UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - DEPTO DE MATEMÁTICA
Disciplina MNUM7009 - Análise Numérica I - PPGMNE
Prof. Luiz Carlos Matioli
Lista de exercícios sobre o Método de Gradientes Conjugados.

**1.** Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**a)** Verifique se os vetores $v$ e $w$ são $A-$conjugados.
**b)** Verifique se é possível aplicar o método de Gradientes conjugados para resolver $Ax = b$ usando os vetores $v$ e $w$ como direções. Em caso afirmativo, aplique duas iterações do método e avalie o resíduo $r = Ax_2 - b$.
**2.** Seja $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$, $A > 0$, onde:

$$\textbf{a)}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \textbf{b)}\ A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} -7 \\ -8 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

A partir de $x_0 = 0$ (vetor nulo), em cada um dos casos determine a solução pelo Método de Gradientes Conjugados.

**3.** Encontre o minimizador da quadrática $q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x$, onde $A \in I\!R^{3\times3}, A > 0$ e $b \in I\!R^3$ são dados por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

utilizando o algoritmo de Gradientes Conjugados a partir do ponto inicial $x_0 = [0\ \ 0\ \ 0]^T$.

**4.** Considere

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, -I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ e}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Forme a matriz A, $16 \times 16$ sob a forma particionada

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -I & O & O \\ -I & A_1 & -I & O \\ O & -I & A_1 & -I \\ O & O & -I & A_1 \end{bmatrix}.$$

Seja $b = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)^T$. Resolva o sistema linear $Ax = b$ usando o Método de Gradientes Conjugados com tolerância $0,05$.