UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - DEPTO DE MATEMÁTICA
Disciplina MNUM7009 - Análise Numérica I - PPGMNE
Prof. Luiz C. Matioli
Lista de exercícios sobre os métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel e SOR.

1. Resolva o exercício 2 da aba EXERCITE do vídeo 2.

2. Resolva o exercício 2 da aba EXERCITE do vídeo 3.

3. Resolva o exercício 1 da aba EXERCITE do vídeo 4.

4. Resolva os exercícios 2 itens (a) e (d) e 3 da aba EXERCITE do vídeo 5.

5. Estude o critério de Sasselfeld da aba APROFUNDE do vídeo 6. Aplique o critério de Sassenfeld às matrizes do exercício (2) da aba EXERCITE do vídeo 5 (são 4 matrizes, itens (a), (b), (c) e (d). Decida para qual delas o Método de Gauss-Seidel converge.

6. Resolva o exercício 2 da aba EXERCITE do vídeo 6.

7. Considere $A = L + D + U$ uma partição da matriz $A_{n \times n}$ com L, D e U matrizes extraídas da matriz A e possuindo as seguintes características: L e U são triangulares inferior e superior, respectivamente, com zeros na diagonal, D é uma matriz diagonal possuindo os mesmos elementos da diagonal de A.

   (a) Determine as matrizes dos processos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel e SOR.

8. Considere $h = 0.1$ e o seguinte o sistema linear

$$(S) \qquad \begin{array}{lcll} -2(1+h^2)x_1 + x_2 & = & 1 & \\ x_{i-1} - 2(1+h^2)x_i + x_{i+1} & = & 0 & \qquad i = 2, 3, \ldots, n-1 \\ x_{n-1} - 2(1+h^2)x_n & = & 1 & \end{array}$$

   (a) Faça $n = 5$ e escreva o sistema (S) na forma $Ax = b$, explicitando o vetor dos termos independentes b e a matriz A dos coeficientes de (S).

   (b) Resolva o sistema do item (a), deste exercício, utilizando os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

   (c) Repita o item (b) para o método SOR, considerando os seguintes valores para o parâmetro w: 0.1; 1; 1.5 e 1.9.

   (d) Considere $n = 100$ e faça uma rotina, em alguma linguagem de programação que você domine, para armazenar a matriz A dos coeficientes do sistema (S) e o vetor dos termos independentes (b).

   (e) Resolva o sistema linear do item (d) pelos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.

   (f) Repita o item (e) para o método SOR, considerando os seguintes valores para o parâmetro w: 0.1; 1; 1.5 e 1.9.

   (g) Houve problema de convergência em alguns dos sistemas lineares resolvidos? Em caso afirmativo, tente justificar ou dar alguma pista porque não ocorreu a convergência ("coisas" do tipo, a(s) hipótese(s) de convergência não se aplicam, erros numéricos, erros de implementação, outros)

9. Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dada como na partição do exercício (1). Mostre que o processo iterativo de Jacobi pode ser escrito na forma:

$$x^{k+1} = x^k + D^{-1} r^k, \text{ com } r^k = b - Ax^k.$$

10. Considere $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Verifique que A é definida positiva.

(b) Determine os autovalores e o raio espectral de A.

(c) Determine $\rho(M_J)$, $\rho(M_{GS})$ e $\rho(M_{SOR})$.

NOTA: $\rho(A)$ é o raio espectral da matriz A e é definido por

$$max_i\{\ |\lambda_i|\ \},$$

em que λ_i é autovalor da matriz A. Em outras palavras, o raio espectral é o maior autovalor em módulo de uma matriz.