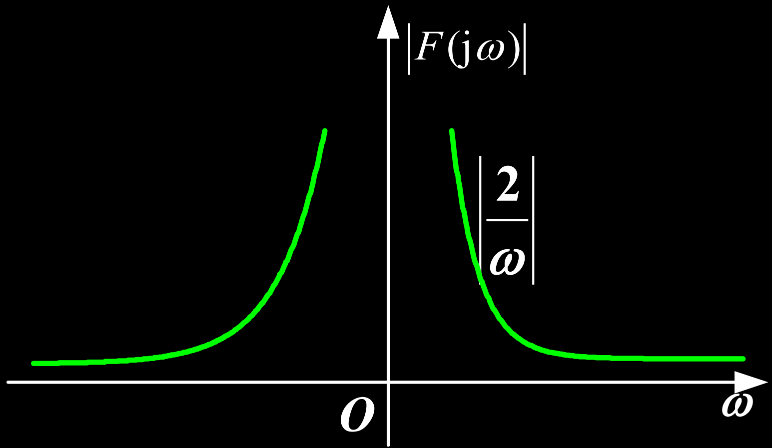
$$\operatorname{sgn}(t)=\lim_{\alpha\to 0} f_\alpha(t)$$

$$f_\alpha(t)\longleftrightarrow F_\alpha(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{\alpha-\mathrm{j}\omega}=-\frac{\mathrm{j}2\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\operatorname{sgn}(t)\longleftrightarrow \lim_{\alpha\to 0}F_\alpha(\mathrm{j}\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\left(-\frac{\mathrm{j}2\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

频谱图

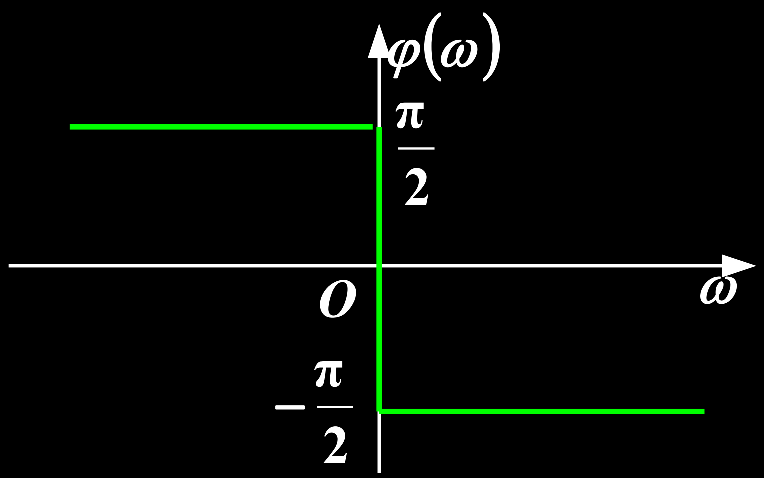
$$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{\mathrm{j}\omega} = -\mathrm{j}\frac{2}{\omega} = \frac{2}{|\omega|}\mathrm{e}^{\mp \mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$



$$|F(\mathrm{j}\omega)| = \left(\sqrt{\left(\frac{2}{\omega}\right)^2} = \frac{2}{|\omega|}\right)$$

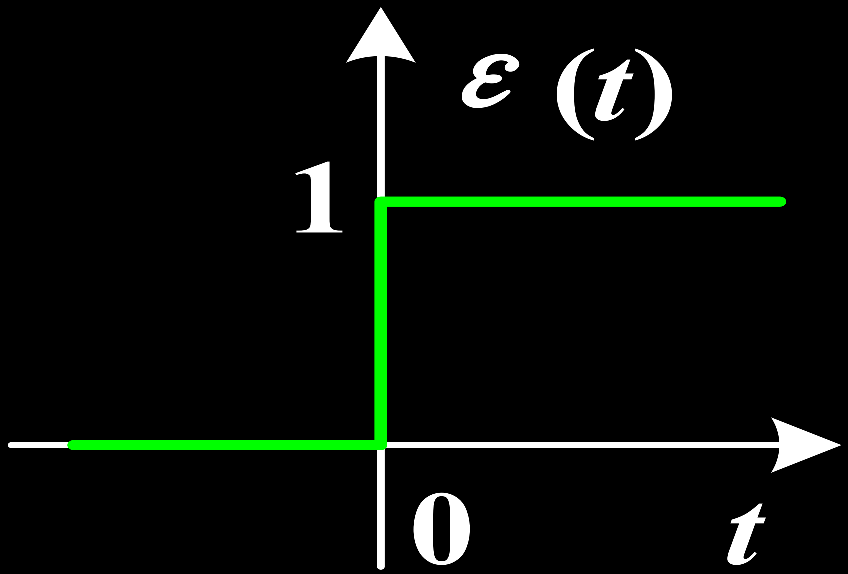
$|F(\mathrm{j}\omega)|$是偶函数

$$\arctan\frac{-\frac{2}{\omega}}{0} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases}$$



$\varphi(\omega)$是奇函数

7. 阶跃函数

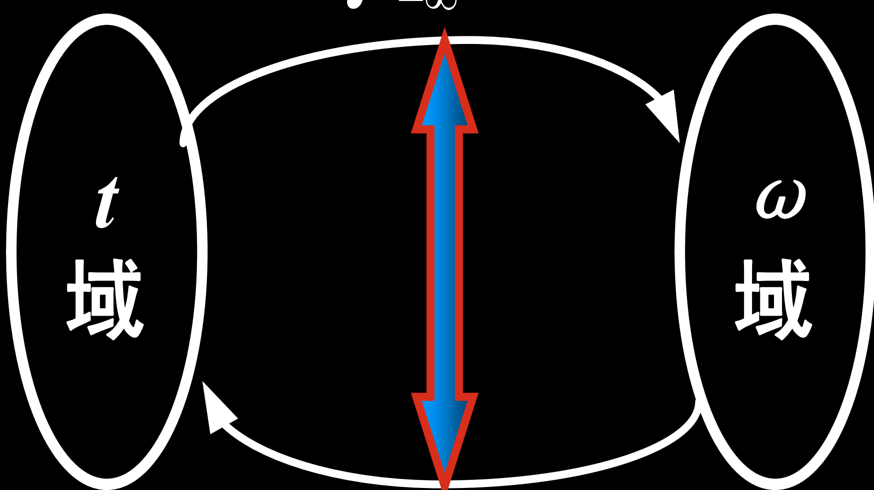


$$\varepsilon(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\longleftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

归纳记忆：

1. $\mathscr{F}$变换对

$$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$



$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

2. 常用函数 $\mathscr{F}$变换对：

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+\alpha}$$

$$g_\tau(t) \longleftrightarrow \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\operatorname{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

傅里叶变换的性质及其应用

- 线性性质
- 奇偶性
- 对称性
- 尺度变换
- 时移特性
- 频移特性
- 卷积定理
- 时域微分和积分
- 频域微分和积分

（1）线性性质

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$

则 $\boxed{\left[af_1(t)+bf_2(t)\right] \leftrightarrow \left[aF_1(j\omega)+bF_2(j\omega)\right]}$

证明： $\mathscr{F}[\mathrm{a}\, f_1(t) + \mathrm{b}\, f_2(t)]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[af_1(t)+bf_2(t)]\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{a}\, f_1(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{b}\, f_1(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= [\mathrm{a}\, F_1(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{b}\, F_2(\mathrm{j}\omega)\,]$$

举例

（2）对称性

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 则有： $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

证明： $$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega \qquad （1）$$

图解说明

将 (1)中 $t \to \omega$， $\omega \to t$ 则有

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \qquad （2）$$

例如

将 (2)中 $\omega \to -\omega$ 则有

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

$\therefore \; F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

（2）对称性(常用傅里叶变换对)

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$			$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$		
连续傅里叶变换对			相对偶的连续傅里叶变换对		
重要	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	连续时间函数 $f(t)$	傅里叶变换 $F(\omega)$	重要
√	$\delta(t)$	1	1	$2\pi\delta(\omega)$	√
√	$\frac{d}{dt}\delta(t)$	$j\omega$	t	$j2\pi\frac{d}{d\omega}\delta(\omega)$	
	$\frac{d^k}{dt^k}\delta(t)$	$(j\omega)^k$	t^k	$2\pi j^k\frac{d^k}{d\omega^k}\delta(\omega)$	
√	$u(t)$	$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$	$\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{1}{j2\pi t}$	$u(\omega)$	
	$tu(t)$	$j\pi\frac{d}{d\omega}\delta(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$			
	$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1,t>0\\-1,t<0\end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$	$\frac{1}{\pi},t\neq 0$	$F(\omega)=\begin{cases}-j,\omega>0\\j,\omega<0\end{cases}$	
√	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	√
	$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	$\delta(t+t_0)+\delta(t-t_0)$	$2\cos\omega t_0$	
	$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	$\delta(t+t_0)-\delta(t-t_0)$	$j2\sin\omega t_0$	
√	$f(t)=\begin{cases}1,\lvert t\rvert<\tau\\0,\lvert t\rvert>\tau\end{cases}$	$\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$	$\frac{W}{\pi}Sa(Wt)$	$F(\omega)=\begin{cases}1,\lvert\omega\rvert<W\\0,\lvert\omega\rvert>W\end{cases}$	√

（3）尺度变换性质

若 $f(t) \longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$ 则有 $\boxed{f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)}$

其中 a 是非零实常数

证明

此外,若令 $a=-1$,则有 $\boxed{f(-t) \longleftrightarrow F(-\mathrm{j}\omega)}$

例如-1

（4）时移特性

若 $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$ 则有 $\boxed{f(t-t_0) \longleftrightarrow \mathrm{e}^{-j\omega t_0} F(j\omega)}$

其中 t_0 是实常数

证明：$\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{t-t_0=\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\mathrm{e}^{-j\omega \tau}\,\mathrm{d}\tau \;\; \mathrm{e}^{-j\omega t_0}$$

$$= \mathrm{e}^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

例1

例 2

（5）频移性质

$$\boxed{f(t-t_0)\longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}F(j\omega)}$$

若 $f(t)\longleftrightarrow F(j\omega)$ 则有：

$$\boxed{e^{j\omega_0 t}f(t)\longleftrightarrow F[j(\omega-\omega_0)]}$$

其中ω_0是实常数

证明:

$$\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega_0 t}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt$$

$$=F[j(\omega-\omega_0)]$$

end

例 1

$$f(t)=e^{j3t}\longleftrightarrow F(j\omega)=?$$

解:

$$1\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j3t}\times 1\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-3)$$

（6）卷积性质

时域卷积：

若 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$， $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$则有

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\,\omega)F_2(\mathrm{j}\,\omega)}$$

证明

频域卷积：

若 $f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\omega)$， $f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)$则有

$$\boxed{f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega) * F_2(\mathrm{j}\omega)}$$

例如

（7）时域的微分和积分

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$$

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\mathrm{j}\,\omega)F_2(\mathrm{j}\,\omega)}$$

若 $f(t) \longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$ 则有 $f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (\mathrm{j}\,\omega)^n F(\mathrm{j}\,\omega)$

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$

$$\varepsilon(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$F(0) = F(j\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

证明:

$$f^{(n)}(t) = \delta^{(n)}(t) * f(t) \longleftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$$

例 1

$$f^{(-1)}(t) = \varepsilon(t) * f(t) \longleftrightarrow [\pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}]F(\mathrm{j}\omega)$$

$$= \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$

例2

（8）频域的微分和积分

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (\mathrm{j}\,\omega)^n F(\mathrm{j}\,\omega)$$

若 $f(t) \longleftrightarrow F(\mathrm{j}\omega)$ 则有

$$(-\mathrm{j}t)^{\mathrm{n}} f(t) \longleftrightarrow F^{(\mathrm{n})}(\mathrm{j}\omega)$$

$$\pi f(0)\delta(t) + \frac{1}{-jt} f(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(jx)\,\mathrm{d}x$$

其中 $f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)\,\mathrm{d}\omega$

例 1　例 2

$$\int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \longleftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$