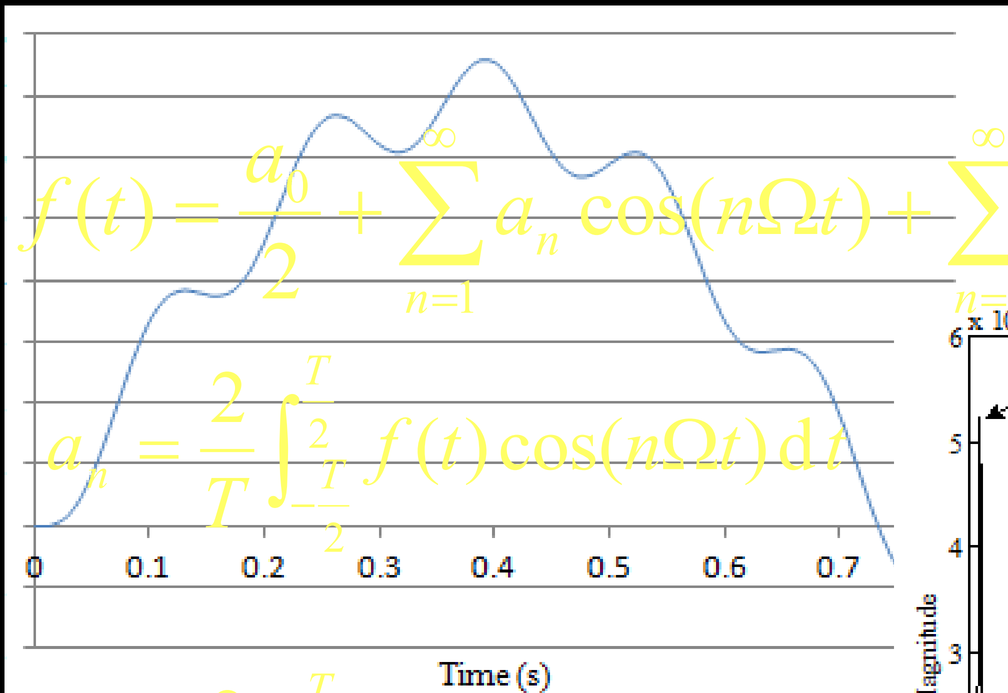
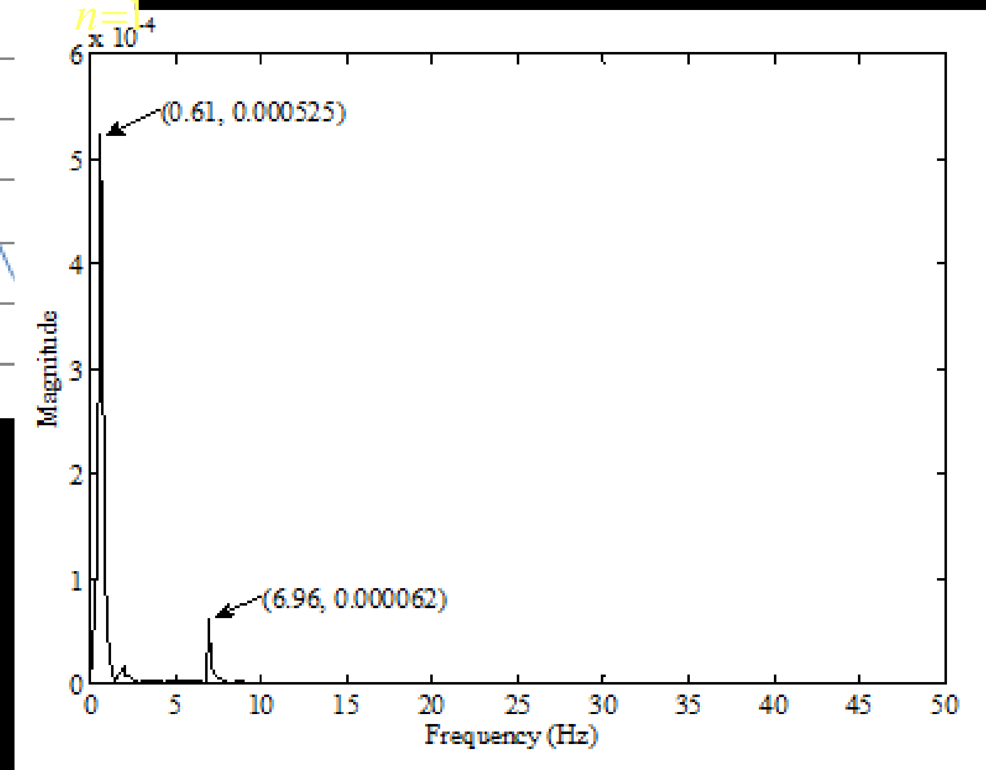
第三章 连续信号与系统的频域分析

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega t)$$

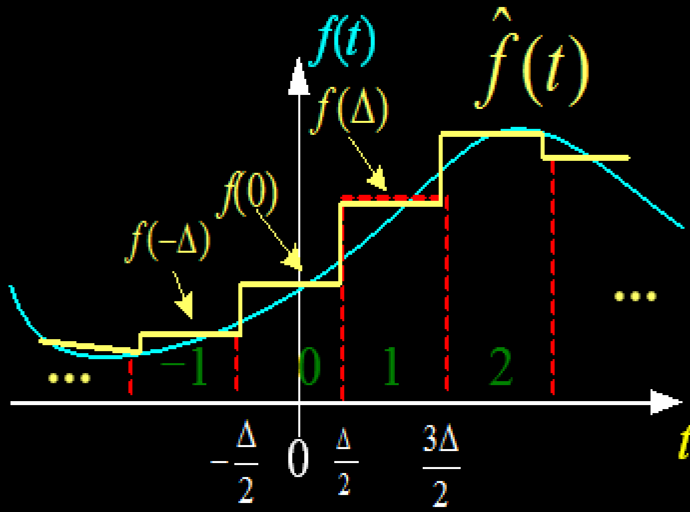
$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$$





第三章 连续信号与系统的频域分析



- 时域分析：以冲激函数为基本
可由多个冲激函数组成

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{f}(t)=f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\boxed{y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(t)*h(t)}$$

- 频域分析：以正弦信号和虚指数信号为基本信号，任意输入信号可由多个这样的函数组成

第三章 连续信号与系统的频域分析

本章由前面的**时域分析**转入**频域分析**。频域分析将**时间变量**变换成**频率变量**，揭示了信号内在的频率特性、信号时间特性与其频率特性之间的密切关系。从而导出了一些重要概念，如频谱、带宽、调制等。

傅里叶变换

傅里叶变换是在傅里叶正交 产
生的，这方面的问题也称为 。

将信号进行正交分解，即分
数函数的组合。

欧拉公式

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

$\sin t = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})/2$

$\cos t = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$

第三章 连续信号与系统的频域分析

§3.1 信号在正交函数空间的分解

§3.2 周期信号的连续时间傅里叶级数

§3.3 周期信号与非周期信号的频谱分析

§3.4 LTI系统的频域分析

§3.5 取样定理

§3.1 信号在正交函数空间的分解

- 矢量的正交与分解
- 正交函数集
- 信号的正交函数分解

一、矢量正交与分解

- **矢量正交的定义：**

指矢量$V_x = (v_{x1}, v_{x2}, v_{x3})$与$V_y = (v_{y1}, v_{y2}, v_{y3})$的内积为0。即

$$V_x V_y^T = \sum_{i=1}^{3} v_{xi} v_{yi} = 0$$

- **正交矢量集：**指由两两正交的矢量组成的矢量集合

如三维空间中，以矢量

$v_x=（2，0，0）$、$v_y=（0，2，0）$、$v_z=（0，0，2)$

所组成的集合就是一个正交矢量集。且完备.

矢量$A=(2，5，8)$表示为 $A= v_x+ 2.5\, v_y+ 4\, v_z$

- **矢量空间**正交分解的概念可推广到**信号空间**。

二、正交函数集

1. 信号正交：

定义在(t_1，t_2)区间的$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t)\varphi_2^{\,*}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$ (两函数的内积为0)

则称$\varphi_1(t)$和$\varphi_2(t)$ 在区间(t_1，t_2)内**正交**。

2. 正交函数集：

若n个函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$构成一个函数集，这些函数在区间(t_1，t_2)内满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi_i(t)\varphi_j^{\,*}(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ K_i \neq 0, & i = j \end{cases}$$

则称此函数集为在区间(t_1，t_2)的**正交函数集**。

3. 完备正交函数集：

如果在正交函数集$\{\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)\}$之外，不存在函数$\varphi(t)(\neq 0)$满足

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi^*(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (i=1，2，…，n)$$

则称此函数集为完备正交函数集。

例如：

三角函数集 $\{1，\cos(n\Omega t)，\sin(n\Omega t)，n=1,2,…\}$

虚指数函数集$\{e^{jn\Omega t}，n=0，\pm 1，\pm 2，…\}$

是两组典型的在区间$(t_0，t_0+T)(T=2\pi/\Omega)$上的完备正交函数集。

三、信号的正交函数分解

设有n个函数$\varphi_1(t)$，$\varphi_2(t)$，…，$\varphi_n(t)$在区间(t_1, t_2)构成一个正交函数空间。将任一函数$f(t)$用这n个正交函数的线性组合来近似，可表示为

$$f(t) \approx C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \cdots + C_n\varphi_n$$

如何选择各系数C_j使$f(t)$与近似函数之间误差在区间(t_1, t_2)内为最小。

通常使误差的方均值(称为**均方误差**)最小。均方误差为

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}[f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)]^2 \, \mathrm{d}t$$

为使上式最小

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_i} = \frac{\partial}{\partial C_i}\int_{t_1}^{t_2}[f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)]^2 \, \mathrm{d}\, t = 0$$

展开上式中的被积函数，并求导。上式中只有两项不为0，写为

$$\frac{\partial}{\partial C_i}\int_{t_1}^{t_2}[-2C_i f(t)\varphi_i(t) + C_i^2\varphi_i^2(t)]\mathrm{d}\,t = 0$$

即 $$-2\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}\,t + 2C_i\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$$

WHY

$$K_i = \int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\,\mathrm{d}\,t$$

所以系数

$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}\,t}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\,\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial C_i} = \frac{\partial}{\partial C_i}\int_{t_1}^{t_2}[f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)]^2 \,\mathrm{d}\,t = 0$$

$(f(t) - C_1\varphi_1 - C_2\varphi_2 \ldots\ldots - C_n\varphi_n)x(f(t) - C_1\varphi_1 - C_2\varphi_2 \ldots\ldots - C_n\varphi_n)$

$= f(t)^2$-$f(t)$x $(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 \ldots\ldots + C_n\varphi_n)$

$- C_1\varphi_1$x $(f(t) - C_1\varphi_1 - C_2\varphi_2 \ldots\ldots - C_n\varphi_n)$

.

.

$-C_n\varphi_n$x $(f(t) - C_1\varphi_1 - C_2\varphi_2 \ldots\ldots - C_n\varphi_n)$

$(f(t) - C_1\varphi_1 - C_2\varphi_2 \ldots\ldots - C_n\varphi_n)x(f(t) - C_1\varphi_1 - C_2\varphi_2 \ldots\ldots - C_n\varphi_n)$

$= f(t)^2$-$f(t)$x $(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 \ldots\ldots + C_n\varphi_n)$

$- C_1\varphi_1$x $f(t) + C_1\varphi_1 C_1\varphi_1$

.

.

$-C_n\varphi_n$x $f(t) + C_n\varphi_n C_n\varphi_n)$

$$\frac{\partial}{\partial C_i}\int_{t_1}^{t_2}[-2C_i f(t)\varphi_i(t) + C_i^2\varphi_i^2(t)]\mathrm{d}t = 0$$

$$-2\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t + 2C_i\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

为使上式最小

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial C_i} = \frac{\partial}{\partial C_i}\int_{t_1}^{t_2}[f(t) - \sum_{j=1}^{n} C_j\varphi_j(t)]^2 \mathrm{d}t = 0$$

展开上式中的被积函数，并求导。上式中只有两项不为0，写为

$$\frac{\partial}{\partial C_i}\int_{t_1}^{t_2}[-2C_i f(t)\varphi_i(t) + C_i^2\varphi_i^2(t)]\mathrm{d}t = 0$$

即 $-2\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t + 2C_i\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\mathrm{d}t = 0$ WHY

所以系数

$$K_i = \int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\mathrm{d}t$$

$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\mathrm{d}t} = \frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t$$

代入，得最小均方误差（推导过程见教材p62）

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{j=1}^{n} C_j^2 K_j] \geq 0$$

在用正交函数去近似$f(t)$时，所取得项数越多，即n越大，则均方误差越小。当$n\to\infty$时（为完备正交函数集），均方误差为零。此时有

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{\infty} C_j^2 K_j$$

上式称为(Parseval)巴塞瓦尔公式，表明：在区间(t_1,t_2) $f(t)$所含能量恒等于$f(t)$在完备正交函数集中分解的各正交分量能量的之和。

函数$f(t)$可分解为无穷多项正交函数之和 $f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \varphi_j(t)$

小结

函数f(t)可分解为无穷多项正交函数之和

$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i\varphi_i(t)$$

$$C_i=\frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2}f(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t \qquad K_i=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_i^2(t)\,\mathrm{d}t$$

巴塞瓦尔能量公式

$$\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{\infty}C_i^2K_i$$

信号在时域的总能量等于信号在频域的总能量