第三章 连续信号与系统的频域分析

2.任意信号作用下的零状态响应

$f(t) \longrightarrow$ LTI系统 零状态 $\longrightarrow y_{zs}(t)$

根据$h(t)$的定义： $\delta(t) \Longrightarrow h(t)$单位冲激响应

由时不变性： $\delta(t-\tau) \Longrightarrow h(t-\tau)$

由齐次性： $f(\tau)\delta(t-\tau) \Longrightarrow f(\tau)\,h(t-\tau)$

由叠加性：$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$\begin{array}{ccc} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau & \Longrightarrow & \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ \| & & \| \\ f(t) & & y_{zs}(t) \end{array}$$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$ 卷积积分

率的

其基

- 系统的频率响应
- 信号的无失真传输
- 理想低通滤波器的特性
- 物理可实现系统对系统函数的要求

一、系统的频率响应

设LTI系统的冲激响应为$h(t)$，当激励是角频率ω的基本信号$e^{j\omega t}$时，其响应

$$y(t)=h(t)*e^{j\omega t}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=\lim_{T\to\infty} F_n T=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$ 是$h(t)$的傅里叶变换

记为$H(\mathrm{j}\,\omega)$，称为系统的**频率响应函数**。

$$y(t)=H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$H(j\omega)$反映了响应$y(t)$的幅度和相位随频率变化情况。

2 .任意信号作用下的零状态响应

根据$h(t)$的定义： $\delta(t) \Rightarrow h(t)$单位冲激响应

由时不变性： $\delta(t-\tau) \Rightarrow h(t-\tau)$

由齐次性： $f(\tau)\delta(t-\tau) \Rightarrow f(\tau)\,h(t-\tau)$

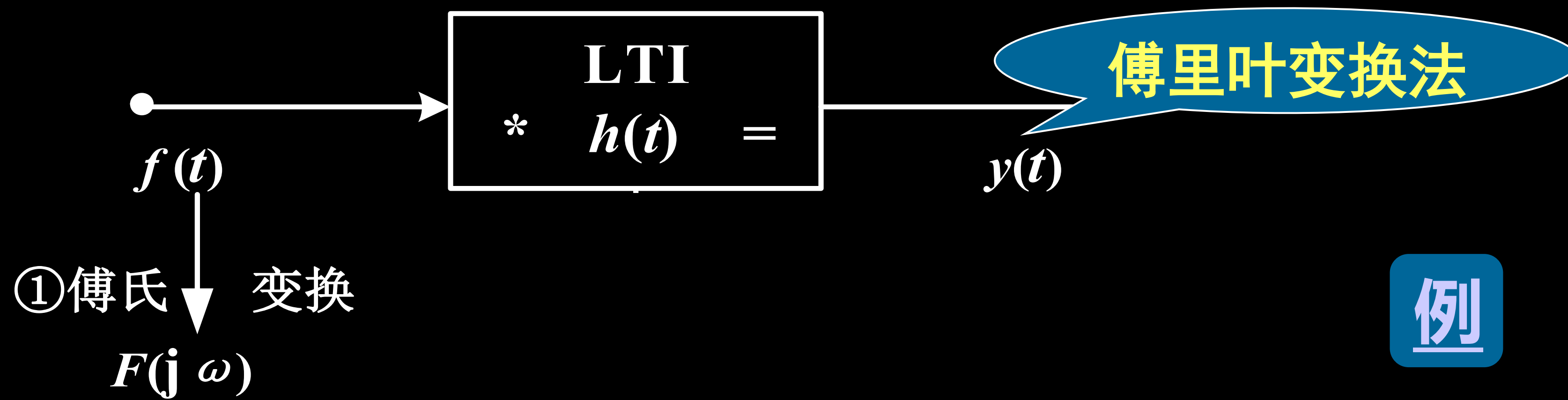
由叠加性：$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\|\ f(t)} \qquad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\|\ y_{zs}(t)}$$

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$ 卷积积分

$$\boxed{Y(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)}$$

频域分析法步骤：



频率响应 $H(j\omega)$可定义为系统零状态响应的傅里叶变换$Y(j\omega)$与激励$f(t)$的傅里叶变换$F(j\omega)$之比，即

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{F(j\omega)} \qquad H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} = \frac{|Y(j\omega)|}{|F(j\omega)|}e^{j[\varphi_y(\omega)-\varphi_f(\omega)]}$$

$|H(j\omega)|$称为**幅频特性**（或**幅频响应**）； $\theta(\omega)$称为**相频特性**（或**相频响应**）。$|H(j\omega)|$是ω的偶函数，$\theta(\omega)$是ω的奇函数。

二、信号的无失真传输

1、无失真传输

（1）定义：信号无失真传输是指系统的输出信号与输入信号相比，只有幅度的大小和出现时间的先后不同，而没有波形上的变化。即

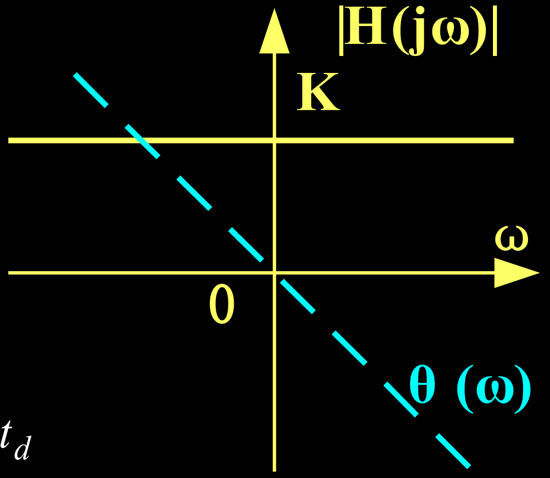
输入信号为$f(t)$，经过无失真传输后，输出信号应为

$$y(t) = Kf(t - t_d)$$

其频谱关系为：$Y(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d}F(j\omega)$

(2)无失真传输条件：

系统要实现无失真传输，对系统$h(t)$，$H(j\omega)$的要求是：



(a)对$h(t)$的要求：

$$h(t) = K\delta(t - t_d)$$

(b)对H(jω)的要求：

$$H(j\omega) = Y(j\omega) / F(j\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$$

即 $$\boxed{|H(j\omega)| = K, \theta(\omega) = -\omega t_d}$$

对所有频率信号的幅度都放大同样的倍数；相位与频率成正比，保证各个谐波有相同的延迟时间

上述是信号无失真传输的理想条件。当传输有限带宽的信号时，只要在信号占有频带范围内，系统的幅频、相频特性满足以上条件即可。

例

失真的有关概念

线性系统引起的信号失真由两方面的因素造成

- **幅度失真：**

各频率分量幅度产生不同程度的衰减；

- **相位失真：**

各频率分量产生的相移不与频率成正比，

使响应的各频率分量在时间轴上的相对位置产生变化。

- **线性系统的失真**——幅度，相位变化，不产生新的频率成分；
- **非线性系统产生非线性失真**——产生新的频率成分。

对系统的不同用途有不同的要求：

- 无失真传输；•利用失真——波形变换。

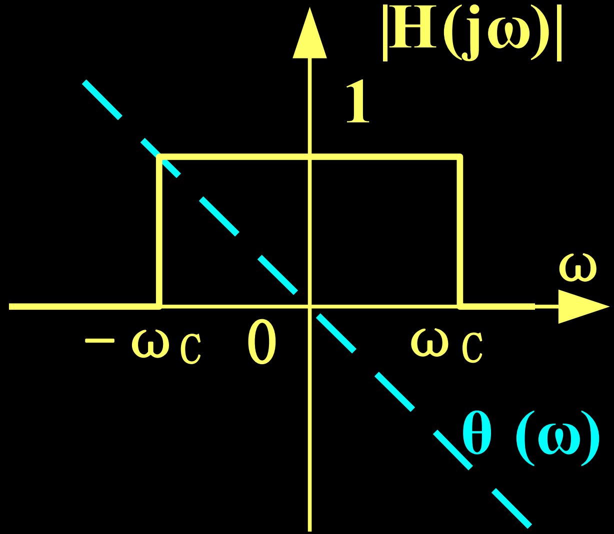
三、理想低通滤波器的特性

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

$$\theta(\omega)=-\omega t_d$$

具有如图所示幅频、相频特性的系统称为**理想低通滤波器**。

ω_c称为**截止角频率**。

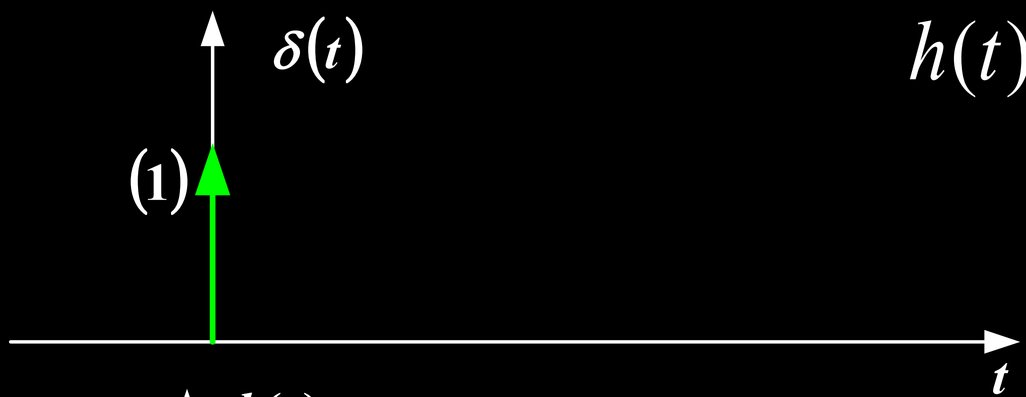


理想低通滤波器的频率响应可写为：

$$H(j\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-j\omega t_d}, & |\omega|<\omega_C\\ 0, & |\omega|>\omega_C\end{cases}=g_{2\omega_C}(\omega)\,\mathrm{e}^{-j\omega t_d}$$

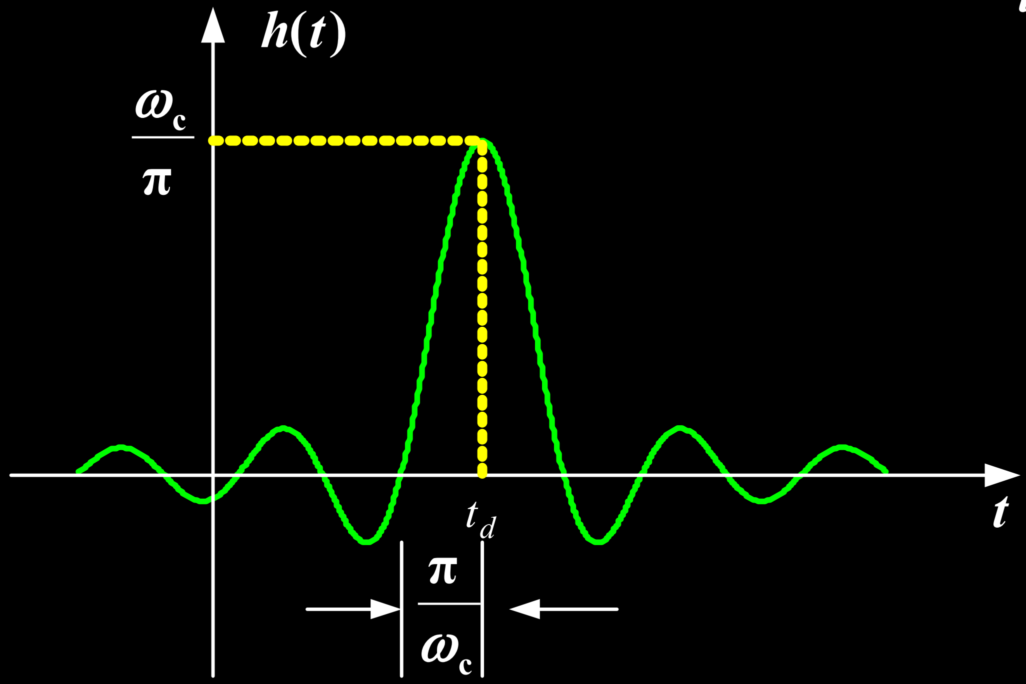
- ω在0～ω_c的低频段内，传输信号无失真。

•理想低通的冲激响应



$$h(t) = F^{-1}\left[g_{2\omega_c}(\omega)e^{-j\omega t_d}\right]$$

$$= \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_d)]$$

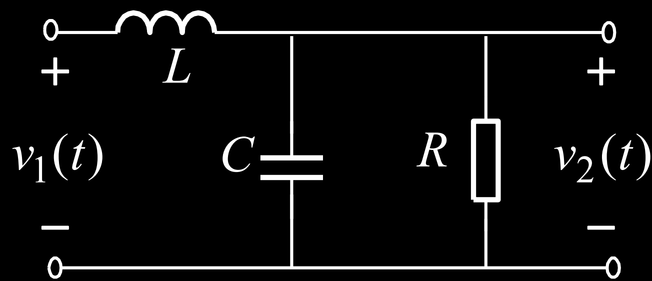


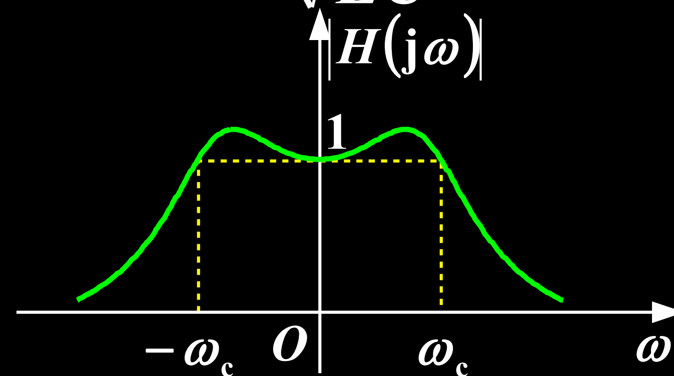
可见，它实际上是不可实现的非因果系统。

四、物理可实现系统对系统函数的要求

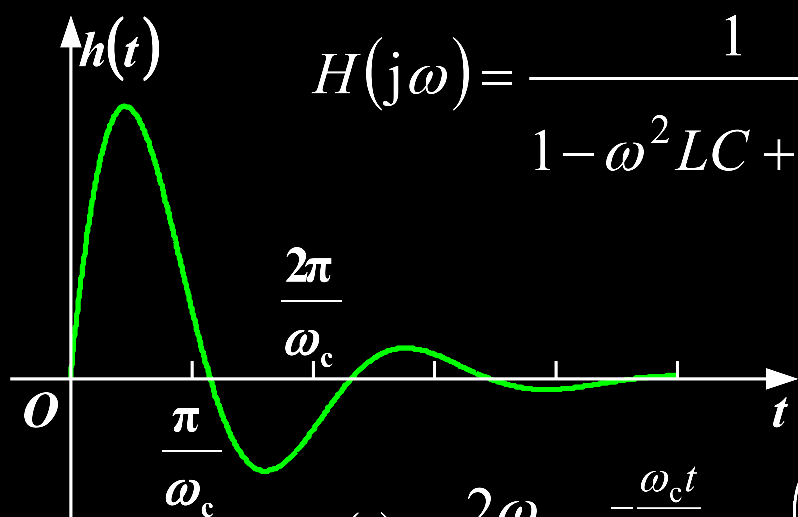
理想低通滤波器在物理上是不可实现的，近似理想低通滤波器的实例

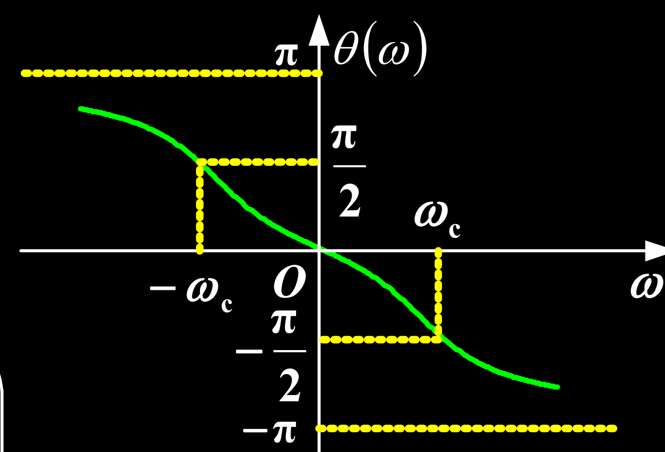
$R=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$时，且令$\omega_c=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$





$$H(j\omega)=\frac{1}{1-\omega^2LC+j\omega\dfrac{L}{R}}$$





$$h(t)=\frac{2\omega_c}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\omega_c t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c t\right)$$

```
clear all;clc;
%利用理想低通滤波器对图像进行滤波
I=imread('C:\Users\bjut\Desktop\11.jpg');
I=im2double(I);
M=2*size(I,1)；%滤波器的行数
N=2*size(I,2)；%滤波器的列数
u=-M/2:(M/2-1);
v=-N/2:(N/2-1);
[U,V]=meshgrid(u,v);
D=sqrt(U.^2+V.^2);
D0=80；%截止频率设置为80
H=double(D<=D0)；%理想低通滤波器
J=fftshift(fft2(I,size(H,1),size(H,2)))；%时域
图像转换到频域
K=J.*H；%滤波处理
L=ifft2(ifftshift(K))；%傅立叶反变换
L=L(1:size(I,1),1:size(I,2));
figure;
subplot(121);imshow(I)；%显示原图像
subplot(122),imshow(L)；%显示滤波后的图
```

物理可实现系统的条件

就时域特性而言，一个物理可实现的系统，其冲激响应在 $t<0$ 时必须为0，即 $h(t)=0\ ,t<0$

即 响应不应在激励作用之前出现。

就频域特性来说，佩利（Paley)和维纳（Wiener)证明了物理可实现的幅频特性必须满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(j\omega)|^2 d\omega < \infty \quad 并且 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(j\omega)||}{1+\omega^2} d\omega < \infty$$

称为佩利-维纳准则。（必要条件(不满足肯定不能物理实现））

从该准则可看出，对于物理可实现系统，其幅频特性可在某些孤立频率点上为0，但不能在某个有限频带内为0。