§2.3 连续系统的时域响应

- 零输入响应和零状态响应
- 系统的阶跃响应和冲击响应

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)$$
$$=b_mf^{(m)}(t)+b_{m-1}f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1f^{(1)}(t)+b_0f(t)$$

微分方程的经典解：完全解 = 齐次解 + 特解。

全响应=自由响应+强迫响应

• **齐次解**的函数形式仅与系统本身的特性有关，而 与激励$f(t)$的函数形式无关，

$$y(\cdot)=y_{zs}(\cdot)+y_{zi}(\cdot)$$

应或**自由响应**；

• **特解**的函数形式由激励确定，称为**强迫响应**。

由初始值定出齐次解中的待定常数C_i。

在t=0-时，激励尚未接入，该时刻的值$y^{(j)}(0_-)$反映了**系统的历史情况**而与激励无关。称这些值为**初始状态**或**起始值**。通常，需要从已知的初始状态$y^{(j)}(0_-)$设法求得$y^{(j)}(0_+)$。

一、零输入响应和零状态响应

$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$,也可以分别用经典法求解。

$$y(0+) = y_{zi}(0+) + y_{zs}(0+)$$

$$y(0\text{-}) = y_{zi}(0\text{-}) + y_{zs}(0\text{-})$$

注意:

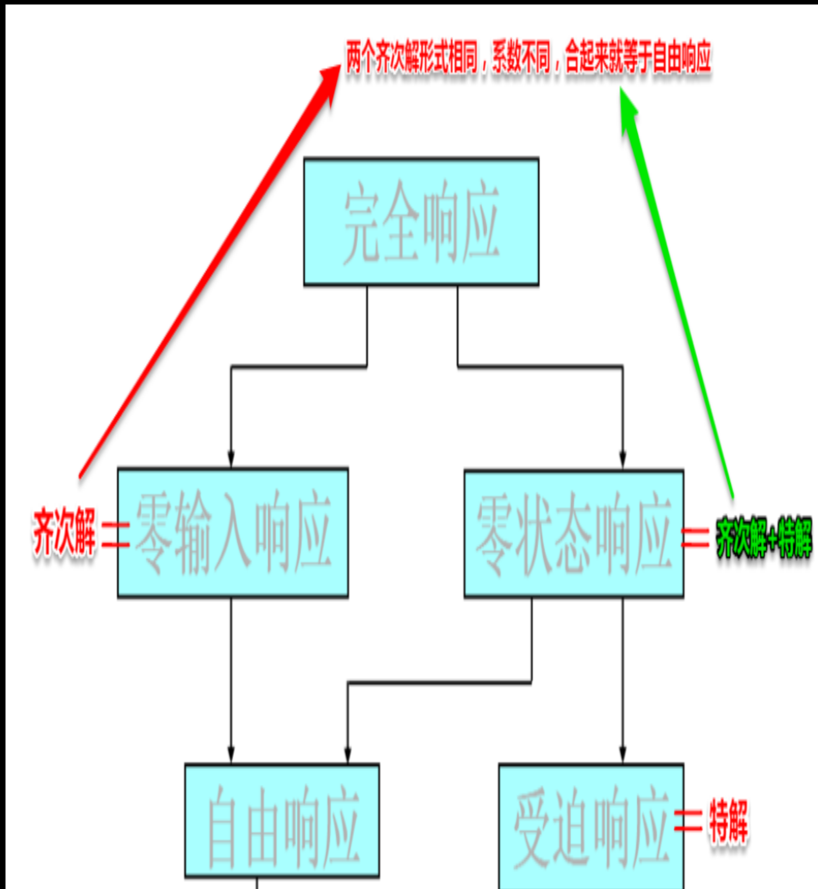
对于**零输入响应**，由于激励为零，故有

$$y_{zi}^{(j)}(0+) = y_{zi}^{(j)}(0-) = y^{(j)}(0-)$$

对于**零状态响应**，在t=0-时刻激励尚未接入，故应有

$$y_{zs}^{(j)}(0\text{-}) = 0$$

举例说明。 例1



$$\underbrace{r(t)}_{\text{全响应}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{r_p(t)}_{\text{强迫响应}}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_{x_i} e^{\lambda_i t}}_{r_{zi}(t)\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_{f_i} e^{\lambda_i t} + r_p(t)}_{r_{zs}(t)\text{零状态响应}}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}}_{\text{自由响应}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_{x_i} e^{\lambda_i t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_{f_i} e^{\lambda_i t}}_{\text{零状态响应的齐次解}}$$

自由响应指的是，输出信号y(t)中跟t=0+时刻的初状态相关的项
包含全部的零输入响应+部分零状态响应。

二、系统的阶跃响应和冲击响应

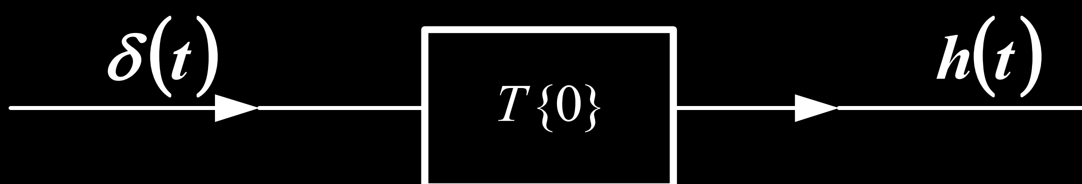
- <u>冲激响应</u>
- <u>阶跃响应</u>

1. 系统冲激响应

1．定义

由单位冲激函数**δ(t)**所引起的**零状态响应**称为**单位冲激响应**，简称**冲激响应**，记为***h*(t)**。

$$h(t)=\mathrm{T}\left[\delta(t),\{0\}\right]$$



2. 系统阶跃响应

由单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 所引起的零状态响应称为单位阶跃响应，简称阶跃响应，记为 **g(t)**。

$$g(t) = \mathrm{T}\left[\varepsilon(t), \{0\}\right]$$

线性时不变系统满足微、积分特性

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau, h(t) = \frac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

阶跃响应是冲激响应的积分，注意积分限：

$\int_{-\infty}^{t}$,对因果系统：$\int_{0_-}^{t}$

2. 系统冲激响应的求解

- 冲激响应的数学模型

对于LTI系统,可以用一个*n*阶微分方程表示

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d y(t)}{dt}+a_0 y(t)=$$

$$b_m\frac{d^m f(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{d f(t)}{dt}+b_0 f(t)$$

响应及其各阶导数(最高阶为*n*次)

激励及其各阶导数(最高阶为*m*次)

令 $f(t)=\delta(t)$

则 $y(t)=h(t)$

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1 h^{(1)}(t)+a_0 h(t)$$

$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta^{(1)}(t)+b_0\delta(t)$$

- $h(t)$解答的形式

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h^{(1)}(t)+a_0h(t)$$
$$=b_m\delta^{(m)}(t)+b_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1\delta^{(1)}(t)+b_0\delta(t)$$

由于$\delta(t)$及其导数在 $t\geq 0_+$ 时都为零，因而方程式右端的自由项恒等于零，这样原系统的冲激响应形式与齐次解的形式相同。

①与特征根有关

例:当特征根均为单根时

$$h(t)=\left[\sum_{i=1}^{n}C_i e^{\lambda_i t}\right]\varepsilon(t)$$

举例

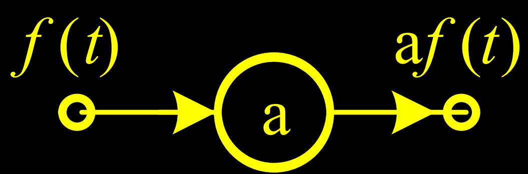
n 阶常系数齐次线性方程 的通解情况表:

特征方程 $\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+p_1\lambda+p_0=0$	n 阶常系数齐次线性方程 $y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_1y'+p_0y=0$
(i) 单实根λ	一项：$Ce^{\lambda x}$
(ii) 一对单复根$\alpha\pm i\beta$	两项：$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
(iii) k 重实根λ	k 项：$e^{\lambda x}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$
(iv) k 重复根$\alpha\pm i\beta$	$2k$ 项：$e^{\alpha x}[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x$ $(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x]$

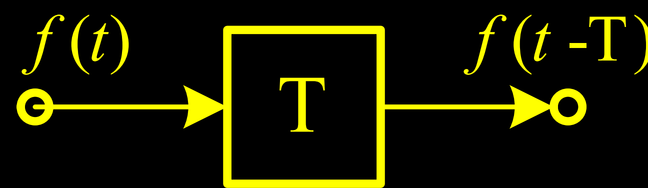
②与n, m相对大小有关

- 当$n>m$时，$h(t)$不含$\delta(t)$及其各阶导数；
- 当$n=m$时，$h(t)$中应包含$\delta(t)$；
- 当$n<m$时，$h(t)$应包含$\delta(t)$及其各阶导数。

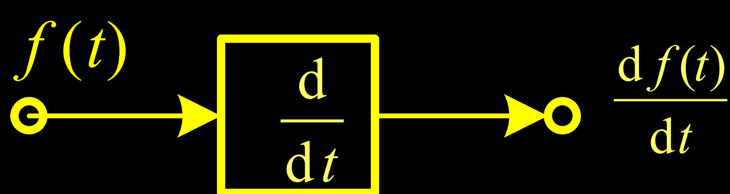
3. 基本单元的冲激响应



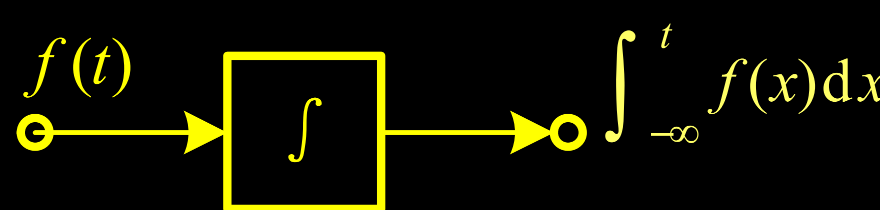
(a) 数乘器 $h(t) = a\,\delta(t)$



(b) 延时器 $h(t) = \delta(t-T)$



(c) 微分器 $h(t) = \delta'(t)$



(d) 积分器 $h(t) = \varepsilon(t)$