常微分方程专题

作者：梧桐鹿
组织：逐鹿书院
时间：October 9, 2021
版本：3.0
邮箱：1647573826@qq.com

ElegantLATEX Program

我许你红装十里，一里檐角月疏，温柔别离，湿雪如画不如你

目录

第 1 章 微分方程

本专题会介绍求解微分方程的各种方法,诸如积分因子法、微分算子法、常数变易法、韦达定理降阶法、拉普拉斯变换法、留数法等都会有所涉及. 个人认为,求解微分方程特解的时候,这些方法是远远优于传统教材中的待定系数法的,相信读者在看完本专题后,以后求解微分方程会更加得心应手,灵活变通!

1.1 一阶线性微分方程

首先考虑齐次情况,对于 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)=0$, 利用分离变量法容易得到

$$y=C\exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}$$

特解 $y=0$ 也含于此通解中 $(C=0)$. 对于非齐次情况, 可以用**常数变易法**和**积分因子法**.

例 1.1 $\mathrm{d}y+p(x)y\mathrm{d}x=q(x)\mathrm{d}x$

解 (常数变易法)

将 $y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 中的 C 换成未知函数 $u(x)$. 即 $y=u\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u'\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}-up(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

代入 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$, 则

$$u'\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}-up(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+p(x)u\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=q(x)$$

也即 $u'=q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$, 积分可得

$$u=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}\mathrm{d}x+C$$

回代 u 即有

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

□

1.2 积分因子法

介绍积分因子法前,我们先来看一类特殊的方程——**恰当方程**,又称为**全微分方程**.

定义 1.1

称方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1.1}$$

为区域 $\mathscr{D}\subseteq\mathbb{R}^2$ 上的恰当方程, 如果存在 $\mathscr{D}$ 上的可微函数 $U(x,y)$, 使得

$$\mathrm{d}U(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

上面的 $U(x,y)$ 称为 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 的原函数. ♣

对于恰当方程, 立即可以得到方程的通解为 $U(x,y)=C$. 下面介绍如何判断方程为恰当方程以及如何找到原函数.

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在矩形区域 $\mathscr{D}=(a,b)\times(c,d)$ 内连续可微, 则方程 (1.1) 为 $\mathscr{D}$ 内的恰当方程当且仅当

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

此时, 原函数 $U(x,y)$ 可以取为

$$\begin{aligned}U(x,y)&=\int_{x_0}^{x}P(t,y)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q\left(x_0,s\right)\mathrm{d}s\\&=\int_{x_0}^{x}P\left(t,y_0\right)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x,s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

其中,(x_0,y_0) 是 $\mathscr{D}$ 中的一个固定点.

例 1.2 求恰当方程 $\dfrac{\left(y^4-2yx^3\right)\mathrm{d}x+\left(x^4-2y^3x\right)\mathrm{d}y}{yx\left(x^3+y^3\right)}$ 的通解.

解 记

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\frac{\left(y^4-2yx^3\right)\mathrm{d}x+\left(x^4-2y^3x\right)\mathrm{d}y}{yx\left(x^3+y^3\right)}$$

我们要计算 U, 使得 $\mathrm{d}U=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$. 由 $\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q$, 得到

$$\begin{aligned}U(x,y)&=\int Q(x,y)\mathrm{d}y+S(x)=\int\frac{\left(x^3-2y^3\right)}{y\left(x^3+y^3\right)}\mathrm{d}y+S(x)\\&=\ln|y|-\ln\left|x^3+y^3\right|+S(x)\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(U(x,y)-\ln|y|+\ln\left|x^3+y^3\right|\right)\\&=Q(x,y)+\frac{3x^2}{x^3+y^3}=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

这样就有 $S(x)=\ln|x|+C$, 从而

$$U=\ln|y|+\ln|x|-\ln\left|x^3+y^3\right|+C$$

□

由于恰当方程求解非常方便, 人们自然希望能够通过某些方法将方程化为恰当方程. **积分因子法**就是与之相关的方法. 如果不恒为 0 的函数 $\mu(x,y)$ 使得方程

$$\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

成为恰当方程, 则称 $\mu(x,y)$ 是方程 (1.1) 的一个积分因子. 下面利用积分因子法求解一阶线性方程.

例 1.3 $\mathrm{d}y+p(x)y\mathrm{d}x=q(x)\mathrm{d}x$

解 (积分因子法)

以因子 $\mu(x)=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$ 乘两侧

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{\int p(x)dx}p(x)y\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}q(x)\mathrm{d}x$$

即

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}y\right)=q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

它是恰当方程, 可直接积分

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}y=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

整理得到

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

□

利用恰当方程的判别条件直接计算可得 $\mu(x,y)$ 为方程 (1.1) 的积分因子的条件是

$$Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) \tag{1.2}$$

这是一个一阶偏微分方程, 对于连续可微函数 $P(x,y),Q(x,y)$, 可以证明满足条件 (1.2) 的解 $\mu(x,y)$ 存在, 但要求出 $\mu(x,y)$ 的表达式却并不容易, 甚至不一定能够做到. 但是, 条件 (1.2) 还是可以用来为一些特殊的方程寻找积分因子. 比如, 由条件 (1.2) 不难知道方程 (1.1) 具有形为 $\mu(x)$ 的积分因子的充要条件是:

$$f(x)=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

与 y 无关. 此时 $\mu(x,y)=\mathrm{e}^{\int f(x)\mathrm{d}x}$. 同理, 具有形为 $\mu(y)$ 的积分因子的充要条件是:

$$g(y)=\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

与 x 无关. 此时 $\mu(x,y)=\mathrm{e}^{\int g(y)\mathrm{d}y}$. 可记忆为求

$$\frac{\operatorname{div}X}{P},\ \frac{\operatorname{div}X}{-Q}$$

这里的符号将在下文说明.

下面重新考虑一阶微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

为方便, 记它对应的微分算子和向量场散度为

$$X=Q\frac{\partial}{\partial x}-P\frac{\partial}{\partial y},\quad \operatorname{div}X=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

于是可将 (1.2) 表示为

$$-\mu\operatorname{div}X=X\mu$$

有如下定理

定理 1.1

- 若 $\dfrac{Q\operatorname{div}X-XQ}{-PQ}=F_1(y)$, 则方程 (1) 有积分因子 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{Q}\mathrm{e}^{-\int F_1(y)\mathrm{d}y}$
- 若 $\dfrac{-P\operatorname{div}X+XQ}{-PQ}=F_2(y)$, 则方程 (1) 有积分因子 $\mu(x,y)=-\dfrac{1}{P}\mathrm{e}^{-\int F_2(y)\mathrm{d}y}$
- 若 $\dfrac{Q\operatorname{div}X-XQ}{P^2}=F_3(y)$, 则方程 (1) 有积分因子 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{Q}\mathrm{e}^{-\int F_3(y)\mathrm{d}y}$
- 若 $\dfrac{-P\operatorname{div}X+XQ}{P^2}=F_4(y)$, 则方程 (1) 有积分因子 $\mu(x,y)=-\dfrac{1}{P}\mathrm{e}^{-\int F_4(y)\mathrm{d}y}$

♡

证明 这里只证明 $\dfrac{Q\operatorname{div}X-XQ}{-PQ}=F_1(y)$ 的情况, 其它情况同理即可. 利用链式求导法则可得

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=-\frac{1}{Q^2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot\mathrm{e}^{-\int F_1(y)\mathrm{d}y}$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=-\frac{1}{Q^2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot\mathrm{e}^{-\int F_1(y)\mathrm{d}y}-\frac{F_1(y)}{Q}\cdot\mathrm{e}^{-\int F_1(y)\mathrm{d}y}$$

于是

$$X\mu=Q\frac{\partial\mu}{\partial x}-P\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mathrm{e}^{-\int F_1(y)\mathrm{d}y}\left(-\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{P}{Q^2}\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{P}{Q}F_1(y)\right)$$
$$\frac{Q\operatorname{div}X-XQ}{-PQ}=F_1(y)=\left(Q\frac{\partial Q}{\partial x}-Q\frac{\partial P}{\partial y}-Q\frac{\partial Q}{\partial x}+P\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\frac{1}{(-PQ)}$$

代入即有 $X\mu=-\mu\operatorname{div}X$. □

例 1.4 求解微分方程 $y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=0$ 的积分因子.

解 已知

$$X=f(x)\mathrm{e}^y\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}\qquad \operatorname{div}X=f'(x)\mathrm{e}^y-1$$

由此可得

$$\frac{Q\operatorname{div}X-XQ}{-PQ}=\frac{1-y}{y}$$

于是

$$\mu(x,y)=\frac{1}{Q}\mathrm{e}^{-\int F_1(y)\mathrm{d}y}=\frac{1}{f(x)\mathrm{e}^y}\mathrm{e}^{-\int\frac{1-y}{y}\mathrm{d}y}=\frac{1}{f(x)y}$$

□

定理 1.2

若存在一函数 $\varphi(x,y)\in C^1$ 使得 $\operatorname{div}X=f(\varphi(x,y))X(\varphi(x,y))$, 则

$$\mu(\varphi(x,y))=\mathrm{e}^{-\int f(\varphi(x,y))\mathrm{d}\varphi(x,y)}$$

是方程 (1) 的积分因子.

♡

证明

$$\begin{aligned}X\mu(\varphi(x,y))=&Q\frac{\partial(\mu(\varphi))}{\partial x}-P\frac{\partial(\mu(\varphi))}{\partial y}\\=&\mu'(\varphi)Q\frac{\partial\varphi}{\partial x}-P\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\=&-f(\varphi)e^{-\int f(\varphi(x,y))\mathrm{d}\varphi(x,y)}X(\varphi)\\=&-f(\varphi)e^{-\int f(\varphi(x,y))\mathrm{d}\varphi(x,y)}\frac{\operatorname{div}X}{f(\varphi)}\\=&-\mu(\varphi(x,y))\operatorname{div}X\end{aligned}$$

□

这个定理很重要, 由它可以导出许多有用的结论.

推论 1.1

对于函数 $\varphi(x,y)=x^n+y^m$, 若

$$\frac{\operatorname{div}X}{nQx^{n-1}-mPy^{m-1}}=f\left(x^n+y^m\right)$$

则有积分因子

$$\mu(x,y)=\mathrm{e}^{-\int f(x^n+y^m)\mathrm{d}(x^n+y^m)}$$

♡

推论 1.2

对于函数 $\varphi(x,y)=xy$, 若

$$\frac{\operatorname{div}X}{yQ-xP}=f(xy)$$

则有积分因子

$$\mu(x,y)=\mathrm{e}^{-\int f(xy)\mathrm{d}(xy)}$$

♡

推论 1.3

对于函数 $\varphi(x,y)=\mathrm{e}^{\int f(x)\mathrm{d}x+g(y)\mathrm{d}y}$, 若

$$\frac{\operatorname{div}X}{X(\varphi(x,y))}=\frac{-1}{\varphi(x,y)}$$

则有积分因子

$$\mu(x,y)=\mathrm{e}^{\int f(x)\mathrm{d}x+g(y)\mathrm{d}y}$$

♡

例 1.5 求微分方程 $(x^2y+y^2)\mathrm{d}x-x^3\mathrm{d}y=0$ 的积分因子.

解 已知

$$X=-x^3\frac{\partial}{\partial x}-\left(x^2y+y^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\qquad \operatorname{div}X=-4x^2-2y$$

令 $\varphi(x,y)=xy$ 可以得到

$$\frac{\operatorname{div}X}{X\varphi}=\frac{2}{\varphi}$$

于是

$$\mu(x,y)=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{\varphi}\mathrm{d}\varphi}=\mathrm{e}^{-2\ln|\varphi|}=\frac{1}{x^2y^2}$$

□

例 1.6 求 $(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y=0$ 的积分因子.

解 已知

$$X=(y-x)\frac{\partial}{\partial x}-(x+y)\frac{\partial}{\partial y}\qquad \operatorname{div}X=-2$$

令 $\varphi(x,y)=x^2+y^2$, 可以得到

$$\frac{\operatorname{div}X}{X\varphi}=\frac{1}{\varphi}$$

于是

$$\mu(x,y)=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{\varphi}\mathrm{d}\varphi}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

□

例 1.7 $x(4y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y)+y^3(3y\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y)=0$

解 原式化为

$$(4xy+3y^4)\mathrm{d}x+(2x^2+5xy^3)\mathrm{d}y=0$$

已知

$$X=(2x^2+5xy^3)\frac{\partial}{\partial x}-(4xy+3y^4)\frac{\partial}{\partial y}\qquad \operatorname{div}X=-7y^3$$

令 $\varphi(x,y)=x^ay^b$, 可以得到

$$\frac{\operatorname{div}X}{X\varphi}=\frac{-7y^3}{-x^ay^b\left[(4b-2a)x+(3b-5a)y^3\right]}$$

令 $4b-2a=0,3b-5a=-7$, 则 $a=2,b=1$.

$$\frac{\operatorname{div}X}{X\varphi}=-\frac{1}{\varphi}$$

于是

$$\mu(x,y)=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{\varphi}\mathrm{d}\varphi}=x^2y$$

乘上积分因子, 原方程变为

$$(4x^3y^2+3x^2y^5)\mathrm{d}x+(2x^4y+5x^3y^4)\mathrm{d}y=0$$

$$\mathrm{d}(x^3y^5)+\mathrm{d}(x^4y^2)=0$$

$$x^3y^5+x^4y^2=C$$

□

例 1.8 $\left(x+y^3\right)\mathrm{d}x+\left(x^3+y\right)\mathrm{d}y=0$

解 [4] 注意到

$$\frac{\operatorname{div}X}{X\varphi}=\frac{3\left(y^2-x^2\right)}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(x^3+y\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(x+y^3\right)}$$

令 $\varphi(x,y)=x^a+y^a$, 可以得到

$$\frac{\operatorname{div}X}{X\varphi}=\frac{3\left(y^2-x^2\right)}{a\left(xy^{a-1}+y^{a+2}-x^{a+2}-x^{a-1}y\right)}$$

显然取 $a=2$. 积分因子为 $(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$. 原方程变为

$$\frac{x+y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x+\frac{x^3+y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y=0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\sin\left(\arctan\frac{x}{y}\right)=C$$

□

定理 1.3

若存在一函数 $\Omega(x,y)\in C^1$, 使得 $\dfrac{\operatorname{div}(\Omega(x,y)X)}{\Omega(x,y)Q}=H(x)$, 则

$$\mu(x,y)=\Omega(x,y)\mathrm{e}^{-\int H(x)\mathrm{d}x}$$

是方程 (1) 的积分因子.

若存在一函数 $\Omega(x,y)\in C^1$, 使得 $\dfrac{\operatorname{div}(\Omega(x,y)X)}{-\Omega(x,y)P}=R(y)$, 则

$$\mu(x,y)=\Omega(x,y)\mathrm{e}^{-\int R(y)\mathrm{d}y}$$

是方程 (1) 的积分因子.

♡

证明 见[7]

□

例 1.9 求解 Bernoulli 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+q(x)y^n, n\neq 0,1$ 的积分因子.

解 已知

$$X=-\frac{\partial}{\partial x}-\left(p(x)y+q(x)y^n\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\operatorname{div}X=-p(x)-nq(x)y^{n-1}$$

令 $\Omega(x,y)=-y^n$ 可得

$$\frac{\operatorname{div}(\Omega x)}{\Omega Q}=(1-n)p(x)$$

于是

$$\mu(x,y)=y^{-n}\mathrm{e}^{-\int(1-n)p(x)\mathrm{d}x}$$

□

定理 1.4

对于特殊形式的一阶微分方程

$$yP(xy)\mathrm{d}x+xQ(xy)\mathrm{d}y=0$$

其中函数 $P(u),Q(u)$ 连续, 可微且 $P(u)\neq Q(u)$. 则有如下积分因子

$$\mu(x,y)=(xy[P(xy)-Q(xy)])^{-1}$$

♡

证明 取 $\varphi(x,y)=xy[P(xy)-Q(xy)]$

$$\frac{\operatorname{div} X}{X(\varphi(x,y))}=\frac{Q(xy)-P(xy)+xy\left(Q'(xy)-P'(xy)\right)}{xy(Q(xy)-P(xy))(P(xy)+Q(xy))+x^2y^2(P(xy))-Q(xy))\left(Q'(xy)-P'(xy)\right)}$$
$$=\frac{1}{xy[P(xy)-Q(xy)]}=\frac{1}{\varphi(x,y)}$$

于是

$$\mu(\varphi(x,y))=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{\varphi(x,y)}\mathrm{d}\varphi(x,y)}=(xy[P(xy)-Q(xy)])^{-1}$$

□

定理 1.5 ()

在方程 (1) 中作变换

$$(x,y)\to(tx,ty)\quad\forall t>0$$

若存在常数 α, 使得

$$P(tx,ty)=t^{\alpha}P(x,y)\qquad Q(tx,ty)=t^{\alpha}Q(x,y)$$

则称方程 (1) 为齐次方程, 它有如下积分因子

$$\mu(x,y)=\frac{1}{xP(x,y)+yQ(x,y)}$$

♡

证明 见 [5] □

值得注意的是, 这种情况下虽然能很快求出积分因子, 但有时候全微分不易求出, 这时建议使用常规做法, 即令 $y=ux$.

例 1.10 $\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+2xy\ \mathrm{d}y=0$

解 这是一个齐次方程, 有积分因子

$$\frac{1}{x\left(x^2-y^2\right)+2xy^2}=\frac{1}{x\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\frac{\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+2xy\ \mathrm{d}y}{x\left(x^2+y^2\right)}=0$$

无需验证, 我们知道这是-个恰当方程, 其左端可以凑成一个全微分. 具体地

$$\frac{\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+2xy\ \mathrm{d}y}{x\left(x^2+y^2\right)}=\frac{\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+x\ \mathrm{d}y^2}{x\left(x^2+y^2\right)}=\frac{-\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+x\ \mathrm{d}\left(x^2+y^2\right)}{x\left(x^2+y^2\right)}$$
$$=-\mathrm{d}\ln|x|+\mathrm{d}\ln\left(x^2+y^2\right)$$

从而得到方程的通解 $-\ln|x|+\ln(x^2+y^2)=C$, 补上遗漏的特解 $x\equiv 0$ 后写成

$$x=C(x^2+y^2)$$

□

设 $\mu(x,y)$ 是方程 (1) 的一个积分因子, 使得

$$\mu(x,y)(P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y)=\mathrm{d}U(x,y)$$

则对于任何连续可微的一元函数 $\varphi(t)$, 函数 $\mu(x,y)\varphi(U(x,y))$ 也是方程 (1) 的一个积分因子.

例 1.11 $y^4\mathrm{d}x+(2x^2-3xy^3)\mathrm{d}y=0$

解 将方程分组

$$(y^4\mathrm{d}x-3xy^3\mathrm{d}y)+2x^2\mathrm{d}y=0$$

显然前一组有积分因子 $\frac{1}{xy^4}$, 且

$$\frac{1}{xy^4}\left(y^4\,\mathrm{d}x-3xy^3\,\mathrm{d}y\right)=\mathrm{d}\ln\left|\frac{x}{y^3}\right|$$

因而对任何非零的连续可微函数 $\varphi_1,\frac{1}{xy^4}\varphi_1\left(\frac{x}{y^3}\right)$ 也是第一组的积分因子. 显然后一组有积分因子 $\frac{1}{x^2}$, 且

$$\frac{2x^2\mathrm{d}y}{x^2}=2\mathrm{d}y$$

因而对任何非零的连续可微函数 $\varphi_2,\frac{1}{x^2}\varphi_2(y)$ 也是第二组的积分因子. 选取 φ_1,φ_2 使得

$$\frac{1}{x^2}\varphi_2(y)=\frac{1}{xy^4}\varphi_1\left(\frac{x}{y^3}\right)$$

自然地, 尝试用 $\varphi_1(t)=t^a,\varphi_2(t)=t^b$, 代入即得

$$a=b=-1$$

于是两组的一个公共积分因子为 $\frac{1}{x^2y}$.

$$\frac{y^3\,\mathrm{d}x-3xy^2\,\mathrm{d}y}{x^2}+\frac{2\,\mathrm{d}y}{y}=0$$
$$-\frac{y^3}{x}+2\ln|y|=C$$
$$y^2=C^{y^3/x}$$

补充特解 $x=0,y=0$. □

给出一些**常见全微分**

- $x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$ $\quad y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y=\mathrm{d}(xy)$ $\quad \mathrm{e}^x(\,\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}x)=\mathrm{d}\left(y\mathrm{e}^x\right)$
- $\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln\frac{y}{x}\right)$ $\quad \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$ $\quad \mathrm{e}^{-x}(\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x)=\mathrm{d}\left(y\mathrm{e}^{-x}\right)$
- $\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$ $\quad \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$

1.3 待定系数法

定理 1.6 (广义叠加原理)

设 y_1,y_2 分别是 $L[y]=f_1(x),L[y]=f_2(x)$ 的解, 则 y_1+y_2 是 $L[y]=f_1(x)+f_2(x)$ 的解. ♡

1.3.1 二阶常系数齐次微分方程

例 1.12 讨论形如

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+qy=0$$

的微分方程的通解.

解 设 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 是它的解, r 是待定系数. 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=r\mathrm{e}^{rx}\qquad\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=r^2\mathrm{e}^{rx}$$
$$r^2\mathrm{e}^{rx}+pr\mathrm{e}^{rx}+q\mathrm{e}^{rx}=0\Rightarrow r^2+pr+q=0$$

这时便得到了特征方程. $p^2-4q>0$ 时, 特征方程有 2 个不等根 $r_{1,2}$. 则

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$$

都是它的解. 又 $\frac{y_1}{y_2} \neq$ 常数, $\Rightarrow y_1, y_2$ 线性无关, 于是通解为:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$p^2-4q=0$ 时, 特征方程有 2 个等根 $r_1=r_2=r$. 此时 $r=-\frac{p}{2}$, 则 $y_1=e^{rx}$ 是它的解. 设 $y_2=ue^{rx}$ 也是它的解. 则

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx} + ru\right)e^{rx}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2r\frac{du}{dx} + r^2u\right)e^{rx}$$

代入有

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2} + 2r\frac{du}{dx} + r^2u\right)e^{rx} + p\left(\frac{du}{dx} + ru\right)e^{rx} + que^{rx} = 0$$

整理得

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (2r+p)\frac{du}{dx} + (r^2+pr+q)x = 0$$

显然有 $\frac{d^2u}{dx^2}=0$. 可取 $u=x \Rightarrow y_2 = xe^{rx}$ 是它的解. y_1, y_2 线性无关. 于是通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$$

当 $p^2-4q<0$ 时, 特征方程 有 2 个不等的复根 $r_{1,2}=\alpha \pm i\beta$. 由欧拉公式得

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$
$$y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$
$$y_1^* = \frac{1}{2}(y_1+y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$y_2^* = \frac{1}{2}(y_1-y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

y_1^*, y_2^* 线性无关, 于是通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

□

1.3.2 二阶常系数非齐次微分方程

例 1.13 试讨论形如

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = P_n(x)e^{\alpha x}$$

的微分方程的特解. 其中 $P_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式.

解 设 $y^* = Q(x)e^{\alpha x}$ 是它的特解. 则

$$\frac{dy^*}{dx} = \left(\frac{dQ}{dx} + \alpha Q\right)e^{\alpha x}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y^*}{dx^2} &= \left(\frac{d^2Q}{dx^2} + \alpha\frac{dQ}{ddx}\right)e^{\alpha x} + \left(\frac{dQ}{dx} + \alpha Q\right)e^{\alpha x}\alpha \\ &= \left(\frac{d^2Q}{dx^2} + 2\alpha\frac{dQ}{dx} + \alpha^2 Q\right)e^{\alpha x}\end{aligned}$$

代入得

$$\frac{d^2Q}{dx^2}+(2\alpha+p)\frac{dQ}{dx}+(\alpha^2+p\alpha+q)Q=P_n(x) \tag{1.3}$$

- $\alpha^2+p\alpha+q\neq 0$
  此时 1.3 式左端最高次数为 $Q(x)$, 显然 $Q(x)$ 为 n 次多项式, 可取 $y^*=Q_n(x)e^{\alpha x}$.
- $\alpha^2+p\alpha+q=0$ 但是 $2\alpha+p\neq 0$
  此时 1.3 式左端最高次数为 $\dfrac{dQ}{dx}$, 显然 $Q(x)$ 为 $n+1$ 次多项式, 可取 $y^*=xQ_n(x)e^{\alpha x}$.
- $\alpha^2+p\alpha+q=2\alpha+p=0$
  同理可取 $y^*=x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$.

综上有

$$y^*=x^kQ_n(x)e^{\alpha x}\qquad k=\begin{cases}0 & \alpha\text{不是特征方程的根}\\ 1 & \text{单根}\\ 2 & \text{二重根}\end{cases}$$

□

例 1.14 试讨论形如

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=\left[P_n^{(1)}\cos\beta x+P_l^{(2)}(x)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}$$

的微分方程的特解. 其中 $P_n^{(1)},P_l^{(2)}$ 分别为 x 的 n 次和 l 次多项式.

解 注意到

$$e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x\qquad e^{-i\beta x}=\cos\beta x-i\sin\beta x$$

$$\cos\beta x=\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}\qquad \sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}=-i\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2}$$

可得

$$\begin{aligned}f(x)&=\left[P_n^{(1)}\cos\beta x+P_l^{(2)}(x)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}\\&=\left[P_n^{(1)}(x)\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}+P_l^{(2)}(x)\frac{-e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}i\right]e^{\alpha x}\\&=\left[\frac{P_n^{(1)}(x)-P_l^{(2)}(x)i}{2}e^{i\beta x}+\frac{P_n^{(1)}(x)+P_l^{(2)}(x)i}{2}e^{-i\beta x}\right]e^{\alpha x}\\&=\frac{P_n^{(1)}(x)-P_l^{(2)}(x)i}{2}e^{(\alpha+i\beta)x}+\frac{P_n^{(1)}(x)+P_l^{(2)}(x)i}{2}e^{(\alpha-i\beta)x}\end{aligned}$$

令 $g(x)=\dfrac{P_n^{(1)}(x)-P_l^{(2)}(x)i}{2}e^{(\alpha+i\beta)x}$, $\dfrac{P_n^{(1)}(x)-P_l^{(2)}(x)i}{2}$ 为 m 次多项式. 其中 $m=\max\{n,l\}$, 则

$$f(x)=g(x)+\overline{g(x)}\qquad L[y]=g(x)\qquad L[y]=\overline{g(x)}$$

设 $\alpha+i\beta$ 是特征方程的 k 重根.(k 为 0 或 1)

设特解为 $y_1^*=x^kQ_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$, 其中 $Q_m(x)=\dfrac{R_m^{(1)}(x)-iR_m^{(2)}(x)}{2}$. 于是

$$\begin{aligned}y_1^*&=\frac{1}{2}x^k(R_m^{(1)}(x)-iR_m^{(2)}(x))e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)\\&=\frac{1}{2}x^k\left[(R_m^{(1)}(x)\cos\beta x+R_m^{(2)}(x)\sin\beta x)+i(R_m^{(1)}(x)\sin\beta x-R_m^{(2)}(x)\sin\beta x)\right]e^{\alpha x}\end{aligned}$$

故 $f(x)=g(x)+\overline{g(x)}$ 有特解

$$y^*=y_1^*+y_2^*=y_1^*+\overline{y_1^*}=x^k(R_m^{(1)}\cos\beta x+R_m^{(2)}\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

□

1.4 微分算子法

二阶常系数线性非齐次方程的算子解法要比以往的待定系数法求解特解更加快捷高效, 有计算量小且运用灵活的优点.

定义 1.2

记

$$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},D^2=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2},D^n=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$$

其中 D^n 称为 n 阶微分算子. 于是 n 阶常系数非齐次线性微分方程

$$y^n+a_1y^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \tag{1.4}$$

可以记为 $L(D)y=f(x)$.

♣

其中 $L(D)$ 是方程 (1.4) 相对应的算子多项式

$$L(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}D+a_n$$

所以求解方程 (1.4) 的特解形式, 可以转化为算子方程的解的问题, 即

$$y(x)=\frac{1}{L(D)}f(x)$$

算子具有以下性质

- $\dfrac{1}{L(D)}\mathrm{e}^{\lambda x}v(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\dfrac{1}{L(D+\lambda)}v(x)$ (其中 $v(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上至少 n 阶可微的函数)
- $L(\lambda)\neq 0,\dfrac{1}{L(D)}\mathrm{e}^{\lambda x}=\dfrac{1}{L(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda x}$
- $L(\lambda)=0,\lambda$ 是 $L(D)=0$ 的 m 次重根, 则
$$\frac{1}{L(D)}\mathrm{e}^{\lambda x}=x^m\frac{1}{L^{(m)}(\lambda)}\mathrm{e}^{\lambda x}$$
- $\dfrac{1}{L(D)}xv(x)=\left[x-\dfrac{1}{L(D)}L'(D)\right]\dfrac{1}{L(D)}v(x)$

对微分算子感兴趣的读者, 可以去看看这篇论文 [1], 里面对微分算子的性质进行了详细证明.

1.4.1 当 $f(x)$ 为多项式函数时

这种情况比较简单, 把 $\dfrac{1}{L(D)}$ 展开为级数即可, 展开的次数依多项式最高次数而定, 具体的看几个例子就会了.

例 1.15 $y'''-5y''+3y'+2y=2x^3+4x^2-6x+5$, 求特解 y^*.

解

$$\begin{aligned}
y^*&=\frac{1}{D^3-5D^2+3D+2}\left(2x^3+4x^2-6x+5\right)\\
&=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(D^3-5D^2+3D)/2}\left(2x^3+4x^2-6x+5\right)\\
&=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}\left(D^3-5D^2+3D\right)+\frac{1}{4}\left(-5D^2+3D\right)^2-\frac{1}{8}(3D)^3\right]\left(2x^3+4x^2-6x+5\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}D+\frac{19}{4}D^2-\frac{91}{8}D^3\right)\left(2x^3+4x^2-6x+5\right)\\
&=x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{39}{2}x-\frac{169}{4}
\end{aligned}$$

□

例 1.16 $y'''-3y''+2y'=x^3-2x^2$, 求特解 y^*.

解

$$
\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{D^3-3D^2+2D}\left(x^3-2x^2\right) = \frac{1}{D(1-D)(2-D)}\left(x^3-2x^2\right)\\
&= \frac{1}{D(2-D)}\left(1+D+D^2+D^3\right)\left(x^3-2x^2\right)\\
&= \frac{1}{D}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}D+\frac{1}{4}D^2+\frac{1}{8}D^3\right)\right]\left(x^3+x^2+2x+2\right)\\
&= \frac{1}{2}D^{-1}\left(x^3+\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{17}{4}\right) = \frac{1}{8}x^4+\frac{5}{12}x^3+\frac{9}{8}x^2+\frac{17}{8}x
\end{aligned}
$$

□

1.4.2 当 $f(x)$ 为指数函数时

例 1.17 $y''+3y'+2y=5e^{3x}$, 求特解 y^*.

解

$$
y^* = \frac{5e^{3x}}{D^2+3D+2} = \frac{5e^{3x}}{3^2+3\cdot 3+2} = \frac{e^{3x}}{4}
$$

□

例 1.18 $y''+2y'+y=e^{-x}$, 求特解 y^*.

解

$$
y^* = \frac{e^{-x}}{D^2+2D+1} = x^2\cdot\frac{e^{-x}}{2}
$$

□

1.4.3 当 $f(x)$ 为三角函数时

利用欧拉公式

$$
\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x
$$

化为指数形式并取相应的实 (虚) 部即可.

例 1.19 $y''+3y=\sin(2x)$, 求特解 y^*.

解

$$
y^* = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{D^2+3}\mathrm{e}^{2ix}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{(2i)^2+3}\mathrm{e}^{2ix}\right) = -\sin(2x)
$$

□

例 1.20 $y''+4y=\cos(2x)$, 求特解 y^*.

解

$$
y^* = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{D^2+4}\mathrm{e}^{2ix}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x}{2D}\mathrm{e}^{2ix}\right) = \frac{x\sin(2x)}{4}
$$

□

例 1.21 $y''+3y'-2y=\sin(2x)$, 求特解 y^*.

解

$$
\begin{aligned}
y^* &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{D^2+3D-2}\mathrm{e}^{2ix}\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{6i-4}\mathrm{e}^{2ix}\right) = -\frac{1}{12}(\sin(2x)+\cos(2x))
\end{aligned}
$$

□

1.4.4 当 $f(x)$ 为 $e^{\lambda x}v(x)$ 形式时 ($v(x)$ 为多项式或三角函数)

例 1.22 $y''-2y'+y=xe^x$, 求特解 y^*.

解

$$
\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{D^2-2D+1}xe^x = e^x\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+1}x \\
&= e^x\frac{1}{D^2}x = \frac{x^3e^x}{6}
\end{aligned}
$$

□

例 1.23 $y''+3y'-2y=e^x\sin(2x)$, 求特解 y^*.

解

$$
\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{D^2+3D-2}e^x\sin(2x) = e^x\frac{1}{(D+1)^2+3(D+1)-2}\sin(2x) \\
&= e^x\frac{1}{D^2+5D+2}\sin(2x) = -\frac{1}{52}e^x(5\cos(2x)+\sin(2x))
\end{aligned}
$$

□

例 1.24 $y''+y=x\cos(2x)$, 求特解 y^*.

解

$$
\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{D^2+1}xe^{2ix} = e^{2ix}\frac{1}{(D+2i)^2+1}x \\
&= e^{2ix}\frac{1}{D^2+4iD-3}x = e^{2ix}\left(-\frac{1}{3}-\frac{4i}{9}D\right)x \\
&= e^{2ix}\left(-\frac{1}{3}x-\frac{4i}{9}x\right) = \frac{4}{9}\sin(2x)-\frac{1}{3}x\cos(2x)
\end{aligned}
$$

□

例 1.25 $y''+y=x\sin 2x$, 求特解 y^*.

解

$$
\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{D^2+1}xe^{ix} = e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+1}x \\
&= e^{ix}\frac{1}{D}\frac{1}{D+2i}x = e^{ix}\frac{1}{D}\frac{1-2ix}{4} \\
&= (\cos x+i\sin x)\frac{x-ix^2}{4} = \frac{x\sin x}{4}-\frac{x^2\cos x}{4}
\end{aligned}
$$

□

例 1.26 $y''-2y'+5y=xe^x\sin 2x$, 求特解 y^*.

解

$$
\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{D^2-2D+5}xe^{(1+2i)x} \\
&= e^{(1+2i)x}\frac{1}{(D+1+2i)^2-2(D+1+2i)+5}x \\
&= e^{(1+2i)x}(-\frac{x^2}{8}i+\frac{x}{16}) \\
&= e^x\left[\left(\frac{x^2}{8}\sin 2x+\frac{x}{16}\cos 2x\right)+i\left(-\frac{x^2}{8}\cos 2x+\frac{x}{16}\sin 2x\right)\right] \\
&= e^x\left(-\frac{x^2}{8}\cos 2x+\frac{x}{16}\sin 2x\right)
\end{aligned}
$$

□

例 1.27 $y''-3y'+2y=\sin e^{-x}$, 求特解 y^*.

解

$$
\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{D-2}\frac{1}{D-1}\sin e^{-x}\\
&= \frac{1}{D-2}\left[e^x\frac{1}{D}(e^{-x}\sin e^{-x})\right]\\
&= \frac{1}{D-2}\left(e^x\int e^{-x}\sin e^{-x}dx\right)\\
&= \frac{1}{D-2}(e^x\cos e^{-x})\\
&= e^{2x}\frac{1}{D}(e^{-x}\cos e^{-x})\\
&= e^{2x}\int e^{-x}\cos e^{-x}dx\\
&= -e^{2x}\sin e^{-x}
\end{aligned}
$$

□

例 1.28 $y''+y'-2y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$, 求特解 y^*.

解 [3]

$$
\begin{aligned}
y^* &= \frac{1}{(D+2)(D-1)}\cdot\left(\frac{1}{e^{-x}+1}\right)\\
&= \frac{1}{D+2}\cdot\left(\frac{1}{D-1}\frac{1}{e^{-x}+1}\right)\\
&= \frac{1}{D+2}\cdot\left[e^x\frac{1}{D}\left(e^{-x}\cdot\frac{1}{e^{-x}+1}\right)\right]\\
&= \frac{1}{D+2}\cdot\left[-e^x\int\frac{1}{e^{-x}+1}d(e^{-x}+1)\right]\\
&= \frac{1}{D+2}\cdot[-e^x\ln(e^{-x}+1)]\\
&= e^{-2x}\frac{1}{D}[e^{2x}\cdot(-e^x)\ln(e^{-x}+1)]\\
&= -e^{-2x}\frac{1}{D}[e^{3x}\ln(e^{-x}+1)]\\
&= -e^{-2x}\int e^{3x}\ln(e^{-x}+1)dx\\
&= -e^{-2x}\left[\frac{1}{3}\int\ln(e^{-x}+1)d(e^{3x})\right]\\
&= -e^{-2x}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\ln(e^{-x}+1)-\frac{1}{3}\int e^{3x}\cdot\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx\right]\\
&= -e^{-2x}\left[\frac{1}{3}e^{3x}[\ln(e^{-x}+1)]+\frac{1}{3}\int\frac{e^{2x}-1+1}{1+e^x}d(e^x)\right]\\
&= -\frac{1}{3}e^x\ln(e^{-x}+1)-\frac{1}{6}+\frac{e^{-x}}{3}-\frac{1}{3}e^{-2x}\ln(e^x+1)
\end{aligned}
$$

□

从上面这些例题可以看出，二阶常系数线性非齐次方程的算子解法确实要比以往的待定系数法求解特解更加快捷高效，有计算量小且运用灵活的优点．应当注意的是，算子法只是为二阶常系数线性非齐次方程提供了又一种解法，必然有其局限性，并不适用于任意非齐次项的情况，切忌生搬硬套.

1.5 韦达定理降阶法

这种方法 [6] 抛开了繁琐的待定系数法, 无论自由项是哪一种类型, 均可通过积分运算求出方程的特解, 进而求出通解. 这种方法非常巧妙, 也不涉及到更高深的理论, 推荐考研的同学熟练掌握这种方法.

设二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

所对应的齐次方程的特征根为 r_1 和 r_2, 利用韦达定理

$$r_1+r_2=-p \quad r_1r_2=q$$

可将

$$y''+py'+qy=f(x)$$

化为

$$y''-(r_1+r_2)y'+r_1r_2y=f(x)$$

即

$$(y'-r_1y)'-r_2(y'-r_1y)=f(x)$$

令 $y'-r_1y=y_1$, 则

$$y''+py'+qy=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}y'-r_1y=y_1\\ y_1'-r_2y_1=f(x)\end{cases}$$

前文我们已经推导过一阶常系数线性微分方程的通解, 故

$$y=\mathrm{e}^{r_1x}\int y_1\mathrm{e}^{-r_1x}\mathrm{d}x$$

$$y_1=\mathrm{e}^{r_2x}\int f(x)\mathrm{e}^{-r_2x}\mathrm{d}x$$

故 $y''+py'+qy=f(x)$ 的特解为

$$y=\mathrm{e}^{r_1x}\int\mathrm{e}^{(r_2-r_1)x}\left[\int f(x)\mathrm{e}^{-r_2x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$$

在应用以上特解公式时, 积分常数均应取 0.

例 1.29 求 $y''-2y'+y=x^2$ 的特解.

解 特征根 $r_1=r_2=1$, 故

$$\begin{aligned}y^*&=\mathrm{e}^x\int\mathrm{e}^0\left[\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\\&=\mathrm{e}^x\int-\mathrm{e}^{-x}(x^2+2x+2)\mathrm{d}x\\&=x^2+4x+6\end{aligned}$$

□

例 1.30 求 $y''+2y'-3y=\mathrm{e}^x$ 的特解.

解 特征根 $r_1=1,r_2=-3$, 故

$$y^*=\mathrm{e}^x\int\mathrm{e}^{-4x}\left[\int\mathrm{e}^{4x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x\mathrm{e}^x$$

□

例 1.31 求 $y''-2y'+5y=x\mathrm{e}^x\sin(2x)$ 的特解.

解 特征根 $r_1=1+2i, r_2=1-2i$, 故

$$\begin{aligned}
y^* &= \mathrm{e}^{1+2ix}\int \mathrm{e}^{-4ix}\left[\int x\mathrm{e}^{x}\sin(2x)\mathrm{e}^{(-1+2i)x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e}^{1+2ix}\int \mathrm{e}^{-4ix}\left[\int x\mathrm{e}^{4ix}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e}^{1+2ix}\int\left(\frac{1}{16}-\frac{i}{4}x\right)\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e}^{x}(\cos(2x)+i\sin(2x))\left(\frac{x}{16}-\frac{i}{8}x^2\right)\\
&= \mathrm{e}^{x}\left(-\frac{x^2}{8}\cos(2x)+\frac{x}{16}\sin(2x)\right) \quad \text{取虚部}
\end{aligned}$$

□

1.6 常数变易法

常数变易法 (Variation of Parameters) 是拉格朗日十一年的研究成果, 是解线性微分方程行之有效的一种方法. 前文在讲一阶微分方程的时候也有所涉及, 下面来介绍一般的常数变易法.

考虑如下二阶常系数线性微分方程

$$ay''+by'+cy=g$$

齐次形式为

$$ay''+by'+cy=0$$

我们知道它有两个线性无关的解 y_1 和 y_2, 于是齐次方程的通解为

$$y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

接下来考虑非齐次情况. 若令

$$y=y_1u+y_2v$$

并要求它

$$y_1u'+y_2v'=0$$

则

$$\begin{aligned}
y' &= [y_1u+y_2v]'\\
&= [y_1u]'+[y_2v]'\\
&= y_1'u+y_1u'+y_2'v+y_2v'\\
&= y_1'u+y_2'v+\underbrace{y_1u'+y_2v'}_{0}
\end{aligned}$$

所以

$$y'=y_1'u+y_2'v$$

接着就有

$$\begin{aligned}
y'' &= [y_1'u+y_2'v]'\\
&= y_1''u+y_1'u'+y_2''v+y_2'v'\\
&= y_1'u'+y_2'v'+y_1''u+y_2''v
\end{aligned}$$

这里强调一下,y_1 和 y_2 是对应齐次方程的解, 满足

$$
\begin{aligned}
a y_1'' + b y_1' + c y_1 = 0\\
a y_2'' + b y_2' + c y_2 = 0
\end{aligned}
$$

代入原方程就有

$$
\begin{aligned}
a y'' + b y' + c y &= g\\
\hookrightarrow \quad a\left[y_1'u' + y_2'v' + y_1''u + y_2''v\right] + b\left[y_1'u + y_2'v\right] + c\left[y_1 u + y_2 v\right] &= g\\
\hookrightarrow a\left[y_1'u' + y_2'v'\right] + [\underbrace{a y_1'' + b y_1' + c y_1}_{0}]u + [\underbrace{a y_2'' + b y_2' + c y_2}_{0}]v &= g
\end{aligned}
$$

于是, 原微分方程变为

$$
y_1'u' + y_2'v' = \frac{g}{a}
$$

由上述推导, 我们容易知道, 只要通过

$$
\begin{cases}
y_1 u' + y_2 v' = 0\\
y_1'u' + y_2'v' = \dfrac{g}{a}
\end{cases}
$$

解出 u' 和 v', 就可以得出原方程的通解

$$
y = y_1 u + y_2 v
$$

显然常数变易法可以推广到 n 阶微分方程上, 这里不做讨论, 感兴趣的可以参阅 [2]

例 1.32 求 $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 3x^2$ 的通解.

解 注意到它对应的齐次方程有两个解

$$
y_1 = x \qquad y_2 = x^2
$$

我们有 $y = xu + x^2 v$. 解方程

$$
\begin{cases}
xu' + x^2 v' = 0\\
u' + 2xv' = 3
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
u' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & x^2\\ 3 & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^2\\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = -3\\[3em]
v' = \dfrac{\begin{vmatrix} x & 0\\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & x^{\mathrm{e}}2\\ 1 & 2x \end{vmatrix}} = \dfrac{3}{x}
\end{cases}
$$

于是

$$
u \int -3\mathrm{d}x = -3x + c_1 \qquad v = \int \frac{3}{x}\mathrm{d}x = 3\ln|x| + c_2
$$

故通解为

$$
\begin{aligned}
y = xu + x^2 v &= x[-3x + c_1] + x^2[3\ln|x| + c_2]\\
&= -3x^2 + c_1 x + 3x^2\ln|x| + c_2 x^2\\
&= 3x^2\ln|x| + c_1 x + (c_2 - 3)x^2\\
&= 3x^2\ln|x| + C_1 x + C_2 x^2
\end{aligned}
$$

□

参考文献

[1] Wenfeng Chen. “Differential Operator Method of Finding A Particular Solution to An Ordinary Nonhomogeneous Linear Differential Equation with Constant Coefficients”. In: (2018).

[2] *Variation of Parameters (A Better Reduction of Order Method for Nonhomogeneous Equations*. URL: http://howellkb.uah.edu/public_html/DEtext/Part3/Var_Parameter.pdf.

[3] 下面这个微分方程的特解如何求出呢? URL: https://www.zhihu.com/question/419278438.

[4] 张剑锋 吕奕莹 余彤. “求常微分方程积分因子的一般方法 ”. In: 丽水学院学报 33.2 (Jan. 2011), pp. 80–81, 86.

[5] 晏林 寸得偶. “积分因子求法探讨 ”. In: 文山学院学报 29.3 (2016), p. 6.

[6] 张海模 曲贺梅. “二阶常系数非齐次线性微分方程特解公式的推导 (原文有一些计算错误)”. In: 天中学刊 18.5 (2003), p. 2.

[7] 胡彦霞. “一阶常微分方程积分因子解法 (原文有一些计算错误)”. In: 井冈山大学学报: 自然科学版 40.6 (2019), p. 5.