§3.5 取样定理

取样定理论述了在一定条件下，一个连续信号完全可以用离散样本值表示。这些样本值包含了该连续信号的全部信息，利用这些样本值可以恢复原信号。可以说，取样定理在连续信号与离散信号之间架起了一座桥梁。为其互为转换提供了理论依据。

- 信号取样
- 时域取样定理
- 频域取样定理

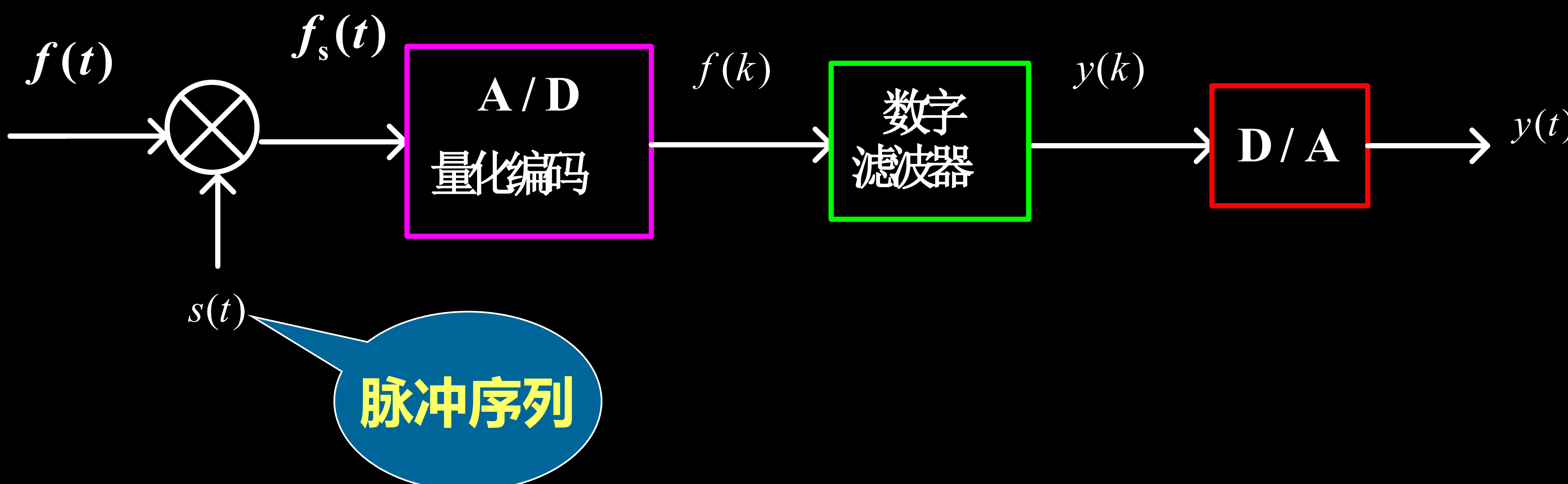
一. 信号取样

所谓“取样”就是利用取样脉冲序列s(t)从连续信号f(t)中“抽取”一系列离散样本值的过程。

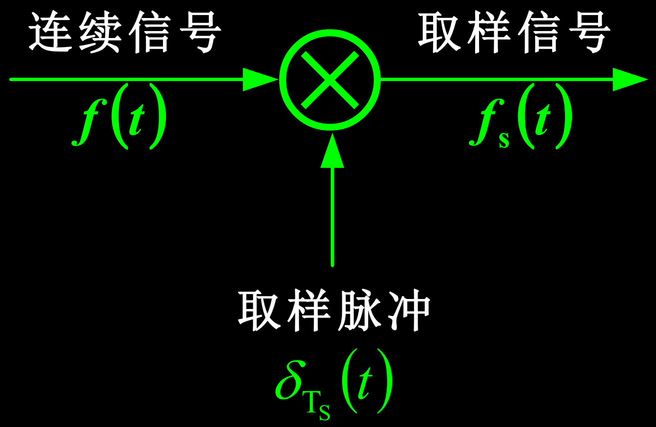
这样得到的离散信号称为取样信号$f_s(t)$ 。

它是对信号进行数字处理的第一个环节。

数字处理过程:



1. 理想取样（周期单位冲激取样）



$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad (-\omega_m < \omega < \omega_m)$$

$$s(t) \leftrightarrow S(j\omega)$$

$$f_s(t) \leftrightarrow F_s(j\omega)$$

$$s(t) = \delta_{T_S}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow S(\mathrm{j}\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$f_s(t) = f(t)\delta_{T_S}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$F_s(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{F}\left[f(t)\delta_{T_S}(t)\right] = \frac{1}{2\pi} F(\mathrm{j}\omega) * \omega_S \delta_{\omega_S}(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[\mathrm{j}(\omega - n\omega_s)]$$

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega t}$$

$$\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\mathscr{F}[e^{-j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\mathscr{F}[\delta_T(t)] = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)$$

令 $$\delta_\Omega(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega)$$

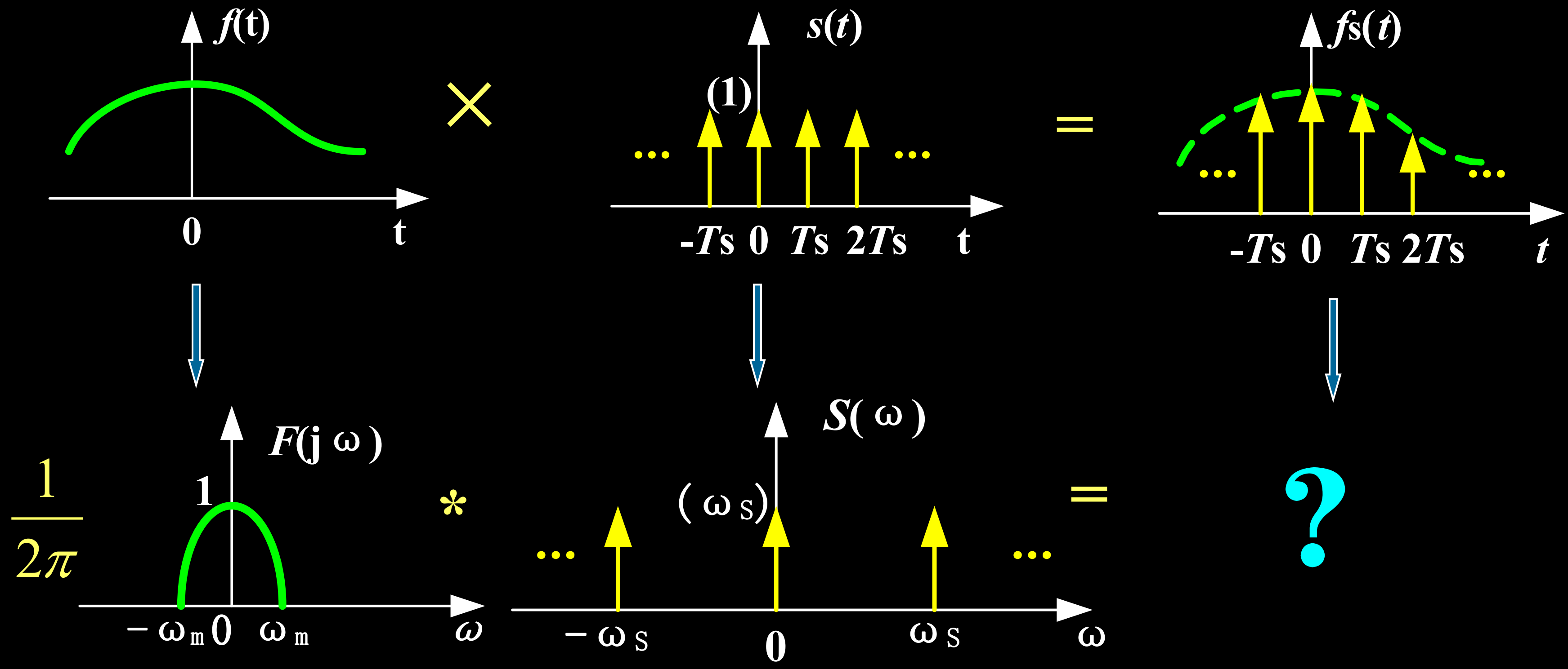
$$\omega_s = \Omega = \frac{2\pi}{Ts}$$

$$F_s(j\omega) = F\left[f(t)\delta_{T_S}(t)\right] = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * \omega_S \delta_{\omega_S}(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\omega - n\omega_s)]$$

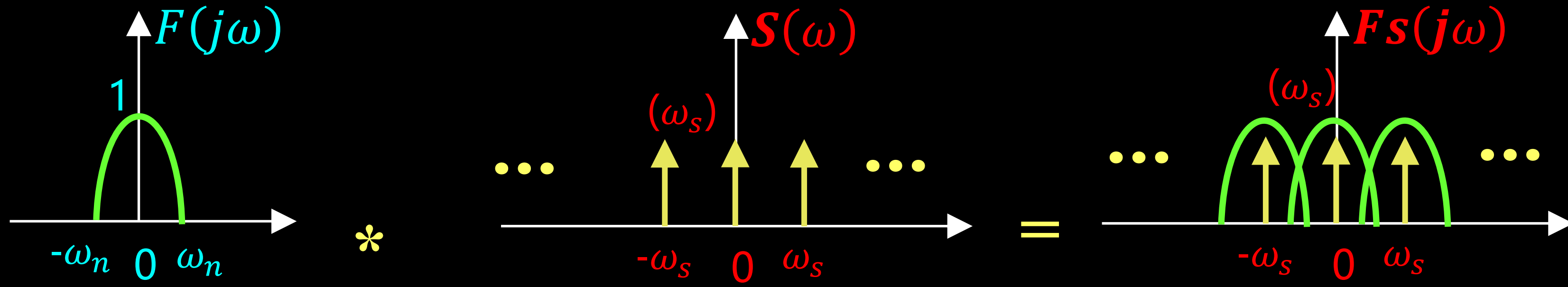
2． 冲激取样信号的频谱

T_S 取样间隔

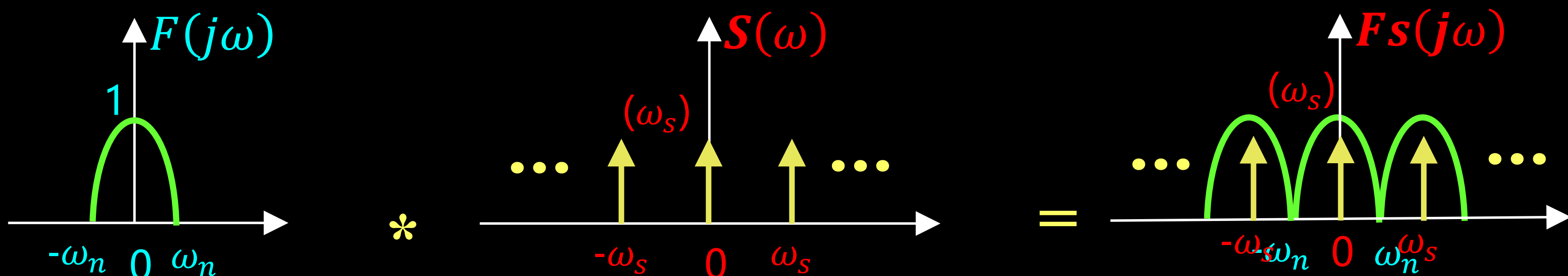
ω_S 取样角频率



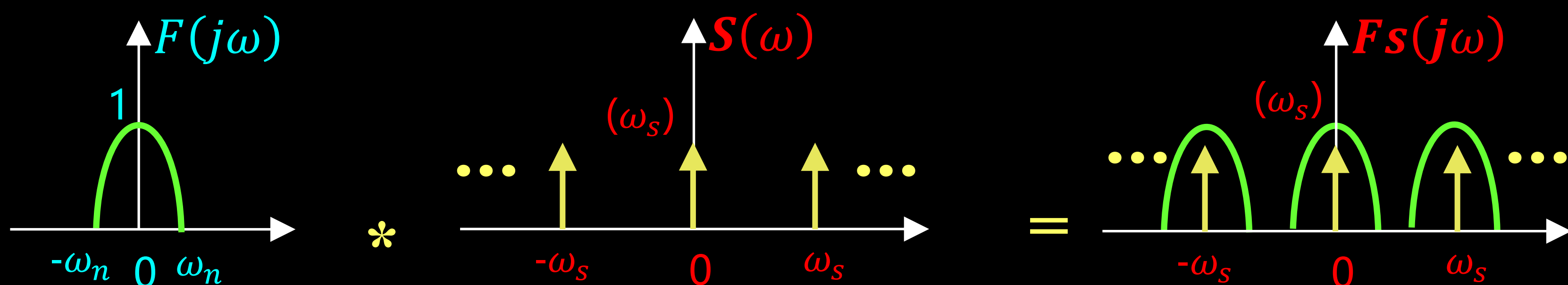
$\omega_s < 2\omega_m$



$\omega_s = 2\omega_m$



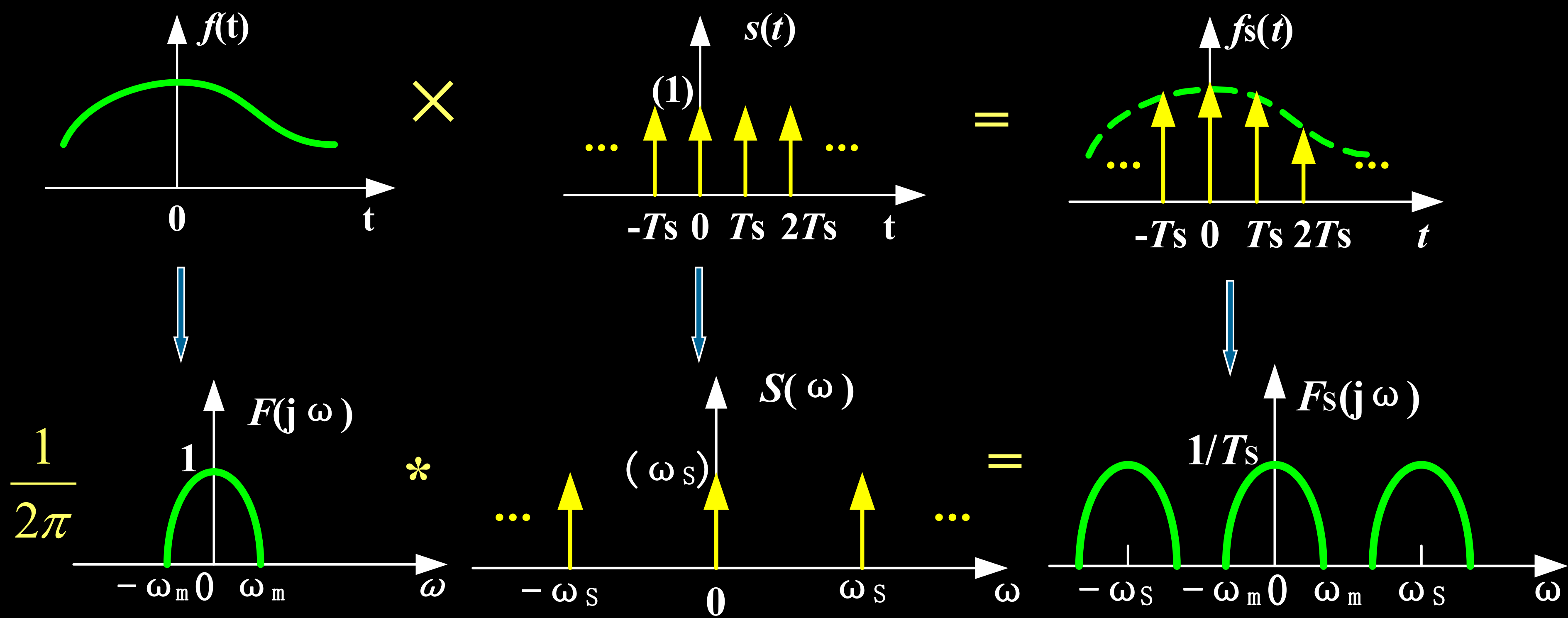
$\omega_s > 2\omega_m$



2. 冲激取样信号的频谱

T_S 取样间隔

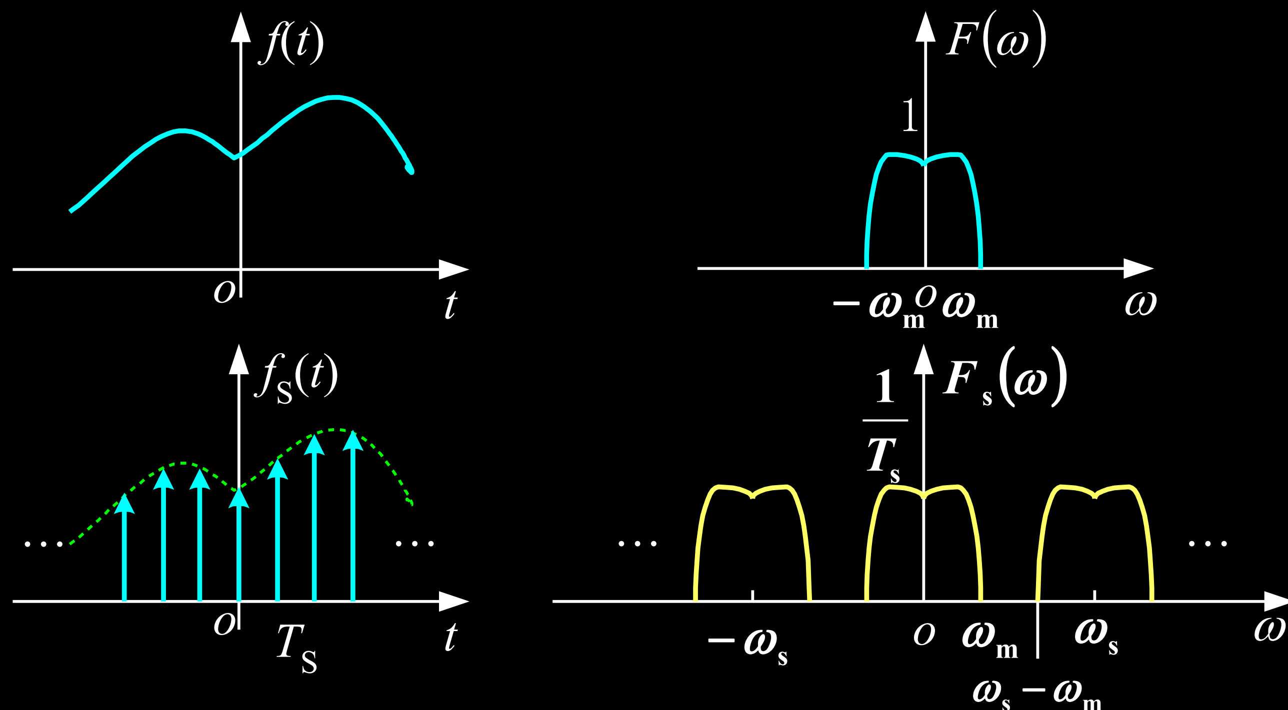
ω_S 取样角频率



画f_S(t)的频谱时， 设定$\omega_S \geqslant 2\omega_m$，这时其频谱不发生混叠，因此能设法(如利用低通滤波器)，从$F_S(j\omega)$中取出$F(j\omega)$，即从f_S(t)中恢复原信号f(t)；否则将发生混叠。

二、时域取样定理

一个频谱在区间（$-\omega_m$，ω_m）以外为0的带限信号 $f(t)$，可唯一地由其在均匀间隔 T_s [$T_s \le 1/(2f_m)$] 上的样点值 $f(kT_s)$ 确定。



信号的恢复

理想低通滤波器

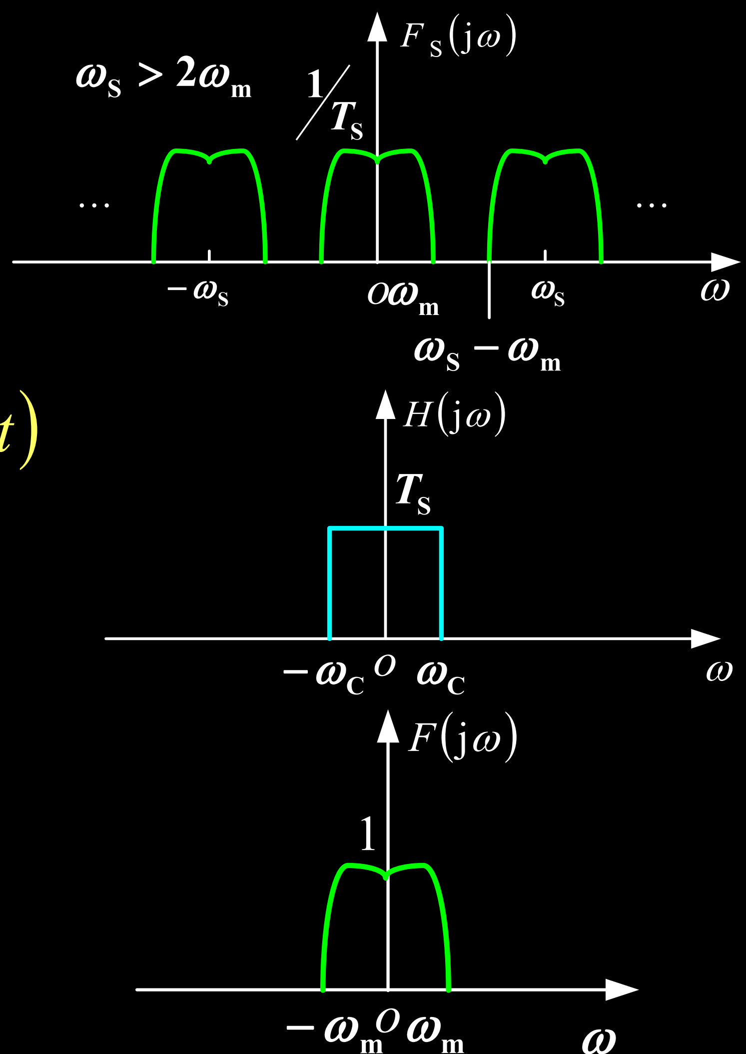
$$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}T_s & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

$$F(\mathrm{j}\omega)=F_s(\mathrm{j}\omega)\cdot H(\mathrm{j}\omega)\leftrightarrow f(t)=f_s(t)*h(t)$$

滤除高频成分，即可恢复原信号

对ω_c要求: $\omega_m\le\omega_c\le\omega_s-\omega_m$

从时域运算解释



奈奎斯特（*Nyquist*） 频率和间隔

注意：为恢复原信号，必须满足两个条件：

（1）$f(t)$必须是带限信号；

（2）取样频率不能太低，必须$f_s \geq 2f_m$，

或者说，取样间隔不能太大，必须$T_s \leq 1/(2f_m)$;

否则将发生混叠。

通常把最低允许的取样频率$f_s=2f_m$称为奈奎斯特（**Nyquist)**频率；

把最大允许的取样间隔$T_s=1/(2f_m)$称为奈奎斯特间隔。

三、频域取样定理

根据时域与频域的对偶性，可推出频域取样定理:

一个在时域区间（$-t_m$，t_m)以外为0的时限信号f(t)的频谱函数F(jω)，可唯一地由其在均匀频率间隔f_s [$f_s \le 1/(2t_m)$]上的样值点F(jnω_s)确定。

$$F(\mathrm{j}\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}\frac{n\pi}{t_m})\mathrm{Sa}(\omega t_m-n\pi) \qquad ,t_m=\frac{1}{2f_s}$$