综合举例

例 某LTI因果连续系统，起始状态为$x(0_)$。已知，当$x(0_)=1$，输入因果信号$f_1(t)$时，全响应

$$y_1(t) = e^{-t} + \cos(\pi t)，\quad t>0；$$

当$x(0_-)=2$，输入信号$f_2(t)=3f_1(t)$时，全响应

$$y_2(t) = -2e^{-t} + 3\cos(\pi t)，\quad t>0；$$

求输入$f_3(t) = \dfrac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}t} + 2f_1(t-1)$时，系统的零状态响应$y_{3f}(t)$。

解 设当$x(0_)=1$，输入因果信号$f_1(t)$时，系统的零输入响应和零状态响应分别为$y_{1zi}(t)$、$y_{1zs}(t)$。当$x(0_-)=2$，输入信号$f_2(t)=3f_1(t)$时，系统的零输入响应和零状态响应分别为$y_{2zi}(t)$、$y_{2zs}(t)$。

由题中条件，有

$y_1(t) = y_{1zi}(t) + y_{1zs}(t) = e^{-t} + \cos(\pi t)$，$t>0$ （1）

$y_2(t) = y_{2zi}(t) + y_{2zs}(t) = -2e^{-t} + 3\cos(\pi t)$，$t>0$ （2）

根据线性系统的齐次性，$y_{2zi}(t) = 2y_{1zi}(t)$，$y_{2zs}(t) = 3y_{1zs}(t)$，代入式（2）得

$y_2(t) = 2y_{1zi}(t) + 3y_{1zs}(t) = -2e^{-t} + 3\cos(\pi t)$，$t>0$ （3）

式(3)– 2×式(1)，得

$$y_{1zs}(t) = -4e^{-t} + \cos(\pi t)，t>0$$

由于$y_{1zs}(t)$ 是因果系统对因果输入信号$f_1(t)$的零状态响应，故当$t<0$，$y_{1zs}(t)=0$；因此$y_{1zs}(t)$可改写成

$$y_{1zs}(t) = [-4e^{-t} + \cos(\pi t)]\varepsilon(t) \qquad (4)$$

$$f_1(t) \to y_{1zs}(t) = [-4e^{-t} + \cos(\pi t)]\varepsilon(t)$$

根据LTI系统的微分特性

$$\frac{\mathrm{d}\,f_1(t)}{\mathrm{d}\,t} \to \frac{\mathrm{d}\,y_{zs1}(t)}{\mathrm{d}\,t} = -3\delta(t) + [4e^{-t} - \pi\sin(\pi t)]\varepsilon(t)$$

根据LTI系统的时不变特性

$$f_1(t-1) \to y_{1zs}(t-1) = \{-4e^{-(t-1)} + \cos[\pi(t-1)]\}\varepsilon(t-1)$$

由线性性质，得：当输入$f_3(t) = \frac{\mathrm{d}\,f_1(t)}{\mathrm{d}\,t} + 2f_1(t-1)$，

$$y_{3zs}(t) = \frac{\mathrm{d}\,y_1(t)}{\mathrm{d}\,t} + 2y_1(t-1) = -3\delta(t) + [4e^{-t} - \pi\sin(\pi t)]\varepsilon(t) + 2\{-4e^{-(t-1)} + \cos[\pi(t-1)]\}\varepsilon(t-1)$$