奇异信号：阶跃函数与冲击函数

函数本身有不连续点(跳变点)或其导数与积分有不连续点的一类函数统称为**奇异信号或奇异函数**。

- 阶跃函数
- 冲激函数

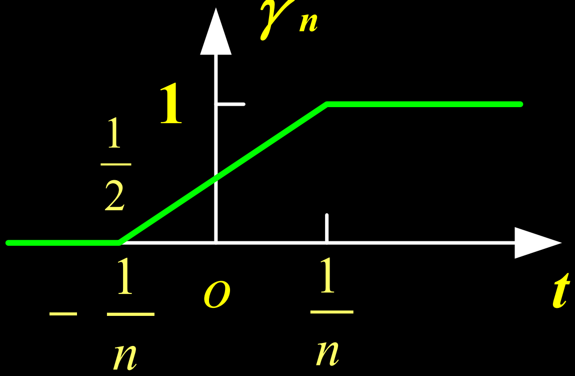
是两个典型的奇异函数。

一、单位阶跃函数

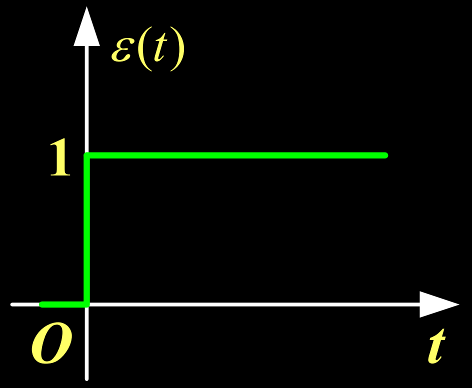
1. 定义

下面采用求函数序列极限的方法定义阶跃函数。

选定一个函数序列$\gamma_n(t)$如图所示。



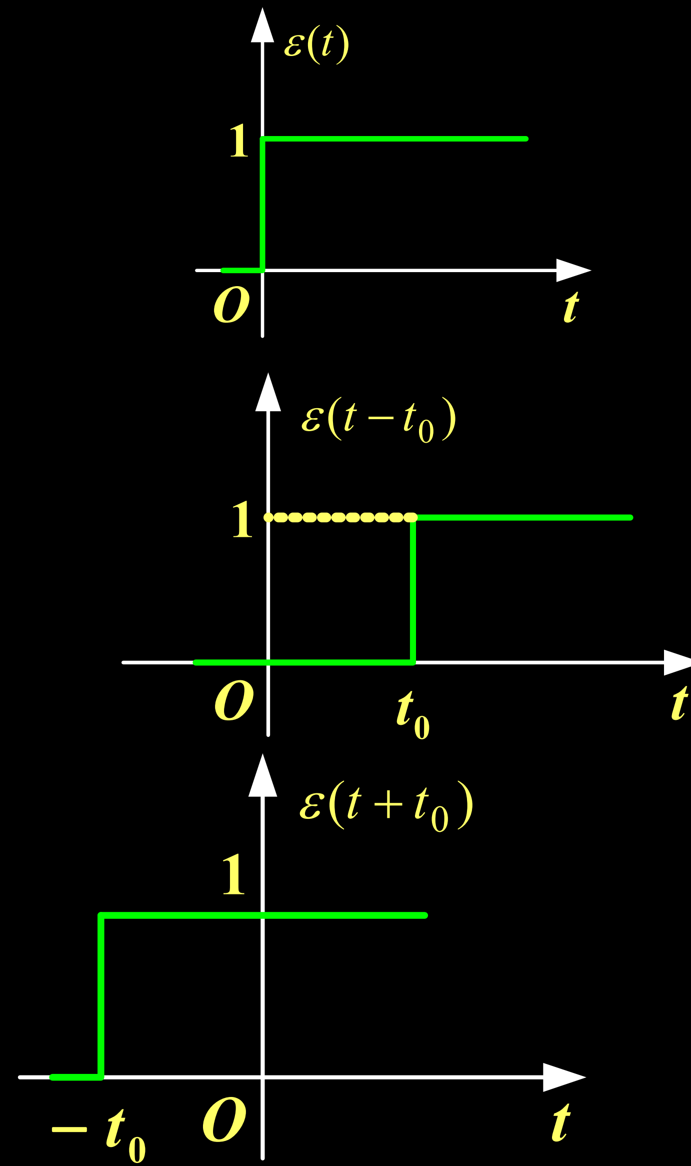
$$\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{2}, & t=0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$$



2. 延迟单位阶跃信号

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases},\quad t_0>0$$

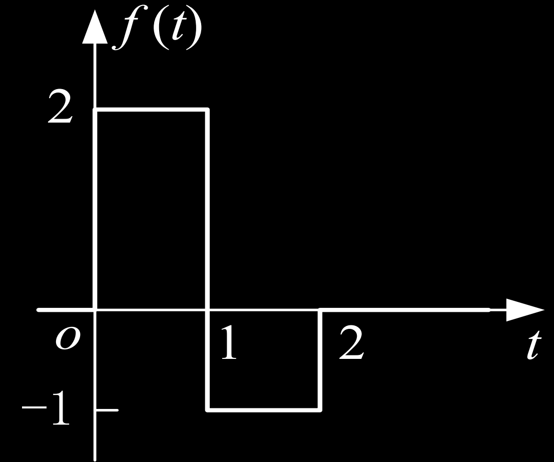
$$\varepsilon(t+t_0)=\begin{cases}0 & t<-t_0\\ 1 & t>-t_0\end{cases},\quad t_0>0$$



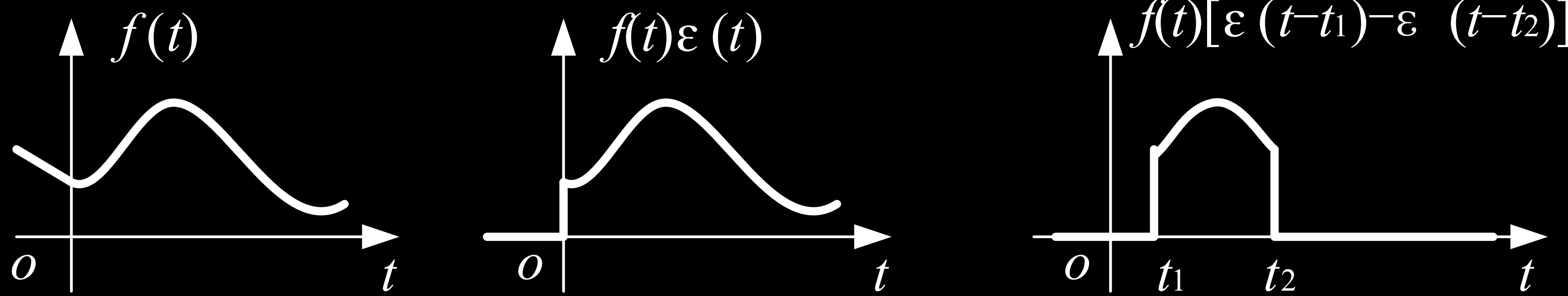
3. 阶跃函数的性质

（1）可以方便地表示某些信号

$$f(t) = 2\varepsilon(t) - 3\varepsilon(t-1) + \varepsilon(t-2)$$



（2）用阶跃函数表示信号的作用区间



(a) (b) (c)

（3）积分 $\int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau = t\varepsilon(t)$

二. 单位冲激函数

单位冲激函数是个奇异函数，它是对强度极大，作用时间极短一种物理量的理想化模型。

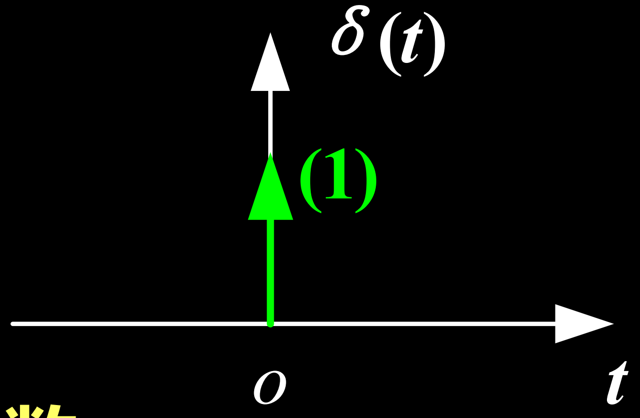
- 狄拉克(Dirac)定义
- 函数序列定义$\delta(t)$
- 冲激函数与阶跃函数关系
- 冲激函数的性质

1. 狄拉克(Dirac)定义

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1 \end{cases}$$

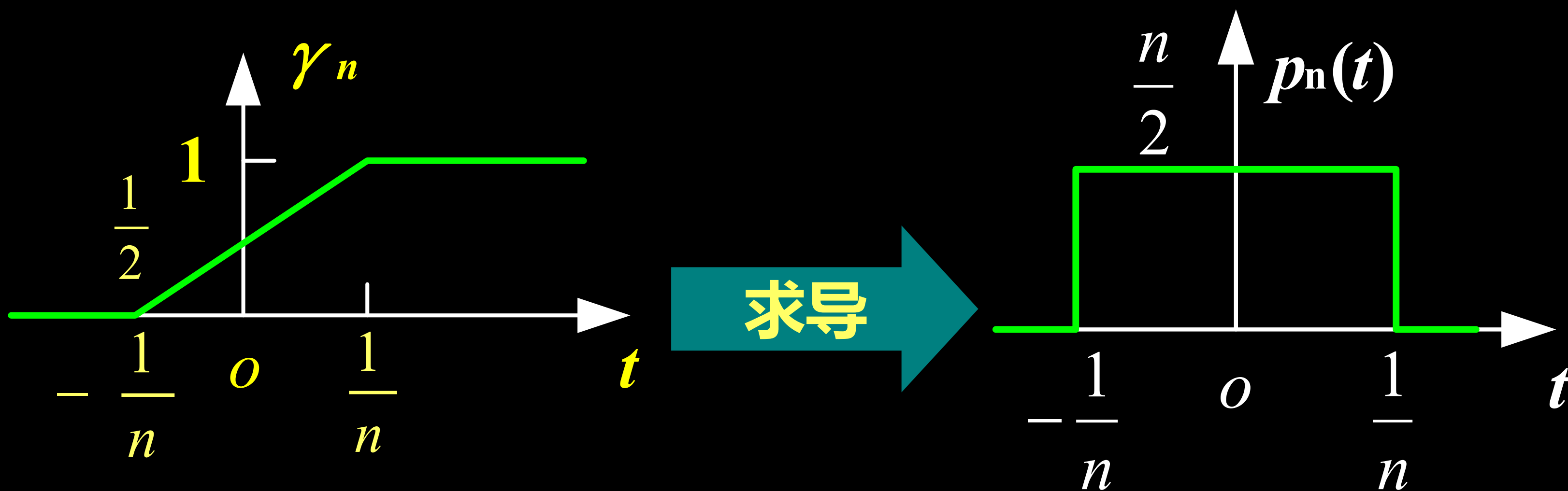
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\,\mathrm{d}t$$

- **函数值只在$t=0$时不为零；**
- **积分面积为1；**
- **$t=0$ 时，$\delta(t) \to \infty$，为无界函数。**



2.函数序列定义$\delta(t)$

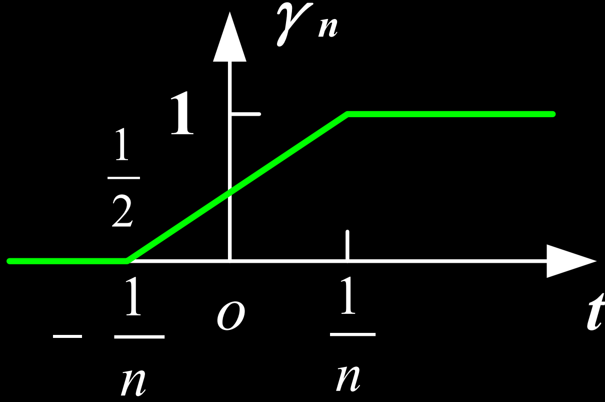
对$\gamma_n(t)$求导得到如图所示的矩形脉冲$p_n(t)$ 。



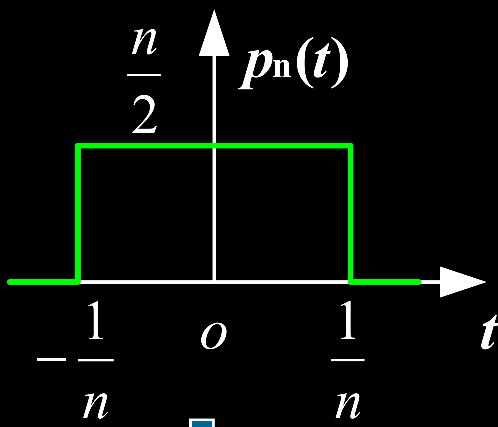
$$\delta(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} p_n(t)$$

高度无穷大，宽度无穷小，面积为1的对称窄脉冲。

3. $\delta(t)$与$\varepsilon(t)$的关系

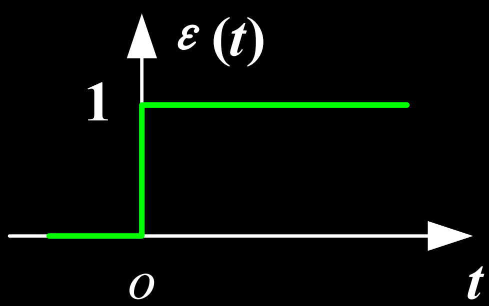


求导

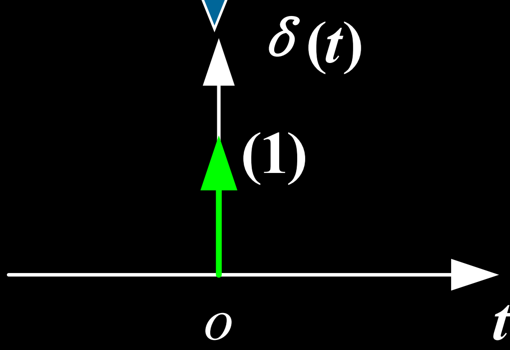


$$p_n(t)=\frac{\mathrm{d}\gamma_n(t)}{\mathrm{d}t}$$

$n\to\infty$



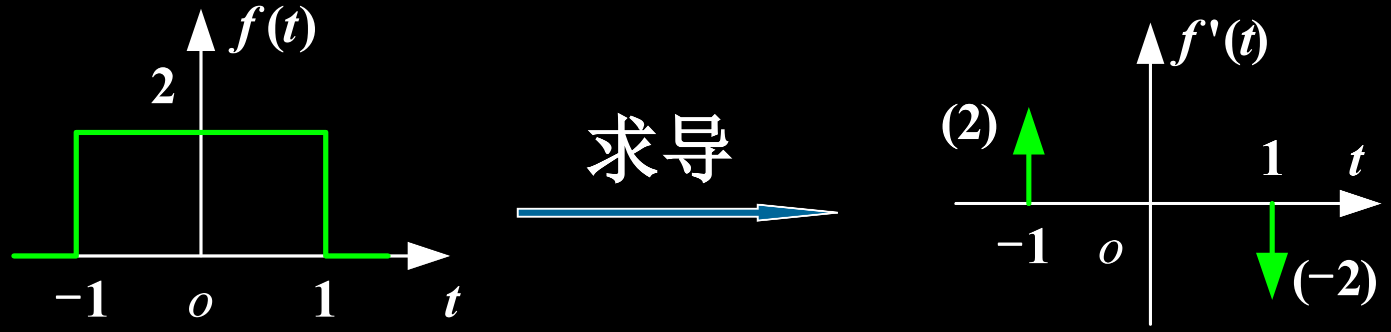
求导



$$\boxed{\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

$$\boxed{\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}}$$

引入冲激函数之后，间断点的导数也存在



$$f(t) = 2\varepsilon(t+1) - 2\varepsilon(t-1)$$

$$f'(t) = 2\delta(t+1) - 2\delta(t-1)$$

三. 冲激函数的性质

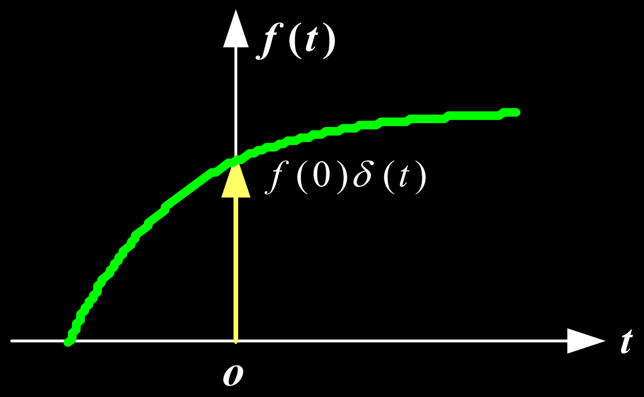
- 取样性
- 冲激偶
- 尺度变换
- 复合函数形式的冲激函数

1. 取样性(筛选性)

如果$f(t)$在$t = 0$处连续，且处处有界，则有

$$\delta(t)f(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$$



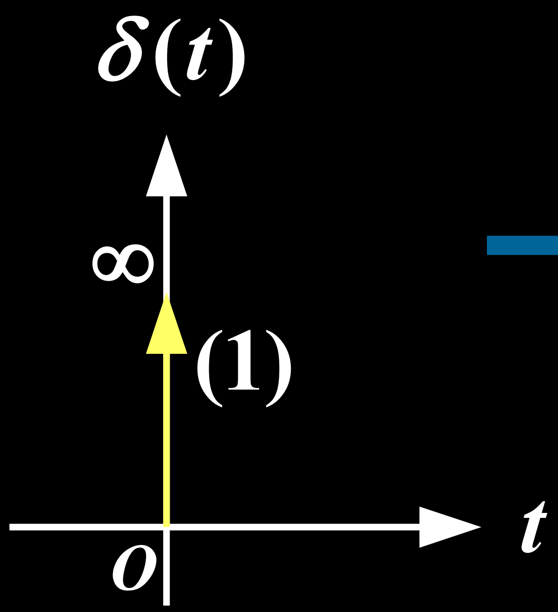
对于平移情况：

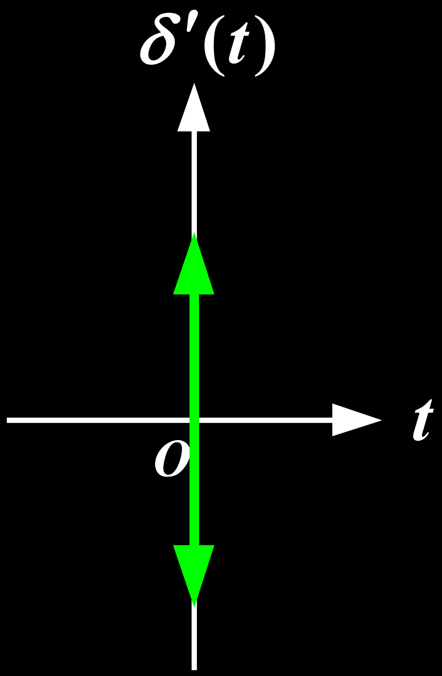
$$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$$

2. 冲激偶

冲激函数的导数也称冲激偶





冲激偶的性质

① $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

② $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\,'(t) f(t)\,\mathrm{d}t = -f\,'(0)$

$\delta^{(n)}(t)$的定义： $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n f^{(n)}(0)$

$\delta'(t)$的平移： $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\,'(t-t_0) f(t)\,\mathrm{d}t = -f'(t_0)$

③ $\int_{-\infty}^{t} \delta'(t)\,\mathrm{d}t = \delta(t)$

例 $\int_{-\infty}^{\infty} (t-2)^2 \delta'(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(t-2)^2]\Big|_{t=0} = -2(t-2)\Big|_{t=0} = 4$

3. 对$\delta(t)$的尺度变换

$$\delta^{(n)}(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a^n} \delta^{(n)}(t)$$

$$\delta'(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a} \delta'(t)$$

推论:

(1) $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ $\qquad \boldsymbol{\delta(2t) = 0.5\delta(t)}$

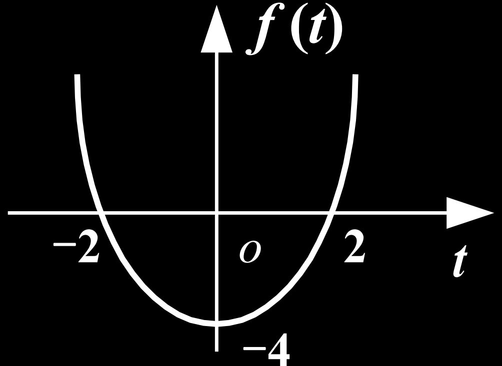
(2) 当$a = -1$时 $\delta^{(n)}(-t) = (-1)^n \delta^{(n)}(t)$

所以， $\delta(-t) = \delta(t)$ 为偶函数，

$\delta'(-t) = -\delta'(t)$为奇函数

4. 复合函数形式的冲激函数

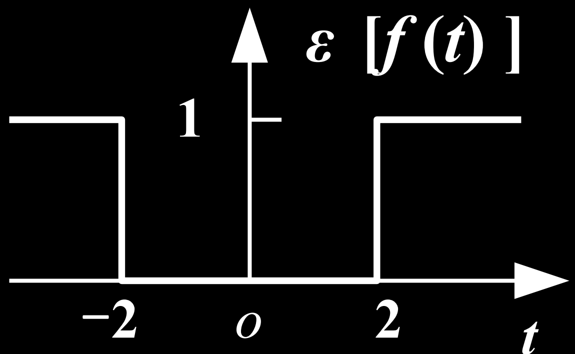
实际中有时会遇到形如δ[*f*(*t*)]的冲激函数，其中*f*(*t*)是普通函数。并且*f*(*t*) = 0有*n*个互不相等的实根 t_i(*i*=1，2，…，*n*)



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\varepsilon[f(t)]\}=\delta[f(t)]\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\delta[f(t)]=\frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\varepsilon[f(t)]\}$$

ε[*f*(*t*)]图示说明：　例*f*(*t*)= $t^2 - 4$



$\varepsilon(t^2 - 4)=1 -\varepsilon(t+2)+\varepsilon(t - 2)$

$\boldsymbol{\varepsilon(t^2-4)=1-\varepsilon(t+2)+\varepsilon(t-2)}$

$$\delta[f(t)]=\frac{1}{f'(t)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{\varepsilon[f(t)]\}$$

$$\delta[t^2-4]=\frac{1}{2t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\varepsilon(t^2-4)]=\frac{1}{2t}[-\delta(t+2)+\delta(t-2)]$$

$$=\frac{1}{2\times 2}\delta(t+2)+\frac{1}{2\times 2}\delta(t-2)=\frac{1}{4}\delta(t+2)+\frac{1}{4}\delta(t-2)$$

一般地，$$\boxed{\delta[f(t)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)}$$

这表明，$\boldsymbol{\delta[f(t)]}$是位于各$t_i$处，强度为$\dfrac{1}{|f'(t_i)|}$的$\boldsymbol{n}$个冲激函数构成的冲激函数序列。

$$\delta(4t^2-1)=\frac{1}{4}\delta(t+\frac{1}{2})+\frac{1}{4}\delta(t-\frac{1}{2})$$

注意：如果$f(t)=0$有重根，$\delta[f(t)]$无意义。

冲激函数的性质总结

（1）取样性

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t=f(0)$$

（2）奇偶性

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

（3）比例性

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

（4）微积分性质

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\varepsilon(t)$$

（5）冲激偶

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t=-f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta'(t)\,\mathrm{d}t=\delta(t)$$

$$\delta'(-t)=-\delta'(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\,\mathrm{d}t=0$$