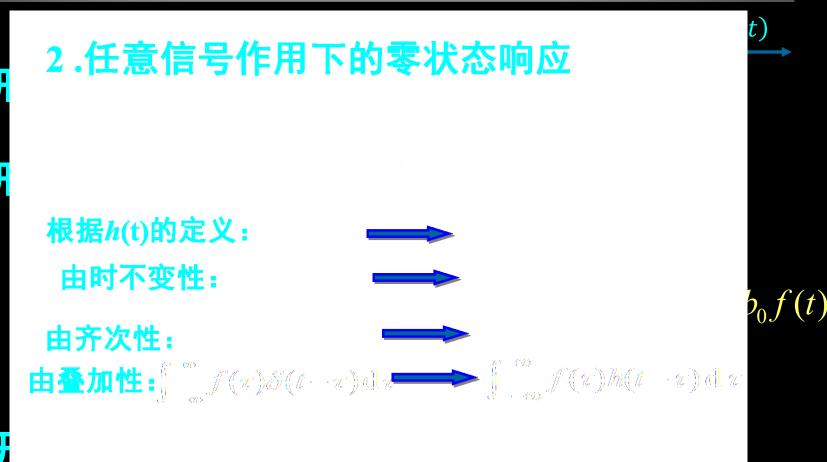


# §2.2 系统微分方程的经典解

- 微分方程的齐次解和特解
- 微分方程的全解
- 关于微分方程的初始值

# 多条统与信息于描

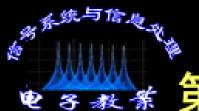
# 多数 第2章 连续信号与系统的时域分析



f(x)h(t x)dx卷积积分

付

矷



## 



研究对象: LT 系统

研究步骤: ▶ 建立方程

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t)$$

$$= b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \dots + b_1f^{(1)}(t) + b_0f(t)$$

> 求解方程

与数学求解不同,卷积的引入

研究范围: 时域分析 t

研究方法: 卷积积分



# 一、微分方程的经典解

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t)$$
  
=  $b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \dots + b_1f^{(1)}(t) + b_0f(t)$ 

微分方程的经典解:完全解 = 齐次解 + 特解。

## 1. 齐次解

#### 由特征方程→求出特征根→写出齐次解形式

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}$$

#### n 阶常系数齐次线性方程 的通解情况表:

特征方程 $\lambda^{n} + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_{1}\lambda + p_{0} = 0$		$n$ 阶常系数齐次线性方程 $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_1y^{l} + p_0y = 0$
(i)	単实根ル	一项: Ce <sup>λx</sup>
(ii)	一对单复根 $\alpha \pm ioldsymbol{eta}$	两项: $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
(iii)	$k$ 重实根 $\lambda$	$k$ 项: $e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1})$
(iv)	$k$ 重复根 $\alpha \pm i\beta$	2k 项:
		$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1})\cos \beta x]$

注意重根情况处理方法。



 $(D_1 + D_2 x + \dots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$ 



### 2. 特解

# 根据微分方程右端函数式形式,设含待定系数的特解函数式→代入原方程,比较系数定出特解。

激励f(t)	响应 $y(t)$ 的特解 $y_p(t)$
F(常数)	P(常数)
$t^m$	$P_{m}t^{m} + P_{m-1}t^{m-1} + \dots + P_{1}t + P_{0}$ (特征根均不为0) $t^{r}(P_{m}t^{m} + P_{m-1}t^{m-1} + \dots + P_{1}t + P_{0})$ (有 $r$ 重为0的特征根)
$e^{\alpha t}$	$Pe^{\alpha t}(\alpha$ 不等于特征根) $ (P_1t + P_0)e^{\alpha t}(\alpha$ 等于特征单根) $ (P_rt^r + P_{r-1}t^{r-1} + \dots + P_0)e^{\alpha t}(\alpha$ 等于 $r$ 重特征根)
$\cos(\beta t) \sin(\beta t)$	$P_1\cos(\beta t)+P_2\sin(\beta t)$ (特征根不等于 $\pm j\beta$ )



### 3. 全解

完全解 = 齐次解 + 特解

由初始值定出齐次解中的待定常数Ci。



- · 齐次解的函数形式仅与系统本身的特性有关,而与激励f(t)的函数形式无关,称为系统的固有响应或自由响应;
- •特解的函数形式由激励确定,称为强迫响应。



## 二. 微分方程的初始值

若输入f(t)是在t=0时接入系统,则确定待定系数 $C_i$ 时用t=0,时刻的<mark>初始值</mark>,即 $y^{(j)}(0_+)$  (j=0,1,2...,n=1)。

而 $y^{(j)}(0_+)$ 有今了输入信号的作用。不便干描述系统的

而 $y^{(j)}(0_+)$ 包含了输入信号的作用,不便于描述系统的历史信息。

在t=0-时,激励尚未接入,该时刻的值y<sup>(j)</sup>(0-)反映了系统的历史情况而与激励无关。称这些值为初始状态或起始值。

通常,需要从已知的初始状态y(j)(0-)设法求得y(j)(0<sub>+</sub>)。

例1 例2

》当微分方程右端含有冲激函数(及其各阶导数)时,响应y(t)及其各阶导数中,有些在t=0处将发生跃变。否则如果右端不含冲激函数时,不会跃变。