指数形式傅氏级数推导

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$$

$$=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2}[\mathrm{e}^{j(n\Omega t+\varphi_n)}+\mathrm{e}^{-j(n\Omega t+\varphi_n)}]$$

$$=\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n}\mathrm{e}^{jn\Omega t}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{-j\varphi_n}\mathrm{e}^{-jn\Omega t}$$

上式中第三项的n用$-n$代换，$A_{-n}=A_n$，$\varphi_{-n}=-\varphi_n$，则上式写为

$$\frac{A_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n}\mathrm{e}^{jn\Omega t}+\frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{-\infty}A_n\,\mathrm{e}^{j\varphi_n}\mathrm{e}^{jn\Omega t}$$

因为$A_0=A_0 e^{j\varphi_0} e^{j0\Omega t}$， $\varphi_0=0$

所以
$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$$

$$a_n=A_n\cos\varphi_n$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

令复数 $\frac{1}{2}A_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}=\left|F_n\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}=F_n$

$$F_n=\frac{1}{2}A_n e^{\mathrm{j}\varphi_n}=\frac{1}{2}(A_n\cos\varphi_n+\mathrm{j}A_n\sin\varphi_n)=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{j}b_n)$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t-\mathrm{j}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

表明：任意周期信号$f(t)$可分解为许多不同频率的虚指数信号之和。$F_0=A_0/2$为直流分量。