全解举例

例 描述某系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$$

求（1）当$f(t) = 2e^{-t}$，$t\geq0$；$y(0)=2$，$y'(0)= -1$时的全解；

（2）当$f(t) = e^{-2t}$，$t\geq0$；$y(0)= 1$，$y'(0)=0$时的全解。

解: (1) 特征方程为$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

其特征根$\lambda_1= -2$，$\lambda_2= -3$。

齐次解为　$y_h(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}$

当$f(t) = 2e^{-t}$时，其特解可设为 ：

$y_p(t) = Pe^{-t}$

将其代入微分方程得

$Pe^{-t} + 5(-Pe^{-t}) + 6Pe^{-t} = 2e^{-t}$　解得 $P=1$

特解为　$y_p(t) = e^{-t}$

$y(0)=2$，$y'(0)=-1$

全解为： $y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + e^{-t}$

其中 待定常数C_1,C_2由初始条件确定。

$$y(0) = C_1+C_2+ 1 = 2，\quad y'(0) = -2C_1 - 3C_2 - 1= -1$$

解得 $C_1 = 3$ ， $C_2 = -2$

$y(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-3t} + e^{-t}$, $t\geq0$

（2）齐次解同上。当激励$f(t)=e^{-2t}$时，其指数与特征根之一相重。故其特解为

$$y_p(t) = (P_1t + P_0)e^{-2t}$$ 代入方程$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = f(t)$

$$P_1e^{-2t} = e^{-2t}$$

所以 $P_1= 1$ 但P_0不能求得。特解为

$$y_p(t) = (t + P_0)e^{-2t}$$

全解

$$y_h(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}$$

$$y_p(t) = (t + P_0)e^{-2t}$$

全解为

$$y(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + te^{-2t} + P_0e^{-2t}$$
$$= (C_1+P_0)e^{-2t} + C_2e^{-3t} + te^{-2t}$$

将初始条件$y(0)= 1$，$y'(0)=0$代入，得

$$y(0) = (C_1+P_0) + C_2=1\ ,\quad y'(0)= -2(C_1+P_0) -3C_2+1=0$$

解得 $C_1 + P_0 = 2$,$C_2= -1$

全解为: $y(t) = 2e^{-2t} - e^{-3t} + te^{-2t}$, $t\geq 0$

上式第一项的系数$C_1+P_0= 2$，不能区分C_1和P_0，因而也不能区分自由响应和强迫响应。