

# **MNUM-7018 Confiabilidade e Métodos Estatísticos Aplicados a Sistemas de Engenharia**

## **NOTAS DE AULAS**

Estas notas seguem de muito perto a bibliografia referenciada no final do texto e que correspondem aos **livros texto deste Curso**, sugere-se a sua aquisição. **O único objetivo destas notas é facilitar as atividades dos alunos em sala de aula, pois não precisarão anotar conteúdos e enunciados de exercícios.** De forma que o aluno tem um maior conforto em sala de aula e o professor poderá explicar os temas de forma mais rápida. De nenhuma maneira a leitura ou consulta da bibliografia está descartada, isto é dever do aluno.

**Anselmo Chaves Neto**

**CURITIBA/2021**

# INTRODUÇÃO

## 1.1- INTRODUÇÃO À CONFIABILIDADE DE PRODUTOS E SISTEMAS

Durante a 2ª. Guerra Mundial, muitas pesquisas científicas foram desenvolvidas e aplicadas ou, ainda, outras já desenvolvidas foram aplicadas. É possível citar o RADAR (desenvolvido pelo inglês Watson Watt em 1938-1940), o método de otimização SIMPLEX (desenvolvido pelo americano George Bernard Dantzig, com resultados publicados em 1947) e é o caso também do desenvolvimento da Confiabilidade. Durante a 2ª. Guerra Mundial os sistemas eletrônicos tiveram um vasto emprego e, então, esses sistemas evoluíram, se tornaram muito complexos e surgiram vários problemas operacionais. A solução desses problemas exigia abordagens metódicas e bem formuladas. Assim, as forças armadas americanas criaram comitês de avaliação de problemas de Confiabilidade.

Hoje em dia, nas sociedades modernas, engenheiros e técnicos entre outros profissionais são responsáveis pelo planejamento, concepção, fabricação e operação de produtos e sistemas que vão de simples produtos a complexos sistemas. Uma falha destes produtos ou sistemas pode causar efeitos, desde uma pequena irritação até impacto na sociedade e meio ambiente. Consumidores, usuários e a sociedade em geral esperam que os produtos e sistemas sejam confiáveis e seguros.

Uma importante questão, nesta situação, é: “quão confiável ou quão seguro será o produto ou sistema durante sua futura vida operacional?”. A avaliação quantitativa da confiabilidade procura responder essa pergunta.

Em 1952, o Departamento de Defesa americano coordenou os esforços do exército americano, força aérea e marinha e criou o Advisory Group on Reability of Electronic Equipment (AGREE). Este grupo influenciou decisivamente toda a abordagem científica sobre confiabilidade e publicou muitos artigos relatando trabalhos realizados, principalmente sobre equipamentos eletrônicos militares. Então, o desenvolvimento inicial da confiabilidade esteve relacionado a aplicações militares e indústria aeroespacial. Estes desenvolvimentos foram seguidos rapidamente por aplicações na indústria nuclear; no fornecimento de energia elétrica sem falhas locais ou *blackouts* em larga escala, e em plantas de processo contínuo, tais como fabricação de aço, indústria química, que podem sofrer perdas em grande escala e trabalhar em marcha lenta se ocorrer falha no sistema, bem como causar mortes e poluição ambiental. Todas estas áreas tiveram problemas de confiabilidade nos últimos tempos. Tais como: perda do ônibus espacial Challenger em 1986 e diversos acidentes com aeronaves comerciais; acidentes em usinas atômicas como a de Three Mile Island em 1979 e Chernobyl, em 1986; *blackout* no suprimento de eletricidade em New York em 1977; falhas no sistema de processo nas plantas de: Bophal-India, em 1984 causando vazamento de 40 t de metil isocianeto da planta de Union Carbide matando entre 3500 e 7500 pessoas; Flixborough, em 1974 explodiu uma planta de processo químico no Reino Unido matando 28 pessoas; em Seveso na Itália em 1976 tanques de armazenamento se romperam liberando produtos químicos que causaram a morte de milhares de animais. Todos estes eventos tiveram influência no aumento da pressão para se avaliar objetivamente a confiabilidade, a segurança e o risco probabilístico total.

O emprego das técnicas de qualidade no Japão (1947-1950) e nos países desenvolvidos fez com que a confiabilidade fosse utilizada cada vez mais, não só na

indústria bélica, mas também (e principalmente) na indústria de bens e serviços. Dessa forma, passou a ser muito importante nas fases industriais ou de serviços seguintes: operação, manutenção, assistência técnica e satisfação do cliente.

Hoje em dia no Brasil, é possível observar produtos que em sua fase de projeto utilizam os conceitos de confiabilidade e os resultados favoráveis são percebidos.

## **Tipos de Sistemas**

1<sup>o</sup>) Sistema de Missão Orientada

2<sup>o</sup>) Sistema Operado Continuamente

### **Sistema de Missão Orientada**

O Sistema de Missão Orientada pode ser dividido em duas (02) categorias:

- **a primeira categoria** inclui os sistemas em que a fase operacional começa do ponto no tempo quando o sistema é controlado e, portanto, sabe-se que está num estado de operação.

#### **Exemplo 1:**

Um avião comercial somente levanta vôo para sua missão após todos os seus subsistemas terem sido verificados que estão funcionando bem. A exigência é que o avião complete a viagem sem falhas, ou seja, a chance de falha durante a viagem deve ser inferior ao nível aceitável. Assim, o tempo da viagem é inferior ao tempo esperado de falha,  $T_V < T_F$ .

- **a segunda categoria** inclui os sistemas em que existe uma fase de estado inativo seguindo o ponto quando o sistema é verificado e, sabe-se que está num estado de operação. Espera-se, então, que o sistema funcione durante o tempo da missão  $T_M$  seguindo o tempo de inatividade  $T_I$ , que na verdade é um tempo de espera até que dispare um “alarme” e o sistema responda ao fato.

#### **Exemplo 2**

Um sistema de proteção que aguarda em um estado de inatividade até que um evento ocorra e ele entra em operação para responder. O disjuntor em um circuito elétrico é um exemplo típico.

### **Sistema Operado Continuamente**

Já o Sistema Operado Continuamente é aquele em que um número de estados de “quedas” do sistema é tolerado, desde que não sejam muito frequentes ou muito longos. As ações de reparo ou de substituição de partes do sistema são feitas durante esses estados de “quedas”. E, portanto, o reconhecimento do processo de restauração é uma parte importante das técnicas requeridas.

#### **Exemplo 3**

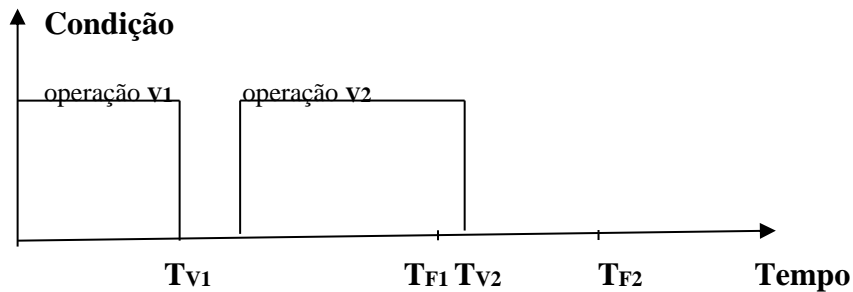
Um sistema de distribuição de energia elétrica que pode sofrer falhas, particularmente durante mau tempo, e causar interrupção do fornecimento para os consumidores até que o sistema seja restaurado e colocado no estado operável.

### Exercício 1

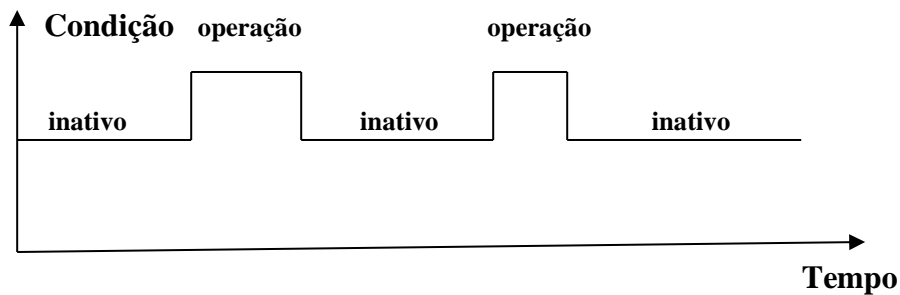
Faça três (03) gráficos que representem os sistemas descritos. Considere o eixo das ordenadas como “condição” e o eixo das abscissas como o “tempo”.

Solução:

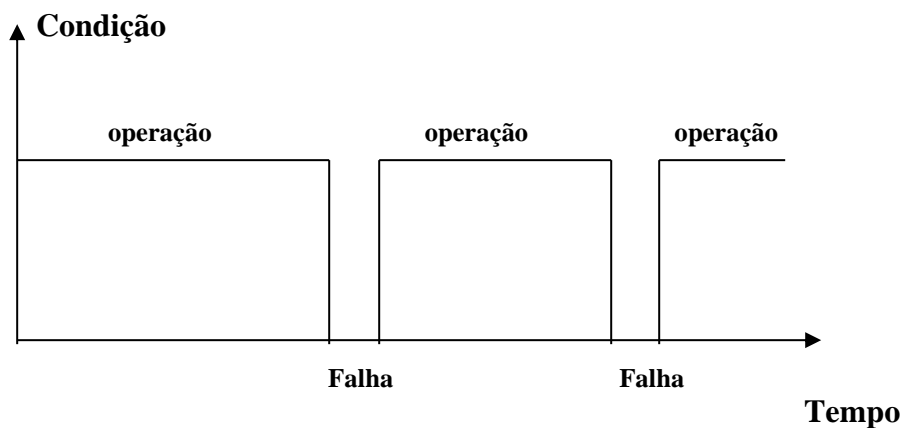
Exemplo 1: Avião Comercial (Sistema de Missão Orientada – 1ª. Categoria)



Exemplo 2: Disjuntor (Sistema de Missão Orientada – 2ª. Categoria)



Exemplo 3: Distribuição de Energia Elétrica (Sistema Operado Continuamente)



## Avaliação da Confiabilidade: Qualitativa e Quantitativa

Os engenheiros e técnicos procuram, sempre, conceber e produzir sistemas que sejam relativamente livres de falhas. Antigamente, contudo, a confiabilidade era alcançada de experiências qualitativas e subjetivas dos engenheiros de projeto e de operação. Este método de avaliação da confiabilidade de um sistema é muitas vezes referido pelos céticos das modernas técnicas de avaliação de confiabilidade como julgamento de engenharia. Essa abordagem é considerada inadequada quando se compara alternativas de configurações de equipamentos e quando são feitas análises econômicas.

Confiabilidade é uma característica inerente de um sistema ou produto. É, portanto, um parâmetro de projeto cuja avaliação deve ser feita como uma parte integrante do projeto. Então, essa avaliação deve ser expressa em termos quantitativos e especificada como parte de um sistema objetivo.

A avaliação quantitativa pode ser usada para duas (02) propostas particulares. A primeira é avaliar o desempenho passado do sistema e a segunda é prever desempenhos futuros. A primeira proposta pode ser feita e é muitas vezes feita na prática por empresas e organizações. A segunda, contudo, requer conhecimento do passado a fim de prever o futuro. Portanto, há necessidade do uso de dados estatísticos para prever o comportamento futuro.

A avaliação do desempenho passado do sistema é importante porque:

- a) identifica pontos fracos que necessitam de reforços ou modificações;
- b) estabelece tendências cronológicas no desempenho da confiabilidade;
- c) estabelece índices, que servem como guia para valores aceitáveis na avaliação da confiabilidade futura;
- d) permite previsões que são comparadas com a experiência de operação atual;
- e) monitora a resposta para mudanças no projeto do sistema.

A avaliação do desempenho futuro do sistema é importante porque prediz:

- a) como o sistema se comportará no futuro;
- b) benefícios de projetos alternativos do sistema, reforço e expansão de plantas;
- c) efeitos de políticas alternativas de reforço e manutenção do sistema;
- d) o custo, o benefício e o valor da confiabilidade relacionado com as alternativas associadas com os casos (b) e (c).

Existem muitos modos de definir confiabilidade, mas uma forma geralmente aceita é: “**confiabilidade** é a probabilidade de um dispositivo (produto ou serviço) desempenhar adequadamente sua função por um período de tempo pretendido sob as condições de operação encontradas”.

Esta definição abrange quatro (04) partes:

1ª.) probabilidade, 2ª.) desempenho adequado, 3ª.) tempo e 4ª.) condições de operação.

A aplicação da Teoria das Probabilidades para avaliar a adequação do sistema permite que variações estocásticas sejam levadas em conta.

### Confiabilidade Absoluta e Confiabilidade Relativa

**Índices de confiabilidade absoluta** são os valores que alguém pode esperar que os sistemas apresentem. Eles podem ser monitorados do desempenho passado, porque assim tem-se o conhecimento total deles. Mas, é muito difícil prever com alto grau de confiança os valores futuros, uma vez que na performance futura existe um considerável grau de incertezas, particularmente associado com dados numéricos. Já os **índices de confiabilidade relativa** são fáceis de interpretar e uma considerável confiança pode ser depositada neles.

#### Exercício 2

Sabe-se que em certo processo de fabricação existe uma fração de defeituosos de 1%. Se o consumidor padrão compra um lote com 50 produtos selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que receba no máximo 2 defeituosos?

Solução:

O número de defeituosos,  $Y$ , presente no lote tem uma distribuição binomial com parâmetros  $\theta = 0,01$  e  $n = 50$ ,  $Y \sim b(n, \theta)$ . Então, a função de probabilidade f.p. correspondente é:

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} \theta^y (1 - \theta)^{n-y} \quad y = 0, 1, 2, \dots, n \Rightarrow P(Y = y) = \binom{50}{y} 0,01^y (0,99)^{50-y}$$

E, a probabilidade de no máximo 2 defeituosos no lote com tamanho  $n = 50$  é:

$$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = 0,605066 + 0,305559 + 0,0756181 = 0,98624$$

Resp.:  $P(Y \leq 2) = 0,98624$

#### Exercício 3

Na planta do exercício anterior existe uma política de troca-livre do produto defeituoso que é comprado. Se o custo de produção é de \$10 u. m. e o produto é vendido por \$15 u. m. qual o lucro que a planta tem por item vendido?

Solução:

O item é perfeito ou defeituoso. A probabilidade de defeituoso é  $\theta = 0,01$ . Assim,  $X \sim b(1, \theta)$ , ou seja,  $X = \begin{cases} 1 & \text{com } P(X = 1) = \theta \\ 0 & \text{com } P(X = 0) = 1 - \theta \end{cases}$

$P(X = 1) = 0,01$  e o custo para cada produto defeituoso é  $1 + 0,01 = 1,01$ . Logo,  $\$10 \times 1,01 = \$10,10$  e o lucro é  $15 - 10,10 = \$4,90$ . Resp.: \$4,90 u.m.

#### Exercício 4

Considere um sistema composto por quatro (04) componentes. Estes componentes podem ser bombas de água em um sistema de engenharia mecânica, estruturas de suporte em um sistema de engenharia civil, transformadores de estação distribuidora em um sistema de potência, microprocessadores no controle de trocadores de calor em um sistema de engenharia química, entre outros. Portanto, embora o problema seja descrito em termos de casos específicos, ele pode representar uma vasta variedade de aplicações em engenharia.

Considere os componentes idênticos e com uma probabilidade de desempenho sem falha de 0,9 e, ainda, independentes. Os estados existentes para os componentes são: S (desempenho sem falhas) e F (falha).

- Escreva a expressão do número de combinações dos estados.
- Qual o número total de estados que o sistema pode assumir?
- É possível escrever a expressão do item (a) como a potência de um binômio? Qual?
- Complete a tabela adiante:

Solução:

- Combinações de estados =  $(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4) \cup (S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap F_4) \cup (S_1 \cap S_2 \cap F_3 \cap S_4) \cup (S_1 \cap F_2 \cap S_3 \cap S_4) \cup (F_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4) \cup (S_1 \cap S_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (S_1 \cap F_2 \cap S_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap F_4) \cup (S_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap S_4) \cup (F_1 \cap S_2 \cap F_3 \cap S_4) \cup (S_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap S_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap S_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap S_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4)$

$$\text{Número de estados} = S^4 + 4S^3F + 6S^2F^2 + 4SF^3 + F^4$$

- Número de estados =  $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$

$$\begin{aligned} \text{c) Sim, } (a + b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Rightarrow (S + F)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} S^n F^{n-k} \\ &= \frac{4!}{0!(4-0)!} S^{4-0} F^0 + \frac{4!}{1!(4-1)!} S^{4-1} F^1 + \frac{4!}{2!(4-2)!} S^{4-2} F^2 + \frac{4!}{3!(4-3)!} S^{4-3} F^3 + \frac{4!}{4!(4-4)!} S^{4-4} F^4 \\ &= S^4 + 4S^3F + 6S^2F^2 + 4SF^3 + F^4 \end{aligned}$$

- | Estados do sistema |            | Probabilidade individual                          |
|--------------------|------------|---|
| Todos funcionam    | (0 falhas) | $P(S^4) = 0,9^4 = 0,6561$                         |
| Três funcionam     | (1 falha)  | $P(4S^3F) = 4 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1 = 0,2916$     |
| Dois funcionam     | (2 falhas) | $P(6S^2F^2) = 6 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1^2 = 0,0486$ |
| Um funciona        | (3 falhas) | $P(4SF^3) = 4 \cdot 0,9 \cdot 0,1^3 = 0,0036$     |
| Nenhum funciona    | (4 falhas) | $P(F^4) = 0,1^4 = 0,0001$                         |
|                    |            | Total = 1   |

### Exercício 5

No exercício 4 é assumido que quatro (04) critérios de falha são considerados:

- falha em um ou mais componentes derruba o sistema;
- falha em dois ou mais componentes derruba o sistema;
- falha em três ou mais componentes derruba o sistema;
- falha dos quatro (04) componentes derruba o sistema.

Então, pede-se:

- qual a confiabilidade, R, do sistema com o critério b?

$$\text{R.: } R = P(Y \leq 1) = P[(Y = 0) \cup (Y = 1)] = P(Y = 0) + P(Y = 1) = 0,6561 + 0,2916$$

$$R = P(Y \leq 1) = 0,9477$$

b) qual a probabilidade de falha do sistema com o critério b?

$$P(F) = 1 - R = 1 - 0,9477 = 0,0523 = P(Y \geq 2) = 0,0486 + 0,0036 + 0,0001$$

c) Faça um Estudo de Sensibilidade preenchendo a tabela abaixo e considerando que cada casela deve receber na coluna **R** a  $P(Y \geq y) = 1 - P(Y < y)$  e na coluna **Q** o complemento, ou seja,  $P(Y < y)$ .

Número Componentes necessários p/sucesso Y	Número de componentes disponíveis											
	6		5		4		3		2		1	
	R	Q	R	Q	R	Q	R	Q	R	Q	R	Q
6	0,531	0,468	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5												
4												
3												
2												
1												0,1

d) Os números da tabela anterior mostram duas características importantes da confiabilidade. Quais são elas?

Resp.: 1ª.) Quando o número de componentes necessários para o sucesso é o total disponível, a confiabilidade do sistema decresce quando o número de componentes cresce. Compare os números da confiabilidade R das caselas (1; 1), com (2; 2), .... (6; 6).

2ª.) Mantendo fixo o número de componentes necessários para o sucesso, a confiabilidade do sistema cresce quando o número de componentes disponíveis cresce. Compare os números da confiabilidade R das caselas (1; 1), com (1; 2), .... (1; 6) ou (2; 2), com (2; 3), .... (2; 6) e assim por diante.

Os resultados da tabela anterior foram obtidos aplicando-se o critério de sucesso/fracasso e com base no número de componentes. Existem muitas aplicações desse critério, tais como em: estruturas mecânicas, circuitos de controle de vôos, monitores de segurança ou de perigo, entre outros. Porém, em alguns problemas, de engenharia, que envolvem fluxo um critério diferente pode ser apropriado. São aplicações deste tipo: sistemas de potência elétrica, processos químicos, circuladores de água de refrigeração, entre outras. Neste caso, usa-se um critério baseado não no número de componentes, mas sim na taxa de transferência (percentual), do fluxo ou da saída.



## 2 CONFIABILIDADE DE PRODUTOS

### 2.1- CONCEITOS BÁSICOS DE CONFIABILIDADE

#### Conceitos de Confiabilidade.

- **Confiabilidade** é um atributo de um sistema, da mesma forma que a potência do sistema ou a sua capacidade. O nível de confiabilidade é estabelecido na fase de projeto do produto.
- **Confiabilidade** é uma característica buscada pelos projetistas e construtores de sistemas de todo tipo. A única novidade que surgiu com a 2ª. Guerra Mundial é a tendência para quantificar a confiabilidade, da mesma forma que o movimento para quantificar as propriedades dos materiais.

**Conceitos tais como:** confiança no equipamento, confiança nos operadores, confiança no projeto, durabilidade, presteza em operar sem falhas, entre outros, são associados à idéia de confiabilidade.

Todo consumidor espera que o produto que esteja adquirindo tenha uma característica de qualidade que considera muito importante: a confiabilidade do produto. Mas, o que é considerado confiabilidade para o consumidor? Veja alguns Exemplos

#### Exemplos

- a) Partida do seu carro, pela manhã ou em qualquer hora. Você considera o sistema bateria-motor-combustível confiável se tem de girar a chave de ignição duas vezes, três vezes?
- b) Explosão de Usina Atômica. Em 1986 a Usina Atômica de Chernobyl explodiu matando 310 trabalhadores e provocando a evacuação de 300.000 pessoas. Os equipamentos eram confiáveis? Os operadores mereciam confiança? Ou seja, todo o sistema da usina merecia confiabilidade?
- c) Sistema de Controle de Voo. Em 2006 um avião comercial brasileiro chocou-se com um jatinho matando 154 pessoas. O controle de voo é confiável? O equipamento de alerta do jatinho (transponder) é confiável? A tripulação do jatinho é confiável? Ou seja, no todo o voo tem confiabilidade?
- d) Em 29/11/2016 o avião AVRO 146 RJ85 da Lamia que conduzia o time de futebol da Chapecoense, de Sta. Cruz na Bolívia para Rio Negro na Colômbia, caiu nas proximidades do aeroporto de Rio Negro. O controle de voo era confiável? A tripulação do jatinho é confiável? Ou seja, no todo o voo tem confiabilidade?
- e) Vazamento de Isocianeto de Metila. Em 1984, em Bhopal, na Índia, em uma indústria de defensivos agrícolas da UNION CARBIDE aconteceu um vazamento de 25 t de isocianeto de metila por uma de suas válvulas resultando em 2500 mortos. Você acha que os equipamentos industriais têm que ter confiabilidade?

Porém, quantitativamente (ou matematicamente) confiabilidade é definida como segue:

### **Definição de Confiabilidade.**

“Confiabilidade é a probabilidade de que um componente ou sistema cumpra sua função com sucesso, ou seja, tenha um bom desempenho durante um período de tempo previsto, sob as condições de operação especificadas no seu projeto”.

Da definição depreende-se que:

Deve ser aceita a noção probabilística de confiabilidade, a qual admite a chance de falha. Então, confiabilidade é uma probabilidade. E probabilidade de bom funcionamento, bom desempenho.

O conceito de desempenho (*performance*) é adequado para parâmetros do sistema que deterioram vagarosamente no tempo. Assim, confiabilidade é função do tempo e o tempo é sempre especificado para produtos orientados para desempenho com o tempo (observe a garantia de um produto).

Todo bom produto leva em especificação as condições ambientais de sua operação, tais como: faixa de temperatura, de umidade, de tensão, de corrente elétrica (máxima e mínima), não exposição à luz e ao sol, entre outras. Assim, os engenheiros ou projetistas devem conhecer em detalhes o ambiente real de operação dos produtos que estão projetando.

### **Falha.**

O complemento da confiabilidade é a probabilidade de falha do componente ou sistema e sua definição é a seguinte:

### **Definição de falha no contexto de confiabilidade.**

“Define-se falha como a impossibilidade de um componente ou sistema cumprir sua função dentro das especificações (níveis) de seu projeto”.

Tradicionalmente, as fases da vida de um componente ou sistema são descritas pela Curva da Banheira, adiante no item 2.2.

### **Taxa de Falhas.**

A **Taxa de falhas** é definida como:

“A frequência com que falhas ocorrem num certo intervalo de tempo, medida pelo número de falhas por cada hora de operação ou número de operações do sistema ou componente”. Geralmente a taxa de falhas é representada por  $\lambda$  e o inverso da taxa de falhas é conhecido como Tempo Médio Entre Falhas (T), tradicionalmente é *Mean Time Between Failures* – *MTBF*. A expressão do MTBF no caso da v.a. T ter distribuição exponencial  $T \sim \varepsilon(\lambda)$  é:

$$MTBF = \frac{1}{\lambda} \text{ (esperança da v.a. com distribuição exponencial).}$$

### **Conceito de Projeto Robusto**

Entende-se por projeto robusto em engenharia, um procedimento aplicado durante as etapas de pesquisa e desenvolvimento do produto com o objetivo de aumentar a produtividade, tal que produtos com alta qualidade possam ser obtidos a um mínimo custo. Este procedimento, denominado projeto robusto, aplica modelos de planejamento de experimentos e tem por objetivos:

- Reduzir de forma econômica a variabilidade de uma função do produto no ambiente de uso do produto.
- Garantir que decisões consideradas ótimas durante experimentos de laboratório mostrem-se verdadeiras quando da fabricação e quando do uso do produto.
- Fundamentalmente, um projeto robusto procura melhorar a qualidade de um produto, reduzindo os efeitos das causas de variabilidade sem eliminá-las.

### **Conceito de Ruído em Projeto Robusto**

Quando os consumidores passam a usar determinado produto pode acontecer do desempenho do produto e, portanto, sua qualidade variar por várias razões. As causas dessa variabilidade são chamadas de fatores de ruído. Fatores de ruído são definidos como qualquer fator que faça com que uma característica funcional (ou resposta) se desvie do seu valor alvo.

### **Exemplos**

- Efeito da presença de água no combustível dos automóveis.
- Efeito de linhas de transmissão de alta potência em rádios AM.
- Efeito da temperatura em medicamentos.
- Efeito da luz solar em medicamentos, entre outros.

No desenvolvimento do processo de delineamento de produtos que estabelece um nível de desempenho e, também, tem como objetivo mantê-lo face à variabilidade deve-se ter claro o entendimento da natureza do ruído. Existem três tipos de fatores de ruído:

- Fatores de ruído externos;
- Fatores de ruído de unidade para unidade;
- Fatores de ruído de deterioração.

## **FATORES DE RUÍDOS EXTERNOS**

Fatores de ruídos externos são definidos como fontes de variabilidade que vêm de fora para o produto.

### **Exemplos**

- A temperatura e umidade relativa do ambiente no qual o produto é usado.
- As cargas eventuais (aleatórias) que o produto está sujeito.
- Alguma não intencional entrada de energia, tais como calor, vibração ou radiação para a qual o sistema é sensível.
- Erro humano, inclusive mau uso por desconhecimento e abusos intencionais.
- Poeira no ambiente no qual o produto é usado.
- Variação na voltagem de entrada.
- Interferência eletromagnética.
- Luz ultravioleta, entre outras.

### **FATORES DE RUÍDOS DE UNIDADE PARA UNIDADE**

Fatores de ruído de unidade para unidade é o resultado de nunca ser possível produzir-se dois itens exatamente iguais. O processo de fabricação e os materiais são as maiores fontes de variabilidade de unidade para unidade nos componentes do produto. Processos não uniformes e processos sujeitos a tendências são fontes comuns de variabilidade deste tipo.

### **Exemplos**

- Resistência de resistores elétricos.
- Dimensões de forma metálica.
- Concentração de produtos químicos lote a lote.
- Variação na espessura de tecidos, entre outras.

### **FATORES DE RUÍDOS DE DETERIORAÇÃO**

Fatores de ruídos de deterioração são definidos como fontes de variabilidade interna. É causada por mudanças dentro do produto ou processo. É comum para certos produtos o tempo (idade) de uso ou tempo de armazenagem levar a uma deterioração do desempenho (performance).

### **Exemplos**

- Perda de massa no filamento da lâmpada incandescente.
- Corrente total produzida por uma bateria.
- Desgaste da pintura interna de uma casa.
- Quilometragem de um carro, entre outras.

### **Ruído e Confiabilidade de um produto**

O resultado do ruído é usualmente caracterizado como um problema de confiabilidade. As falhas dos produtos podem ser caracterizadas em relação ao tempo como de três categorias e podem ser plotados em uma curva chamada **curva da banheira**. São elas:

- Falhas no início da vida (mortalidade infantil).
- Falhas durante a vida útil (normal) que possui taxa de falhas constante.
- Falhas no final da vida (deterioração – velhice).

## 2.2- CURVA DA BANHEIRA.

As fases da vida de um componente individual podem ser representadas pela Curva da Banheira. Essa curva mostra na fase inicial da vida do produto a “mortalidade infantil”, ou seja, a taxa de falhas prematuras, depois no período de vida útil mostra a taxa de falhas casuais que é constante e finalmente na última fase apresenta a taxa de falhas por desgaste na fase da velhice.

**Exercício:** Faça um esboço da curva da banheira (taxa de falhas x tempo de serviço) indicando as regiões onde ocorre falha do tipo início da vida (de unidade para unidade), final da vida (deterioração) e durante a vida normal (externas).

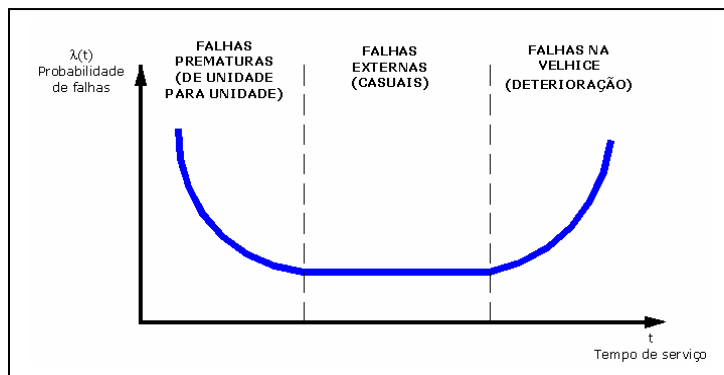


Fig. 2.1 Curva da Banheira

### FALHAS NAS FASES DA VIDA DE UM PRODUTO

Falhas Prematuras (de unidade para unidade)	Falhas Externas (Casuais)	Falhas na Velhice (deterioração)
Processo de fabricação deficiente	Tensão e resistência	Envelhecimento
Controle de qualidade deficiente	Fator de segurança deficiente	Desgaste por abrasão
Mão de obra deficiente	Cargas aleatórias maiores que as previstas	Degradação da resistência
Amaciamento insuficiente	Resistência menor que a esperada	Fadiga
Inspeção e testes insuficientes	Defeitos abaixo dos limites de sensibilidade dos ensaios	Fluência

<i>Debugging</i> (Depuração) insuficiente	Erros humanos durante o uso	Corrosão
Materiais fora de especificação	Aplicação (operação) indevida	Manutenção deficiente
Componentes não testados	Falhas não detectáveis pelo programa de manutenção	Vida de projeto curta
Estocagem ou transporte	Falhas não detectáveis durante testes	
Sobrecarga no primeiro teste	Causas inexplicáveis	
Contaminação	Fenômenos naturais imprevisíveis	
Instalação inadequada		

**OBS.** É importante observar que nem todos os produtos têm todos os tipos de fase. Programa de computador, p.ex., só tem fase inicial. À medida que os erros são corrigidos (no início), as falhas vão desaparecendo.

Uma outra classificação de falhas é aquela que categoriza as falhas em três tipos:

- **falha aleatória:** é qualquer falha cuja causa ou mecanismo de falha faz com que seu instante de ocorrência se torne imprevisível, a não ser no sentido probabilístico;
- **falha por deterioração:** é a falha que resulta de mecanismos de deterioração inerentes ao item, os quais determinam uma taxa de falha crescente ao longo do tempo;
- **falha catastrófica:** é a falha repentina, a qual não pode ser prevista por monitoração, que resulta na incapacidade completa de um item desempenhar todas as funções requeridas.

Após esta abordagem sobre ruídos, é importante entender que a Engenharia da Qualidade necessita minimizar os efeitos dos ruídos no desempenho do produto. Existem duas maneiras de minimizar essa variabilidade:

- Eliminar as atuais fontes de ruído.
- Eliminar a sensibilidade dos produtos às fontes de ruído.

É possível ser muito caro e consumir muito tempo a eliminação de todos os fatores de ruído, propriamente ditos. Assim, tem-se a definição fundamental de Projeto Robusto:

**Def.:** Um produto ou processo é dito ser robusto quando é insensível aos efeitos da variabilidade, mesmo que as fontes de ruído, propriamente ditas, não tenham sido totalmente eliminadas.

O objetivo da Engenharia de Qualidade é desenvolver um produto ou processo cujo desempenho é minimamente afetado pelos fatores de ruído ou, ainda, que tenha custo baixo, alta confiabilidade e desempenho consistente. Isto significa qualidade.

Por outro lado, qualidade se constitui fundamentalmente de componentes que incluem a Satisfação do Consumidor e Projeto Robusto, sendo que a preocupação da Engenharia de Qualidade deve ser basicamente com:

- As características do produto.
- A adequação do produto aquelas características.

As características do produto são aquelas que tornam o produto atraente para o consumidor. Já a adequação do produto às características significa a habilidade do produto para consistentemente atingir o desempenho (*performance*) projetado em cada vez que for usado sob todas as condições de operação imaginadas pelos projetistas ao longo da sua vida sem nenhum efeito prejudicial. Já uma descrição quantitativa de qualidade, consistente com o objetivo de engenharia, deve ser desenvolvida com base em dois princípios:

- Desvio do desempenho (*performance*) projetado resulta em uma perda para o consumidor, uma perda para o fabricante e finalmente uma perda para a sociedade de acordo com a clássica curva da função de perda de Taguchi. Pois, o percentual de itens que se situam fora das especificações pode ser baixíssimo e o percentual de itens que requerem reparos durante o uso ser alto em razão das características se situarem muito perto dos limites de especificação.

- Perdas monetárias devido a desvios da *performance* projetada formam a base da descrição quantitativa de qualidade e é possível usar o custo para medir e quantificar qualidade de forma que: alta qualidade está livre dos custos associados com baixa qualidade.

Assim, os custos por perda de qualidade do produto são baseados nas consequências econômicas dos desvios da *performance* projetada. Por exemplo, as perdas do consumidor incluem:

- Tempo e esforços desperdiçados no reparo de pequenas falhas.
- Perda de ganho (lucro) devido ao não funcionamento do produto.
- Custo de aluguel de máquina em substituição a que está sendo reparada.
- Custos de serviços não garantidos.

As perdas do fabricante incluem:

- Inspeção, retrabalho e sucateamento.
- Custos de garantia.
- Perdas de vendas e de consumidores.
- Processamentos pelos consumidores.

E, as perdas para a sociedade incluem:

- Poluição e desperdício de recursos da natureza.
- Prejuízos pessoais, inclusive de vidas humanas.
- Falta de comunicação e transportes.

### Engenharia da Qualidade *fora da linha (off-line)*

A Engenharia de Qualidade fora da linha (*off-line*) consiste em três fases:

- Concepção do projeto é a fase na qual a equipe de desenvolvimento do produto define um sistema que funcione sob um conjunto de condições iniciais. O sistema poderia usar somente tecnologia que já tenha se mostrado robusta.
- Definição dos parâmetros do projeto é a fase na qual a equipe de desenvolvimento do produto otimiza a concepção do projeto identificando os fatores de controle específicos do conjunto de pontos que tornam o sistema sensível a ruídos o mínimo possível.
- Especificação das tolerâncias do projeto é a fase na qual a equipe de desenvolvimento do produto especifica os desvios permitidos aos valores dos parâmetros de projeto, aliviando a tolerância onde possível e apertando onde for necessário. Isto é feito balanceando os custos do produto com a qualidade do produto, dentro do contexto de satisfazer o consumidor.

### Engenharia da Qualidade na linha (*on-line*)

A Engenharia de Qualidade na linha (*on-line*) significa a manutenção da consistência de qualidade do produto e do processo e minimização da variação de unidade para unidade. É importante manter custos baixos e alta qualidade simultaneamente. A técnica mais utilizada na Engenharia de Qualidade na linha (*on-line*) é o Controle Estatístico de Processo (CEP).

### 2.3- FUNÇÃO DE CONFIABILIDADE E FUNÇÃO DE RISCO.

A modelagem estatística da função de risco é feita pela função densidade de falhas, que representa a variação da probabilidade de falhas de unidade para unidade de tempo. A sua representação é feita pela expressão:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

onde  $F(t)$  é a função distribuição de probabilidade (f.d.) da v.a.  $T$  (tempo). Assim, a probabilidade de falha de um componente, em um período de tempo compreendido entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ ,  $t_2 > t_1$ , é dada por:

$$p(f) = F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

Geralmente, em confiabilidade, deseja-se conhecer a probabilidade de que um item sobreviva a um dado intervalo estabelecido (de tempo, distância, entre outros), ou seja, que o item sobreviva a um “tempo” superior a  $x$ . Então, considerando a v.a.  $T$  como o tempo até o produto falhar (*lifetime*) a **Confiabilidade  $R(x)$**  é dada por:



$$R(x) = P(T > x) = \int_x^{\infty} f(t)dt = 1 - \int_{-\infty}^x f(t)dt = 1 - F(x)$$

A **taxa condicional de falha** é a probabilidade condicional de falha no intervalo de **t a t+dt**, dado que não houve falha em t. Essa função é conhecida, também, como **função de risco** ou em inglês *hazard function* ou *hazard rate*. A expressão dessa função é:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

### Exemplo

Gráficos da função densidade de probabilidade, da função de risco, da função de confiabilidade e da função distribuição são mostrados a seguir. No STATGRAPHICS o caminho é: STAT> DESCRIBE – DIST. FITTING – PROB DISTR – NORMAL 20 02 – Density/CDF/Survivor Function/Hazard Function

Gráfico da Função Densidade da N(20; 4 )

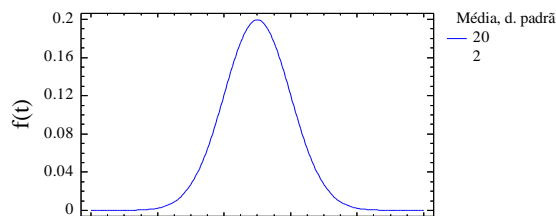


Gráfico da Função Risco - N(20; 4)

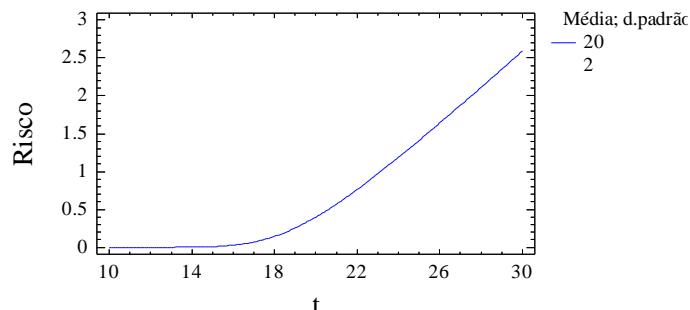
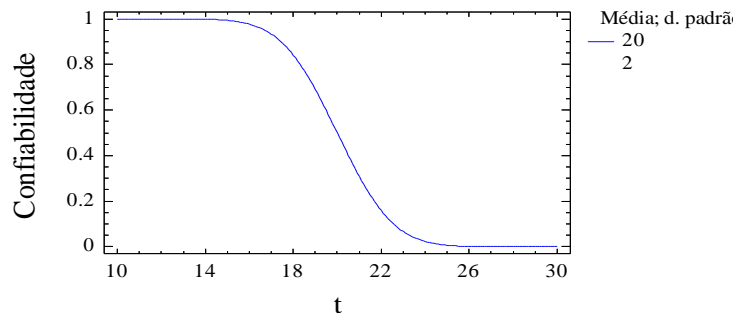
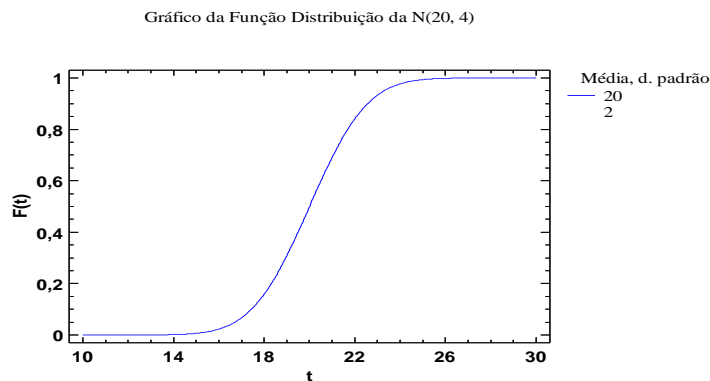


Gráfico da Função Confiabilidade - N(20; 4)





### Lista de Exercícios 1

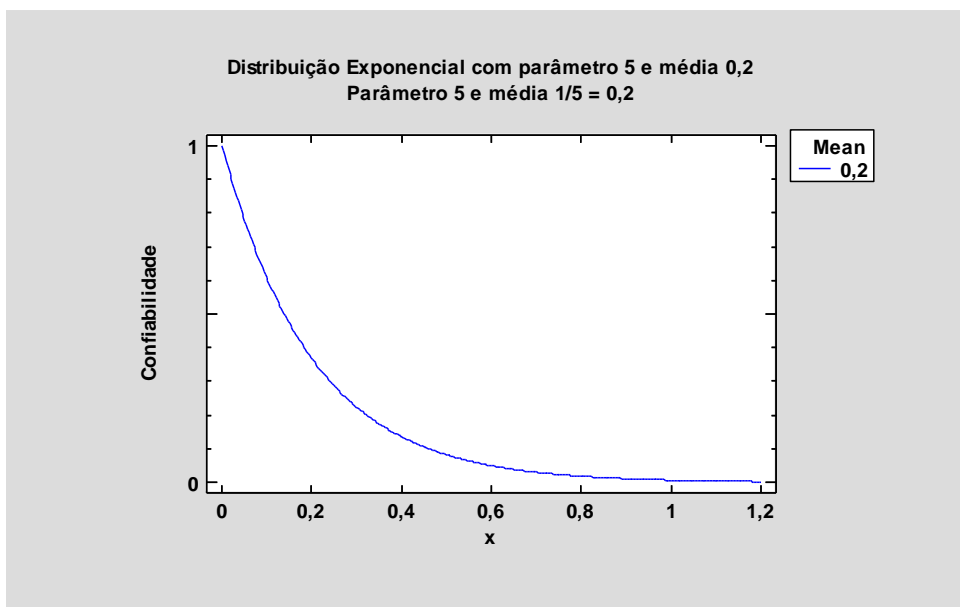
- 1) Explique cada uma das curvas dos gráficos anteriores.
- 2) Determine a função de confiabilidade,  $R(t)$ , referente a dados modelados segundo a distribuição exponencial.

Solução:

A f.d.p. da v.a.  $T$  com distribuição Exponencial com parâmetro  $\theta$  é  $f(t) = \theta e^{-\theta t}$   $t \geq 0$  e a função de confiabilidade é:

$$\begin{aligned}
 R(t) = P(T > t) &= 1 - F(t) = 1 - \int_0^t \theta e^{-\theta x} dx = 1 - (-\int_0^t e^{-\theta x} (-\theta) dx) = \\
 &= 1 - [-e^{-\theta x}]_0^t = 1 - [-e^{-\theta t} + e^{-\theta 0}] = \\
 R(t) &= 1 - [-e^{-\theta t} + e^{-\theta 0}] = e^{-\theta t} \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

O gráfico da  $R(t)$  de  $T \sim E(\theta)$  com parâmetro  $\theta = 5$  e média  $E(T) = 1/\theta = 0,2$  é:



- 3) Determine a função de confiabilidade,  $R(t)$ , referente a dados modelados segundo a distribuição Weibull.

Solução:

A f.d.p. da v.a.  $T$  com distribuição Weibull com parâmetros  $a$  e  $b$  é:

$$f(t) = abt^{b-1}e^{-at^b} \quad t > 0 \quad a, b > 0$$

E, nesta forma, sua média e sua variância são:

$$\mu = E(T) = a^{-\frac{1}{b}}\Gamma(1 + b^{-1}) \quad e \quad V(T) = \sigma^2 = a^{-\frac{2}{b}}[\Gamma(1 + 2b^{-1}) - \Gamma^2(1 + b^{-1})]$$

E, na forma  $f(t) = (\frac{\delta}{\alpha^\delta}) t^{\delta-1} e^{-(\frac{t}{\alpha})^\delta}$   $t \geq 0$ ,  $\delta = b > 0$  e  $a = \frac{1}{\alpha^\delta} > 0$  sua média e sua

variância são:  $E(T) = \mu = \alpha\Gamma[1+(1/\delta)]$

$$V(T) = \sigma^2 = \alpha^2\{\Gamma[1+(2/\delta)] + \{\Gamma[1+(1/\delta)]\}^2\} \quad \text{onde } \Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$$

E, a função de confiabilidade  $R(t)$  partindo da fórmula clássica é:

$$\begin{aligned} R(t) = P(T > t) &= 1 - F(t) = 1 - \int_0^t abx^{b-1}e^{-ax^b} dx = \\ &= 1 - [-\int_0^t e^{-ax^b} (-abx^{b-1}dx)] \\ &= 1 - [-e^{-ax^b}]_0^t = 1 - [-e^{-at^b} + e^{-a0^b}] = \\ R(t) &= 1 - [-e^{-at^b} + e^0] = e^{-at^b} \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Já na fórmula alternativa com a transformação dos parâmetros  $R(t)$  é:

$$\begin{aligned} R(t) &= \int_0^t (\frac{\delta}{\alpha^\delta}) x^{\delta-1} e^{-(\frac{x}{\alpha})^\delta} dx = e^{-(\frac{x}{\alpha})^\delta} \Big|_0^t = e^{-(\frac{t}{\alpha})^\delta} \\ R(t) &= e^{-(\frac{t}{\alpha})^\delta} \quad t \geq 0, \delta > 0 \quad e \quad \lambda = \frac{1}{\alpha^\delta} > 0 \end{aligned}$$

- 4) Verifique se a função risco (taxa de falhas) referente a dados modelados pela distribuição exponencial é constante.

Solução:

A função risco ou taxa de falhas é dada por  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\theta e^{-\theta t}}{e^{-\theta t}} = \theta$  é constante

e, portanto, não leva em conta o envelhecimento do produto. Lembre que

$$F(t) = P(T < t) = \int_0^t \theta e^{-\theta x} dx = -\int_0^t e^{-\theta x} (-\theta) dx = -[e^{-\theta x}]_0^t = -[e^{-\theta t} - e^{-\theta \cdot 0}] = 1 - e^{-\theta t}$$

$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\theta t}) = e^{-\theta t} \quad t > 0 \quad e \quad \theta > 0$$

- 5) Determine a função distribuição de probabilidade,  $F(t)$ , e a função de confiabilidade da Weibull com parâmetros  $a$  e  $b$ ,  $R(t)$ .

Solução:

$$\begin{aligned} P(T < t) = F(t) &= \int_0^t abx^{b-1}e^{-ax^b} dx = -\int_0^t x^{b-1}e^{-ax^b} (-abx^{b-1}) dx = -[e^{-ax^b}]_0^t = \\ &= -[e^{-at^b} - e^{-a0^b}] = 1 - e^{-at^b} \\ R(t) &= 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-at^b}) = e^{-at^b} \end{aligned}$$

5A) Verifique se a função risco (taxa de falhas) referente a dados modelados pela distribuição Weibull com parâmetros a e b é constante.

Solução:

Observando a função de risco  $\lambda(t)$  nota-se que não é constante, pois é função do tempo.

Logo considera o envelhecimento do produto

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{abt^{b-1}e^{-at^b}}{e^{-at^b}} = abt^{b-1} \quad t > 0$$

6) Determine a função densidade de probabilidade (f.d.p.) da exponencial partindo da função de confiabilidade  $R(t)$ .

Solução:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\theta t} \Rightarrow F(t) = 1 - e^{-\theta t}$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1 - e^{-\theta t})}{dt} = 0 - e^{-\theta t}(-\theta) = \theta e^{-\theta t} \quad t \geq 0 \quad \theta > 0$$

7) Determine a função densidade de probabilidade (f.d.p.) da Weibull com parâmetros a e b partindo da função de confiabilidade  $R(t)$ .

Solução:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-at^b} \Rightarrow F(t) = 1 - e^{-at^b}$$

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1 - e^{-at^b})}{dt} = 0 - e^{-at^b}(-abt^{b-1}) = abt^{b-1}e^{-at^b} \quad t \geq 0 \quad a, b > 0$$

8) Os dados a seguir correspondem aos tempos até a falha de determinado componente de um produto. Pede-se:

a) Faça os gráficos das funções: densidade de probabilidade  $f(t)$ , distribuição (acumulada) de probabilidade  $F(t)$ , de confiabilidade  $R(t)$  e de risco  $h(t)$ .

243,148	358,368	189,619	151,54	404,458
217,933	420,18	639,448	312,551	316,281
418,609	453,301	67,5299	299,798	264,088
295,415	331,536	62,8342	257,541	47,2083
277,703	225,022	199,456	148,937	323,893
241,739	263,470	145,358	84,3114	370,054
161,526	306,809	111,782	372,582	356,209
264,321	335,719	288,209	114,306	178,823
348,782	195,173	219,350	86,5315	206,428
179,332	44,5536	137,468	216,169	108,386
271,961	183,491	124,05	23,0431	55,6546
254,708	203,982	116,495	149,854	183,364
342,308	277,259	295,31	189,894	361,241
077,327	31,7705	397,613	67,7677	20,681
551,495	268,269	291,004	276,403	116,934
13,5351	559,208	73,4448	103,772	129,299
86,5134	435,714	207,15 0	212,689	369,709
331,078	171,95 0	80,0295	179,859	474,625

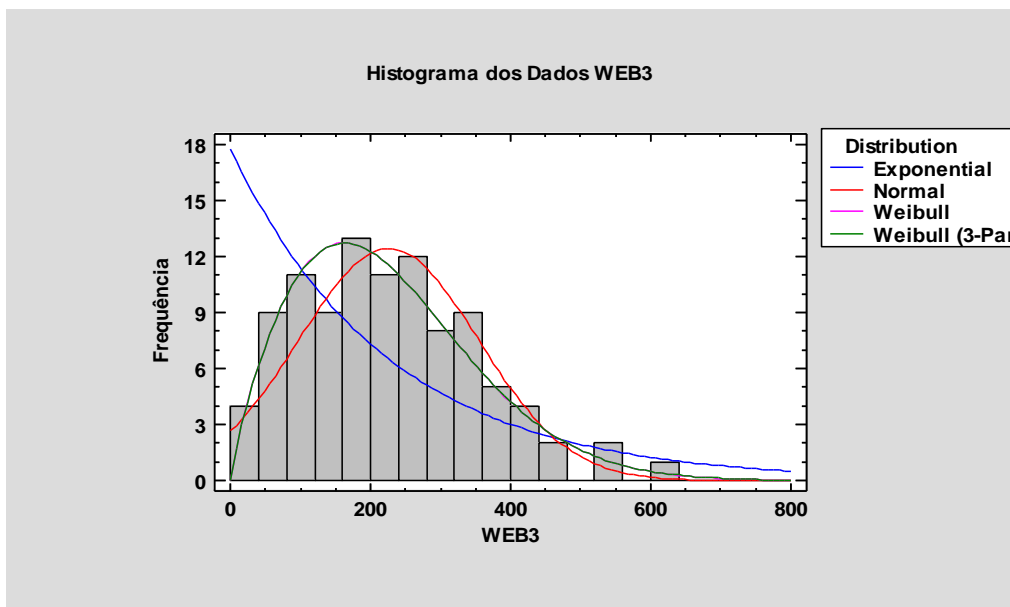
209,532	134,746	93,2334	149,938	170,507
207,746	166,25 0	47,4313	224,393	358,694

Solução:

A v.a. T, tempo até a falha, é contínua logo tem uma f.d.p. Então, deve-se identificar a distribuição que melhor se ajusta aos dados. Pode-se usar o STATGRAPHICS, entre outros programas, e por tentativa escolher a distribuição com maior valor-p.

STAT > DESCRIBE - DISTRIBUTION FITTING - FITTING UNCENSORED DATA  
WEB3 – EX8\_WEB3 – EXPONENCIAL NORMAL WEIBULL WEIBULL3

Então, verifica-se o melhor ajuste entre várias distribuições: Gaussiana, Weibull, Exponencial e Weibull Três Parâmetros com base no valor-p do Teste de Adequação (Kolmogorov-Smirnov) dos dados aos modelos.



Teste de Adequação ao Ajuste dos Dados WEB3 – Teste de Kolmogorov-Smirnov

	Exponencial	Normal	Weibull	Weibull (3-Parâmetros)
DPLUS	0,0956264	0,0726249	0,0366411	0,0368952
DMINUS	0,194579	0,0493461	0,0474721	0,0468495
DN	0,194579	0,0726249	0,0474721	0,0468495
Valor-p	0,00102913	0,667211	0,97786	0,980623

E, a distribuição que melhor se ajustou aos dados foi a Weibull com 3-parâmetros. Mas, quem é essa Weibull com 3-parâmetros? A distribuição Weibull mais comum tem 2 parâmetros e sua f.d.p. é:

$$f(t) = abt^{b-1}e^{-at^b} \quad t > 0 \quad a, b > 0$$

O parâmetro de escala é o a e o parâmetro de forma é o b. Mas, algumas vezes ao se adicionar um terceiro parâmetro  $\theta$  (de localização) ao modelo obtém-se a Weibull com 3-parâmetros, que tem f.d.:

$$F(t) = 1 - e^{-a(t-\theta)^b}$$

e função densidade de probabilidade:  $f(t) = ab(t - \theta)^{b-1}e^{-a(t-\theta)^b}$   $t \geq \theta$   $a, b, \theta > 0$

Então, o ajuste do modelo Weibull 3-parâmetros aos dados resulta nas seguintes estimativas dos parâmetros:

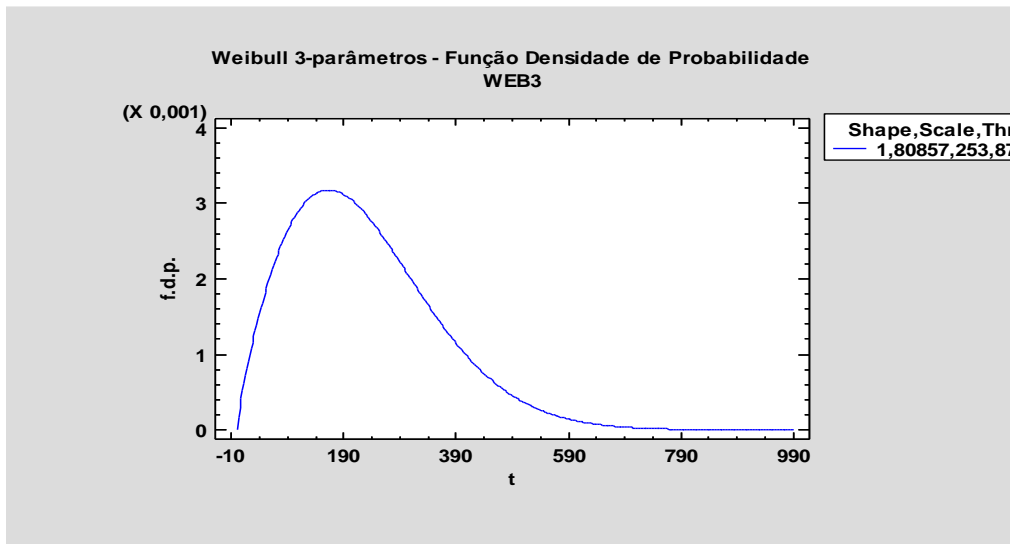
STAT > DESCRIBE DISTRIBUTION FITTING FITTING UNCENSORED DATA  
WEB3 WEIBULL 3-PARAMETER

Estimativas dos Parâmetros
Forma b = 1,80857
Escala a = 253,877
localização (lower threshold) $\theta = -0,0283797$

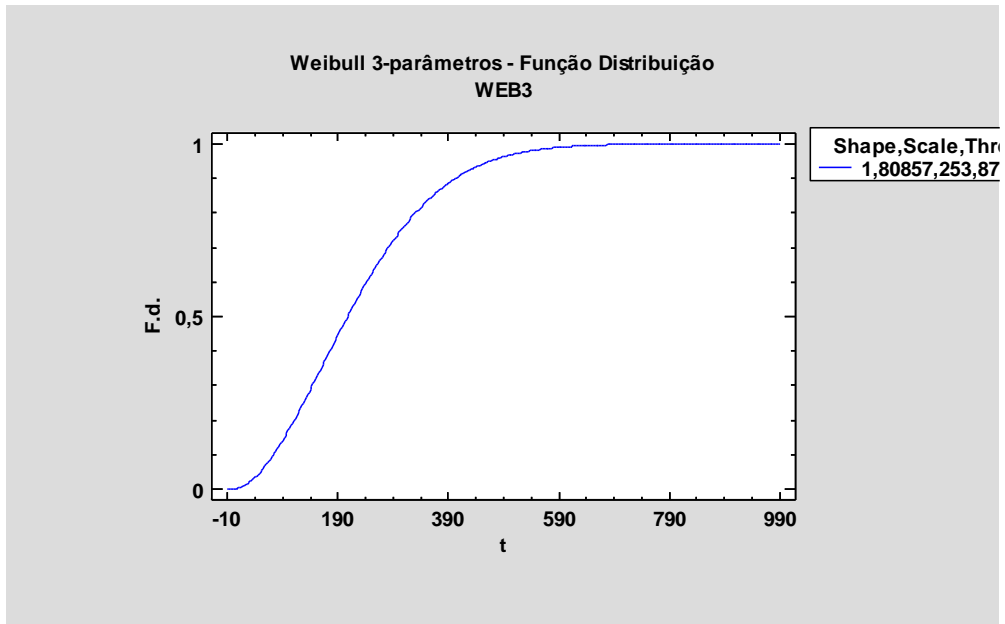
Em seguida entra-se com essas estimativas dos parâmetros para os gráficos do modelo.

STAT > DESCRIBE DISRIBUTIONS FITTING PROBABILITY DISTRIBUTIONS  
WEIBULL 3-PARAMETER Forma b = 1,80857 Escala a = 253,877 localização (lower threshold)  $\theta = -0,0283797$

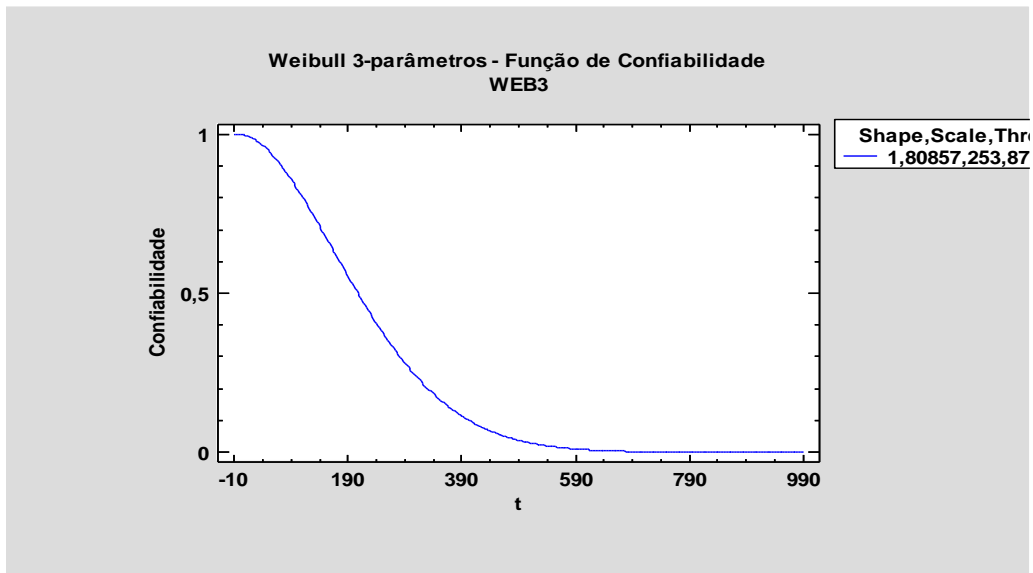
Função Densidade de Probabilidade  $f(t) = ab(t - \theta)^{b-1}e^{-a(t-\theta)^b}$   $t \geq \theta$   $a, b, \theta > 0$



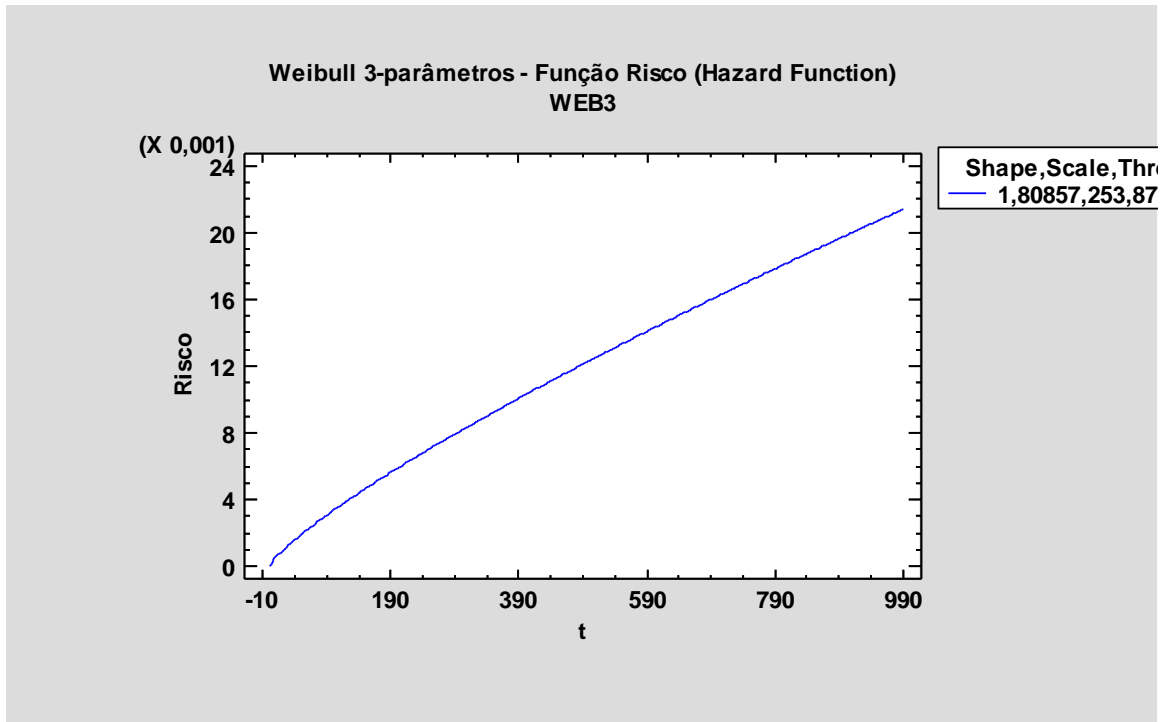
Função Distribuição  $F(t) = 1 - e^{-a(t-\theta)^b}$   $t \geq \theta$   $a, b, \theta > 0$



Função de Confiabilidade  $R(t) = e^{-a(t-\theta)^b}$   $t \geq \theta$   $a, b, \theta > 0$



Função Risco ou Função Taxa de Falhas  $\lambda(t) = h(t) = ab(t - \theta)^{b-1}$   $t \geq \theta$   $a, b, \theta > 0$



- 9) Usando as estimativas dos parâmetros da Weibull – 3 parâmetros escreva os modelos estimados da função densidade de probabilidade (f.d.p.), função distribuição de probabilidade (f.d.), função de confiabilidade  $R(t)$  e função de risco (taxa de falhas)  $\lambda(t)$  ou  $h(t)$ .

R.:

### Classificação da Função de Risco

A classificação existente para a função de risco  $\lambda(t) = h(t)$  tem três categorias:

- 1ª. Função de Risco Crescente e neste caso a frequência de falhas é crescente com o tempo.
- 2ª. Função de Risco decrescente e nessa categoria a frequência de falhas decresce com o tempo.
- 3ª. Função de Risco Constante ou Estacionária, quando o produto tem uma frequência de falhas que é aproximadamente constante.

Os produtos manufaturados possuem função de risco com a ocorrência sucessiva das três categorias de classificação. E, o gráfico da função de risco segue aproximadamente a figura 2.1 apresentada como Curva da Banheira. É importante observar que a função de Risco  $h(t)$  é também conhecida como taxa de falhas ( $\lambda(t)$ ) ou taxa de risco.



## Exercícios

1. Mostre que a função de falhas é igual a  $h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$  partindo da probabilidade de falha no intervalo  $[t, t + \Delta t]$ .

Prova:

A probabilidade de falha no intervalo  $[t, t + \Delta t]$  é igual a

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} f(u) du = R(t) - R(t + \Delta t)$$

e a probabilidade condicional do evento no tempo  $t$  é

$$P([t \leq T \leq t + \Delta t] | T \geq t) = \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{P(T \geq t)} = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)}$$

logo a taxa de falhas média no intervalo  $[t, t + \Delta t]$  é obtida pelo limite

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{R(t)\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-[R(t + \Delta t) - R(t)]}{R(t)\Delta t} = \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-[R(t + \Delta t) - R(t)]}{\Delta t} = \frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} \\ &= \frac{-\frac{d(1-F(t))}{dt}}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad t \geq 0 \text{ e lembre que } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[R(t + \Delta t) - R(t)]}{\Delta t} \text{ é por definição derivada.} \end{aligned}$$

2. Quais as condições que uma função de risco deve obedecer?

R: São duas as condições: 1<sup>a</sup>)  $\int_0^\infty h(t) dt = \infty$  e 2<sup>a</sup>)  $h(t) \geq 0$ .

3. Determine a função de confiabilidade  $R(t)$  a partir da função de risco  $h(t)$ .

$$R.: \quad h(t) = \frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} = -\frac{d}{dt} \ln[R(t)] \quad \text{e} \quad \int_0^t h(u) du = \int_0^t \left(-\frac{d}{du} \ln[R(u)]\right) du = -\ln[R(t)]$$

OBS. Lembre que  $\frac{d}{du} \ln(u) = \frac{1}{u}$ .

$$\text{Agora, isolando } R(t) \text{ em } h(t) = \int_0^t h(u) du = -\ln[R(t)] \Rightarrow \ln[R(t)] = -\int_0^t h(u) du$$

$$\text{e tem-se } R(t) = e^{-\int_0^t h(u) du} \quad t \geq 0.$$

4. Determine a função de densidade de probabilidade  $f(t)$  a partir da função de risco  $h(t)$ .

$$R.: \quad h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad \text{e, portanto, } f(t) = h(t)R(t) = h(t) e^{-\int_0^t h(u) du} \quad t \geq 0$$

5. Defina a função acumulada de risco  $H(t)$  em um período de tempo.

$$R.: \quad H(t) = \int_0^t h(u) du \quad t \geq 0$$

- 6) Um componente de um equipamento tem o seu tempo de duração (*lifetime*) modelado segundo uma distribuição Weibull com 3-parâmetros com parâmetros: de forma  $b = 2,0$  e de localização (lower threshold)  $\theta = 100,0$ . Depois de se trabalhar com um número grande de componentes observou-se que 4,0323% desses itens duraram mais de 130 h e acabaram falhando antes de 140 h. Determine o parâmetro de escala  $a$ .

Solução:

A distribuição Weibull com dois parâmetros tem f.d.p.  $f(x) = abt^{b-1}e^{-at^b}$   $t, a, b \in \mathbb{R}_+$  e sua f.d. tem a forma  $F(t) = 1 - e^{-at^b}$   $t, a, b \in \mathbb{R}_+$ .

**OBS:** é comum encontrar-se na literatura a f.d.p. da v.a. Weibull escrita em uma forma diferente da clássica  $f(t) = \alpha \beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^\beta}$   $t, \alpha, \beta \in R_+$ . Esta forma alternativa ocorre quando se faz  $\beta = a$  e  $\alpha = \frac{1}{b^a}$ , obtendo-se

$$f_X(x) = \frac{a x^{a-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a}}{b^a}, x > 0, a > 0, b > 0$$

E, a Weibull 3-parâmetros é formada agregando-se um parâmetro de locação (lower threshold)  $\theta$  ao modelo obtendo-se a f.d.p.  $f(t) = ab(t - \theta)^{b-1} e^{-a(t-\theta)^b}$  e a f.d. tem a forma

$$F(t) = 1 - e^{-a(t-\theta)^b} \Rightarrow R(t) = e^{-a(t-\theta)^b} \quad t \geq \theta \quad a, b, \theta > 0$$

A Weibull 3-parâmetros pode ser encontrada, também, em outro formato diferente do clássico, ou seja,

$$f(x) = \alpha \beta^{-\alpha} (x - \theta)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x-\theta}{\beta}\right)^\alpha} \quad \text{com } \alpha, \beta > 0 \text{ e } t > \theta \text{ e a f.d. tem a forma}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\theta}{\beta}\right)^\alpha} \Rightarrow R(x) = e^{-\left(\frac{x-\theta}{\beta}\right)^\alpha} \quad \text{com } \alpha, \beta > 0 \text{ e } t > \theta.$$

Portanto, a reparametrização foi  $a = \frac{1}{\beta^\alpha}$  e  $b = \alpha$ .

O MINITAB e o STATGRAPHICS trabalham com esta forma.

Voltando ao problema:

$$P(T < 140 | T > 130) = 0,040323 \Rightarrow P(T < 140 | T > 130) = \frac{P(< 140) \cap P(T > 130)}{P(T > 130)}$$

$$P(T < 140 | T > 130) = \frac{P(130 < T < 140)}{P(T > 130)}$$

$$P(T < 140 | T > 130) = \frac{F(140) - F(130)}{1 - F(130)}$$

$$P(T < 140 | T > 130) = \frac{R(130) - R(140)}{R(130)}$$

E, lembrando que  $R(t) = e^{-a(t-\theta)^b}$  tem-se:

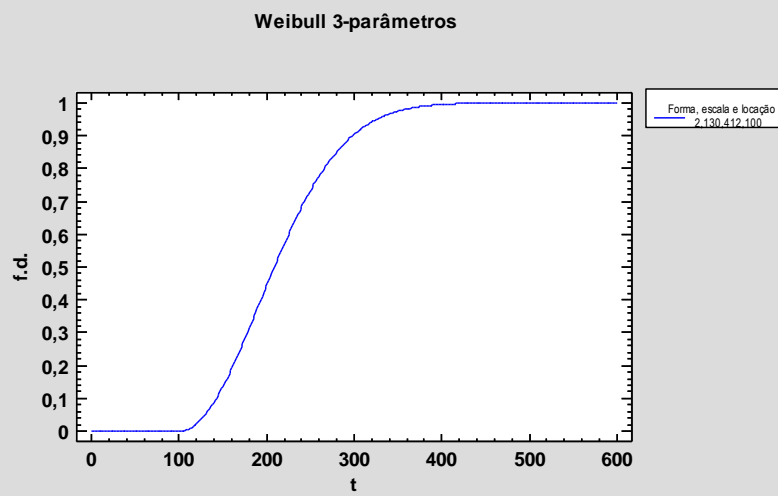
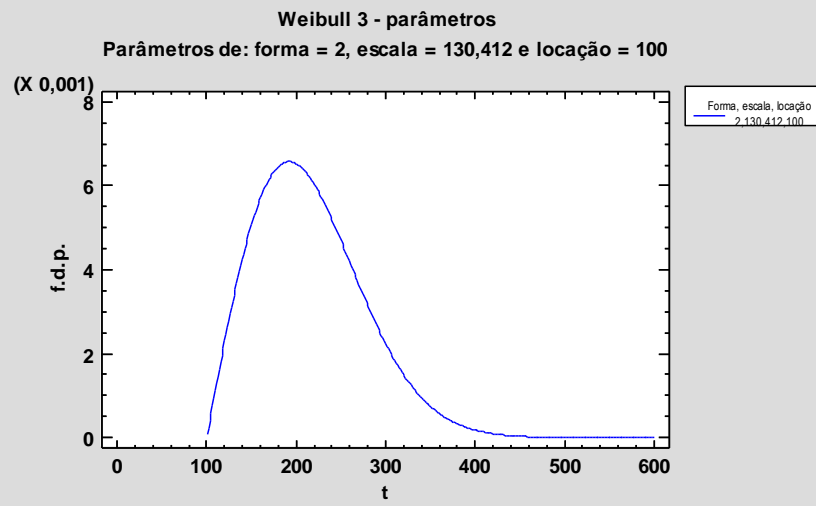
$$P(T < 140 | T > 130) = \frac{e^{-a(130-100)^2} - e^{-a(140-100)^2}}{e^{-a(130-100)^2}} = 1 - e^{-a(140-100)^2 + a(130-100)^2}$$

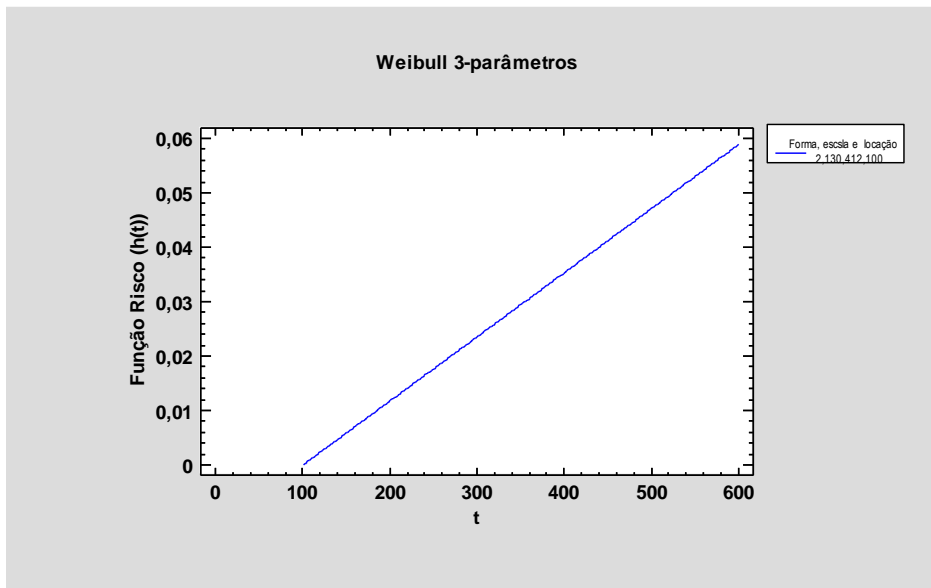
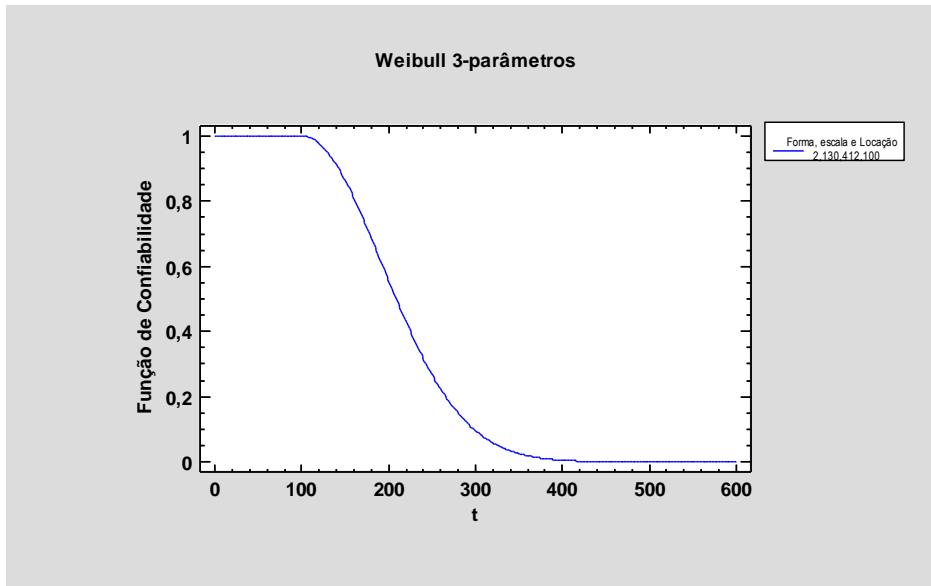
$$P(T < 140 | T > 130) = 1 - e^{-a(40)^2 + a(30)^2} = 0,040323 \Rightarrow e^{-1600a + 900a} = 0,959677$$

$$-1600a + 900a = \ln(0,959677) \Rightarrow -700a = -0,041159 \Rightarrow a = \frac{-0,041159}{-700} = 0,0000588$$

E a estimativa para entrar nos programas seria  $a = \frac{1}{\beta^\alpha}$  e  $b = \alpha$ , logo encontra-se:

$$\alpha = 2 \text{ e } \frac{1}{\beta^2} = 0,0000588 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{0,0000588}} = 130,412$$





## 2.4- TEMPO DE FALHA: Análise e Conceitos Básicos.

### 2.4.1- Introdução

A **análise do tempo de falha** corresponde a um conjunto de **técnicas estatísticas de análise de dados da durabilidade de um produto**, oriundos tanto do **campo** quanto de **testes de vida**. Nos testes de vida os itens (produtos) amostrados são submetidos às mesmas condições do uso real (campo). E, a análise do tempo de falha é feita para estimar, com base nos dados, quantidades de interesse, tais como:

- O valor esperado da variável aleatória correspondente ao tempo até falhar que é designado como **tempo médio até a falha (MTTF)**.

**Def.:** O tempo médio até a falha, MTTF, é definido para a v.a. T como:

$$MTTF = E(T) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) dt$$

**Exemplo 1:**

No caso da v.a.  $T \sim E(\lambda)$  o MTTF é igual ao recíproco da taxa de falhas  $\lambda$ , ou seja,  $MTTF = \frac{1}{\lambda}$ , ou seja, é a esperança da v.a. T. Este resultado é utilizado quando se trabalha com componentes não reparáveis.

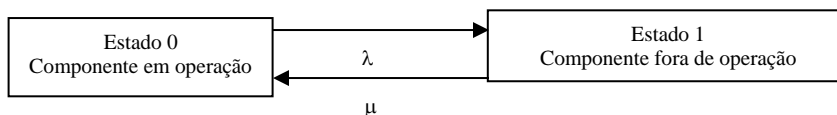
- O tempo médio entre falhas (MTBF) é levemente diferente do MTTF e essa terminologia pode causar alguma confusão entre os termos. O termo MTBF é usado para indicar o período de tempo entre falhas. O seu valor excede o valor do MTTF e isto ocorre devido o tempo associado com reparo. No caso de vários componentes ou sistemas, o tempo de reparo é usualmente muito menor quando comparado com o tempo de operação e, conseqüentemente, os valores numéricos do MTTF e do MTBF são muito próximos. Se o tempo de reparo é grande, os valores poderão ser significativamente diferentes. É utilizado para produtos ou componentes reparáveis.
- O tempo médio de reparo (MTTR) é o valor numérico da diferença entre MTTF e MTBF.
- A disponibilidade (D) indica o grau em que um equipamento (ou parte dele) estará em condições para começar a funcionar, quando for solicitado, num dado instante. Sua expressão é:

$$D = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

- Percentil 10% ( $B_{10}$ ), tempo no qual se espera que 10% dos produtos falhem.
- Percentil 50% (mediana) ( $B_{50}$ ), tempo no qual se espera que 50% dos produtos falhem.
- Função de confiabilidade  $R(t)$ .
- Função de risco  $h(t)$  ou taxa de falha ( $\lambda(t)$ ), é a taxa instantânea de falha no tempo t, dado que o componente estava em operação até o tempo t.
- Fração esperada de falhas no tempo de garantia, entre outras de interesse.

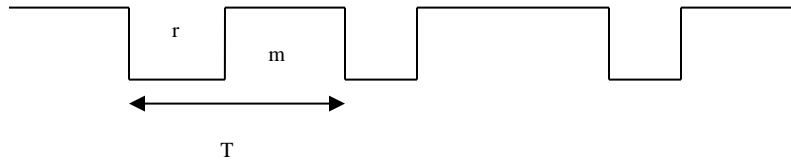
**Exemplo 2:**

Considere dois estados em um processo Markoviano (Cadeia de Markov) para um único componente que possui taxa de falha e taxa de reparo constantes,  $\lambda$  e  $\mu$  respectivamente.



A f.d.p. de falha para o componente com taxa de falhas  $\lambda$  é dada por  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$   $\lambda > 0$  e as funções para os estados de operação e de falha do sistema são:  $f_0(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  e  $f_f(t) = \mu e^{-\mu t}$  respectivamente com  $\lambda > 0$  e  $\mu > 0$ .

Considere o diagrama de estados seguinte:



tem-se:

$\lambda$  = taxa de falha do componente

$\mu$  = taxa de reparo do componente

m = tempo médio de operação do componente

r = tempo médio de reparo do componente

T = é o tempo do ciclo do sistema

Então,

$m = \text{MTTF} = \frac{1}{\lambda}$  ;  $r = \text{MTTR} = \frac{1}{\mu}$  ;  $T = m + r = \frac{1}{f}$  , onde f é a frequência do ciclo do sistema.

### Exemplo 3: Mecanismo Manual dos Vidros das Portas de Veículos.

Os fabricantes do mecanismo, cuja função é subir e descer os vidros das portas dos veículos fazem testes para obter informações importantes sobre a confiabilidade do produto. O tipo mais comum de teste é aquele em que o mecanismo desloca para cima e para baixo uma carga com peso igual ao do vidro, até que a falha ocorra. Estima-se que 30.000 ciclos (subir e descer a carga) equivalem a 10 anos de uso em condições normais. Uma amostra aleatória composta por 30 mecanismos novos foi posta em teste (**teste de vida**). O teste consistiu em fazê-los funcionar por 50.000 ciclos e registrar o número de ciclos completados até falhar (tempo de falha). Após os 50.000 ciclos, 18 mecanismos haviam falhado e 12 continuaram em operação. Os números de ciclos até a falha foram: 38590, 16513, 27847, 13566, 14922, 40278, 11223, 36229, 5626, 39580, 44540, 31225, 28613, 12128, 26791, 41325, 27144 e 22138. A partir desses dados amostrais deseja-se obter as seguintes informações a respeito do produto:

- a) Descrição numérica dos dados e verificação da Gaussianidade (normalidade).

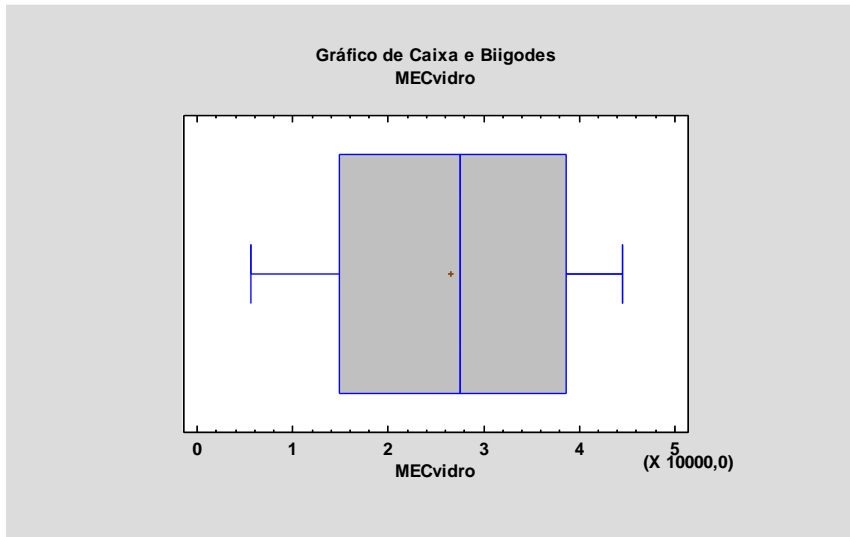
Solução:

STAT> DESCRIBE – NUMERIC DATA – ONE VARIABLE ANALYSIS – MECvidro

#### Resumo das Estatísticas de MECvidro

Tamanho da amostra n	18
Média	26571,0
Mediana	27495,5
Variância	1,45397E8
Desvio padrão	12058,1
Coef. de variação	45,3805%
Mínimo	5626,0
Máximo	44540,0
Amplitude	38914,0

Coef. de simetria padronizado	-0,27213
Coef. de Curtose padronizado	-1,08628



Aplicando os testes de Gaussianidade:

STAT> DESCRIBE – DISTR. FITTING – UNCENSORED DATA – MECvidro –  
NORMAL – Test for Normality – Goodness-of-Fit Tests

Teste Shapiro-Wilk: W = 0,941467 valor-p p = 0,30696

Dados são Gaussianos pois o valor-p é p = 0,30696 > 0,05.

Teste de Kolmogorov-Smirnov de Adequação aos dados: valor-p p = 0,915862

Dados são Gaussianos, pois o valor-p é p = 0,915862 > 0,05.

- b) O número médio de ciclos completados até a falha do mecanismo.

Solução:

$$\bar{x} = 26571$$

- c) Pretende-se garantir o produto por 2 anos e sabe-se que o número médio de ciclos de funcionamento do produto no período de 2 anos é de 6000 ciclos. Então, há necessidade de se conhecer a fração de mecanismos defeituosos esperada nos primeiros 2 anos de uso.

Solução:

Sabe-se que 30000 ciclos equivalem a 10 anos, logo 6000 corresponde a 2 anos.

$$P(T < t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = F(t) \text{ com } \mu = 26571 \text{ e } \sigma = 12058,1$$

$$P(T < 6000) = \frac{1}{12058,1\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-26571}{12058,1}\right)^2} dx = 0,0440048 = 4,04\% \text{ usando o}$$

STATGRAPHICS: STAT> DESCRIBE – DISTR. FITTING – PROBABILITY  
DISTR. – MECvidro – Normal – 26571 12058,1 Cumulative Distr. => 0,0440048.

- d) O número de ciclos para o qual 10% dos produtos estarão fora de operação.

Solução:

STATGRAPHICS: STAT> DESCRIBE – DISTR. FITTING – PROBABILITY DISTR. – MECvidro – Normal – 26571 12058,1 Inverse CDF 0,10 => 11118 ciclos.

Duas observações importantes podem ser feitas neste exemplo:

- 1<sup>a</sup>. As condições de uso (contínuo) são mais rigorosas que o uso normal. O **teste de vida** permite obter dados da **durabilidade** do produto em um tempo relativamente curto, pois um aumento na taxa de uso é uma forma de aceleração;
- 2<sup>a</sup>. O uso do número de ciclos do produto como sua medida de durabilidade no tempo e não o tempo de uso.

#### 2.4.2- Conceitos Básicos

##### Tipos de Falhas

No estudo da confiabilidade de um produto deve-se começar definindo de forma clara e precisa o que vem a ser falha. Existem as falhas que são fáceis de categorizar. Essas são as falhas chamadas de **falhas catastróficas**, isto é, o equipamento deixa de funcionar.

**Exemplo:** A falha de uma lâmpada incandescente é do tipo catastrófica (para de funcionar).

Outros produtos vão se deteriorando gradativamente com o tempo. Neste caso há necessidade de se definir claramente o que é falha, de forma a não haver margem para dúvida.

**Exemplo 1:** Metais, plásticos e borracha, entre outros.

**Exemplo 2:** Nas cafeteiras elétricas, a água é aquecida passando por uma tubulação quente. Mas, com o passar do tempo os componentes minerais existentes na água vão se acumulando na tubulação diminuindo o seu diâmetro. Então, o tempo para fazer o café vai aumentando gradativamente. A falha, então, é definida pela **perspectiva do consumidor**. E, quando o consumidor diz que ela está demorando demais, este seria o tempo de falha. Isto pode ser quantificado, definindo-se que o tempo para preparar 8 xícaras não pode ultrapassar 10 min.

Então, é importante ser bem definidos em estudos de confiabilidade:

- o evento de interesse, geralmente chamado de **falha**;
- a **escala de medida** relacionada ao tempo de falha, geralmente o tempo real.

#### CENSURA



Geralmente os **testes de vida** usados para se obter medidas da durabilidade de produtos são demorados e caros. Sendo assim, eles terminam antes que todos os itens falhem. Então, tem-se observações incompletas ou parciais. No exemplo do mecanismo do vidro da porta, 12 itens não falharam antes de se completar 50000 ciclos (do teste). Essas medidas são chamadas de **censuradas**,

### Tipos de Censura

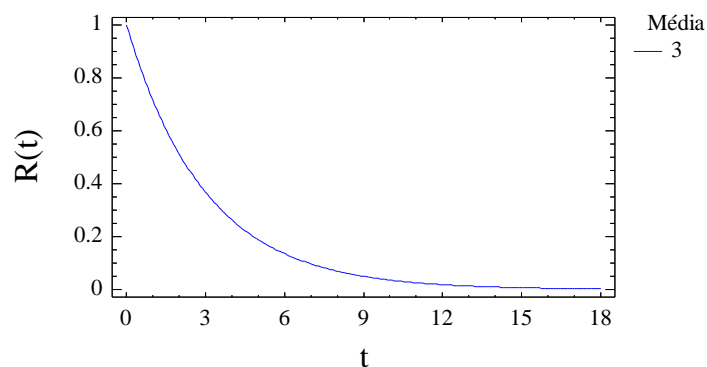
A censura pode ser de três tipos:

- **Censura por Tempo ou Tipo I:** o teste termina após um período pré-estabelecido de tempo (é o caso dos 12 mecanismos do vidro da porta);
- **Censura por Falha ou do Tipo II:** o teste termina após ter ocorrido falha em um número pré-determinado de itens sob teste.
- **Censura do Tipo Aleatório:** o item é retirado do teste antes de ocorrer a falha; é o caso do item falhar por uma causa diferente da que foi definida.

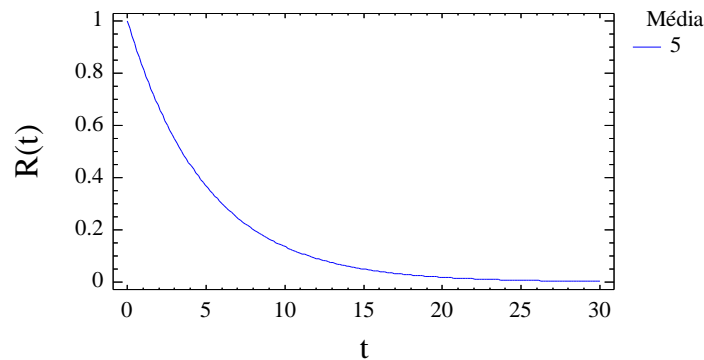
### Exercícios

- 1) Qual o nome que se dá a probabilidade  $R(t) = P(T \geq t)$ , onde  $T$  é a v.a. correspondente ao tempo de falha?
- 2) Indique qual fábrica produz o item A de forma mais confiável, analisando as funções de confiabilidade adiante.

Função de Confiabilidade do Produto A - Fábrica 1



Função de Confiabilidade do Produto A - Fábrica 2



- 3) Calcule a fração dos produtos A (da Fábrica 1) que falham antes de completar 1 ano de uso, considerando que a modelagem do tempo de falha foi feita com a distribuição exponencial e considere que a média é 3.

**Solução:**

O modelo é o exponencial, então  $f(t) = \theta e^{-\theta t}$   $t > 0$  e  $\theta > 0$ .

A esperança (média) da v.a. T (tempo de falha) é:

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \theta e^{-\theta t} dt = \frac{1}{\theta} \quad \text{e} \quad \mu = 3 = \frac{1}{\theta} \quad \text{logo } \theta = 1/3.$$

Portanto, o modelo tem a forma:  $f(t) = 0.333e^{-0.333t}$   $t > 0$  e a fração de produtos (probabilidade) que falham antes de 1 ano de uso é dada por:

$$P(T \leq 1) = \int_0^1 0,333e^{-0,333t} dt = 0,28323 = 28,323\%$$

A **variável aleatória T** que representa o **tempo de falha** é usualmente especificada por duas funções:

- Sua função de confiabilidade  $R(t)$  ou por
- Sua função de risco ou taxa de falhas  $h(t)$  que é representada, também, por  $\lambda(t)$ .

**Função de Confiabilidade**

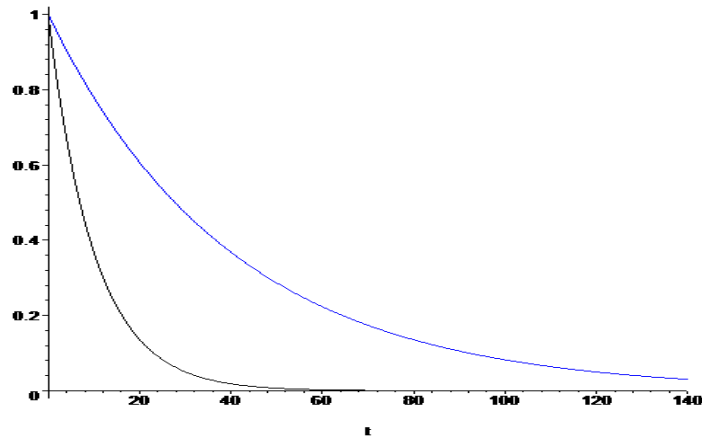
**Def.:** A função de confiabilidade é definida como a probabilidade de um produto funcionar sem falhar até um dado tempo  $t$  ou continuar funcionando sem falha depois do tempo  $t$ .

Esta é a principal função probabilística usada para descrever dados de **durabilidade** e, expressando o tempo até falhar como a variável aleatória T, sua expressão é dada por:

$$R(t) = P(T \geq t)$$

Adiante tem-se o gráfico de duas funções de confiabilidade,  $R_1(t) = e^{-0.1t}$  e  $R_2(t) = e^{-0.025t}$ . Uma para o tempo de falha modelado pela distribuição exponencial com parâmetro  $\theta = 0,1$

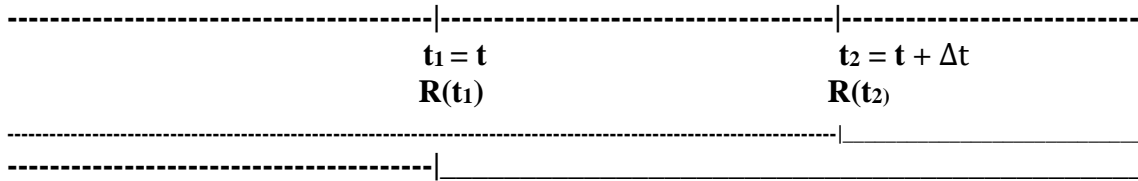
= 1/10 e outra com  $\theta = 0,025 = 1/40$ . Como pode ser feita a identificação de cada uma das funções?



### ***Função de Risco ou Função Taxa de Falha***

A probabilidade de um produto falhar no intervalo de tempo  $[t_1, t_2)$  pode ser calculada pela sua função de confiabilidade dada por:

$$P[t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = R(t_1) - R(t_2)$$



E, de uma forma geral, redefinindo o intervalo como  $[t, t+\Delta t)$  tem-se a função de risco ou taxa de falha dada por:

$$h(t) = \lambda(t) = \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t R(t)}$$

E, ainda, quanto  $\Delta t \rightarrow 0$   $h(t) = \lambda(t)$  representará a **taxa de falha instantânea**:

$$h(t) = \lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

### **EXEMPLO 1**

Seja a tabela adiante que mostra os dados do tempo de falha de 54 produtos e todos falharam no teste de vida, portanto não houve censura.

Intervalo de tempo	Falhas no intervalo	Produtos em atividade até o tempo t	Taxa de falha estimada $\hat{\lambda}(t) (/100h)$	Confiabilidade estimada (%) $\hat{R}(t)$
0  – 100	2	54	0.037	100.000
100  – 200	5	52	0.096	96.296
200  – 300	10	47	0.213	87.037
300  – 400	16	37	0.432	68.519
400  – 500	9	21	0.429	38.889
500  – 600	7	12	0.583	22.222
600  – 700	4	5	0.800	9.259
700  – 800	1	1	1.000	1.852

a) Qual a taxa de falha no período compreendido entre 400 e 500 horas?

$$\hat{\lambda}(400 - 500) = \frac{\text{Número de falhas no intervalo } 400 | - 500}{\text{Número de itens que entram funcionando em } t=400} = \frac{9}{21} = 0,429$$

b) Estime os valores da taxa de falha (função risco) em todos os intervalos;

$$\hat{\lambda}(0 - 100) = \frac{\text{Número de falhas no intervalo } 0 | - 100}{\text{número de itens que entram funcionando em } t = 0} = \frac{2}{54} = 0,037$$

$$\hat{\lambda}(100 - 200) = \frac{\text{Número de falhas no intervalo } 100 | - 200}{\text{Número de itens que entram funcionando em } t=100} = \frac{5}{52} = 0,096$$

$$\dots\dots\dots \hat{\lambda}(700 - 800) = \frac{\text{Número de falhas no intervalo } 700 | - 800}{\text{Número de itens que entram funcionando em } t = 700} = \frac{1}{1} = 1,000$$

c) Estime os valores da confiabilidade em todos os intervalos;

$$\hat{R}(0 - 100) = \frac{\text{Número de produtos em operação no intervalo } 0 | - 100}{\text{Número de produtos sob testes}} = \frac{54}{54} = 100,0\%$$

$$\hat{R}(100 - 200) = \frac{\text{Número de produtos em operação no intervalo } 100 | - 200}{\text{Número de produtos sob testes}} = \frac{52}{54} = 96,296\%$$

$$\dots\dots\dots \hat{R}(700 - 800) = \frac{\text{Número de produtos em operação no intervalo } 700 | - 800}{\text{Número de produtos sob testes}} = \frac{1}{54} = 1,852\%$$

d) O que significa o número  $21/54 = 0,3889$  correspondente ao intervalo de 400 a 500 h?

**R.:** Este número representa a confiança na durabilidade do produto, ou seja, espera-se que 38,89% dos produtos durem mais de 400 h.

e) Existe outra maneira de se calcular a taxa de falha, além daquela usada no item a)?

**R.:** Sim, é usar:

$$\hat{\lambda}(t) = \frac{\hat{R}(t) - \hat{R}(t + \Delta t)}{\Delta t \hat{R}(t)} = \frac{\hat{R}(400) - \hat{R}(500)}{(500 - 400)\hat{R}(t)} = \frac{0,685 - 0,389}{100 \times 0,685} = 0,0043/h$$

Já o resultado para o período de 100 h é 0,429 ou de 42,9% para o período de 100 h.

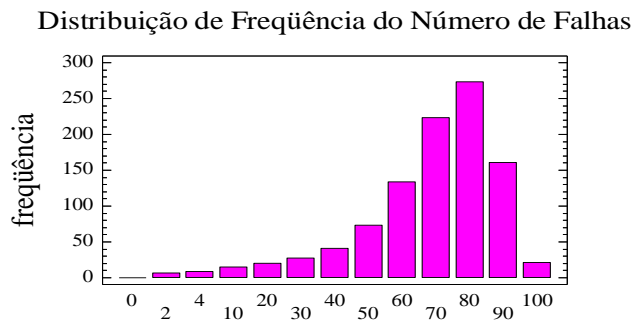
## EXEMPLO 2

A tabela adiante apresenta os resultados de um teste de vida (ensaio de confiabilidade) no qual 1000 componentes foram ensaiados em 100 meses.

Tempo t (mês)	Num. falhas	Número Sobrev.	Num. Falhas Acum.	Dist. Ac. Falhas (%)	$\hat{R}(t)$ (%)
0	0	1000	0	0	1000/1000 = 100.0
2	6	994	6	1	994/1000 = 99.4
4	8	986	14	1	986/1000 = 98.6
10	15	971	29	3	971/1000 = 97.1
20	20	951	49	5	951/1000 = 95.1
30	27	924	76	8	924/1000 = 92.4
40	41	883	117	12	883/1000 = 88.3
50	73	810	190	19	810/1000 = 81.0
60	133	677	323	32	677/1000 = 67.7
70	223	454	546	55	454/1000 = 45.4
80	273	181	819	82	181/1000 = 18.1
90	160	21	979	98	21/1000 = 2.1
100	21	0	1000	100	0/1000 = 0.0

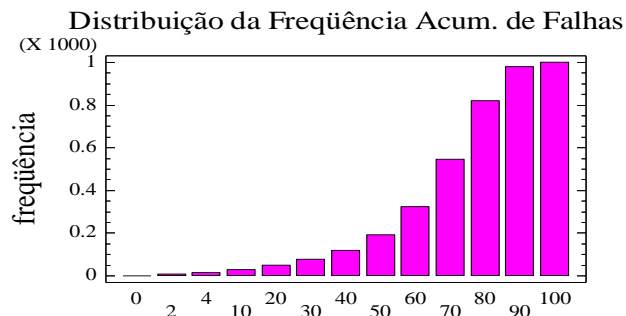
a) Faça um gráfico em barras que represente a distribuição de falhas (Num. Falhas x Tempo).

STAT> PLOT – BUSINESS CHARTS – BARCHART – (counts) num. falhas e (label) tempo.



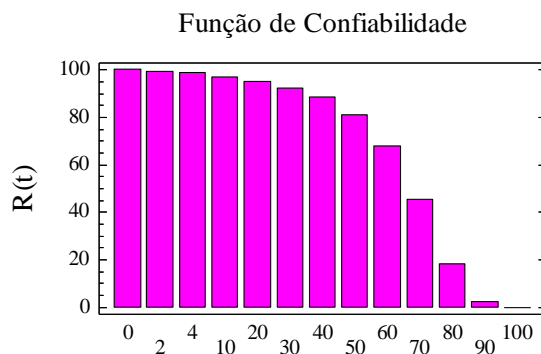
b) Construa o gráfico em barras que represente a distribuição de frequência acumulada de falhas.

STAT> PLOT – BUSINESS CHARTS – BARCHART – (counts) num\_Falhas.ac e (label) tempo.



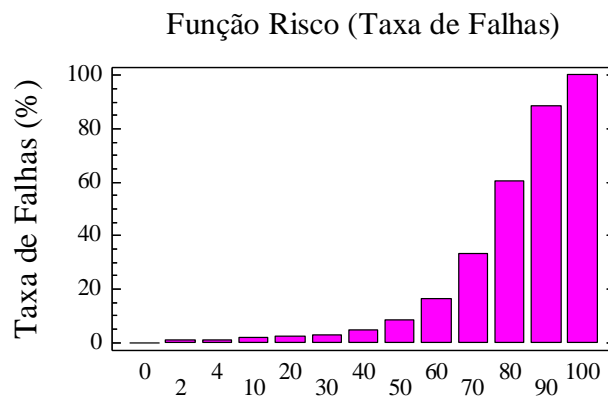
c) Construa o gráfico em barras que represente a função de confiabilidade.  
 STAT> PLOT – BUSINESS CHARTS – BARCHART – R e tempo.

**Ex.:**  $R(30) = \frac{\text{Número de produtos em operação no intervalo}}{\text{Número de produtos sob testes}} = 924/1000 = 92,4\%$



d) Construa o gráfico em barras que represente a taxa de falhas (função risco).  
 STAT> PLOT – BUSINESS CHARTS – BARCHART – h(t) e tempo.

**Ex.:**  $\hat{\lambda}(90) = \frac{\text{Número de falhas no intervalo}}{\text{Número de produtos até } t = 90} = \frac{160}{181} = 0,884$



## Exercícios

- 1) A tabela adiante mostra a distribuição do tempo de falha de um produto E, numa amostra de tamanho  $n = 54$ , bem como os valores da função de confiabilidade.

Distribuição de Frequências de Falha do Produto E e a Confiabilidade em Intervalos de Tempo de 100 h

Interv.	Inf. Limite	Sup. Limite	P.Médio	Frequência	R(t)
1	0.0	100.0	50.0	2	1.000
2	100.0	200.0	150.0	5	0.963
3	200.0	300.0	250.0	10	0.870
4	300.0	400.0	350.0	16	0.685
5	400.0	500.0	450.0	9	0.389
6	500.0	600.0	550.0	7	0.222
7	600.0	700.0	650.0	4	0.093
8	700.0	800.0	750.0	1	0.019

Média = 377.074    Desvio padrão = 155.977

- a) Estime a função taxa de falha (função risco  $h(t)$ ) no intervalo  $[0, 100)$ .

$$\hat{R}(t) = \frac{\text{número de produtos em operação até o tempo } t}{\text{número de produtos sob teste}}$$

$$\hat{R}(0) = \frac{54}{54} = 1,00$$

$$\hat{R}(100) = \frac{52}{54} = 0,963$$

$$\hat{h}[t, t + \Delta t) = \frac{\hat{R}(t) - \hat{R}(t + \Delta t)}{\Delta t \hat{R}(t)}$$

$$\hat{h}[0, 100) = \frac{\hat{R}(0) - \hat{R}(0 + 100)}{100 \times \hat{R}(0)} = \frac{\hat{R}(0) - \hat{R}(100)}{100 \times \hat{R}(0)} = \frac{1,00 - 0,963}{100 \times 1} = 0,037/100 = 0,00037$$

= 0,037% por hora

De outro modo

$$\begin{aligned} \hat{h}[t, t + \Delta t) &= \frac{\text{número de falhas no intervalo } [t, t + \Delta t)}{\text{número de produtos em operação em } t} = \frac{\text{número de falhas no intervalo } [0, 100)}{\text{número de produtos em operação em } t = 0} = \\ &= \frac{2}{54} = 0,037 \end{aligned}$$

- b) Estime a função taxa de falha (função risco  $h(t)$ ) no intervalo  $[400, 500)$ .

$$\begin{aligned} \hat{R}(t) &= \frac{\text{número de produtos em operação até o tempo } t}{\text{número de produtos sob teste}} \Rightarrow \hat{R}(400) = \frac{21}{54} = 0,389 \\ &\hat{R}(500) = \frac{12}{54} = 0,222 \end{aligned}$$

$$\hat{h}[t, t + \Delta t) = \frac{\hat{R}(t) - \hat{R}(t + \Delta t)}{\Delta t \hat{R}(t)}$$

$$\hat{h}[400, 500) = \frac{0,389 - 0,222}{100 \times 0,389} = 0,00429 = 0,429\% \text{ por hora}$$

De outro modo

$$\hat{h}[400, 500) = \frac{\text{número de falhas no intervalo } [400, 500)}{\text{número de produtos em operação em } t = 400} = \frac{9}{21} = 0,429$$

2) Refaça o exercício 1 (anterior) completando a coluna toda da função de taxa de falhas (função risco) estimada  $\hat{h}(t)$ .

Distribuição de Frequências de Falha do ProdE e Confiabilidade em Intervalos de Tempo de 100 h

Interv.	Inf. Limite	Sup. Limite	P.Médio	Frequência	$\hat{R}(t)$	$\hat{h}(t) \text{ \% / h}$
1	0.0	100.0	50.0	2	1.000	0.037
2	100.0	200.0	150.0	5	0.963	
3	200.0	300.0	250.0	10	0.870	
4	300.0	400.0	350.0	16	0.685	
5	400.0	500.0	450.0	9	0.389	0,429
6	500.0	600.0	550.0	7	0.222	
7	600.0	700.0	650.0	4	0.093	
8	700.0	800.0	750.0	1	0.019	-
Total				54		

Média = 377,074 Desvio padrão = 155,977

3) Usando os dados da tabela de distribuição de frequências adiante obtenha:

- Os valores da função de confiabilidade;
- Os valores da função de risco (função taxa de falha instantânea).

STAT> DESCRIBE – LIFE DATA - LIFE TABLES (INTERVALS) – largura\_inter  
– ProdE\_1 - censura

Intervalo	Número de falhas	Número de censuras	Número em Risco	R(t)	h(t)	f(t)
0.0-100.0	2	0	54.0 (0.000000)	1.000000 (0.000267)	0.000377 (0.000257)	0.000370
100.0-200.0	5	0	52.0 (0.025700)	0.962963 (0.000451)	0.001010 (0.000394)	0.000926
200.0-300.0	10	0	47.0 (0.045710)	0.870370 (0.000748)	0.002381 (0.000529)	0.001852
300.0-400.0	16	0	37.0 (0.063203)	0.685185 (0.001326)	0.005517 (0.000621)	0.002963
400.0-500.0	9	0	21.0 (0.066340)	0.388889 (0.001749)	0.005455 (0.000507)	0.001667
500.0-600.0	7	0	12.0 (0.056575)	0.222222 (0.002837)	0.008235 (0.000457)	0.001296
600.0-700.0	4	0	5.0 (0.039445)	0.092593 (0.004969)	0.013333 (0.000356)	0.000741
700.0-800.0	1	0	1.0 (0.018346)	0.018519 (0.000000)	0.020000 (0.000183)	0.000185
Total	54	0				



- 4) O tempo de falha (tempo até falhar) de um dispositivo segue a distribuição Gaussiana com média  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma = 10000$  h. Determine o valor do parâmetro  $\mu$  sabendo-se que a confiabilidade do dispositivo é igual a  $R(t) = 0,90$  para o tempo de uso de 50 000 h.

Solução:

$$R(t) = 1 - F(t) \quad \Phi^{-1}(0,10) = \frac{50000 - \mu}{10000} = -1,28$$

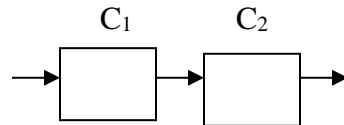
$$0,90 = 1 - \Phi\left(\frac{50000 - \mu}{10000}\right) \quad \mu = 62800 \text{ h}$$

$$\Phi\left(\frac{50000 - \mu}{10000}\right) = 0,10$$

OBS.: Lembre que  $\Phi(x)$  é a f.d. (acumulada) da distribuição Normal Padrão,  $N(0, 1)$ , ou seja,  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$   $t \in \mathbb{R}$  e  $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$   $x \in \mathbb{R}$  é a ordenada, e a função inversa  $\Phi^{-1}(p) = x$  é o escore da  $N(0, 1)$  que corresponde a área acumulada até  $x$ .

- 5) Seja o Sistema em Série formado por dois componentes  $C_1$  e  $C_2$ . O tempo de vida (tempo até falhar) do 1<sup>o</sup>. componente tem distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda$  e o tempo de vida do 2<sup>o</sup>. componente tem distribuição Gaussiana com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$ . Determine a confiabilidade  $R(t)$  do sistema e mostre que a expectativa de vida do sistema (MTTF - tempo médio até falhar) é:  $\frac{1}{\lambda} [1 - \exp(-\lambda\mu + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2})]$ .

Solução:



1<sup>o</sup>. Componente:  $T_{c1} \sim \varepsilon(\lambda) \Rightarrow f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t > 0$  e  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

$$R_{c1}(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

2<sup>o</sup>. Componente:  $T_{c2} \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2} \quad t > 0$

$$P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(t) dt = 1 - F(t) = 1 - \int_0^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} dy = R_{c2}(t)$$

a probabilidade de  $C_1$  funcionar no e após o tempo  $t$  é  $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$ ;

e de  $C_2$  funcionar no e após o tempo  $t$  é  $P(T \geq t) = [1 - \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} dy] = 1 - F_{c2}(t)$

O sistema funciona quando  $C_1$  funcionar e  $C_2$  funcionar, logo:

$$P(C_1 \cap C_2) = P(C_1).P(C_2) = R(t) = e^{-\lambda t} [1 - \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} dy] = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} F_{c2}(t).$$

E, a expectativa de vida do sistema (MTTF- tempo médio até falhar) pode ser colocada em outra forma, pois:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t) \quad \text{e} \quad f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$$

$$\text{Mas, } \frac{dR(t)}{dt} = \frac{d(1-F(t))}{dt} = -\frac{dF(t)}{dt} = -f(t) \Rightarrow f(t) = -\frac{dR(t)}{dt}$$

Então, desde que a variação de T seja de 0 a  $\infty$ , tem-se:

$$E(T) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t \left[ -\frac{dR(t)}{dt} \right] dt = - \int_0^{\infty} t dR(t) \text{ e integrando por partes } \int u dv = uv - \int v du$$

com  $u = t$  e  $dv = dR(t)$  tem-se:  $du = dt$  e  $v = R(t)$  e

$$E(T) = - \int_0^{\infty} t dR(t) = - [t.R(t) - \int R(t) dt]_0^{\infty} = 0 + \int_0^{\infty} R(t) dt \quad (\text{confiabilidade no } \infty \text{ é zero}).$$

Portanto,

$$E(T) = \text{MTTF} = \int_0^{\infty} R(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F_{c2}(t) dt = \frac{-1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (-\lambda) dt - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F_{c2}(t) dt$$

$$E(T) = \text{MTTF} = \frac{1}{\lambda} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F_{c2} dt \text{ que pode ser resolvida por partes } \int u dv = uv - \int v du$$

$$\text{com } u = F_{c2} \text{ e } dv = e^{-\lambda t} dt \text{ tem-se: } du = F'(t) dt \text{ e } v = \int e^{-\lambda t} dt = \frac{-1}{\lambda} \int e^{-\lambda t} (-\lambda) dt = \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \text{Então, } \text{MTTF} &= \int_0^{\infty} R(t) dt = \frac{1}{\lambda} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F_{c2} dt = \frac{1}{\lambda} - \left[ F_{c2} \cdot \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} F'(t) dt \\ &= \frac{1}{\lambda} - \left[ 1 \cdot 0 - 0 \cdot \frac{-1}{\lambda} \right] - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} - \left[ 0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left[\lambda t + \frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2\right]} dt \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} - \left[ \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[t-(\mu-\sigma^2\lambda)]^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{-2\mu\sigma^2\lambda + (\sigma^2\lambda)^2}{2\sigma^2}} dt \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \left[ e^{-\mu\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[t-(\mu-\sigma^2\lambda)]^2}{2\sigma^2}} dt \right] \quad t \sim N(\mu - \sigma^2\lambda; \sigma^2) \\ &= \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\mu\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}) \quad t > 0 \\ &= \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\mu\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}) \end{aligned}$$

- 6) A função de taxa de falha ou função risco de certo dispositivo é  $\lambda(t) = at$  ( $t \geq 0$ ), onde  $a > 0$  e é constante. Determine a confiabilidade do dispositivo e sua expectativa de vida, ou seja, o valor do parâmetro MTTF (tempo médio até falhar).

**SOLUÇÃO**

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)}, \text{ pois } R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t)$$

$$e \int_0^x \lambda(t) dt = \int_0^x \frac{-dR(t)/dt}{R(t)} dt = \int_0^x \frac{-dR(t)}{R(t)} = - \int_0^x \frac{dR(t)}{R(t)} = [-\ln|R(t)|]_0^x \text{ lembre que } \int \frac{du}{u} = \ln|u|$$

$$\int_0^x \lambda(t) dt = [-\ln|R(t)|]_0^x = -\ln|R(x)| + \ln|R(0)| = -\ln|R(x)| \Rightarrow R(x) = e^{-\int_0^x \lambda(t) dt}, \text{ então}$$

$$R(x) = e^{-\int_0^x \lambda(t) dt} \quad e^{-\int_0^x \lambda(t) dt} = - \int_0^x a t dt = -a \int_0^x t dt = -a \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = -\frac{ax^2}{2} \Rightarrow$$

$$R(x) = e^{-\int_0^x \lambda(t) dt} = e^{-\frac{ax^2}{2}}$$

$$MTTF = E(X) = \int_0^\infty R(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{ax^2}{2}} dx \text{ e fazendo } \frac{ax^2}{2} = u \text{ resulta } \frac{du}{dx} = ax \text{ e } du = ax dx$$

$$\text{e } dx = \frac{du}{ax} = \frac{du}{a\sqrt{2u}} \text{ pois } x = \sqrt{\frac{2u}{a}}$$

$$\text{Finalmente, } MTTF = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{2au}} du = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du = \frac{1}{\sqrt{2a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

- 7) Uma empresa necessita tomar a decisão de comprar uma entre duas *workstations*. A *workstation* A possui 10 *chips*, cada um com taxa de falha constante igual a  $10^{-5}/h$  e todos os 10 *chips* devem funcionar corretamente para que o sistema funcione. A *workstation* B possui 5 *chips*, cada um deles tendo uma taxa de falhas dependente do tempo e igual a  $at/h$  com o parâmetro  $a$  constante e todos os 5 *chips* devem funcionar corretamente para que o sistema funcione. Se as duas *workstations* têm o mesmo tempo médio até falhar (MTTF), qual das duas deve ser escolhida para compra? Admite-se que a confiabilidade  $R(t)$  para o tempo de uso de 1000 h deve ser considerada como critério.

Solução:

Usando os resultados do problema 6:

- Na *workstation* A,  $\lambda(t) = \lambda = 10^{-5} = [-\ln R(t)]_0^x \Rightarrow R_A(t) = e^{-10^{-4}t}$  substituindo a taxa de falhas  $\lambda$  pelo seu valor no enunciado e considerando que são 10 chips dá  $10 \times 10^{-5} = 10^{-4}$  para o sistema todo.
- E na *workstation* B,  $\lambda(t) = at$  para um chip, como são 5 chips tem-se  $\lambda(t) = 5at$  para todo o sistema e com  $R(x) = e^{-\int_0^x \lambda(t) dt} = e^{-\frac{ax^2}{2}}$  (do problema 6) resulta  $R_B(t) = e^{-\frac{5at^2}{2}}$

$$\text{Então, } MTTF_A = \int_0^\infty e^{-10^{-4}t} dt = \frac{-1}{10^{-4}} \int_0^\infty e^{-10^{-4}t} (-10^{-4}) dt = \frac{-1}{10^{-4}} [e^{-10^{-4}t}]_0^\infty = 10^4$$

$$MTTF_B = \int_0^\infty e^{-\frac{5at^2}{2}} dt = \frac{\Gamma(\frac{0+1}{2})}{2 \cdot (\frac{5a}{2})^{\frac{0+1}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2 \cdot (\frac{5a}{2})^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2 \cdot \frac{5a}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{10a}}$$

$$MTTF_A = MTTF_B = 10^4 = \sqrt{\frac{\pi}{10a}} \Rightarrow a = \frac{\pi}{10^9} \Rightarrow a = 10^{-9}\pi$$

E, as funções de confiabilidade são  $R_A(t) = e^{-10^{-4}t}$  e  $R_B(t) = e^{-\frac{5at^2}{2}}$

Finalmente,  $R_A(1000) = e^{-10^{-4}(10^3)} = e^{-10^{-1}} = e^{-0,1} = 0,90484$  e

$$R_B(1000) = e^{\frac{-5.10^{-9}\pi(10^3)^2}{2}} = e^{-2,5.10^{-3}\pi} = 0,992177$$

E, portanto, a *workstation* B deve ser a escolhida pois a sua confiabilidade é maior.

OBS. No cálculo do  $MTTF_B$  foi usada a função Gama Generalizada. Então, cabe um lembre sobre essa função.

A função  $f(n) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$   $n \in \mathbb{N}$  é a função fatorial que é conhecida desde

Euler (1730) e a função Gama é  $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = (n-1)!$  e, ainda,  $n > 0$

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) \text{ se } n \in \mathbb{N} \text{ e } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Já a função Gama Generalizada é a integral  $\int_0^\infty x^m e^{-ax^n} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}{na^{\frac{m+1}{n}}}$   $a > 0$   $m > -1$

8) O teste de vida que foi feito para um dispositivo forneceu dados que apontaram para um tempo médio de falha de 5 h e uma variância de aproximadamente 1 h<sup>2</sup>. Faça uma comparação entre as funções de confiabilidade assumindo:

a) uma distribuição Weibull para o tempo de falha com parâmetro  $\alpha = 5$ ;

b) uma distribuição Gaussiana para o tempo de falha com parâmetros  $\mu = 5$  e  $\sigma^2 = 1$ ;

c) uma distribuição Gama para o tempo de falha com parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$ .

Faça um gráfico dos resultados.

Solução:

Escrevendo a fórmula clássica  $f(t) = abt^{b-1}e^{-at^b}$   $t > 0$   $\alpha, \beta > 0$  na expressão alternativa  $f(t) = \left(\frac{\delta}{\alpha^\delta}\right) t^{\delta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\delta}$   $t \geq 0$ ,  $\delta = b > 0$  e  $a = \frac{1}{\alpha^\delta} > 0$  sua média e sua variância são:  $E(T) = \mu = \alpha\Gamma[1+(1/\delta)]$  e  $V(T) = \sigma^2 = \alpha^2\{\Gamma[1+(2/\delta)] + \Gamma[1 - (1/\delta)]^2\}$  onde  $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$ . Então, resolvendo os itens:

a) Tem-se o parâmetro de escala  $\alpha$  e se necessita do parâmetro de forma  $\delta$  e como

$$E(T) = \mu = \alpha\Gamma[1+(1/\delta)] \text{ resulta:}$$

$$5 = 5\Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \Rightarrow \Gamma\left(1 + \frac{1}{\delta}\right) = 1 \text{ e como da função Gama } \Gamma(n) = (n-1)! \Rightarrow 1 + \frac{1}{\delta} = 2$$

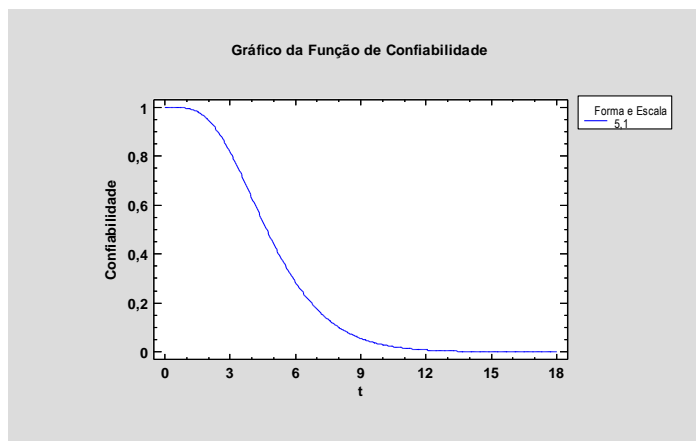
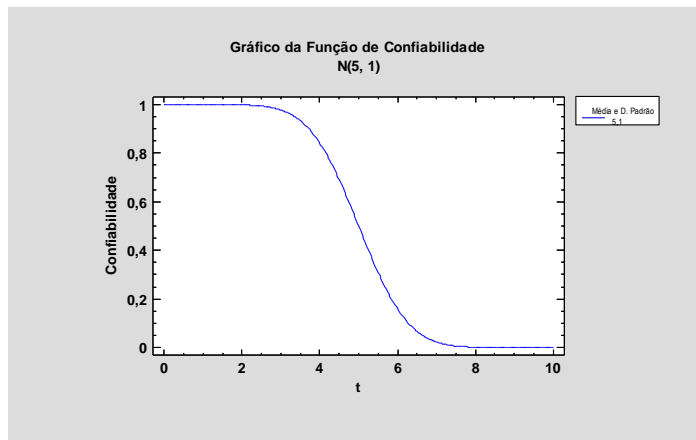
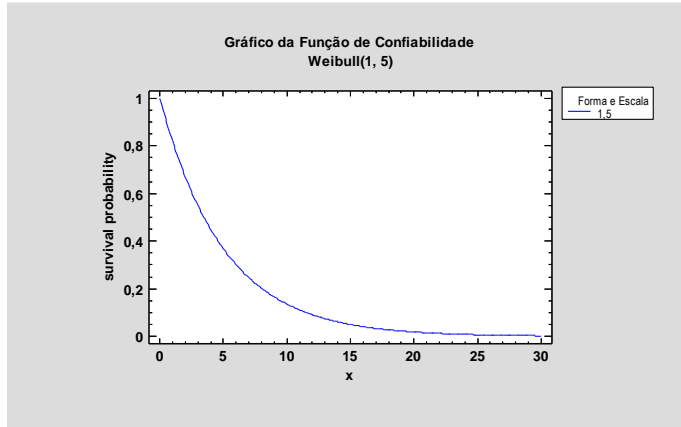
Logo,  $\delta = 1$  e  $T \sim \text{Weibull}$  com parâmetros  $\alpha = 5$  e  $\delta = 1$

b)  $T \sim N(5, 1)$

c)  $T \sim \Gamma(\alpha, \lambda) = T(5, 1)$

Os gráficos adiante mostram que a distribuição Weibull possui uma Confiabilidade maior que a Gaussiana e a Gama, quando se usa nos modelos os parâmetros indicados nos enunciados, pois vai zerar para  $t \cong 30 > 18 > 10$ .

## Gráficos das funções de Confiabilidade:



9) Seja uma v.a.  $T$  com distribuição Weibull de três parâmetros, ou seja,  $\text{Weibull}(\alpha, \lambda, \theta)$  com  $\theta$  sendo o parâmetro de localização (o terceiro), além dos parâmetros de forma e de escala.

A f.d. distribuição da Weibull é dada por  $F(t) = 1 - e^{-\lambda(t - \theta)^\alpha}$   $t \geq \theta$ ,  $\alpha, \lambda > 0$ . Pede-se:

- Verifique se  $F(t)$  é realmente uma função distribuição aplicando propriedades de função distribuição.
- Determine a função densidade de probabilidade da v.a.  $T$ ,  $f(t)$ .

- c) Verifique se a função que foi determinada no item (b) é realmente uma função densidade de probabilidade.
- d) Determine a função de confiabilidade  $R(t)$  dessa v.a.  $T$ .
- e) Determine a função risco (taxa de falha)  $h(t)$  dessa v.a.  $T$ .

9A) Seja uma v.a.  $T$  com distribuição de Erlang. A distribuição Erlang é uma distribuição de probabilidade contínua com uma ampla aplicabilidade, principalmente devido à sua relação com a distribuição exponencial e a distribuição gama. A distribuição Erlang foi desenvolvida por Agner Krarup Erlang para analisar o número de chamadas telefônicas que poderiam ser feitas simultaneamente aos operadores das estações de comutação. Atualmente essa distribuição é utilizada em várias áreas que aplicam processos estocásticos. A distribuição de Erlang é obtida quando se tem na distribuição Gama o parâmetro de forma igual a um inteiro positivo, ou seja, na f.d.p. da  $\Gamma(\alpha, \beta)$  tem-se  $\alpha = k \in \mathbb{N}$ .

- a) Escreva a função densidade de probabilidade da distribuição de Erlang;
- b) Determine a função de distribuição da v.a. com f.d.p. de Erlang.
- c) Verifique se  $F(t)$  é realmente uma f.d. aplicando as propriedades de f.d.
- d) Verifique se a função que você escreveu no item (a) é realmente uma função densidade de probabilidade.
- e) Determine a função de confiabilidade  $R(t)$  dessa v.a.  $T$  e faça o seu gráfico para um par de parâmetros a sua escolha.
- f) Determine a função de risco (taxa de falha)  $h(t)$  dessa v.a.  $T$  e faça o seu gráfico para um par de parâmetros a sua escolha.

10) A taxa de falha (função risco) de um componente eletrônico é dada por:

$$h(t) = \begin{cases} at & 0 < t < 1000 \text{ h} \\ b & t \geq 1000 \text{ h} \end{cases}$$

Determine o valor de  $b$  tal que  $h(t)$  seja contínua e, também, determine a função de confiabilidade do componente eletrônico.

Solução:

A continuidade para  $h(t)$  vem da escolha de  $b = 1000a$  com  $a > 0$  e para o caso  $t < 1000$  tem-se a solução no exercício 6, que segue como lembrete:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-dR(t)}{R(t)dt}, \text{ pois } R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t) \\ e \int_0^x \lambda(t)dt &= \int_0^x \frac{-dR(t)/dt}{R(t)}dt = \int_0^x \frac{-dR(t)}{R(t)} = -\int_0^x \frac{dR(t)}{R(t)} = [-\ln|R(t)|]_0^x \text{ lembre que } \int \frac{du}{u} = \ln|u| \\ \int_0^x \lambda(t)dt &= [-\ln|R(t)|]_0^x = -\ln|R(x)| + \ln|R(0)| = -\ln|R(x)| \Rightarrow R(x) = e^{-\int_0^x \lambda(t)dt}, \text{ então} \\ R(x) &= e^{-\int_0^x \lambda(t)dt} = e^{-\int_0^x atdt} = e^{-a \int_0^x tdt} = e^{-a \frac{t^2}{2} \Big|_0^x} = e^{-\frac{ax^2}{2}} \Rightarrow \\ R(x) &= e^{-\int_0^x \lambda(t)dt} = e^{-\frac{ax^2}{2}} \Rightarrow R(t) = e^{-\frac{at^2}{2}} \quad t < 1000 \end{aligned}$$

Então, para  $t \geq 1000$  tem-se:

$$R(t) = e^{-\int_0^t h(\tau) d\tau} = e^{-\int_0^{1000} a\tau d\tau - \int_{1000}^t b d\tau} = e^{-\int_0^{1000} a\tau d\tau} e^{-\int_{1000}^t b d\tau} = a\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^{1000} = a\frac{1000^2-0}{2} = a\frac{1000^2}{2}$$

$$e^{-\int_{1000}^t b d\tau} = b[\tau]_{1000}^t = b(t-1000)$$

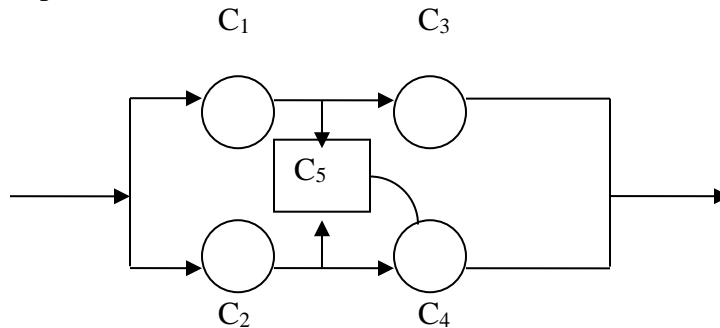
$$R(t) = e^{-\int_0^t h(\tau) d\tau} = e^{-\int_0^{1000} a\tau d\tau - \int_{1000}^t b d\tau} = e^{-a\frac{1000^2}{2} - b(t-1000)}$$

Logo com  $b = 1000a$  e, consequentemente,  $a = \frac{b}{1000}$  resulta  $R(t) = e^{-500b - b(t-1000)}$

$$R(t) = e^{500b - bt}$$

$$\text{Finalmente, } R(t) = \begin{cases} e^{-a\frac{t^2}{2}} & t < 1000 \\ e^{500b - bt} & t > 1000 \end{cases}$$

- 11) Seja o Sistema em Paralelo, adiante, onde cada componente tem um tempo de falha que segue a distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda$ . Todos os componentes funcionam de forma independente dos demais, exceto que quando  $C_4$  falha imediatamente segue a falha de  $C_5$  e vice-versa. Determine a função de confiabilidade do sistema e a expectativa de vida do sistema.



SOLUÇÃO:

Seja o evento  $F = "C_4 \text{ e } C_5 \text{ funcionam}"$ . Então,  $P(F) = P(C_4 \cap C_5) = P(C_4) \cdot P(C_5) = r^2$

$$P(F^c) = 1 - r^2$$

Assim, dado o evento  $F$ , o sistema é um sistema em paralelo com  $C_1$  e  $C_2$ , e ele funciona quando  $C_1$  funciona ou  $C_2$  funciona ou ambos funcionam. Portanto:

$$P(SP|F) = P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2)$$

$$P(SP|F) = r + r - r^2 = 2r - r^2$$

ou considerando a certeza 1 menos o único caso desfavorável:

$$P(SP|F) = 1 - P(C_1^c \cap C_2^c)$$

$$P(SP|F) = 1 - P(C_1^c)P(C_2^c) \text{ (eventos independentes)}$$

$$P(SP|F) = 1 - (1-r)(1-r)$$

$$P(SP|F) = 1 - (1-r)^2 = 1 - (1 - 2r + r^2) = 2r - r^2$$

E, dado o evento  $F^c$ , o sistema é em série com  $C_1$  e  $C_3$ , e ele funciona quando  $C_1$  e  $C_3$  funcionarem. Portanto:

$$P(SS|F^c) = P(C_1 \cap C_3) = P(C_1)P(C_3)$$

$$P(SS|F^c) = r.r = r^2$$

Então, a confiabilidade do sistema é:

$$\begin{aligned} R_s(t) &= P(S) = P[(F \cap SP) \cup (F^c \cap SS)] \\ R_s(t) &= P(S) = P(F).P(SP|F) + P(F^c) P(SS|F^c) \\ R_s(t) &= P(S) = r^2(2r - r^2) + (1 - r^2)r^2 \end{aligned}$$

$$R_s(t) = P(S) = 2r^3 - r^4 + r^2 - r^4 = -2r^4 + 2r^3 + r^2$$

E, como cada componente tem um tempo de falha que segue a distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda$  tem-se:

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda x} (-\lambda) dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^t = -[e^{-\lambda t} - e^0] = 1 - e^{-\lambda t} \quad e$$

$$P(X \geq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}, \text{ portanto, } R_s(t) = P(S) = -2(e^{-\lambda t})^4 + 2(e^{-\lambda t})^3 + (e^{-\lambda t})^2$$

$$R_s(t) = P(S) = -2e^{-4\lambda t} + 2e^{-3\lambda t} + e^{-2\lambda t}$$

Finalmente, considerando que se  $T \sim \varepsilon(\theta)$  então  $E(T) = 1/\theta$  e tem-se que a expectativa de vida do sistema é:

$$MTTF = \int_0^{\infty} R_s(t) dt = \int_0^{\infty} (-2e^{-4\lambda t}) dt + \int_0^{\infty} 2e^{-3\lambda t} dt + \int_0^{\infty} e^{-2\lambda t} dt$$

$$MTTF = -2 \frac{1}{-4\lambda} \int_0^{\infty} (e^{-4\lambda t} (-4\lambda)) dt + 2 \frac{1}{-3\lambda} \int_0^{\infty} (e^{-3\lambda t} (-3\lambda)) dt + \frac{1}{-2\lambda} \int_0^{\infty} (e^{-2\lambda t} (-2\lambda)) dt$$

$$MTTF = -2\left(\frac{1}{4\lambda}\right) + 2\left(\frac{1}{3\lambda}\right) + \frac{1}{2\lambda} = \frac{-6+8+6}{12\lambda} = \frac{8}{12\lambda} = \frac{2}{3\lambda}$$

- 12) A função de risco (taxa de falhas) de um equipamento é  $h(t) = \lambda(t) = \lambda_0 t$ , onde  $\lambda_0 > 0$  é uma constante conhecida. Determine a função de confiabilidade,  $R(t)$ , do equipamento e, depois, refaça o exercício com  $h(t) = \lambda(t) = \lambda_0 t^{1/2}$ .

SOLUÇÃO

Do exercício 6 tem-se

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda_0 \tau d\tau} = e^{-\frac{\lambda_0 \tau^2}{2}} \Big|_0^t = e^{-\frac{\lambda_0 t^2}{2}} \quad t \geq 0$$

Refazendo com  $h(t) = \lambda(t) = \lambda_0 t^{1/2}$

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda_0 \tau^{1/2} d\tau} = e^{-\frac{\lambda_0 \tau^{3/2}}{3/2}} \Big|_0^t = e^{-\frac{2\lambda_0 t^{3/2}}{3}} \quad t \geq 0$$

- 13) A taxa de falhas (função risco) de um sistema computacional usado para o controle de um veículo espacial é modelada pela função  $h(t) = \lambda(t) = \alpha \mu t^{\alpha-1} + \beta \gamma t^{\beta-1}$ . Determine a expressão para a função de confiabilidade  $R(t)$  do sistema. Faça o gráfico de  $\lambda(t)$  e de  $R(t)$  como funções do tempo e dos valores dos parâmetros:  $\alpha = 1/4$ ,  $\beta = 1/7$ ,  $\mu = 0,0004$  e  $\gamma = 0,0007$ .

SOLUÇÃO



Do exercício 6  $\Rightarrow R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$ , então:

$$\int_0^t \lambda(\tau) d\tau = \int_0^t (\alpha\mu\tau^{\alpha-1} + \beta\gamma\tau^{\beta-1}) d\tau = \alpha\mu \frac{t^\alpha}{\alpha} + \beta\gamma \frac{t^\beta}{\beta} = \mu t^\alpha + \gamma t^\beta$$

Portanto,  $R(t) = e^{-(\mu t^\alpha + \gamma t^\beta)} \quad t \geq 0$

Gráficos:

$$h(t) = \lambda(t) = \alpha\mu t^{\alpha-1} + \beta\gamma t^{\beta-1}$$

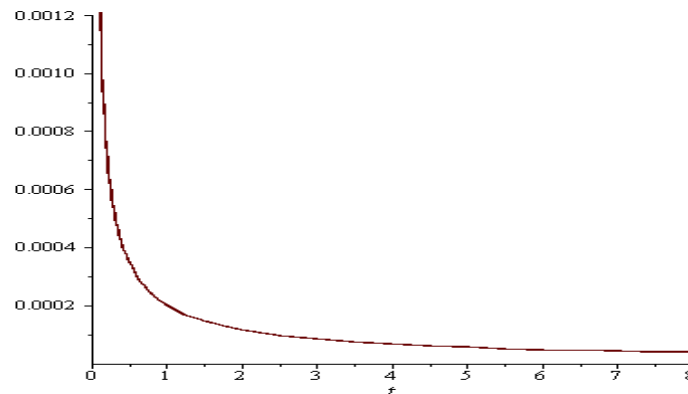
$$h(t) = \lambda(t) = \frac{1}{4} \cdot 0,0004 t^{-3/4} + \frac{1}{7} \cdot 0,0007 t^{-6/7} \quad t \geq 0$$

$$\int_0^t \lambda(\tau) d\tau = \int_0^t \left( \frac{1}{4} \cdot 0,0004 \tau^{-3/4} + \frac{1}{7} \cdot 0,0007 \tau^{-6/7} \right) d\tau = 0,0004 t^{1/4} + 0,0007 t^{1/7}$$

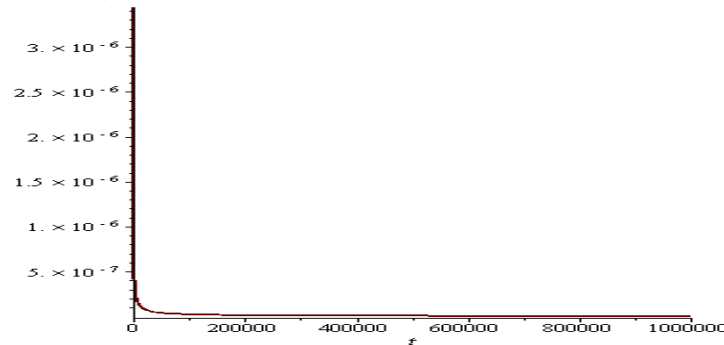
$$R(t) = e^{-(0,0004 t^{1/4} + 0,0007 t^{1/7})} \quad t \geq 0$$

>  $h(t) := 0.25 \cdot 0.0004 \cdot t^{-0.75} + (0.142857) \cdot 0.0007 \cdot t^{-0.857142}$ ;  
 $t \rightarrow \frac{0.25 \cdot 0.0004}{t^{0.75}} + \frac{0.142857 \cdot 0.0007}{t^{0.857142}}$

`plot(h(t), t=0 ... 100);`

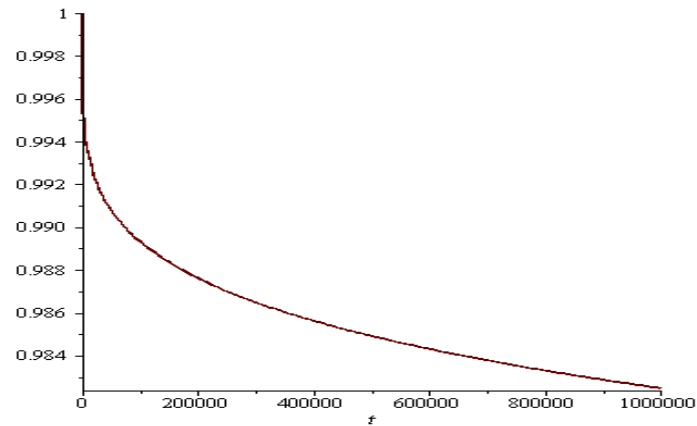


> `plot(h(t), t=0 ... 1000000);`



>  $R(t) := \exp(-(0.0004 \cdot (t^{0.25}) + 0.0007 \cdot (t^{0.142857})))$ ;  
 $t \rightarrow e^{-0.0004 t^{0.25} - 0.0007 t^{0.142857}}$

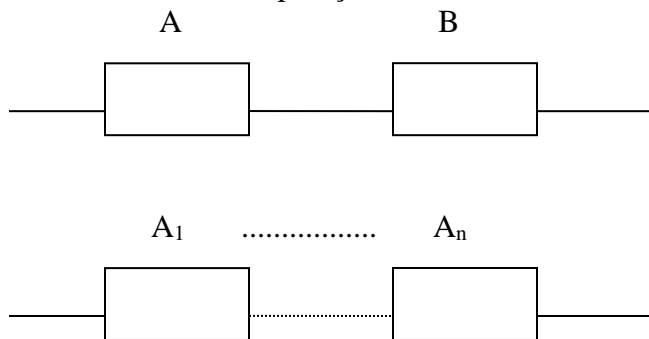
> `plot(R(t), t=0...1000000);`



OBS. O formato do gráfico da função risco  $h(t)$  é devido o equipamento ser um sistema computacional, pois neste tipo de equipamento os defeitos costumam surgir no início da atividade (testes) e depois não ocorrem mais.

14) Seja o sistema formado por dois componentes independentes A e B conectados em série conforme figura adiante. O sistema funcionará adequadamente quando os dois componentes funcionarem corretamente. Considere  $R_A$  e  $R_B$  as probabilidades dos componentes A e B operarem com sucesso respectivamente, e  $Q_A$  e  $Q_B$  as probabilidades de falha dos componentes A e B, respectivamente. Pede-se:

- Qual a probabilidade do sistema operar com sucesso?
- Supondo que ao invés de dois componentes, o sistema seja formado por  $n$  componentes em série  $A_1, A_2, \dots, A_n$  e com  $R_{A_i}$  sendo a probabilidade do componente  $A_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  operar corretamente. Qual a probabilidade do sistema operar com sucesso?
- Considere a situação dos dois componentes. Então, qual a probabilidade de insucesso na operação do sistema?
- Considere a situação do sistema com  $n$  componentes. Então, qual a probabilidade de insucesso na operação do sistema?



### SOLUÇÃO

- a) a probabilidade do sistema operar com sucesso é  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  (componentes independentes), logo:

$$P(A \cap B) = R_A R_B$$

$$b) P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) = R_{A1} \cdot R_{A2} \dots R_{An}$$

c) considere  $R_A$  a probabilidade de sucesso de A e  $Q_A$  a probabilidade de insucesso,

$$\text{Então, } R_A + Q_A = 1 \text{ e } R_B + Q_B = 1$$

O sucesso implica que os dois componentes estejam funcionando, então o insucesso implica que pelo menos um dos componentes não esteja funcionando:

$$Q_S = 1 - R_A \cdot R_B$$

$$d) Q_S = 1 - \prod_{i=1}^n R_{Ai}$$

15) Seja o sistema em série formado por dez componentes idênticos e independentes, os quais devem operar com sucesso para que o sistema funcione. Se a confiabilidade de cada componente é 0,95, qual a confiabilidade do sistema?

SOLUÇÃO

$$R_S = 0,95^{10}$$

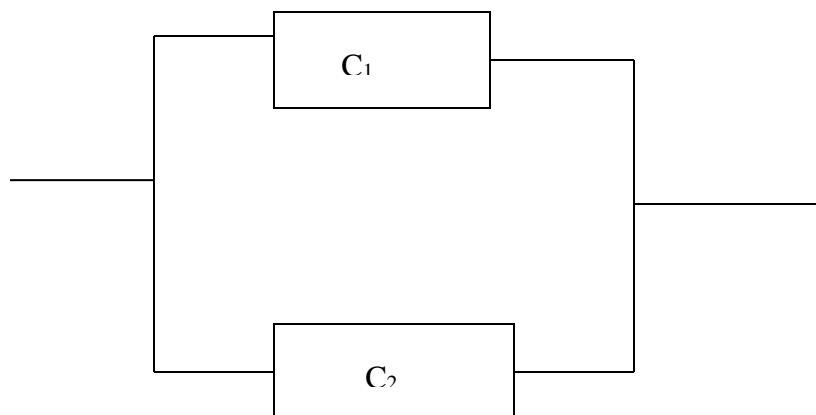
16) Considere o sistema em paralelo formado por dois componentes  $C_1$  e  $C_2$ , que funcionará quando um ou outro ou os dois componentes funcionarem.

a) Qual a confiabilidade do sistema?

b) Qual a probabilidade do sistema falhar?

c) Supondo que o sistema seja formado por n componentes em paralelo, qual a confiabilidade do sistema?

d) Supondo que o sistema seja formado por n componentes em paralelo, qual a probabilidade do sistema não funcionar?



SOLUÇÃO

- a) Para que o sistema funcione basta que um componente funcione. Então, para que ele não funcione é preciso que os dois não funcionem. Assim, tem-se

$$R_P = 1 - Q_{C1}Q_{C2}$$

- b)  $Q_P = Q_{C1}Q_{C2}$  os dois não funcionam.

c)  $R_P = 1 - \prod_{i=1}^n Q_{ci}$

d)  $Q_P = \prod_{i=1}^n Q_{ci}$

- 17) Um estatístico foi encarregado de estimar por meio de um teste de vida qual dos três fabricantes F1, F2 e F3 produz o componente C com maior durabilidade. Ele junto com os colegas da empresa constrói um equipamento para simular a situação real de desempenho do equipamento. O equipamento de teste construído é do tipo acelerado e os números obtidos correspondentes aos tempos de falha estão em correspondência com o tempo real por meio de uma regressão. O experimento executado é do tipo equilibrado, ou seja, o mesmo número ( $n = 20$ ) de componentes de cada fabricante foi usado no teste de vida. Os números estão abaixo.

- a) Construa a função de confiabilidade para cada fabricante.  
b) Construa a função risco, também, para cada fabricante.  
c) Decida qual fabricante produz o melhor componente justificando sua decisão.  
d) Escreva o tempo médio de falha dos componentes de cada fabricante.  
e) Escreva qual é o erro padrão correspondente ao tempo médio de falha para cada fabricante.

Fab.	Tempo de falha do Componente C em Laboratório																			
F1	125	130	145	160	163	165	170	172	173	179	180	185	191	210	212	215	218	220	221	225
F2	135	151	155	167	170	191	210	215	225	230	235	241	255	267	275	281	290	295	310	315
F3	91	99	101	103	115	117	121	125	130	131	134	141	145	151	161	167	178	180	182	190

## 2.5- Estimação da Função de Confiabilidade: Estimador de Kaplan-Meier

### 2.5.1- Estimador de Kaplan-Meier

Das técnicas usadas para estimação de valores da função de confiabilidade se destacam as não paramétricas tais como: o estimador de Kaplan-Meier ou do Produto Limite que é usado quando se conhece o tempo exato da ocorrência da falha e o estimador da Tabela de Vida ou Atuarial quando se tem os dados agrupados em intervalos de tempo nos quais as falhas ou as censuras ocorreram.

O estimador de Kaplan-Meier, ou Produto Limite, é um estimador não-paramétrico para a função de confiabilidade. Quando não há censura é definido por:

$$\hat{R}(t) = \frac{\text{n}^{\text{o. de itens em operação até o tempo t}}}{\text{n}^{\text{o. itens em teste}}}$$

Esse estimador é obtido da seguinte forma: suponha que existam  $n$  itens sob teste e  $k \leq n$  falhas distintas nos tempos  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ . Pode ocorrer mais de uma falha ao mesmo tempo, o que é chamado de empate. Então, tem-se:

- $d_i$  é o número de falhas no tempo  $t_i$ ;
- $n_i$  é o número de itens sob risco (não falhou e nem foi censurado) em  $t_i$  (exclusive).

Então, o estimador de Kaplan-Meier é dado por:

$$\hat{R}(t) = \left[ \left( \frac{n_1 - d_1}{n_1} \right) \left( \frac{n_2 - d_2}{n_2} \right) \dots \left( \frac{n_0 - d_0}{n_0} \right) \right] \text{ onde } t_0 \text{ é o maior tempo de falha menor que } t.$$

### Exemplo

A tabela adiante mostra os dados do mecanismo do vidro da porta.

T	d	n	$\hat{R}(t)$
0	0	30	1.000
5626	1	30	0.967
11223	1	29	0.933
12128	1	28	0.900
13566	1	27	0.867
14921	1	26	0.833
16513	1	25	0.800
22138	1	24	0.767
26791	1	23	0.733
27144	1	22	0.700
27847	1	21	0.667
28613	1	20	0.633
31224	1	19	0.600
36229	1	18	0.567
38590	1	17	0.533
39580	1	16	0.500
40278	1	15	0.467
41324	1	14	0.433
44540	1	13	0.400

A confiabilidade estimada em 12128 ciclos é dada por:

$$\hat{R}(t) = \left[ \left( \frac{n_1 - d_1}{n_1} \right) \left( \frac{n_2 - d_2}{n_2} \right) \dots \left( \frac{n_0 - d_0}{n_0} \right) \right]$$

$$\hat{R}(12128) = \left[ \left( \frac{30-1}{30} \right) \left( \frac{29-1}{29} \right) \left( \frac{28-1}{28} \right) \right] = 0,900$$

A confiabilidade em 16513 é dada por:

$$\hat{R}(16513) = \left[\left(\frac{30-1}{30}\right)\left(\frac{29-1}{29}\right)\left(\frac{28-1}{28}\right)\left(\frac{27-1}{27}\right)\left(\frac{26-1}{26}\right)\left(\frac{25-1}{25}\right)\right] = 0,800$$

## Exercícios

1) Construa o gráfico da Função de Confiabilidade estimada  $\hat{R}(t)$  do mecanismo do vidro da porta.

Dado: mecan. Ciclos

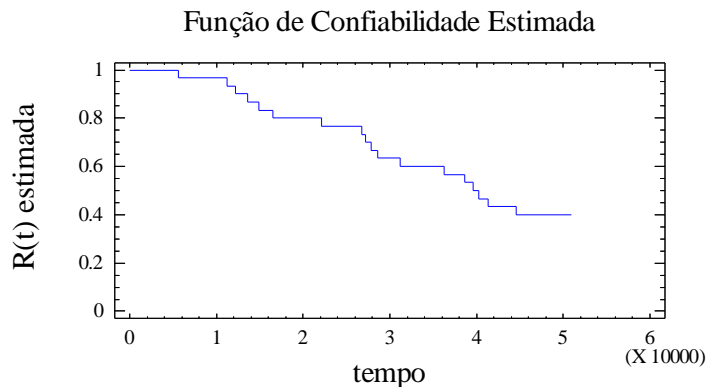
Falhas e censuras: mecan\_cen

Estimativas pelo Método do Limite-Produto de Kaplan-Meier

Mec.	Time	Status	Mecanismos em Risco	Confiabilidade Acumulada $\hat{R}(t)$	Erro Padrão	Risco Acumulado $\hat{h}(t)$
1	5626,0	FALHA	29	0,9667	0,0328	0,0339
2	11223,0	FALHA	28	0,9333	0,0455	0,0690
3	12128,0	FALHA	27	0,9000	0,0548	0,1054
4	13566,0	FALHA	26	0,8667	0,0621	0,1431
5	14921,0	FALHA	25	0,8333	0,0680	0,1823
6	16513,0	FALHA	24	0,8000	0,0730	0,2231
7	22138,0	FALHA	23	0,7667	0,0772	0,2657
8	26791,0	FALHA	22	0,7333	0,0807	0,3102
9	27144,0	FALHA	21	0,7000	0,0837	0,3567
10	27847,0	FALHA	20	0,6667	0,0861	0,4055
11	28613,0	FALHA	19	0,6333	0,0880	0,4568
12	31224,0	FALHA	18	0,6000	0,0894	0,5108
13	36229,0	FALHA	17	0,5667	0,0905	0,5680
14	38590,0	FALHA	16	0,5333	0,0911	0,6286
15	39580,0	FALHA	15	0,5000	0,0913	0,6931
16	40278,0	FALHA	14	0,4667	0,0911	0,7621
17	41324,0	FALHA	13	0,4333	0,0905	0,8362
18	44540,0	FALHA	12	0,4000	0,0894	0,9163
19	44901,0	CENSURA	11			
20	45121,0	CENSURA	10			
21	45789,0	CENSURA	9			
22	45987,0	CENSURA	8			
23	46021,0	CENSURA	7			
24	46072,0	CENSURA	6			
25	46985,0	CENSURA	5			
26	46999,0	CENSURA	4			
27	47001,0	CENSURA	3			
28	47125,0	CENSURA	2			
29	47189,0	CENSURA	1			
30	47225,0	CENSURA	0			

Número médio de ciclos de sobrevivência = 34832,5 Erro padrão = 2481,76

STATG> DESCRIBE - LIFE DATA - LIFE TABLES (Times) - DATA (mecan. Cicle - CENSORED (mecan\_cen)



OBS. Tempo  $\equiv$  ciclo

E dos dados da tabela é possível obter informações tais como:

1<sup>a</sup>. Fração de defeituosos que se pode esperar na garantia de dois (2) anos do produto.

**R.:** Dois (2) anos correspondem a  $\frac{0,967-0,933}{5626-11223} = \frac{0,967-x}{5626-6000}$   $x = 0,9647$  que é a confiabilidade em 6000 ciclos,  $\hat{R}(6000) = 96,47\%$ . Portanto, a fração de defeituosos esperada na garantia é  $1 - 0,9647 = 3,53\%$ . Logo, em um lote com 1000 itens, espera-se 36 itens defeituosos (Kaplan-Meier).

2<sup>o</sup>. O número de ciclos para o qual 10% dos produtos estarão fora de operação?

**R.:** O percentual de 10% de falha indica uma confiabilidade de 90%, então, nem precisa interpolação, diretamente se obtém 12128 ciclos.

3<sup>o</sup>. O número de ciclos para o qual 15% dos produtos estarão fora de operação?

**R.:** O percentual de 15% de falha indica uma confiabilidade de 85%, então, por interpolação:

$$\frac{0,867-0,833}{13566-14921} = \frac{0,867-0,850}{13566-x} \quad x = 14243 \text{ ciclos}$$

E, isto corresponde a  $14243/3000 = 4,747$  anos.

2) Um teste de vida com o mecanismo do vidro (do exemplo do item 2.5) foi feito até todos falharem. Trata-se de equipamento fabricado pelas empresas A e B. Os dados adiante se referem ao fabricante A e ao fabricante B e os números são os tempos (ciclos) até a falha obtidos no teste de vida com 30 mecanismos de cada um dos fabricantes. Compare as duas funções de confiabilidade, de quem você compraria o mecanismo?

Dados do fabricante A:

5626	11223	12128	13566	14921	16513	22138	26791	27144
27847	28613	31224	36229	38590	39580	40278	41324	44540
44901	45121	45789	45987	46021	46072	46985	46999	47001
47125	47189	47225						

Dados do fabricante B:

8750	15623	16790	17579	19071	20802	22189	28791	31129
------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

32167	33196	35090	39145	43145	44189	46901	48901	51902
52953	55723	58956	60976	62567	65345	68735	70907	85946
88768	90157	92128						

Solução:

Ajustando uma distribuição aos dados da empresa A - FabA:

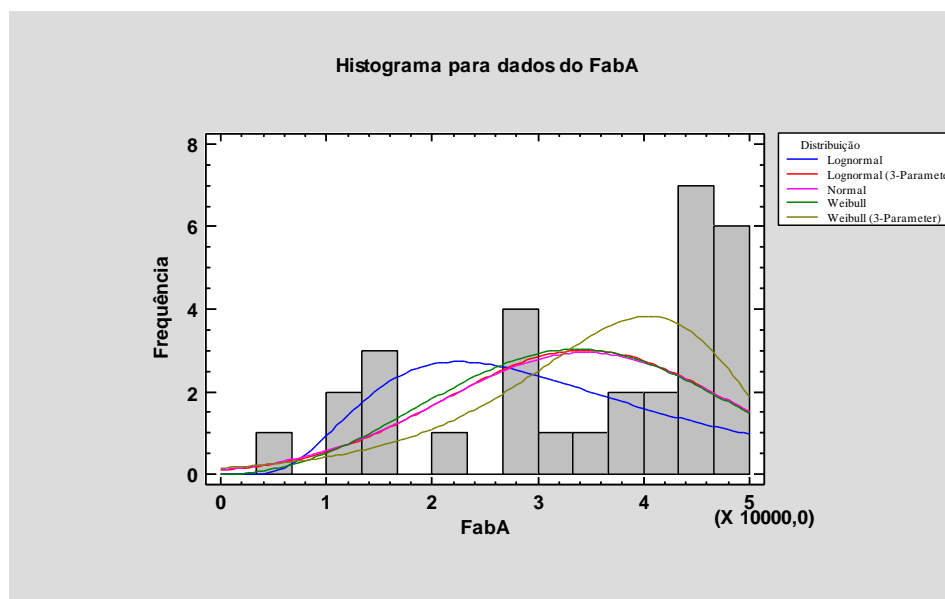
Teste de Kolmogorov-Smirnov FabA

	Lognormal	Lognormal (3-Parameter)	Normal	Weibull	Weibull (3-Parameter)
DPLUS	0,219495	0,168504	0,17311	0,161094	0,132451
DMINUS	0,226059	0,209076	0,2047	0,217491	0,216549
DN	0,226059	0,209076	0,2047	0,217491	0,216549
P-Value	0,0932041	0,145231	0,161909	0,11708	0,119989

Aplicando o Teste de Kolmogorov-Smirnov o melhor ajuste ocorre para a Normal (Gaussiana) com o valor-p de 0,161909. Mas, aplicando o Teste de Shapiro-Wilk esse ajuste é rejeitado para a essa distribuição, conforme valor-p com  $p < 0,0004 < 0,05$ .

Teste de Shapiro-Wilk de Normalidade FabA

Teste	Estatística	Valor-p
Shapiro-Wilk W	0,841838	0,000420376



Então, aplica-se o método não paramétrico de Kaplan-Meier para se obter as funções de Confiabilidade e compará-las.

STAT > DESCRIBE - LIFE DATA – LIFE TABLES (times) – Data: dadosAB – Group: FabricanteAB

Estimativas do Teste do Produto-Limite de Kaplan-Meier:

FabricanteAB = A

			Número em Risco	Confiabilidade	Erro	Risco (Hazard)
Mecanismo	Tempo	Estado	em Risco	Acumulada	Padrão	Acumulado
1	5626,0	FALHA	29	0,9667	0,0328	0,0339
2	11223,0	FALHA	28	0,9333	0,0455	0,0690
3	12128,0	FALHA	27	0,9000	0,0548	0,1054



4	13566,0	FALHA	26	0,8667	0,0621	0,1431
5	14921,0	FALHA	25	0,8333	0,0680	0,1823
6	16513,0	FALHA	24	0,8000	0,0730	0,2231
7	22138,0	FALHA	23	0,7667	0,0772	0,2657
8	26791,0	FALHA	22	0,7333	0,0807	0,3102
9	27144,0	FALHA	21	0,7000	0,0837	0,3567
10	27847,0	FALHA	20	0,6667	0,0861	0,4055
11	28613,0	FALHA	19	0,6333	0,0880	0,4568
12	31224,0	FALHA	18	0,6000	0,0894	0,5108
13	36229,0	FALHA	17	0,5667	0,0905	0,5680
14	38590,0	FALHA	16	0,5333	0,0911	0,6286
15	39580,0	FALHA	15	0,5000	0,0913	0,6931
16	40278,0	FALHA	14	0,4667	0,0911	0,7621
17	41324,0	FALHA	13	0,4333	0,0905	0,8362
18	44540,0	FALHA	12	0,4000	0,0894	0,9163
19	44901,0	FALHA	11	0,3667	0,0880	1,0033
20	45121,0	FALHA	10	0,3333	0,0861	1,0986
21	45789,0	FALHA	9	0,3000	0,0837	1,2040
22	45987,0	FALHA	8	0,2667	0,0807	1,3218
23	46021,0	FALHA	7	0,2333	0,0772	1,4553
24	46072,0	FALHA	6	0,2000	0,0730	1,6094
25	46985,0	FALHA	5	0,1667	0,0680	1,7918
26	46999,0	FALHA	4	0,1333	0,0621	2,0149
27	47001,0	FALHA	3	0,1000	0,0548	2,3026
28	47125,0	FALHA	2	0,0667	0,0455	2,7081
29	47189,0	FALHA	1	0,0333	0,0328	3,4012
30	47225,0	FALHA	0	0,0000	0,0000	

MTTF = 34489,7 Erro Padrão = 2468,46

FabricanteAB = B

			Número em Risco	Confiabilidade	Erro	Risco (Hazard)
Mecanismo	Tempo	Estado	em Risco	Acumulada	Padrão	Acumulado
31	8750,0	FALHA	29	0,9667	0,0328	0,0339
32	15623,0	FALHA	28	0,9333	0,0455	0,0690
33	16790,0	FALHA	27	0,9000	0,0548	0,1054
34	17579,0	FALHA	26	0,8667	0,0621	0,1431
35	19071,0	FALHA	25	0,8333	0,0680	0,1823
36	20802,0	FALHA	24	0,8000	0,0730	0,2231
37	22189,0	FALHA	23	0,7667	0,0772	0,2657
38	28791,0	FALHA	22	0,7333	0,0807	0,3102
39	31129,0	FALHA	21	0,7000	0,0837	0,3567
40	32167,0	FALHA	20	0,6667	0,0861	0,4055
41	33196,0	FALHA	19	0,6333	0,0880	0,4568
42	35090,0	FALHA	18	0,6000	0,0894	0,5108
43	39145,0	FALHA	17	0,5667	0,0905	0,5680
44	43145,0	FALHA	16	0,5333	0,0911	0,6286
45	44189,0	FALHA	15	0,5000	0,0913	0,6931
46	46901,0	FALHA	14	0,4667	0,0911	0,7621
47	48901,0	FALHA	13	0,4333	0,0905	0,8362
48	51902,0	FALHA	12	0,4000	0,0894	0,9163
49	52953,0	FALHA	11	0,3667	0,0880	1,0033
50	55723,0	FALHA	10	0,3333	0,0861	1,0986
51	58956,0	FALHA	9	0,3000	0,0837	1,2040
52	60976,0	FALHA	8	0,2667	0,0807	1,3218
53	62567,0	FALHA	7	0,2333	0,0772	1,4553
54	65345,0	FALHA	6	0,2000	0,0730	1,6094
55	68735,0	FALHA	5	0,1667	0,0680	1,7918
56	70907,0	FALHA	4	0,1333	0,0621	2,0149
57	85946,0	FALHA	3	0,1000	0,0548	2,3026
58	88768,0	FALHA	2	0,0667	0,0455	2,7081
59	90157,0	FALHA	1	0,0333	0,0328	3,4012
60	92128,0	FALHA	0	0,0000	0,0000	

MTTF == 46950,7 Erro Padrão = 4392,88

Quadro de Percentil para FabricanteAB = A

		Erro
Percentil	Estimativa	Padrão
75,0	26791,0	6863,08
50,0	40278,0	3480,55
25,0	46021,0	692,665

Quadro de Percentil para FabricanteAB = B

		Erro
Percentil	Estimativa	Padrão
75,0	28791,0	6881,85
50,0	46901,0	6664,62
25,0	62567,0	5663,52

Comparação de Grupos

				Proporção de
Empresa	Total	Falhas	Censuras	Censuras
A	30	30	0	0,0000
B	30	30	0	0,0000
Total	60	60	0	0,0000

Teste Logrank: Estatística qui-quadrado = 10,3493 e valor-p  $p = 0,00129465$ .

Rejeita-se a hipótese de igualdade dos produtos quanto a confiabilidade, pois  $p = 0,00129465 < 0,05$ .

Teste de Wilcoxon: Estatística qui-quadrado = 4,19068 e valor-p  $p = 0,0406435$ .

Rejeita-se a hipótese de igualdade dos produtos quanto a confiabilidade, pois  $p = 0,0406435 < 0,05$ .

Gráfico das Funções de Confiabilidade Estimadas por Kaplan-Meier

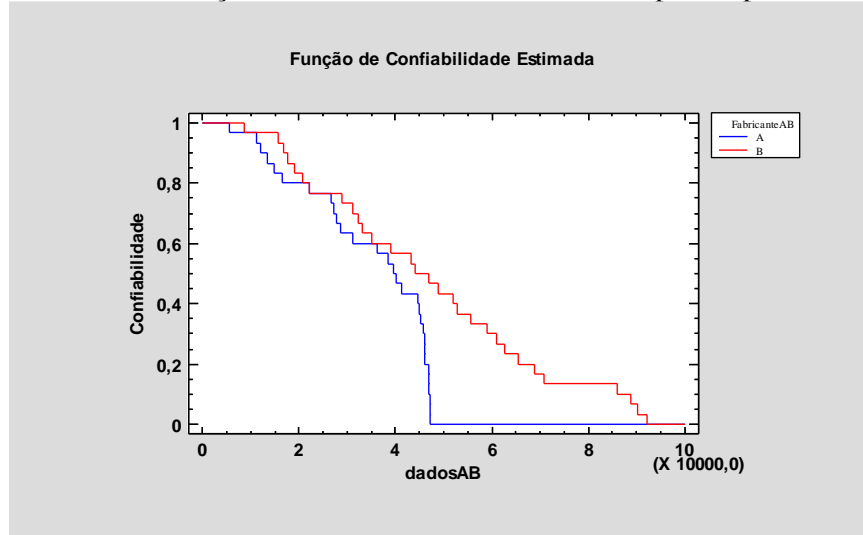
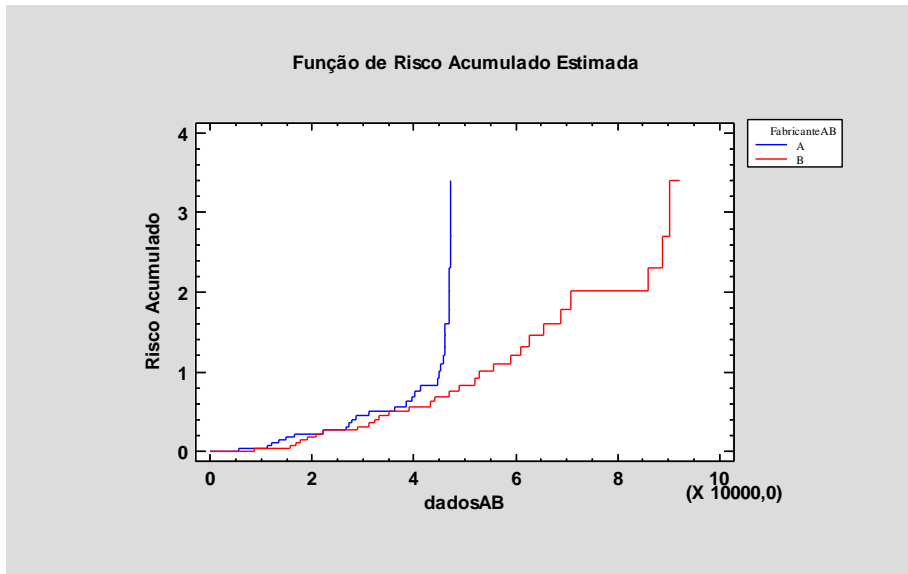


Gráfico das Funções de Risco Acumulado Estimadas por Kaplan-Meier



Dos resultados conclui-se que a empresa B fabrica o produto mais confiável e observa-se que dadosAB corresponde ao tempo até a falha.

### 2.5.2- Intervalo de Confiança para as Estimativas de Kaplan-Meier da Confiabilidade

O estimador da variância do estimador de Kaplan-Meier tem por expressão a chamada fórmula de Greenwood:

$$\hat{V}[\hat{R}(t)] = \hat{R}(t)^2 \left[ \frac{d_1}{n_1(n_1 - 1)} + \frac{d_2}{n_2(n_2 - 1)} + \dots + \frac{d_0}{n_0(n_0 - 1)} \right]$$

onde:

$d_i$  é o número de falhas no tempo  $t_i$ ;

$n_i$  é o número de itens sob risco (em teste) no tempo  $t_i$ ;

$t_0$  é o maior tempo de falha menor que  $t$ .

E, o estimador do erro padrão dessa estatística,  $\hat{V}[\hat{R}(t)]$  é  $\hat{ep}[\hat{R}(t)] = \sqrt{\hat{V}[\hat{R}(t)]}$

**Seja, agora, o cálculo do intervalo de confiança para  $R(t)$  em um tempo fixado  $t$ .**

A solução é usar um pivô aproximado baseado no Teorema Central do Limite. A expressão do pivô é:

$$\frac{R(t) - \hat{R}(t)}{\sqrt{\hat{V}[\hat{R}(t)]}} = \frac{R(t) - \hat{R}(t)}{\hat{ep}[\hat{R}(t)]} \sim N(0, 1) \quad (\text{distribuição assintótica } N(0, 1))$$

Portanto, o intervalo de confiança de nível  $(1 - \alpha)$  é

$$P(\hat{R}(t) - z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{ep}[\hat{R}(t)] \leq R(t) \leq \hat{R}(t) + z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{ep}[\hat{R}(t)]) = 1 - \alpha$$

### Exemplo

Suponha os resultados das estimativas da confiabilidade, em vários tempos, na tabela adiante. Deseja-se o intervalo de confiança para  $\hat{R}(t_3) = 0,90$ .

t (tempo)	d (falhas)	n (itens em fisco)	$\hat{R}(t)$ (confiabilidade)
0	0	30	1
$t_1$	1	30	0,967
$t_2$	1	29	0,933
$t_3$	1	28	0,900
$t_4$	1	27	0,867

a) Estime a variância da estimativa de  $\hat{R}(t) = 0,90$ .

Aplicando a fórmula de Greenwood,

$$\hat{V}[\hat{R}(t)] = \hat{R}(t)^2 \left[ \frac{d_1}{n_1(n_1-1)} + \frac{d_2}{n_2(n_2-1)} + \dots + \frac{d_0}{n_0(n_0-1)} \right]$$

$$\hat{V}[0,90] = 0,90^2 \left[ \frac{1}{30(30-1)} + \frac{1}{29(29-1)} + \frac{1}{28(28-1)} \right]$$

$$\hat{V}[0,90] = 0,90^2 \left[ \frac{1}{30(29)} + \frac{1}{29(28)} + \frac{1}{28(27)} \right]$$

$$\hat{V}[0,90] = 0,90^2 \left[ \frac{1}{30(29)} + \frac{1}{29(28)} + \frac{1}{28(27)} \right] = 0,003$$

b) Estime o erro padrão dessa estatística

$$\hat{ep}[\hat{R}(t)] = \sqrt{\hat{V}[\hat{R}(t)]}$$

$$\hat{ep}[0,90] = \sqrt{0,003} = 0,05477$$

c) Construa o intervalo de confiança de nível 0,95 para a confiabilidade  $R(0,90)$ , estimada em  $\hat{R}(t) = 0,90$ .

$$P(\hat{R}(t) - z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{ep}[\hat{R}(t)] \leq R(t) \leq \hat{R}(t) + z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{ep}[\hat{R}(t)]) = 1 - \alpha$$

$$P[0,90 - 1,96 \cdot 0,05477 \leq R(t) \leq 0,90 + 1,96 \cdot 0,05477] = 0,95$$

O I.C. de nível 0,95 é  $[0,793 ; 1,007]$  **que tem parte fora do limite de 1,0 para  $R(t)$ .**

### 2.5.3- Transformação para Valores Extremos de $R(t)$

Quando se tem o valor real de  $R(t)$  próximo de 1 ou de zero (valores extremos) pode acontecer do limite superior do intervalo ultrapassar o limite 1 ou do limite inferior ser negativo. Então, deve-se construir um novo intervalo baseado na transformação descrita a seguir.

Seja a estatística  $\hat{U}(t)$  função de  $\hat{R}(t)$ ,  $\hat{U}(t) = \ln\{-\ln[\hat{R}(t)]\}$  cuja variância é estimada por:

$$\hat{V}[\hat{U}(t)] = \frac{\hat{V}[\hat{R}(t)] / \hat{R}(t)^2}{\{\ln[(n_1 - d_1)/n_1] + \ln[(n_2 - d_2)/n_2] + \dots + \ln[(n_0 - d_0)/n_0]\}^2}$$

e o erro padrão por:  $\hat{ep}[\hat{U}(t)] = \sqrt{\hat{V}[\hat{U}(t)]}$

Então, o intervalo de nível  $(1 - \alpha)$  para  $R(t)$  é

$$P[\hat{R}(t)^{\exp[z \cdot \hat{ep}(\hat{U}(t))]} \leq R(t) \leq \hat{R}(t)^{\exp[-z \cdot \hat{ep}(\hat{U}(t))]}] = 1 - \alpha, \text{ onde } Z \sim N(0, 1).$$

### Exemplo

Suponha, agora, os resultados de estimativas para a confiabilidade na tabela apresentada no exemplo anterior e calcule o intervalo de confiança para  $R(t_3)$  com  $\hat{R}(t_3) = 0,90$  baseado na transformação da variável. As estatísticas disponíveis são:

$$\hat{R}(t_3) = 0,90 ; \hat{V}[\hat{R}(t_3)] = 0,003 \text{ e } \hat{ep}[\hat{R}(t_3)] = 0,05477$$

Então, o intervalo de confiança para  $R(t_3)$  é:

$$P[\hat{R}(t_3) - z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{ep}[\hat{R}(t_3)] \leq R(t_3) \leq \hat{R}(t_3) + z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{ep}[\hat{R}(t_3)]] = 1 - \alpha$$

$$P[0,90 - 1,96 \cdot 0,05477 \leq R(t_3) \leq 0,90 + 1,96 \cdot 0,05477] = 0,95$$

Resultando em  $[0,793 ; 1,007]$  que tem parte além do limite superior de 1,0 para  $R(t_3)$ .

Portanto deve-se aplicar a transformação em  $\hat{R}(t_3)$  obtendo:

$\hat{U}(t) = \ln\{-\ln[\hat{R}(t)]\}$  e a variância de  $\hat{U}(t)$  é:

$$\hat{V}[\hat{U}(t)] = \frac{0,003 / (0,90)^2}{\{\ln[(30 - 1)/30] + \ln[(29 - 1)/29] + \ln[(28 - 1)/28]\}^2} = 0,3336418$$

Logo o erro padrão de  $\hat{U}(t)$  é:  $\hat{ep}[\hat{U}(t)] = \sqrt{\hat{V}[\hat{U}(t)]} = \sqrt{0,3336418} = 0,5776$

E, o I.C. de nível  $1 - \alpha$  é:  $P[\hat{R}(t_3)^{\exp[z \cdot \hat{ep}(\hat{U}(t))]} \leq R(t_3) \leq \hat{R}(t_3)^{\exp[-z \cdot \hat{ep}(\hat{U}(t))]}] = 1 - \alpha$

Portanto, tem-se o resultado:

$$P[0,90^{\exp[1,96 \cdot 0,5776]} \leq R(t_3) \leq 0,90^{\exp[-1,96 \cdot 0,5776]}] = 0,95 \text{ e o I.C. é } [0,7212 ; 0,9667].$$

Finalmente, conclui-se que esse intervalo é o mais adequado porque não tem parte além do limite superior de 1 (ou de zero para o limite inferior) para a confiabilidade.

### Exercícios

1) Suponha os dados do teste de vida para o fabricante F1 (de exercício anterior). A tabela adiante mostra as estimativas de Kaplan-Meier para a confiabilidade.

### Estimativas com uso do Produto-Limite ou de Kaplan-Meier

linha	Tempo	Status	Número em risco	Confiabilidade Acumulada	Erro padrão	Função Risco Acumulada
1	125,0	FALHA	19	0,9500	0,0487	0,0513
2	130,0	FALHA	18	0,9000	0,0671	0,1054
3	145,0	FAILE D	17	0,8500	0,0798	0,1625
4	160,0	FALHA	16	0,8000	0,0894	0,2231
5	163,0	FALHA	15	0,7500	0,0968	0,2877
6	165,0	FALHA	14	0,7000	0,1025	0,3567
7	170,0	FALHA	13	0,6500	0,1067	0,4308
8	172,0	FALHA	12	0,6000	0,1095	0,5108
9	173,0	FALHA	11	0,5500	0,1112	0,5978
10	179,0	FALHA	10	0,5000	0,1118	0,6931
11	180,0	FALHA	9	0,4500	0,1112	0,7985
12	185,0	FALHA	8	0,4000	0,1095	0,9163
13	191,0	FALHA	7	0,3500	0,1067	1,0498
14	210,0	FALHA	6	0,3000	0,1025	1,2040
15	212,0	FALHA	5	0,2500	0,0968	1,3863
16	215,0	FALHA	4	0,2000	0,0894	1,6094
17	218,0	FALHA	3	0,1500	0,0798	1,8971
18	220,0	FALHA	2	0,1000	0,0671	2,3026
19	221,0	FALHA	1	0,0500	0,0487	2,9957
20	225,0	FALHA	0	0,0000	0,0000	

Tempo Médio de Duração = 182,95 Erro padrão = 6,83431

a) Calcule as estimativas da variância e do erro padrão da confiabilidade estimada nos tempos de 125, 130 e 221.

**Em t = 125**

$$\hat{V}[\hat{R}(t)] = \hat{R}(t)^2 \left[ \frac{d_1}{n_1(n_1-1)} + \frac{d_2}{n_2(n_2-1)} + \dots + \frac{d_0}{n_0(n_0-1)} \right]$$

$$\hat{V}[\hat{R}(125)] = 0,95^2 \left[ \frac{1}{20 \times 19} \right] = 0,002375$$

$$\hat{e}_p[\hat{R}(125)] = \sqrt{0,002375} = 0,0487$$

**Em t = 130**

$$\hat{V}[\hat{R}(130)] = 0,90^2 \left[ \frac{1}{20 \times 19} + \frac{1}{19 \times 18} \right] = 0,0045$$

$$\hat{e}_p[\hat{R}(130)] = \sqrt{0,0045} = 0,0671$$

**Em t = 221**

$$\hat{V}[\hat{R}(221)] = 0,05^2 \left[ \frac{1}{20 \times 19} + \frac{1}{19 \times 18} + \frac{1}{18 \times 17} + \frac{1}{17 \times 16} + \frac{1}{16 \times 15} + \dots + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1} \right]$$

$$= 0,002375$$

$$\hat{ep}[\hat{R}(221)] = 0,04873397$$

2) Seja, agora, o cálculo do intervalo de confiança para  $R(t)$  em um tempo fixado  $t$  no problema do fabricante F1, no qual se calculou medidas de dispersão.

**Solução:**

A solução é usar um pivô aproximado baseado no Teorema Central do Limite. A expressão do pivô é:

$$\frac{R(t) - \hat{R}(t)}{\sqrt{\hat{V}[\hat{R}(t)]}} = \frac{R(t) - \hat{R}(t)}{\hat{ep}[\hat{R}(t)]} \sim N(0, 1)$$

Portanto, o intervalo de confiança de nível  $(1 - \alpha)$  é

$$P[\hat{R}(t) - z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{ep}[\hat{R}(t)] \leq R(t) \leq \hat{R}(t) + z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{ep}[\hat{R}(t)] = 1 - \alpha$$

E, os intervalos de confiança de nível 95% para cada uma das confiabilidades estimadas no exercício anterior, ou seja, em  $t = 125$ ,  $t = 130$  e  $t = 221$  são dados por:

a) Para  $R(125)$

$$P[\hat{R}(125) - 1,96 \cdot \hat{ep}[\hat{R}(125)] \leq R(125) \leq \hat{R}(125) + 1,96 \cdot \hat{ep}[\hat{R}(125)] = 0,95$$

$$P[0,9500 - 1,96 \cdot 0,0487 \leq R(125) \leq 0,95 + 1,96 \cdot 0,0487] = 0,95$$

O I.C. de 95% para  $R(125)$  seria  $[0,85 ; 1,04]$ , mas  $R(t)$  não pode ser maior que 1. Então, o que se faz é uma **transformação para  $R(t)$** , ou seja define-se:

$$\hat{U}(t) = \ln\{-\ln[\hat{R}(t)]\}$$

cuja variância é estimada por:

$$\hat{V}[\hat{U}(t)] = \frac{\hat{V}[\hat{R}(t)] / \hat{R}(t)^2}{\{\ln[(n_1 - d_1) / n_1] + \ln[(n_2 - d_2) / n_2] + \dots + \ln[(n_0 - d_0) / n_0]\}^2}$$

E, então, o intervalo de nível  $(1 - \alpha)$  é:

$$P[\hat{R}(t)^{\exp[z \cdot \hat{ep}(\hat{U}(t))]} \leq R(t) \leq \hat{R}(t)^{\exp[-z \cdot \hat{ep}(\hat{U}(t))]} = 1 - \alpha$$

Portanto,  $\hat{U}(t) = \ln\{-\ln[\hat{R}(t)]\}$

$$\hat{U}(125) = \ln\{-\ln[0,95]\} = -2,970195249 \text{ e,}$$

$$\hat{V}[\hat{U}(125)] = \frac{0,002375 / 0,95^2}{\{\ln[(20-1)/20]\}^2} = \frac{0,002375 / 0,95^2}{\{\ln(19/20)\}^2} = 1,000219269$$

$$\hat{ep}[\hat{U}(125)] = \sqrt{1,000219269} = 1,000109628$$

Assim, o I.C. é:

$$P[0,95^{\exp[1,96 \times 1,000109628]} \leq R(t) \leq 0,95^{\exp[-1,96 \times 1,000109628]}] = 0,95$$

I.C. de nível 0,95 é [0,6947 ; 0,9928]

b) Repita o item (a) para  $t = 130$  e  $t = 221$ .

## 2.5.4 Exemplo de Análise de Tempo de Falhas

Suponha o exemplo abordado no início do estudo de confiabilidade:

“O fabricante do mecanismo cuja função é subir e descer os vidros das portas dos veículos faz testes para obter informações importantes sobre a confiabilidade do produto. O tipo mais comum de teste é aquele em que o mecanismo desloca para cima e para baixo uma carga com peso igual ao do vidro, até que a falha ocorra. Estima-se que 30000 ciclos (subir e descer a carga) equivalem a 10 anos de uso em condições normais. Uma amostra aleatória composta por 30 mecanismos novos foi posta em teste (**teste de vida**). O teste consistiu em fazê-los funcionar por 50000 ciclos e registrar o número de ciclos completados até falhar (tempo de falha). Após os 50000 ciclos, 18 mecanismos haviam falhado e 12 continuaram em operação. Os números de ciclos até a falha foram: 38590, 16513, 27847, 13566, 14922, 40278, 11223, 36229, 5625, 39580, 44540, 31225, 28613, 12128, 26791, 41325, 27144 e 22138”.

E, que o fabricante está interessado em estimar as seguintes características do seu produto:

- 1ª.) O tempo médio entre falhas: MTTF;
- 2ª.) O tempo no qual p% dos mecanismos estarão fora de operação;
- 3ª.) O percentual esperado de falhas nos dois primeiros anos de uso.

Para responder as três questões (1ª, 2ª e 3ª) utilizou-se a estimação da Função de Confiabilidade  $\hat{R}(t)$  pelo estimador de Kaplan-Meier.

1ª.) MTTF = 26571,0 Erro Padrão = 2842,11

2ª.) Tabela dos Principais Percentis

Percentil	Estimativa	Erro Padrão
75,0	14922,0	2777,59
50,0	27144,0	1120,06
25,0	38590,0	4912,28

3ª.)  $P(T \leq 6.000) =$



### EXEMPLO

Considere os dados adiante que se referem ao tempo de falha de um isolador elétrico. A empresa que fabrica este equipamento deseja conhecer o tempo de falha na temperatura de 200°C. Realizou-se, então, um teste de vida em um conjunto de 60 isoladores. Quando se finalizou o teste 45 isoladores haviam falhado (censura do tipo II). Então, os 15 itens (isoladores) que não falharam ao final do teste foram censurados no tempo  $t = 2729$  h. A empresa deseja:

- a) estimar o tempo médio até falhar (MTTF);
- b) percentual de falhas até 500 h de uso;
- c) percentual de falhas após 500 h de uso;
- d) Qual o tempo abaixo do qual falham 5% dos equipamentos?
- e) Faça o gráfico da Função Confiabilidade;
- f) Faça o gráfico da Função Risco (função taxa de falhas).

Os dados do teste de vida são:

Tempo de vida	Tempo de vida	Tempo de vida	Tempo de vida	Tempo de vida
151	592	867	1329	2282
164	628	893	1334	2415
336	632	930	1379	2430
365	647	937	1380	2686
403	675	976	1633	2729
454	727	1008	1769	
455	785	1040	1827	
473	801	1051	1831	
538	811	1060	1849	
577	816	1183	2016	

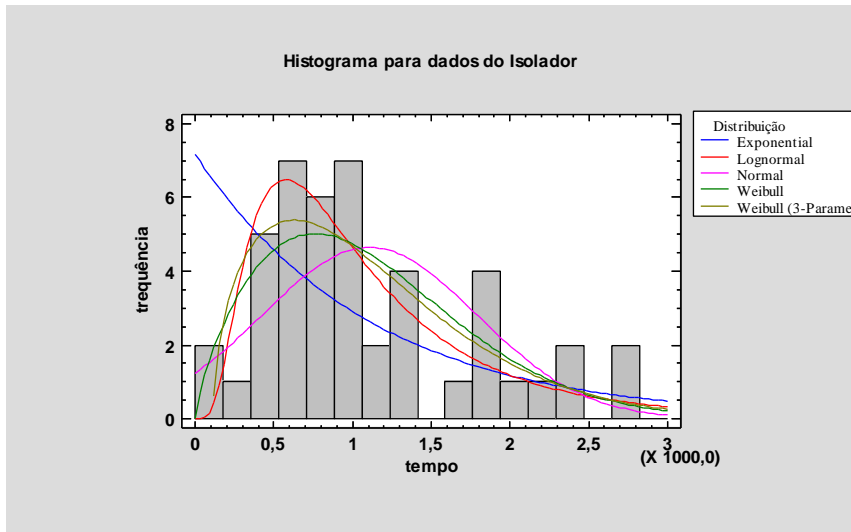
### SOLUÇÃO:

A análise estatística desses dados no enfoque paramétrico exige **o ajuste de um modelo de probabilidade aos dados**. Os modelos adequados para se ajustar (modelar) ao tempo de falha são:

Gaussiano (Normal), Exponencial, Weibull, Weibull 3-parâmetros e Log-normal. Esses modelos já foram abordados, exceto, o Log-normal.

### Teste de Kolmogorov-Smirnov

	Exponencial	Lognormal	Normal	Weibull	Weibull (3-Parameter)
DPLUS	0,0851962	0,0534359	0,172537	0,115552	0,0926442
DMINUS	0,225049	0,0605092	0,0844962	0,0616371	0,0629687
DN	0,225049	0,0605092	0,172537	0,115552	0,0926442
Valor-p	0,020961	0,996543	0,137257	0,585058	0,834634



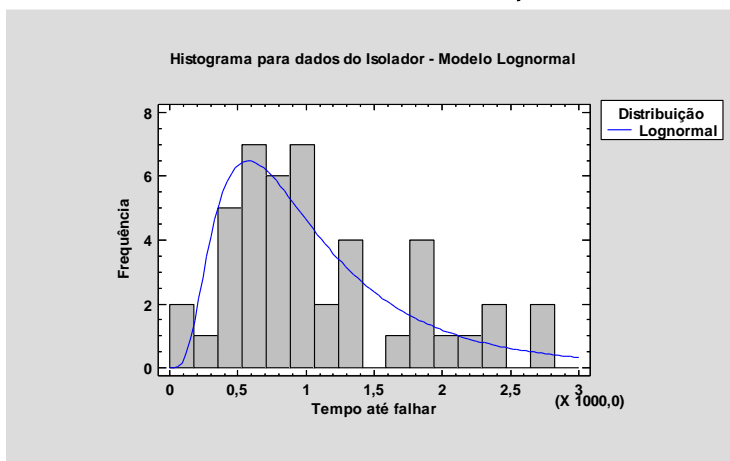
Está claro pelos valores-p que o modelo Lognormal é o que se ajusta melhor aos dados, pois o seu ajuste fornece o maior valor-p,  $p = 0,996543$ .

#### Ajustes dos modelos e teste de Kolmogorov-Smirnov:

Modelo	Gaussiano	Weibull 3-parâmetros	Weibull	Log-normal
Valor-p	$p = 0,137257$	$p = 0,834634$	$p = 0,585058$	$p = 0,996543$
Estimativas dos Parâmetros	$\mu = 1108,09$ $\sigma = 682,413$	$b = 1,477$ $a = 1094,19$ $\theta = 117,237$	$\hat{\alpha} = 1,73361$ $\hat{\beta} = 1248,78$	$\hat{E}(Y) = \hat{\mu} = 1140,32$ $\hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{V}(Y)} = \hat{\xi} = 868,349$
Função de Confiabilidade R(t)	$\Phi\{-(t - \mu)/\sigma\}$	$e^{-a(t-\theta)^b}$	$e^{-(t/a)^\beta}$	$\Phi\{-(\ln(t) - \mu)/\sigma\}$

O modelo da Lognormal ajustado é:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\ln(t) - \mu]^2}{2\sigma^2}} \quad t \geq 0$$



E, com os valores estimados dos parâmetros resulta:

$$f(t) = \frac{1}{868,349 \cdot t \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\ln(t) - 1140,32]^2}{2 \cdot 868,349^2}} \quad t \geq 0$$

a) O tempo médio até falhar MTTF estimado é:  $\hat{\mu} = 1140,32$

b) O percentual de falhas até 500 h de uso é:  $P(T \leq 500) = 0,189164$

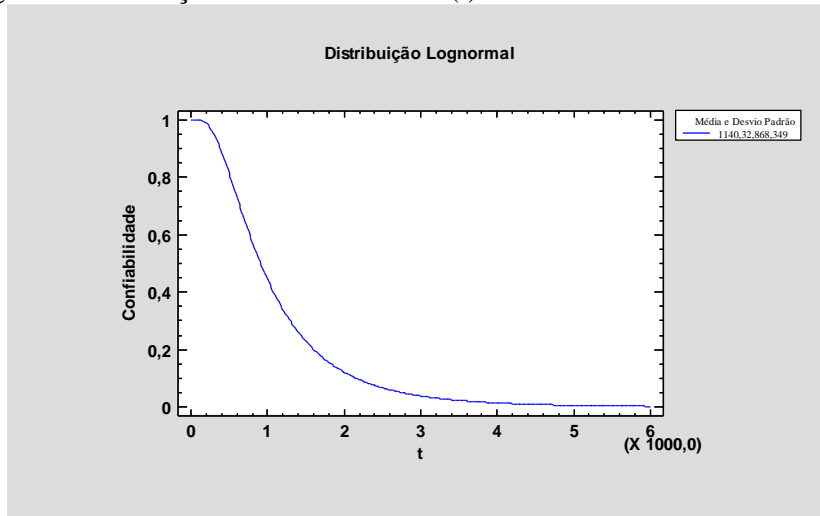
c) O percentual de falhas após 500 h de uso é:

$$P(T > 500) = 1 - P(T \leq 500) = 1 - 0,189164 = 0,810836$$

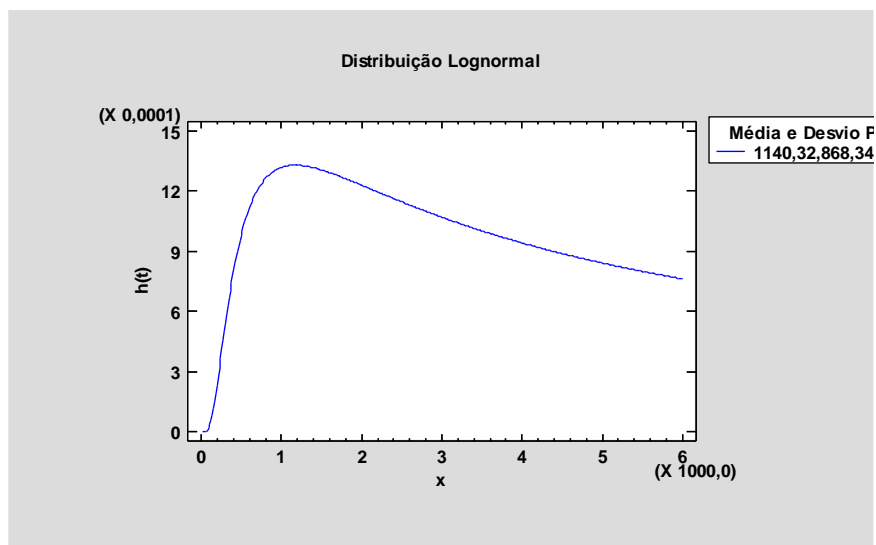
d) O tempo abaixo do qual falham 5% dos equipamentos é:  $P(T \leq t) = 0,05 \Rightarrow$

$$P^{-1}(0,05) = 298,275$$

e) O gráfico da Função Confiabilidade  $R(t)$  é:



f) O gráfico da Função Risco (Função Taxa de Falhas)  $h(t)$  ou  $\lambda(t)$  é:



## Exercícios

- 1) O tempo até a falha de certo ventilador de motores a óleo diesel tem uma distribuição exponencial com  $MTTF = \mu = 30.000$  h.
  - a) Escreva a expressão da f.d.p. da distribuição exponencial com parâmetro  $\theta$ .
  - b) Determine a expressão específica da f.d.p. com o valor do parâmetro  $\theta$ .
  - c) Determine a função distribuição acumulada (f.d.) da Exponencial.
  - d) Escreva a f.d. na forma específica com o valor do parâmetro.
  - e) Determine a Função de Confiabilidade da distribuição exponencial.
  - f) Determine a expressão específica da Função de Confiabilidade, nesse caso.
  - g) Calcule o valor da confiabilidade para um total de 8760 h, ou seja, um ano de uso.
  - h) Determine a média e a variância de uma v.a. com distribuição Exponencial.
  - i) Calcule o valor da média, da variância e do desvio padrão com a informação do enunciado.
  - j) Determine a Função Taxa de Falhas (Função Risco) da Exponencial.
  - k) Determine a expressão específica da Função Risco, com a informação do enunciado.
  - l) Calcule a probabilidade de um ventilador **não falhar** nas primeiras 10000 h de funcionamento, ou seja, a função confiabilidade  $R(t)$  em 10000 h.
  - m) Se 10000 h é o tempo de garantia dado pelo fabricante, qual a fração de ventiladores que deverão ser substituídos durante a garantia?
- 2) O tempo até a falha de um determinado dispositivo eletrônico segue a distribuição de Weibull com parâmetros  $\alpha = 120000$  h e  $\delta = 0,5$ . Sabe-se que a função densidade de probabilidade da Weibull pode ser escrita na forma:  $f(t) = \left(\frac{\delta}{\alpha}\right) t^{\delta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\delta}$   $t \geq 0$ ,  $\delta > 0$  e  $\delta = \frac{1}{\alpha^\delta} > 0$ .
  - a) Determine a expressão específica da f.d.p. da Weibull.

b) Determine a função distribuição acumulada (f.d.) da Weibull; escreva-a na forma específica com os valores dos parâmetros.

c) Sabe-se que a Função de Confiabilidade da Weibull é dada por:  $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\delta}$

$t \geq 0$ . Determine a expressão específica da Função de Confiabilidade, nesse caso.

d) Calcule o valor da confiabilidade para um total de 8760 h, ou seja, um ano de uso;

e) Sabe-se que a média e a variância de uma v.a. com distribuição Weibull são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{MTTF} = E(T) = \mu &= \alpha \Gamma[1+(1/\alpha)] \\ V(T) &= \alpha^2 \{ \Gamma[1+(2/\delta)] - [\Gamma(1+ (1/\delta))]^2 \} \quad \text{onde } \Gamma(m+1) = m\Gamma(m) \end{aligned}$$

Calcule a média e o desvio padrão do tempo até a falha;

f) Sabe-se que a Função Taxa de Falhas (Função Risco) da Weibull é dada por:  $\lambda(t) = (\delta/\alpha)(t/\alpha)^{\delta-1}$   $t \geq 0$ . Determine a expressão específica da Função Risco.

g) Sabe-se que a Função de Confiabilidade da Weibull é dada por:  $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\delta}$   $t \geq 0$ . Determine a expressão específica da Função de Confiabilidade, nesse caso.

3) O tempo até a falha de um determinado equipamento segue a distribuição Lognormal com parâmetros  $\mu = 10$  h e  $\sigma = 0,12$  h.

a) Sabe-se que a função densidade de probabilidade da Lognormal é:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma t \sqrt{2\pi}} e^{-\left\{\frac{[\ln(t)-\mu]^2}{2\sigma^2}\right\}} \quad t \geq 0. \text{ Determine a expressão específica da f.d.p.}$$

com as informações do enunciado.

b) Sabe-se que a Função de Confiabilidade da Lognormal é dada por:  $R(t) = \Phi\left\{-\frac{[\ln(t)-\mu]/\sigma}{1}\right\}$   $t \geq 0$ . Determine a expressão específica da Função de Confiabilidade, nesse caso.

c) Calcule o valor da confiabilidade para um total de 20000 h.

d) Sabe-se que a média e a variância de uma v.a. Lognormal são:

$$\text{MTTF} = E(T) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad e \quad V(T) = e^{(2\mu + \sigma^2)} [e^{\sigma^2} - 1]$$

Escreva o valor da média, da variância e do desvio padrão do tempo até a falha.

- 4) Seja uma v.a.  $T$  com distribuição Weibull de três parâmetros, ou seja,  $\text{Weibull}(\alpha, \lambda, \theta)$  com  $\theta$  sendo o parâmetro de locação (o terceiro), além dos parâmetros de forma e de escala. A função distribuição da Weibull( $\alpha, \lambda, \theta$ ) é dada por:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda(t - \theta)^\alpha} \quad t \geq \theta$$

Pede-se:

- Verifique se  $F(t)$  é realmente uma função distribuição aplicando propriedade de f.d.
- Determine a função densidade de probabilidade da v.a.  $T$ .
- Verifique se a função que você determinou no item (b) é realmente uma função densidade de probabilidade.
- Determine a função de confiabilidade  $R(t)$  dessa v.a.  $T$ .
- Determine a função risco (taxa de falha)  $h(t)$  dessa v.a.  $T$ .

### 3 TESTES ACELERADOS

#### 3.1- INTRODUÇÃO

As indústrias, hoje em dia, para se manter nos mercados que são altamente competitivos devem planejar e desenvolver produtos novos que atendam às expectativas dos consumidores. Assim, devem criar ou aplicar tecnologias mais avançadas, em um tempo cada vez menor e, também, manter os esforços de melhoria da produtividade e da confiabilidade.

Assim, há necessidade de se obter informações sobre o desempenho dos produtos. Essas informações sobre o desempenho dos produtos podem ser **obtidas em duas fontes**: dados de campo (**assistência técnica e teste de mercado**, antes do lançamento) e dados experimentais (**laboratório**). No caso do teste de campo certo número de itens é repassado a uma amostra de consumidores e o desempenho desses itens é acompanhado durante certo intervalo de tempo. Mas, nesse caso do teste de mercado, pode existir produtos projetados para funcionar anos sem falhar. Então, é muito demorado acompanhar o desempenho junto à amostra de consumidores. Portanto, o que se faz é obter dados experimentais em laboratório nos denominados Testes Acelerados.

No caso dos **Testes Acelerados** existem algumas questões a serem respondidas, tais como:

- 1ª. Quantas e quais são as variáveis de *estressamento* que devem ser utilizadas?
- 2ª. Quantos e quais são os níveis de *estresse* que devem ser utilizados?
- 3ª. Como deve ser aplicado o *estresse*?

Para responder essas perguntas deve ser feito um planejamento adequado ao produto.

### 3.2- Tipos de Testes Acelerados

Os Testes Acelerados podem ser classificados em **dois tipos** dependendo da característica dos dados coletados no teste.

**1º. Tipo:** Testes de Vida Acelerados.

**2º. Tipo:** Testes de Degradação Acelerados.

No primeiro caso (Testes de Vida Acelerados) estão os testes em que a **resposta** é o **tempo até a ocorrência da falha**. E, então, pretende-se usar os dados para estimar o MTTF, a função de Confiabilidade  $R(t)$  e a função de Taxa de Falhas  $\lambda(t)$ . Os resultados dos testes são projetados para o tempo real, por meio de uma equação de regressão.

Já no caso dos Testes de Degradação Acelerados a **resposta** de interesse é alguma **medida do desempenho** do produto. Neste caso a resposta pode ser a oxidação do produto, resistência à tração, etc., por exemplo. Essa medida do desempenho é obtida ao longo do tempo.

Em ambos os testes há necessidade de se definir o **fator estressante**. Este fator é utilizado no teste em um nível superior ao nível considerado normal. Pode ser:

- **Temperatura;**

#### Exemplo 1

Em memórias de computador tipo **RAM** (*random access memory*) o desempenho do produto é medido pelo **tempo de acesso** e a **falha** seria um tempo superior a um limite definido. Então, nesse caso, o **fator estressante** poderia ser a **temperatura**.

#### Exemplo 2

Suponha um produto alimentício, por exemplo, leite, que deve ser mantido refrigerado. O **fator estressante** é novamente a temperatura. No teste as unidades do produto são mantidas em temperatura superior à indicada e conta-se o **número de microorganismos** que surgem no produto. Nesse caso, a **resposta de interesse** é o número de microorganismos presente no alimento ao longo de um período determinado. E, é claro, a falha seria um número de microorganismos superior a um valor especificado. Essa é a forma de se definir o tempo de validade do produto.

- **Voltagem (tensão).**

#### Exemplo 3

No caso da memória RAM a voltagem nominal geralmente é de 5 v. Então, um modo de estressar o produto e, conseqüentemente, degradá-lo é elevar o nível de voltagem.

**O teste pode ser acelerado de dois modos:**

**1º. Aumentando a taxa de uso.**

Nesse caso o fator de estresse é o **uso**. Então, deve-se elevar a taxa de uso do produto. Isto pode ser feito de duas maneiras:

1ª. com velocidade mais alta

**P. Ex. 1** – um motor funcionando com velocidade mais alta do que funcionaria normalmente.

2ª. redução do tempo de parada

**P. Ex. 2** - no mecanismo do vidro da porta do veículo deixa-se o produto funcionando por um número muito maior do que seria em condições normais.

**P. Ex. 3** – Cafeteira elétrica, normalmente ela faz café umas quatro vezes por dia; então, o que se faz é construir um dispositivo para fazê-la funcionar um número muito grande de vezes por dia.

## **2º. Aceleração por altos níveis de estresse.**

Nesse caso, o produto é submetido a vários níveis de estresse para encurtar o seu tempo de vida ou degradar o seu desempenho.

### **3.3- Medidas de Desempenho e Fator de Estresse.**

A seguir são relacionados alguns materiais, sua mais comum medida de desempenho e fator de estresse.

#### **a) Metais**

Medida de desempenho: trinca, corrosão, oxidação.

Fator de estresse: temperatura, umidade, salinidade.

#### **b) Isolamentos térmicos, elétricos ou sonoros**

Medida de desempenho: tempo até a falha, alongamento.

Fator de estresse: temperatura, voltagem, vibração.

#### **c) Alimentos e drogas**

Medida de desempenho: tempo de estocagem, pH, reações químicas específicas.

Fator de estresse: temperatura, umidade, radiação solar.

#### **d) Plásticos**

Medida de desempenho: propriedades mecânicas, firmeza da cor.

Fator de estresse: temperatura, vibração, choque.



e) Semicondutores e componentes microeletrônicos.

Medida de desempenho: tempo até a falha e características de operação.

Fator de estresse: temperatura, corrente elétrica, voltagem, umidade, pressão.

f) Capacitores

Medida de desempenho: tempo até a falha.

Fator de estresse: temperatura, voltagem, vibração.

g) Resistores

Medida de desempenho: tempo até a falha.

Fator de estresse: temperatura, voltagem, vibração.

h) Contatos Elétricos

Medida de desempenho: corrosão, tempo até a falha.

Fator de estresse: temperatura, umidade e corrente elétrica.

i) Lâmpadas

Medida de desempenho: luminosidade, tempo até a falha.

Fator de estresse: voltagem, temperatura, choque mecânico.

O estresse a ser aplicado durante o teste de vida pode ter vários níveis: nível 1 < nível 2 < nível 3. Pode ser **constante** ao longo do tempo em cada nível aplicado. E, ainda, pode ser do tipo **escada** (em cada nível aplicado), do tipo **progressivo** e do tipo **cíclico**.

### **Estresse Constante**

Nesse caso, cada item é submetido a um nível de estresse constante. Uma vez fixado o nível (1, 2 ou 3) esse deverá seguir até o fim do teste de vida.

### **Escada ou Step Stress**

Cada item recebe um nível de estresse durante um período de tempo. Se a unidade não falhar, o estresse é aumentado para novo nível e assim, sucessivamente, em pequenas elevações até que a falha ocorra. Esta forma de estressar o item tem a vantagem de conduzir à falha rapidamente.

### **Progressivo**

Cada item recebe um nível crescente de estresse de forma progressiva. Desde o início tem uma aceleração e o nível vai subindo continuamente.

### **Cíclico**

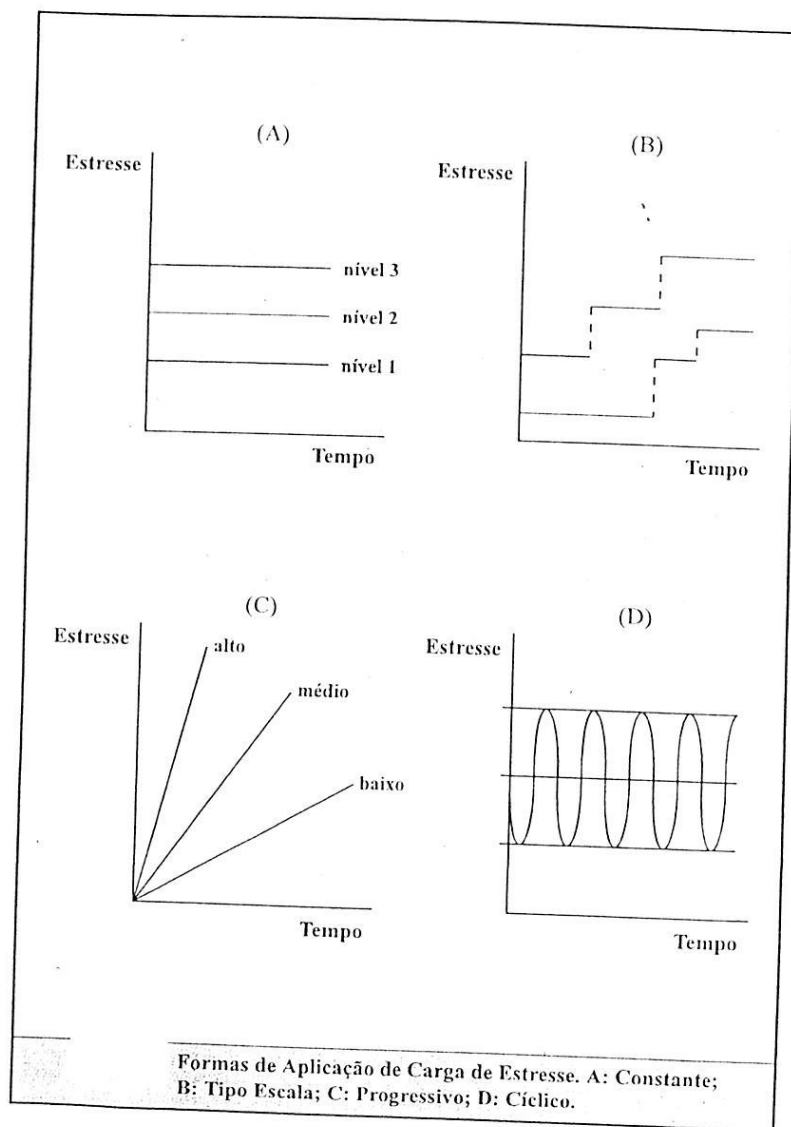
Cada item recebe um nível baixo de estresse e em seguida alto, daí baixo e em seguida alto e assim sucessivamente.

### **Aleatório**

Cada item recebe um nível estresse seguindo uma distribuição de probabilidade, a mais próxima da realidade, porém com valores mais altos do que os reais.

### **EXERCÍCIO**

Faça um esboço dos tipos de estresse: constante, escada, progressivo e cíclico.



#### 4 RELAÇÃO ENTRE A RESPOSTA (MEDIDA DE DESEMPENHO) E O ESTRESSE.

Geralmente, o tempo de falha está relacionado com o estresse por meio de um modelo estatístico, ou seja, sendo  $t$  o tempo de falha e  $s$  o nível de estresse tem-se:

$$t = f(s) + \varepsilon$$

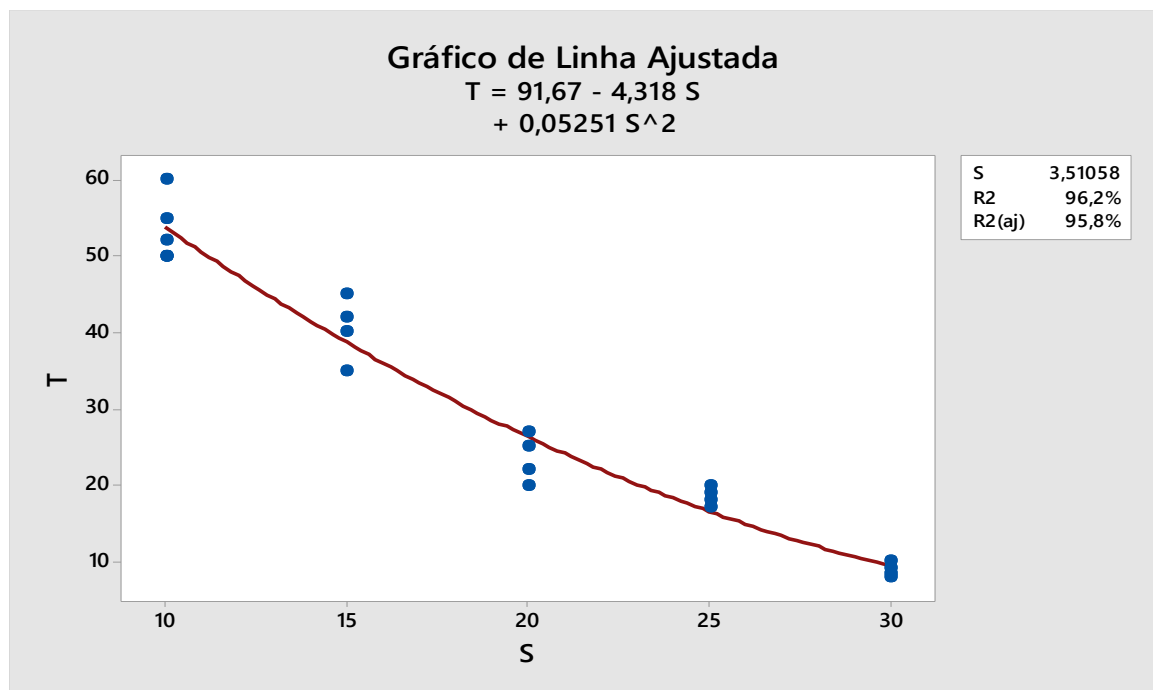
onde  $\varepsilon$  é um termo de perturbação estocástica (erro aleatório). A função  $f$  deve ser tal que modele o relacionamento de  $t$  e  $s$ .

#### EXERCÍCIO 1

Faça um exemplo do esboço da relação entre **tempo de falha (T)** e **fator de estresse (S)**.

Solução: Um exemplo é o gráfico adiante para os dados da tabela que representa a relação entre o nível de estresse  $S$  e o tempo de falha  $T$ .

T	50	60	50	40	45	35	20	25	27	20	18	19
S	10	10	10	15	15	15	20	20	20	25	25	25
T	10	9	8	55	52	42	22	17	8.5	10	9	8
S	30	30	30	10	10	15	20	25	30.0	30	30	30



SOLUÇÃO DA CONSTRUÇÃO DO GRÁFICO:

MINITAB

MTB> ESTAT – REGRESSÃO – GRÁFICO DE LINHA AJUSTADA resp T pred S  
 Modelo Quadrático

Análise de Regressão Polinomial Quadrático  $T = \beta_0 + \beta_1 S + \beta_2 S^2 + \varepsilon$   
A equação de regressão de T versus S é

$$T = 91,67 - 4,318 S + 0,05251 S^2$$

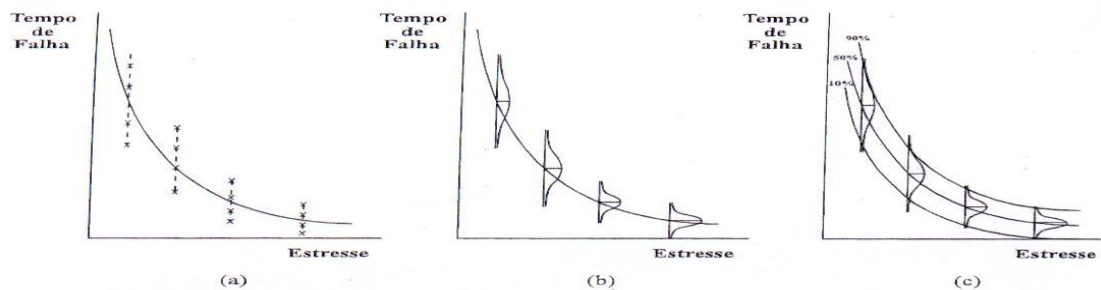
Sumário do Modelo

S	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> (aj)
3,51058	96,19%	95,77%

Análise de Variância

Fonte	GL	SQ	QM	F	p
Regressão	2	5600,12	2800,06	227,20	0,000
Erro	18	221,83	12,32		
Total	20	5821,95			

Observe que para valores iguais do fator de estresse S (p. ex. 15-15-15) ocorrem valores diferentes no tempo de falha T (40-45-35-35). Isto ocorre devido à existência do termo de perturbação estocástica  $\varepsilon$ . De forma, que se tem: os pontos, o modelo ajustado e o intervalo de confiança de 80% (p.ex.) para o modelo verdadeiro nas figuras (a), (b) e (c) adiante.



Os modelos preferidos para a relação entre o **estresse (S)** e a **resposta (T)** são aqueles que tenham algum significado físico ou químico, tais como as relações:

- **Relação de Arrhenius**
- **Relação de Potência Inversa**

### RELAÇÃO DE ARRHENIUS

Essa relação é usada para modelar o **tempo de falha** do produto com a variável de estresse **temperatura**. A relação de Arrhenius garante que a **taxa de uma reação química** depende da **temperatura** e tem a forma:

$$\text{Taxa} = A' e^{-E/(k\tau)}$$

onde, **E** é a energia de ativação (em eletrôn-volts);

**k** é a constante de Boltzmann ( $8,6171 \times 10^{-5}$ )

$\tau$  é temperatura absoluta em graus Kelvin ( $-273,16^\circ\text{C} \equiv 0^\circ\text{K}$ )

**A'** é uma constante que é característica de mecanismo de falha do produto e das condições do teste.

Portanto, uma falha pode ser explicada devido a uma reação química ou difusão por meio de um modelo simples. De forma que a falha ocorre quando uma quantidade crítica do produto químico reagiu, ou seja,

$$\text{Quant. crítica} = \text{Taxa} \times T \quad \text{e} \quad T = \frac{\text{Quant. crítica}}{\text{Taxa}}$$

De forma que o **tempo de falha T** é inversamente proporcional à Taxa. Assim, a **Relação de Arrhenius** para o tempo de falha é obtida substituindo-se a expressão da taxa na expressão do tempo, ou seja,

$$T = \frac{\text{Quant. crítica}}{A' e^{-E/(k\tau)}}$$

$$T = A e^{E/(k\tau)} \quad \text{onde } A = (\text{Quantidade crítica})/A'$$

E, finalmente, aplicando logaritmos neperianos (naturais) tem-se a **Relação de Arrhenius**:

$$\ln(T) = \ln(A) + (E/k) \frac{1}{\tau}$$

que é da forma de uma reta:  $Y = \beta_0 + \beta_1 X$  (determinístico, ou seja, sem o termo  $\varepsilon$ ) onde, como se vê:

$$Y = \ln(T);$$

$$\beta_0 = \ln(A);$$

$$\beta_1 = (E/k);$$

$X = 1/\tau$  ou  $x = 1000/\tau$  quando se tem valores muito pequenos;

**E** = energia de ativação;

**k** = constante de Boltzman ( $8,6171 \times 10^{-5}$ )

e **A** é uma constante que depende do mecanismo de falha do produto e das condições do teste.

Desta forma, tem-se que a relação de Arrhenius entre a resposta (tempo de falha) e o estresse indica que o logaritmo do fator tempo  $T$  ( $\ln(T)$ ) é uma função linear simples do inverso

da temperatura absoluta, pois  $x = \frac{1}{\tau}$ .

A relação de Arrhenius é usada em:

- isolamentos elétricos e dielétricos (passa o campo elétrico, mas não a corrente elétrica);
- baterias;
- graxas e lubrificantes;
- plásticos;
- filamentos de lâmpadas incandescentes.

## FATOR DE ACELERAÇÃO DA RELAÇÃO DE ARRHENIUS

O fator de aceleração de Arrhenius entre o tempo de falha  $T_0$  na temperatura de projeto  $\tau_0$  e o tempo de falha  $T$  numa temperatura de interesse  $\tau$  pode ser determinado através da expressão  $T = A e^{E/(k\tau)}$  fazendo:

$$A_c = \frac{T_0}{T} = \frac{A e^{E/(k\tau_0)}}{A e^{E/(k\tau)}} = e^{(E/k)(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau})}$$

$$A_c = e^{(E/k)(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau})}$$

## EXERCÍCIO

Em uma determinada categoria de isolantes tem-se  $E = 0,65$  eV. O fator de aceleração entre a temperatura de projeto  $\tau_0 = 453$  °K e uma determinada temperatura  $\tau = 533$  °K é calculado da seguinte forma:

$$A_c = e^{(0,65/8,6171)(\frac{1}{453} - \frac{1}{533})} = 12,173$$

Essas temperaturas em °C valem:

$$t_C = t_K - 273 \quad \text{logo } \tau_0 = 453 - 273 = 180 \text{ } ^\circ\text{C} \quad \text{e } \tau = 533 - 273 = 260 \text{ } ^\circ\text{C}$$

E o entendimento para o fator de aceleração  $A_c = 12,173$  é que para uma temperatura de 180 °C o tempo de falha será de 12,173 vezes o tempo de falha para a temperatura de 260 °C. Portanto, trabalhando na temperatura de 180 °C o produto durará aproximadamente 12 vezes mais do que quando sujeito ao trabalho a 260 °C.

## RELAÇÃO DE POTÊNCIA INVERSA

Essa relação é utilizada para modelar o **tempo de falha** em função de **qualquer tipo de variável de estresse**. Supondo que  $V$  seja a variável de estresse (sempre positiva na maioria das aplicações), então, a relação Potência Inversa tem a forma:

$$T = \frac{A}{V^\omega}$$

onde  $T$  é o tempo de falha,  $A$  e  $\omega$  são parâmetros característicos do produto, tais como: geometria, fabricação, método do teste, entre outros.

A expressão acima pode ser linearizada;

$$\ln(T) = \ln(A) - \omega \ln(V)$$

que é da forma de uma reta  $Y = \beta_0 + \beta_1 X$  (determinístico ou seja sem o termo  $\varepsilon$ ) onde

$$Y = \ln(T);$$

$$\beta_0 = \ln(A);$$

$$\beta_1 = \omega;$$

$$X = -\ln(V).$$

### FATOR DE ACELERAÇÃO DA RELAÇÃO POTÊNCIA INVERSA

O fator de aceleração da Relação Potência Inversa entre o tempo de falha  $T_0$  no nível projetado de estresse  $V_0$  e o tempo de falha  $T$  em um nível fixado de estresse  $V$  pode ser

determinado através da expressão  $T = \frac{A}{V^\omega}$  fazendo:

$$A_c = \frac{T_0}{T} = \frac{\frac{A}{V_0^\omega}}{\frac{A}{V^\omega}} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^\omega$$

$$A_c = \left(\frac{V}{V_0}\right)^\omega$$

### MODELO GERAL PARA A RELAÇÃO ESTRESSE-RESPOSTA

A relação de Arrhenius pode ser escrita na forma da reta (determinada anteriormente):

$$Y = \ln(T) = \beta_0 + \beta_1 X$$

A relação de Potência Inversa também foi escrita na forma da reta (determinada anteriormente):

$$Y = \ln(T) = \beta_0 + \beta_1 X$$

Então, se  $X = 1/\tau$  com  $\tau$  sendo a temperatura absoluta tem-se a Relação de Arrhenius e se  $X = -\ln(V)$  com  $V$  sendo a variável de estresse qualquer se tem a relação Potência Inversa. Observando-se as duas expressões anteriores conclui-se que o modelo geral é:

$$Y = \ln(T) = \beta_0 + \beta_1 X.$$

### OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

1ª.) Só é possível usar o fator de aceleração de Arrhenius se a **energia de ativação (E)** do mecanismo de falha for conhecida. Em muitos casos existem valores tabelados para E. Geralmente esses valores são achados em manuais de testes acelerados, como por exemplo “Accelerated Testing Handbook” de autoria de D. S. Peck e O. D. Trapp da editora Califórnia Technology Associates.



2<sup>a</sup>.) E, muitas vezes a energia de ativação E não é conhecida. Então, o que se faz é estimar o seu valor fazendo experimentação em diferentes níveis de temperatura. Veja a tabela adiante com k níveis do fator temperatura.

Temperatura $\tau$	$\tau_1$ (n1)	$\tau_2$ (n2)	$\tau_3$ (n3)	$\tau_4$ (n4)	$\tau_5$ (n5)	.....	$\tau_k$ (nk)
Tempo de falha T	$t_{11} \ t_{12}, \dots, t_{1n1}$	$t_{21} \ t_{22}, \dots, t_{2n2}$	$t_{31} \ t_{32}, \dots, t_{3n3}$	$t_{41} \ t_{42}, \dots, t_{4n4}$	$t_{51} \ t_{52}, \dots, t_{5n5}$	....	$t_{k1} \ t_{k2}$ ..... $t_{knk}$

Ajustando-se a reta  $Y = \ln(T) = \beta_0 + \beta_1 X$ , onde  $X = 1/\tau$ , estima-se o parâmetro  $\beta_1$  que corresponde a  $\hat{\beta}_1 = (E/k)$ . Assim, com a estimativa de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO)  $\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{E}}{k}$  obtém-se  $\hat{E} = k\hat{\beta}_1$  com k sendo a constante de Boltzman ( $8,6171 \times 10^{-5}$ ).

## 5. VARIÁVEL ALEATÓRIA E MODELOS DE PROBABILIDADE

### 5.1 - Introdução

Quando o resultado de um experimento, realizado sob condições controladas, para um determinado fenômeno é completamente previsível, o fenômeno é denominado de *fenômeno determinístico*. Mas, quando o resultado do experimento não é previsível, classifica-se o fenômeno como *fenômeno aleatório ou randômico*. No fenômeno determinístico, o resultado esperado ocorre com certeza. Por exemplo, uma chaleira ferverá quando a temperatura atingir 100 °C. Mas, no fenômeno aleatório o resultado esperado não ocorre com certeza. Existe uma probabilidade associada à ocorrência do resultado. Por exemplo, em um processo de produção uma peça pode ser perfeita com uma chance de 99.999/100.000, ou melhor, neste processo uma peça escolhida ao acaso tem uma chance de 1/100.000 de ser não conforme (defeituoso).

### 5.2 - Variável Aleatória

**DEF 1** - Uma variável X em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  é uma função real definida no espaço  $\Omega$ , tal que o evento  $[X \leq x]$  é evento aleatório  $\forall x \in R$ , isto é, a função  $X : \Omega \rightarrow R$  é variável aleatória se o evento  $[X \leq x] \in \mathcal{A}, \forall x \in R$ .

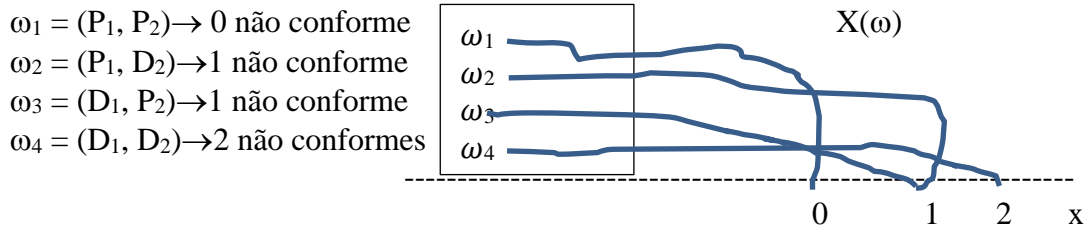
#### EXEMPLO

Seja o experimento onde são retiradas duas peças, ao acaso, de um processo de produção e verificada a sua condição de qualidade (conforme especificação P ou não conforme D).

- Escreva todas as situações possíveis de ocorrer quanto à condição de qualidade dos dois itens;
- Associe a cada situação possível (resultado do experimento  $\omega$ ) um número real;

A função  $X(\omega)$  é uma variável aleatória. Associa a cada evento contido no espaço amostral  $\Omega$  um número real.

c) O campo de variação de variável aleatória  $X$  é o conjunto  $\{0, 1, 2\}$ .



## DEF. 2 - VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

A v.a.  $X$  é chamada de **discreta** quando o seu contradomínio é um conjunto **finito** ou **infinito enumerável**, ou melhor, se existe um conjunto finito ou infinito enumerável  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$  tal que  $X(\omega) \in \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \forall \omega \in \Omega$ .

## DEF. 3 - VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

A v.a.  $X$  é chamada de **contínua** quando o seu contradomínio é um conjunto **infinito**.

## 5.3 - Função Distribuição, f.d., ou Função Distribuição Acumulada de uma Variável Aleatória

**DEF. 4-** A função distribuição, f.d., ou função distribuição acumulada da v.a  $X$  é definida por  $F_X(x) = P_X(X \leq x)$ .

## PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

1<sup>a</sup>) A função distribuição da v.a.  $X$ ,  $F_X(x) = P_X(X \leq x)$ , é não decrescente, isto é, se  $x \leq y$  então  $F_X(x) \leq F_X(y)$ .

2<sup>a</sup>) A função distribuição da v.a  $X$ ,  $F_X(x) = P_X(X \leq x)$ , é contínua à direita, isto é, se  $x_n \downarrow x \Rightarrow F_X(x_n) \downarrow F_X(x)$ .

3<sup>a</sup>) O valor da função distribuição da v.a  $X$ ,  $F_X(x) = P_X(X \leq x)$ , em  $-\infty$  é  $F_X(-\infty) = 0$  e em  $\infty$  é  $F_X(\infty) = 1$  ou seja se  $x_n \downarrow x \Rightarrow F_X(x_n) \downarrow 0$  e se  $x_n \uparrow x \Rightarrow F_X(x_n) \uparrow 1$ .

## 5.4 - Função de Probabilidade (f.p.) e Função Densidade de Probabilidade (f.d.p.)

Uma vez que uma v.a assume um valor do seu contradomínio com uma certa probabilidade, tem-se que as probabilidades são associadas a valores da variável aleatória discreta por uma

função de probabilidade (f.p.) e as probabilidades são associadas a *intervalos de valores* de uma variável aleatória contínua por uma função densidade de probabilidade (f.d.p.).

**DEF. 5 - A função de probabilidade** da v.a  $X$ , discreta, representada por  $P(X = x) = p(x)$  é uma função tal que para  $X(\omega) \in \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \forall \omega \in \mathcal{A}$  tem-se  $p(x_i) \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$ .

**DEF. 6 - A função densidade de probabilidade** da v.a  $X$ , contínua, representada por  $f_X(x)$  é uma função tal que  $f_X(x) \geq 0$  e  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$  e como a f.d. da v.a.  $X$  é  $P(X \leq x) = F_X(x)$

$= \int_{-\infty}^x f(t)dt$  tem-se que  $f(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$ ,  $P(x - \frac{dx}{2} \leq X \leq x + \frac{dx}{2}) = f_X(x)dx$  e  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$ .

### DETERMINAÇÃO da DISTRIBUIÇÃO de PROBABILIDADE da v.a. $X$

A distribuição de probabilidades de uma v.a.  $X$  fica determinada por qualquer das seguintes funções. Usa-se, geralmente, a mais apropriada.

- A função distribuição  $F_X$ ;
- A função de probabilidade  $P(X = x) = p(x)$ ;
- A função densidade de probabilidade  $f_X(x)$ ;
- A função característica  $\phi_X(x) = E(e^{itx})$ .

## 5.5 - Distribuições de Probabilidades (Modelos Probabilísticos)

### A) Distribuição de Bernoulli

Uma v.a  $X$  tem uma distribuição de Bernoulli com parâmetro  $\theta$  quando assume apenas os valores 1 e 0 com probabilidade  $\theta$  e  $1-\theta$ , respectivamente, (1 em geral representa sucesso).

### EXEMPLOS

- 1) Face de uma moeda: cara ou coroa.
- 2) Sexo de uma criança: masculino ou feminino.
- 3) Qualidade de uma peça: perfeita ou defeituosa.

Uma v.a Bernoulli com a probabilidade  $\theta$  de “sucesso” tem f.p. dada por:

$$P_X(x) = P_X(X = x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x} \quad x = 0, 1 \text{ e } 0 < \theta < 1 \quad E(X) = \theta \text{ e } V(X) = \theta(1 - \theta)$$

**Exercício:** Escreva a f.p. da v.a.  $X \sim b(1, 1/4)$

## B) Distribuição Binomial

Uma v.a Y tem distribuição binomial com parâmetros n e  $\theta$  quando assume valores no contradomínio (conjunto)  $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$  e a sua f.p. é dada pela expressão :

$$P_Y(y) = P_Y(Y = y) = \binom{n}{y} \theta^y (1 - \theta)^{n-y} \quad y = 0, 1, \dots, n \quad \text{com} \quad E(Y) = n\theta \text{ e } V(Y) = n\theta(1-\theta)$$

A v.a Binomial corresponde ao número de sucessos em n provas tipo Bernoulli, independentes.

## EXEMPLOS

- 1) Y conta o número de meninos em uma família com  $n = 5$  crianças, com  $\theta = \frac{1}{2}$ .
- 2) Y conta o número de peças defeituosas em um lote com  $n = 20$  peças, com probabilidade de defeitos  $\theta = 0,001$ .
- 3) Y conta o número de alunos aprovados em Confiabilidade em uma turma com 10 alunos, com probabilidade de aprovação de  $\theta = 70\% = 0,70$ .

**Exercício:** De um lote que contém 25 peças das quais 5 são defeituosas, são escolhidas 4 peças ao acaso. Seja Y o número de peças defeituosas encontradas na amostra tomada do lote. Estabeleça a distribuição de probabilidade de Y, quando:

- a) As peças forem escolhidas com reposição;
- b) As peças forem escolhidas sem reposição;
- c) No caso das peças serem escolhidas com reposição, calcule:

- c1)  $P(Y = 1)$ ;
- c2)  $P(Y > 1)$ ;
- c3)  $P(1 < Y < 3)$ .

## C) Distribuição Hipergeométrica

Uma v.a X tem uma distribuição chamada HIPERGEOMÉTRICA se a sua função de probabilidade é dada por:

$$P_X(X = x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$K = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$N = 1, 2, 3, \dots$$

$$E(X) = n \cdot \frac{K}{N}$$

$$V(X) = n \cdot \frac{K}{N} \frac{N-K}{N} \frac{N-n}{N-1}$$

### Exercícios

- a) Retiram-se 4 cartas ao acaso de um baralho com 52 cartas, sem reposição. Seja a variável  $Y$  que conta o número de reis na amostra.
- a1) Qual a distribuição da v.a.  $Y$ ?
- a2) Calcule a probabilidade de não sair rei na amostra?
- a3) Qual o número esperado de reis na amostra?
- a4) Qual o desvio padrão da v.a.  $Y$ ?
- b) Seja uma lagoa onde existem exatamente  $N$  peixes, sendo que deste total  $K$  peixes são de uma certa espécie. Uma rede é lançada e são pescados  $n$  peixes. Seja a variável  $X$  que conta o número de peixes da certa espécie pescados na rede. Qual a distribuição da variável  $X$ ?

### D) Distribuição de Poisson

Uma v.a  $X$  tem uma distribuição de Poisson quando a sua f.p. é da forma:

$$P_x(X = x) = \frac{\theta^x \cdot e^{-\theta}}{x!} \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ e } \theta > 0 \text{ com } E(X) = \mu = \theta \text{ e } V(X) = \sigma^2 = \theta.$$

### Exercícios

- a) Suponha que o número de erros tipográficos em uma única página de um livro tenha uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\theta = 1$ . Calcule a probabilidade de que:
- a1) Uma página qualquer contenha exatamente 1 erro;
- a2) Uma página qualquer não contenha erros;
- a3) Uma página qualquer contenha pelo menos 1 erro;
- a4) Uma página qualquer contenha 2 ou 3 erros;
- a5) No máximo 1 erro na página;
- a6) Qual o número esperado de erros por página?
- a7) Qual o desvio padrão do número de erros por página?

- b) Seja  $X \sim P(2)$ , portanto  $\theta = 2$ . Calcule:

- b1)  $P_x(2 \leq X \leq 4)$ ;
- b2)  $P_x(X \geq 1)$ ;
- b3)  $P_x(1 \leq X \leq 3)$ ;
- b4) A esperança e a variância da v.a.  $X$ .

### E) Distribuição Normal (Gaussiana)

Uma v.a  $X$  tem distribuição Normal ou Gaussiana quando a sua f.d.p. tem a forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma \in \mathbb{R}_+^* \text{ e com } E(X) = \mu \text{ e } V(X) = \sigma^2$$

Na distribuição Normal a probabilidade da v.a X assumir um valor entre a e b ( $a < b$ ) é dado por:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Como, antigamente era difícil trabalhar-se com todos os membros da família Normal, preferiu-se trabalhar com a Normal Reduzida ou Normal Padrão. Esta v.a. é representada por Z e tem a seguinte f.d.p.

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad z \in \mathbb{R} \quad \text{e com} \quad E(Z) = \mu = 0 \quad \text{e} \quad V(Z) = \sigma^2 = 1$$

Essa v.a. é obtida da transformação  $Z = (X - \mu)/\sigma$ , onde  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

### Exercícios

**e1)** Seja a v.a  $X \sim N(10, 4)$ .

- a) Calcule:  $P(8 < X < 10)$ ,  $P(X \geq 12)$ ,  $P(X \leq 5)$  e  $P(11 < X < 13)$ .
- b) Qual é a média e a variância da variável X?
- c) Calcule  $P(|X-10| \leq 1)$ ; Calcule  $P(|X-5| \leq 2)$ .

**e2)** Como é feita a representação da função distribuição da Normal Padrão,  $Z \sim N(0, 1)$ ?

**e3)** Como é feita a representação da função densidade da Normal Padrão,  $Z \sim N(0, 1)$ ?

**e4)** Como se calcula a probabilidade da v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  situar-se entre os reais a e b,  $a < b$ , ou seja,  $P(a < X < b)$ , usando-se a distribuição Normal Padrão?

### F) Distribuição Qui-quadrado

Uma v.a. X tem distribuição Qui-quadrado com n graus de liberdade (G.L'S). Quando a sua f.d.p. é dada por:

$$f_x(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \quad x > 0$$

$n \in \mathbb{N}^*$  e  $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$  é o valor de função gama no ponto  $\frac{n}{2}$  ( $\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$ )  $m > 0$  e no

caso de m inteiro tem-se  $\Gamma(m+1) = m!$  e  $\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5. \dots (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}$

A v.a Qui-quadrado tem por média o número de graus de liberdade ( $E(X) = \mu = n$ ) e por variância duas vezes o número de graus de liberdade,  $V(X) = \sigma^2 = 2n$ .

### Exercícios

**f1)** Seja X uma v.a com distribuição Qui-quadrado ( $X \sim \chi_{10}^2$ ) com 10 G.L'S., calcule:

- a)  $P(X \leq 18,31)$ ;
- b)  $P(X > 18,31)$ ;
- c)  $P(X \geq 6,74)$ ;

- d)  $P(3,25 \leq X \leq 20,48)$  ;  
 e)  $P(3,94 \leq X \leq 18,31)$  ;

**f2)** Qual a esperança e a variância da v.a  $X \sim \chi^2_v$  com o número de graus de liberdade  $v = 15$ .

### G) Distribuição “t” de Student

Sejam as variáveis  $Z \sim N(0, 1)$  e  $U \sim \chi^2_v$ . Então, a v.a.  $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{v}}}$  tem distribuição “t” de

Student com  $v$  graus de liberdade. A v.a  $T$  tem média  $E(T) = \mu = 0$  e variância  $V(T) = \sigma^2 = \frac{v}{v-2}$ , e é muito parecida com a Normal Padrão. Tem a variância um pouco maior, portanto é um pouquinho achatada.

#### Exercícios

Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e se  $s^2 = \frac{n}{n-1} \hat{\sigma}^2$  (variância amostral) é a estimativa de  $\sigma^2$  com base em uma amostra com  $n$  observações, então a variável  $T = \frac{X - \mu}{s}$  tem distribuição  $t_{n-1}$  ou seja  $T \sim t_{n-1}$ . Neste caso, se o tamanho da amostra é  $n = 10$ , calcule:

- g1)**  $P(-2,23 < T < 2,23)$ ;  
**g2)**  $P(T > 2,76)$ ;  
**g3)**  $P(-1,813 < T < 1,813)$ .

### H) Distribuição F de Snedecor

Seja  $U$  uma variável  $\chi^2_m$  e  $V$  uma variável  $\chi^2_n$ . Então a variável  $X = \frac{U/m}{V/n}$  tem distribuição

F de Snedecor com  $m$  e  $n$  G.L's. A esperança e a variância da v.a.  $X$  são  $E(X) = \mu = \frac{n}{n-2}$

$n > 2$  e  $V(X) = \sigma^2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ . A f.d.p. da v.a.  $X$  é  $f(x) =$

$$\frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \frac{x^{(m-2)/2}}{[1+(m/n)x]^{(m+n)/2}} \quad x > 0 \text{ e } m, n = 1, 2, 3, \dots$$

#### Exercícios

- h1)** Escreva a f.d.p. da v.a  $X$ , que tem distribuição  $F_{m,n}$  com  $m = 10$  e  $n = 5$  g.l's.  
**h2)** Escreva a esperança e a variância da v.a. do exercício anterior.

### I) Distribuição Uniforme no intervalo (a, b)

A variável  $U$  tem distribuição Uniforme no intervalo  $(a, b)$  se a sua f.d.p. é dada por

$f_U(u) = \frac{1}{b-a}$ . A média e a variância dessa v.a. são dadas, respectivamente, por:

$$E(U) = \mu = (a + b)/2 \quad \text{e} \quad V(U) = \sigma^2 = (b - a)^2/12.$$

### Exercícios

- i1)** Qual a média e a variância da distribuição Uniforme no intervalo  $(10, 30)$ ?
- i2)** Escreva a f.d.p. da v.a.  $U \sim U(0, 1)$ . Para que serve especificamente a distribuição? Qual a sua média e sua variância?
- i3)** Seja  $Y = F(x)$  a f.d. da v.a.  $X$ . Mostre que  $Y \sim U(0, 1)$ .
- i4)** Verifique se  $f(x)$ , a seguir, é realmente uma f.d.p. e faça o gráfico de  $f(x)$ :  
 $f(x) = abx^{b-1} e^{-ax^b} \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad a, b \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{distribuição de Weibull}).$

**Solução:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (\text{Condição para f.d.p.})$$

$$\int_0^{\infty} abx^{b-1} \cdot e^{-ax^b} dx = -e^{-ax^b} \Big|_0^{\infty} = -(e^{-\infty} - e^0) = 1$$

### J) Distribuição Exponencial com Parâmetro $\theta$

A v.a.  $X$  tem distribuição Exponencial com parâmetro  $\theta$  se a sua f.d.p. é dada por:

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \quad x > 0 \quad \text{e} \quad \theta > 0$$

A média e a variância dessa v.a. são dadas, respectivamente por:

$$E(X) = \mu = \frac{1}{\theta} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{1}{\theta^2}.$$

### Exercícios

- j1)** Seja a v.a.  $X$  que tem distribuição Exponencial com parâmetro  $\theta$ ,  $X \sim \varepsilon(\theta)$ .
- Escreva a f.d.p. da v.a.  $X$ ;
  - Determine a f.d. de  $X$ ;
  - Determine se realmente  $f(x)$  é f.d.p e  $F(x)$  é f.d.;
  - Determine a esperança e a variância da v.a.  $X$ ;
  - Faça o gráfico da f.d.p de  $X$  e da f.d. de  $X$ .



f) Descreva como você faria para gerar uma a.a. de uma v.a. X com distribuição exponencial com parâmetro  $\theta$ .

**j2)** Seja a v.a X com densidade  $f_X(x)$  e seja a v.a  $Y = bX + c$ , onde  $b > 0$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Então a v.a Y tem densidade  $f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-c}{b}\right)$   $y \in \mathbb{R}$ . Prove esta proposição.

**Prova:**

Usando o Jacobiano, tem-se que  $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |J_g(g^{-1}(y))|$ . Se  $Y = bX + c$ , então  $g^{-1}(y) = \frac{y-c}{b}$  e  $J_g(g^{-1}(y)) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{b}$ . Assim,  $f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-c}{b}\right) \cdot \left|\frac{1}{b}\right|$  e, como  $b > 0$ , Y tem densidade  $f_Y(y) = \frac{1}{b} \cdot f_X\left(\frac{y-c}{b}\right)$ .

**j3)** Qual o nome que é dado para cada um dos parâmetros c e b ?

**j4)** Verifique se a função  $f(x) = \theta e^{-\theta x}$  com  $x > 0$ ,  $\theta > 0$  é f.d.p. (Exponencial com parâmetro  $\theta$ ).

**j5)** Verifique se a função  $f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}$  com  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\beta \in \mathbb{R}^+$  é f.d.p. (distribuição de Laplace ou exponencial dupla).

**j6)** Verifique se a função  $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2}$  com  $x \in \mathbb{R}_+$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  e  $\sigma \in \mathbb{R}_+$  é f.d.p. (distribuição Lognormal).

**Prova:**

Deve-se provar que  $\int_0^\infty \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2} dx = 1$ , então fazendo a troca  $\ln(x) = y$  e substituindo  $x = e^y$  e  $dx = e^y dy$ , tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^y \sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} \cdot e^y dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} dy$$

Novamente, fazendo agora  $\frac{y-\mu}{\sigma} = z$  e substituindo  $dy = \sigma dz$  tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

De novo trocando  $\frac{1}{2}z^2 = w^2$  e substituindo  $z = w\sqrt{2}$  e  $dz = \sqrt{2} dw$ , tem-se:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-w^2} \sqrt{2} dw = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw$  e observando que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = \sqrt{\pi}$ , resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

Poderia ainda ter sido usada a troca  $y = \{[\ln(x) - \mu]/\sigma\}$ , o que levaria a função densidade de probabilidade  $N(0, 1)$ .

**j7)** A v.a.  $Z$  tem distribuição de probabilidade conhecida como Normal Padrão, ou seja,  $Z \sim N(0, 1)$  se a sua f.d.p. é  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$   $z \in \mathbb{R}$ . Prove que  $f(z)$  realmente é uma f.d.p.

**Prova:**

$$\text{Seja } A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz, \text{ então } A^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}w^2} dw,$$

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2+w^2)} dzdw$$

Fazendo a troca para coordenadas polares  $z = r \cdot \sin\theta$  e  $w = r \cdot \cos\theta$ , tem-se que

$$A^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r \cdot e^{-\frac{1}{2}r^2} d\theta dr \Rightarrow A^2 = \int_0^{\infty} r e^{-\frac{1}{2}r^2} dr = 1 \text{ e assim } A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1$$

**j8)** Seja o experimento onde se conta o número de provas Bernoulli até a ocorrência do primeiro sucesso (inclusive). Esse experimento pode ser, p.ex., aquele onde se está interessado no número de amostras a serem tomadas de um processo produtivo até que ocorra da média amostral ficar fora dos limites de controle do processo. Suponha que a probabilidade de sucesso seja  $\theta$ .

**1.** Escreva o contradomínio da v.a.  $X$  que conta o número de provas até a ocorrência do 1º sucesso;

**R:**  $x = 1, 2, 3, \dots$

**2.** Escreva a f.p. da v.a.  $X$  e o nome da distribuição dessa v.a.;

**R:** A variável  $X$  tem distribuição geométrica com função de probabilidade dada por  $P(X = x) = \theta(1 - \theta)^{(x-1)}$   $x = 1, 2, 3, \dots$

**3.** Verifique se a função que você escreveu no item anterior é realmente uma f.p.;

**Solução:**

$$0 \leq \theta \leq 1 \text{ e } 0 \leq (1 - \theta)^{(x-1)} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \theta \cdot (1 - \theta)^{(x-1)} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq P(X = x) \leq 1$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} (1 - \theta)^{(x-1)} \cdot \theta = \theta \cdot [(1 - \theta)^0 + (1 - \theta)^1 + (1 - \theta)^2 + \dots] =$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} (1 - \theta)^{(x-1)} \cdot \theta = \theta \cdot [(1 - \theta)^0 + (1 - \theta)^1 + (1 - \theta)^2 + \dots] =$$

$$= \theta \cdot \left[ \frac{1}{1 - (1 - \theta)} \right] = 1$$

**j9)** Seja a função definida por  $f(x) = \begin{cases} 1 - |1 - x| & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{c/c} \end{cases}$ .

Verifique se a função  $f(x)$  é realmente uma f.d.p.;

**R:**

O conjunto imagem da função é dado por  $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 1\}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_0^2 [1 - |1 - x|]dx = \int_0^1 [1 - (1 - x)]dx + \int_1^2 [1 - (x - 1)]dx = \\ &= \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2 - x)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\end{aligned}$$

**j10)** Faça o gráfico de  $f(x)$ .

**R:**

**j11)** Diz-se que o vetor  $\underline{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_k]$  tem distribuição multinomial com parâmetros  $p_1, p_2, \dots, p_k$  e  $n$  onde  $p_i \in (0, 1)$  e  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$  se  $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$  para toda escolha de  $x_1, x_2, \dots, x_k$  inteiros não-negativos e independentes tais que  $\sum_{i=1}^k x_i = n$ .

**j12)** Jogando-se um dado 12 vezes, qual a probabilidade de se obter exatamente uma vez a face 1, duas vezes a face 2, três vezes a face 3, uma vez a face 4, duas vezes a face 5 e três vezes a face 6 ?

**R:**

$$\begin{aligned}P(X_1=1, X_2=2, X_3=3, X_4=1, X_5=2, X_6=3) &= \frac{12!}{1!2!3!1!2!3!} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ P(X_1=1, X_2=2, X_3=3, X_4=1, X_5=2, X_6=3) &= 0,00153\end{aligned}$$

**j13)** Uma caixa contém 5 bolas vermelhas, 4 brancas e 3 azuis. Extraí-se uma bola ao acaso, anota-se a cor e repõe-se a bola de volta na caixa. Determine a probabilidade de que, de 6 bolas extraídas, 3 sejam vermelhas, 2 brancas e uma azul.

**R:**

$$P(X_1=3, X_2=2, X_3=1) = \frac{6!}{3!2!1!} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{4}{12}\right)^2 \left(\frac{3}{12}\right)^1 = 0,1206$$

**j14)** Prove de acordo com o enunciado do problema que  $X_i \sim b(12, p_i)$ .

## K) Distribuição Lognormal

Uma v.a.  $X$  tem distribuição Lognormal quando a função de  $X$ ,  $Y = \ln(X)$ , tem distribuição Normal. A f.d.p. da v.a.  $X$  com distribuição Lognormal é:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x) - \mu)^2} \quad \text{com } x \in \mathbb{R}_+, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma \in \mathbb{R}_+^* \text{ e ainda com} \\ E(Y) = E(\ln(X)) &= \mu \quad \text{e} \quad V(Y) = V(\ln(X)) = \sigma^2.\end{aligned}$$

## Exercícios

**k1)** Mostre que  $E(Y) = E(\ln(X)) = \mu$  e  $V(Y) = V(\ln(X)) = \sigma^2$ .

**k2)** Mostre que existem as seguintes relações entre os parâmetros de  $Y$  ( $\mu$  e  $\sigma$ ) e os parâmetros de  $X$  ( $\lambda$  e  $\xi$ ):

$$V(Y) = V(\ln(X)) = \sigma^2 = \ln\left[1 + \left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^2\right] \quad \text{e} \quad \mu = \ln(\lambda) - \frac{1}{2}\sigma^2$$

**K3)** Mostre que se  $X$  tem distribuição Lognormal, então  $P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{\ln(b) - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(a) - \mu}{\sigma}\right)$ , onde  $E(\ln(X)) = \mu$  e  $V(Y) = V(\ln(X)) = \sigma^2$ .

### L) Distribuição de Valores Extremos (máximo e mínimo)

Seja a v.a.  $X$  com função distribuição  $F_X(x)$  e uma a.a. de tamanho  $n$  com as suas observações aleatórias ordenadas, ou seja,  $[x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}]$ . Assim,  $x_{(1)}$  representa o menor valor amostral (mínimo) e  $x_{(n)}$  o maior (máximo). Cada observação  $x_i$  é uma v.a. com distribuição comum  $F_X(x)$ . Porém, cada observação ordenada  $x_{(i)}$  é considerada uma v.a. tipo “estatística de ordem” e com distribuição dada por:

$$g_i(x) = \left\{ \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} f(x) \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

quando  $i = 1$  tem-se o mínimo e quando  $i = n$  tem-se o máximo. Então, a f.d.p. do máximo é:

$$g_n(x) = \frac{n!}{(n-1)!} \left[ \left( \frac{x}{\theta} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} \right]$$

$$g_n(x) = n \cdot \theta^{-n} x^{n-1}; \quad 0 < x < \theta$$

Lembre que se  $X \sim U(0, \theta)$ ,  $0 < x < \theta$ , então a f.d.p. é  $f(x) = \frac{1}{\theta}$  e a sua f.d. é  $F(x) = \frac{x}{\theta}$ .

O cálculo da f.d. e da f.d.p. do máximo  $X_{(n)}$  é feito considerando o máximo  $X_{(n)} = Y$  e  $F_{X(n)} = [F_X(y)]^n = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n$  ou  $F_Y(y) = [F_X(y)]^n = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n$  com  $y$  sendo o máximo. Derivando obtém-se a expressão  $g_n(x)$  anterior.

Já o cálculo da f.d. e da f.d.p. do mínimo  $Y = X_{(1)}$  pode ser feito com o raciocínio:

$$F_{X(1)} = 1 - [1 - F_X(y)]^n = 1 - [1 - \left(\frac{y}{\theta}\right)^n]^n \quad \text{ou} \quad F_Y = 1 - [1 - F_X(y)]^n = 1 - [1 - \left(\frac{y}{\theta}\right)^n]^n$$

com  $y$  sendo o mínimo e derivando-se tem-se a expressão da f.d.p. adiante.

A função poder de um teste estatístico envolvendo parâmetros de máximo ou mínimo é:

$$P_\theta(T(x) \geq c) = \int_c^\theta \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{\theta^n} \frac{x^n}{n} \Big|_c^\theta = \frac{n}{\theta^n} \left[ \frac{\theta^n}{n} - \frac{c^n}{n} \right] = \frac{n}{\theta^n} \left[ \frac{\theta^n - c^n}{n} \right] = 1 - \left[ \frac{c}{\theta} \right]^n$$

Detalhando melhor o raciocínio que conduziu aquela fórmula tem-se que se o máximo amostral  $X_{(n)} = \max[x_1, x_2, \dots, x_n]$  é menor que um determinado valor  $y$ , consequentemente, todas as observações amostrais (v.a's)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  serão menores que  $y$ . E, como todas as observações (v.a's) são i.i.d. com distribuição comum  $F_X(x)$ , a f.d. acumulada da v.a.  $Y = X_{(n)}$  é dada por:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X_1 < y, X_2 < y, \dots, X_n < y) = P(X_1 < y).P(X_2 < y). \dots P(X_n < y) = F_X(y). F_X(y). \dots F_X(y) = [F_X(y)]^n.$$

Então, a f.d.p. é obtida derivando-se a f.d. e tem a forma:

$$f_Y(y) = n[F_X(y)]^{n-1}f_X(y) \text{ onde } y \text{ é o máximo.}$$

Já, o valor mínimo  $Y = X_{(1)} = \min[x_1, x_2, \dots, x_n]$  tem a distribuição definida pelo seguinte raciocínio. Se  $Y$  é o mínimo amostral e é maior que um determinado valor  $y$ , então todas as observações amostrais  $x_1, x_2, \dots, x_n$  serão maiores que  $y$ . Assim, dado que as observações  $X_i$  são v.a's i.i.d. tem-se que:

$$P(Y > y) = 1 - P(Y \leq y) = 1 - F_Y(y) = P(X_1 > y).P(X_2 > y). \dots P(X_n > y) \text{ e}$$

$$F_Y(y) = 1 - P(X_1 > y).P(X_2 > y). \dots P(X_n > y) = 1 - [1 - P(X_1 \leq y)].[1 - P(X_2 \leq y)]. \dots [1 - P(X_n \leq y)] = 1 - [1 - F_X(y)]^n$$

E, a f.d.p. do mínimo  $y$  é obtida por diferenciação resultando:  $f_Y(y) = n[1 - F_X(y)]^{n-1}f_X(y)$ .

### M) Distribuições Assintóticas de Valores Extremos

Quando o tamanho da amostra é muito “grande”, ou seja,  $n \rightarrow \infty$  as distribuições das estatísticas amostrais tendem para distribuições conhecidas como assintóticas. No caso das distribuições de estatísticas tipo valor extremo (Máximo e Mínimo) as distribuições são dadas na tabela adiante.

Distribuição	f.d.	$F_X(x)$	$E(X) = \mu$ Média	$V(X) = \sigma^2$ Variância
Tipo I (máx.) (Gumbel)	$\exp(-\exp(-\alpha(x-u)))$		$u + \frac{0.5772}{\alpha}$	$\frac{\pi^2}{6\alpha^2}$
Tipo I (Mínimo)	$1 - \exp(-\exp(\alpha(x-u)))$		$u - \frac{0.5772}{\alpha}$	$\frac{\pi^2}{6\alpha^2}$
Tipo II (Máximo)	$\exp\left(-\left(\frac{v}{x}\right)^k\right)$		$v\Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right)$	$v^2\left(\Gamma\left(1 - \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$
Tipo III (Mínimo) (Weibull)	$1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{v}\right)^k\right)$		$v\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$	$v^2\left(\Gamma\left(1 - \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$

### Exercícios

- 1) Sejam as v.a's  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$  independentes. Determine a distribuição de probabilidade de  $Y = \sum_{i=1}^k X_i$ , sua esperança matemática (média) e sua variância.

Solução:

$Y$  é C.L. de variáveis aleatórias Gaussianas, portanto é Gaussiana.  $E(Y) = E(\sum_{i=1}^k X_i) = \sum_{i=1}^k E(X_i) = \sum_{i=1}^k \mu_i$  e  $V(Y) = V(\sum_{i=1}^k X_i) = \sum_{i=1}^k V(X_i) = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2$

$Y \sim N(\sum_{i=1}^k \mu_i ; \sum_{i=1}^k \sigma_i^2)$

Esse resultado, poderia ser encontrado, também, por FGM (função geratriz de momentos) ou FC (função característica).

2) Sejam  $X_i$  v.a's Lognormal e estatisticamente independentes. Então, é correto afirmar que:

a) Se  $X_i$  é Lognormal então  $\ln(X_i)$  é NORMAL com média  $\mu_i$  e desvio padrão  $\sigma_i$ , por definição;

b) Então,  $\sum_{i=1}^k \ln(X_i)$  tem distribuição NORMAL com média e variância  $\sum_{i=1}^k \mu_i$  e  $\sum_{i=1}^k \sigma_i^2$ , pois C.L. de v.a's Gaussianas é Gaussiana;

c) Então, a v.a.  $W = \prod_{i=1}^k X_i$  tem distribuição LOGNORMAL com parâmetros  $E(W) = \prod_{i=1}^k \lambda_i$  e  $V(W) = \prod_{i=1}^k \xi_i^2$ , pois:

Se  $W = \prod_{i=1}^k X_i$  e  $X_i \sim \text{LN}(\lambda_i, \xi_i^2) \Rightarrow E(X_i) = \lambda_i$  e  $V(X_i) = \xi_i^2$

$E, Y = \ln(X_i) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow X_i = e^{Y_i}$  e  $W = \prod_{i=1}^k X_i = \prod_{i=1}^k e^{Y_i} = e^{\sum_{i=1}^k Y_i}$

$\ln(W) = \sum_{i=1}^k Y_i \Rightarrow \ln(W)$  é C.L. de v.a's Gaussianas, então é Gaussiana.

$E(W) = \prod_{i=1}^k \lambda_i$ ,  $V(W) = \prod_{i=1}^k \xi_i^2$  e  $W$  é lognormal.

3) Seja  $Y = X_1.X_2.X_3$  uma v.a. função das v.a's  $X_i$   $i = 1, 2, 3$ , que são Log-normais independentes com médias  $\lambda_i$  e variância  $\xi_i^2$ , respectivamente. Então, qual é a distribuição de  $Y$ ?

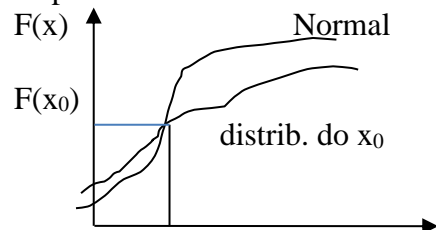
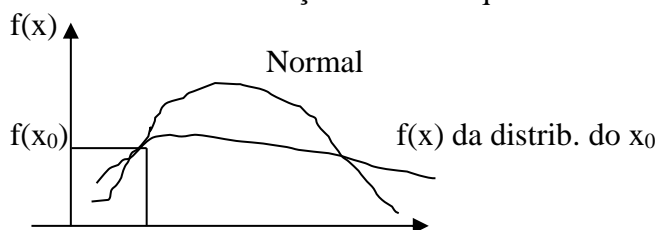
4) No exercício anterior suponha que  $\lambda_i$  assume os valores 2,0; 5,0 e 12,0 e que o coeficiente de variação,  $CV_i$ , assume os valores 0,1; 0,02 e 0,12. Assim, calcule as probabilidades:

a)  $P(Y < 15,0)$

b)  $P(15,0 < Y < 25,0)$ .

## N) Distribuições Normais Equivalentes

Existem situações em que para uma v.a.  $X$  que não tem distribuição Gaussiana (Normal) pode-se obter uma distribuição Normal Equivalente em um ponto  $x$ .



Isto é conseguido igualando-se as f.d.'s acumuladas e as f.d.p's, da Normal e da verdadeira distribuição (não-normal) no ponto x. Assim, igualando-se as f.d.'s em I)  $\Phi\left(\frac{x - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) =$

$F_X(x)$  com  $\Phi$  sendo a f.d. da  $N(0, 1)$ ,  $F_X(x)$  a f.d. da v.a. em questão,  $X$ ,  $\mu_X^N$  e  $\sigma_X^N$  respectivamente a média e o desvio padrão da normal equivalente no ponto  $X$  e, também, igualando-se as f.d.p's em II

$\frac{1}{\sigma_X^N} \phi\left(\frac{x - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) = f_X(x)$  com  $\phi$  sendo a f.d.p. da  $N(0, 1)$  e  $f_X(x)$  a f.d.p. de  $X$ , tem-se um

sistema de duas equações, ou seja,  $\Phi\left(\frac{x - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) = F_X(x)$  e  $\frac{1}{\sigma_X^N} \phi\left(\frac{x - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) = f_X(x)$ .

Resolvendo esse sistema de equações fazendo  $z = \frac{x - \mu_X^N}{\sigma_X^N} \Rightarrow x = \sigma_X^N \cdot z + \mu_X^N$  e com a inversa

$z = \frac{x - \mu_X^N}{\sigma_X^N} = g^{-1}(x)$  e o Jacobiano  $J = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g^{-1}(x)}{\partial x} = \frac{1}{\sigma_X^N}$  e então

$g(x) = f_Z(g^{-1}(x))|J| = f_Z\left(\frac{x - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_X^N} = \frac{1}{\sigma_X^N} f_Z\left(\frac{x - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right)$  e portanto,  $g(x) = \frac{1}{\sigma_X^N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right)^2}$

Finalmente de I resulta  $\mu_X^N = x - \sigma_X^N \cdot z = x - \sigma_X^N \cdot \Phi^{-1}(F_X(x))$

$$\sigma_X^N = \frac{1}{g(x)} f_Z\left(\frac{x - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) = \frac{1}{f_X(x)} f_Z\left(\frac{x - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) = \frac{1}{f_X(x)} \phi(\Phi^{-1}(F_X(x)))$$

que são os parâmetros da Normal Equivalente são:

$$\mu_X^N = x - \sigma_X^N \Phi^{-1}[F_X(x)] \quad \text{e} \quad \sigma_X^N = \frac{\phi[\Phi^{-1}(F_X(x))]}{f_X(x)}$$

onde  $\Phi^{-1}$  corresponde a inversa da f.d. acumulada da Normal Padrão.

### Exercício

Seja a v.a.  $X$  que tem distribuição do tipo I para valores extremos (Máximo) com média  $\mu = 15$  e variância  $\sigma^2 = 4$ .

- a) Escreva a f.d.p. e a f.d. de uma v.a. do tipo I para valores extremos (Máximo), definindo os seus parâmetros.

Solução:

$$F(x) = \exp[-e^{-\alpha(x-u)}] \quad x, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad u > 0$$

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \exp[-e^{-\alpha(x-u)}] \frac{\partial [-e^{-\alpha(x-u)}]}{\partial x} = \exp[-e^{-\alpha(x-u)}] [-e^{-\alpha(x-u)}] \frac{\partial [-\alpha(x-u)]}{\partial x}$$

$$f(x) = \exp[-e^{-\alpha(x-u)}] [-e^{-\alpha(x-u)}] (-\alpha)$$

$$f(x) = \alpha \exp[-e^{-\alpha(x-u)}][e^{-\alpha(x-u)}] = \alpha \exp[-e^{-\alpha(x-u)} - \alpha(x-u)]$$

$$f(x) = \alpha e^{-[e^{-\alpha(x-u)} + \alpha(x-u)]} \quad x, \alpha \in \mathbb{R} \quad e \quad u > 0$$

- b) Qual o valor da f.d.p. e da f.d. dessa v.a. no ponto  $x = 20$ ?

Solução:

$$V(X) = \frac{\pi^2}{6\alpha^2} \Rightarrow 4 = \frac{\pi^2}{6\alpha^2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\pi^2}{4 \times 6} = 0,4112335 \Rightarrow \alpha = 0,641275$$

$$E(X) = u + \frac{0,577216}{\alpha} \Rightarrow 15 = u + \frac{0,577216}{0,641274} \Rightarrow u = 15 - \frac{0,577216}{0,641274} \Rightarrow u = 14,09989$$

$$F(x) = \exp[-e^{-\alpha(x-u)}]$$

$$F(20) = \exp[-e^{-0,641275(20 - 14,09989)}] = \exp[-e^{-3,783590}] = 0,9775157$$

$$f(x) = \alpha e^{-[e^{-\alpha(x-u)} + \alpha(x-u)]}$$

$$f(20) = 0,641275 \cdot (e^{-[e^{-3,783590} + 3,783590]}) = 0,0142553$$

- c) Calcule o valor do escore  $z \sim N(0, 1)$  correspondente a área encontrada para a f.d. no item anterior.

Solução:

$$F(20) = 0,9775157 \Rightarrow z = \Phi^{-1}(0,977516) = 2,00496$$

- d) Calcule o valor da f.d.p. da Normal Padrão correspondente ao escore determinado no item anterior.

Solução:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \Rightarrow f(2,00496) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(2,00496)^2} = 0,0534574$$

- e) Calcule os parâmetros da Normal Equivalente no ponto  $x = 20$ .

Solução:

$$\mu_X^N = x - \sigma_X^N \Phi^{-1}[F_X(x)] \quad e \quad \sigma_X^N = \frac{\phi[\Phi^{-1}(F_X(x))]}{f_X(x)}$$

$$\mu_X^N = 20 - \sigma_X^N \cdot 2,00496 \quad e \quad \sigma_X^N = \frac{0,0534574}{0,0142553} = 3,75 \Rightarrow \mu_X^N = 20 - 3,75 \times 2,00496 = 12,4814$$

Normal Equivalente é  $N(12,4814 ; 3,75^2)$

## 5.6- Parâmetros dos modelos de probabilidade e seus estimadores

### 5.6.1- Introdução

Os parâmetros dos modelos de probabilidade são estimados por meio de procedimentos chamados de estimadores e que se baseiam em observações amostrais. Os métodos de obtenção dessas estatísticas (estimadores) são conhecidos como Métodos de Estimação e são os seguintes: Método dos Momentos, Método da Máxima Verossimilhança, Método dos Mínimos Quadrados e Método dos Estimadores UMVU (Uniformemente de Mínima Variância Não Viciados). Então, um bom estimador deve ter as propriedades de:



- Ser suficiente (resume todas as informações trazidas pela amostra);
- Ser consistente (à medida que se aumenta o tamanho da amostra (a.a.) o valor da estimativa se aproxima mais do verdadeiro parâmetro);
- Ser não viciado (a estimativa converge centralmente para o verdadeiro parâmetro, ou seja, não tem vício, (tendência ou viés) para subestimar ou superestimar o parâmetro);
- Ser eficiente (o estimador é uma estatística com a menor variância entre todas aquelas possíveis de fazer a estimação do parâmetro).

### 5.6.2- Parâmetros importantes e seus estimadores

Os parâmetros fundamentais de um modelo de probabilidade são:

- A **esperança matemática** da v.a., ou seja, sua **média**. Este parâmetro costuma ser representado pela letra grega  $\mu$ . Assim, se a v.a. é  $X$ , a sua média é  $\mu = E(X)$  e deve ser estimada pela estatística amostral baseada na a.a.  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  seguinte:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

- A **variância** da v.a.  $X$  é um parâmetro definido por  $V(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$ . A variância mede a dispersão dos valores em torno da média e seus estimadores são:

$$\hat{V}(X) = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \text{ estimador UMVU obtido da a.a. } [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$\hat{V}(X) = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \text{ estimador EMV obtido da a.a. } [x_1, x_2, \dots, x_n].$$

- **Desvio padrão**  $\sigma$  de uma v.a. é igual a raiz quadrada da sua variância, ou seja,  $\sigma = \sqrt{V(X)}$ . Mede a dispersão dos valores em torno da sua média, porém os seus valores têm a mesma unidade de medida da variável original. Os seus estimadores são obtidos de uma a.a.  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  e são:

$$s = \sqrt{\hat{V}(X)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{V}(X)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}}$$

- **Coefficiente de variação** CV de uma v.a.  $X$  é a razão entre o seu desvio padrão e a sua média. O CV é uma medida relativa de dispersão que é útil na comparação de dispersões de distribuições que têm médias muito diferentes. A expressão do coeficiente de

variação é  $CV = \frac{\sigma}{\mu}$  e seu estimador é obtido de uma a.a.  $[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$  e corresponde a  $C\hat{V} = \frac{s}{\bar{x}}$ .

### Exercício

As duas amostras, que seguem, foram obtidas de distribuições Gaussianas, ou seja, uma veio da distribuição de  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  e a outra de  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ . Estime os parâmetros de cada uma das distribuições e aponte a distribuição menos dispersa com base no coeficiente de variação. As a.a. são, respectivamente, [20, 30, 50, 40, 60, 50] e [5, 7, 8, 6, 7, 10, 12, 15]

## 5.7- Verificação da aderência de um modelo de probabilidade a dados amostrais

Muitas vezes há necessidade de verificar se os dados amostrais seguem uma determinada distribuição (suposição muitas vezes necessária à aplicação de algum método). Para isto se estima os parâmetros do modelo com base nos dados amostrais e aplica-se um teste de aderência. Os testes mais usados são: Kolmogorov-Smirnov e Qui-quadrado. No caso do teste para distribuição Gaussiana existe, ainda, o teste de Normalidade de Shapiro-Wilks.

### Exercício 1

Verifique se a a.a. [16,948 18,485 21,354 15,093 18,459 20,544 19,307 20,583 19,956 19,738 22,251 19,966 23,285 17,371 18,598 22,315 18,262 22,323 20,947 18,612] é proveniente de uma distribuição Gaussiana.

Solução:

Pode-se aplicar um método de aderência do modelo Gaussiano aos dados usando o STATGRAPHICS.

STAT> DESCRIBE – DISTRIBUTIONS FITTING – FITTING UNCENSORED DATA – ex1g89 – Normal.

Resultados:

- A média e o desvio padrão estimados são:  $\bar{x} = 19,7199$  e  $s = 2,06283$
- Teste de Shapiro-Wilk  $W = 0,977367$  valor-p  $p = 0,895771 > 0,05$  e aceita-se a Gaussianidade para os dados.
- Teste de Kolmogorov-Smirnov valor-p  $p = 0,981319 > 0,05$  e aceita-se a Gaussianidade para os dados.

### Exercício 2

Ajuste o modelo Gaussiano (Normal) aos dados do exercício 1.

Solução:

Basta substituir no modelo teórico as estimativas dos parâmetros:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma \in \mathbb{R}_+^* \text{ e com } E(X) = \mu \text{ e } V(X) = \sigma^2$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2,06283\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-19,7199}{2,06283}\right)^2} \quad x \in \mathbb{R},$$

Pode-se ajustar o modelo Gaussiano aos dados usando o STATGRAPHICS.  
 STAT> DESCRIBE – DISTRIBUTIONS FITTING – FITTING UNCENSORED DATA  
 – ex1g89 – Normal.

### Exercício 3

Verifique se a a.a. [9,821 10,911 7,679 9,843 13,041 7,239 11,367 8,652 9,335 12,086 10,763 11,666 7,370 8,962 12,093 7,799 9,526 12,647 9,012 8,286] é proveniente de uma distribuição Lognormal.

### Exercício 4

Ajuste o modelo Lognormal aos dados do exercício 3.

## 5.8- Covariância, Matriz de Covariância, Correlação e Matriz de Correlação

### 5.8.1- Covariância e Correlação

Muitas vezes, várias variáveis aleatórias estão associadas em um experimento e uma medida desse relacionamento deve ser determinada. Quando se tem **duas** variáveis dependentes X e Y, uma medida do grau da associação entre elas é dada pela **covariância** entre as variáveis. Quando se tem mais de duas variáveis pode-se construir a **matriz de covariância** que é formada pelas covariâncias dos pares de variáveis.

A covariância do par de variáveis X e Y é definida por:

$$\text{cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Este parâmetro é estimado com base em uma amostra de n pares de valores das variáveis [(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>), (x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>), ..., (x<sub>n</sub>, y<sub>n</sub>)]. O estimador do parâmetro cov(X,Y) = σ<sub>XY</sub> é:

$$s_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Embora, a covariância meça o relacionamento entre as duas variáveis ela não fornece valores padronizados em uma mesma escala de valores. Então, criou-se o **coeficiente de correlação**, que nada mais é do que a covariância entre duas variáveis aleatórias padronizadas. O coeficiente de correlação é dado pela expressão:

$$\rho(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

que é a razão entre a covariância das variáveis aleatórias e o produto dos desvios padrões dessas variáveis. E, com a padronização da covariância obtém-se o coeficiente de correlação  $\rho$  que varia no intervalo fechado de  $-1$  a  $+1$ . Assim,  $-1 \leq \rho \leq +1$  sendo que quando  $\rho = -1$  a relação é linear inversa e perfeita (exatamente uma reta) e se  $\rho = +1$  a relação é linear direta e perfeita. Já quando  $\rho = 0$  não existe relação entre as variáveis.

### Exercício 1

Mostre que o coeficiente de correlação é a covariância entre duas variáveis aleatórias padronizadas.

Prova:

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

$$\frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y} = E\left[\frac{(X - \mu_x)}{\sigma_x} \frac{(Y - \mu_y)}{\sigma_y}\right] = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = \rho(X, Y)$$

O estimador do coeficiente de correlação é dado por:

$$\hat{\rho}(X, Y) = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \text{ obtido dos pares } [(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)]$$

e  $s_{XY}$  é a covariância amostral que estima o parâmetro  $\sigma_{XY}$ . E, as estatísticas  $s_X$  e  $s_Y$  são os desvios padrões amostrais que estimam os verdadeiros parâmetros  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$ .

### Exercício 2

Os pares de valores, abaixo, são observações do vetor aleatório  $[X, Y]$  que tem distribuição Gaussiana bivariada com coeficiente de correlação  $\rho$ . Estime o parâmetro coeficiente de correlação  $\rho$ , bem como os outros parâmetros da distribuição:  $\mu_X$ ,  $\mu_Y$ ,  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$ .

X	2	4	5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	16	15	12	18	10	12
Y	1,7	3,7	4,0	5,9	7,0	8,2	8,9	10,0	10,7	11,5	13	14	14,5	15,4	14,6	14,1	10,6	16,3	9	11

### Exercício 3

Construa um gráfico em um sistema cartesiano  $X - Y$  que mostre o relacionamento entre as duas variáveis do exercício 2.

### Exercício 4

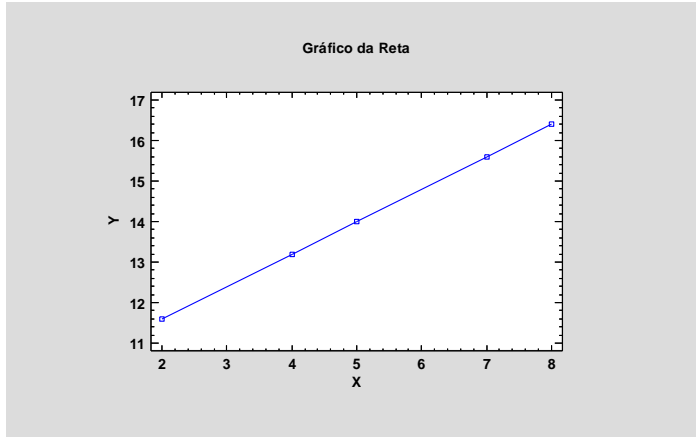
As variáveis  $X$  e  $Y$  têm uma correlação perfeita, ou seja,  $\rho(X, Y) = 1$ . Então, a relação entre  $X$  e  $Y$  é uma reta. Determine com base nas observações das variáveis abaixo os parâmetros da reta.

X	2	4	5	7	8
Y	11,6	13,2	14,0	15,6	16,4

Solução:

Ajuste a reta  $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$  aos dados.

STAT > PLOT - SCATTERPLOTS – X Y PLOT



### 5.8.2- Matriz de Covariância e Matriz de Correlação

Um vetor aleatório p-dimensional  $\underline{X}' = [X_1, X_2, \dots, X_p]$  é aquele em que as suas componentes são todas variáveis aleatórias pertencentes ao mesmo espaço de probabilidades  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , onde  $\Omega$  é o espaço amostral,  $\mathcal{A}$  é a sigma álgebra e  $P$  é a medida de probabilidade.

A esperança desse vetor é o vetor médio dado por  $E(\underline{X}) = \underline{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p]'$  onde  $\mu_i$  é a média da componente aleatória  $X_i$   $i = 1, 2, \dots, p$ . Já a variância desse vetor é uma matriz simétrica conhecida como matriz de covariância, ou seja,  $V(\underline{X}) = \Sigma = E[(\underline{X} - \underline{\mu})(\underline{X} - \underline{\mu})']$ . De modo que esta matriz tem na diagonal principal as variâncias das variáveis aleatórias e fora da diagonal principal as covariâncias. Assim, tem-se:

$$V(\underline{X}) = \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \dots & \sigma_p^2 \end{bmatrix}$$

A matriz de correlação é construída substituindo-se cada entrada da matriz anterior pela razão entre a covariância e o produto dos desvios padrões das variáveis envolvidas. De forma que se tem,

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & \dots & \rho_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{1p} & \rho_{2p} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Os estimadores dessas matrizes são obtidos substituindo-se as entradas em cada uma das matrizes pelos correspondentes estimadores dos parâmetros, ou seja:

$$\hat{V}(\underline{X}) = S = \begin{bmatrix} s_1^2 & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{12} & s_2^2 & \dots & s_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1p} & s_{2p} & \dots & s_p^2 \end{bmatrix} \quad \hat{\rho} = R = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_{12} & \dots & \hat{\rho}_{1p} \\ \hat{\rho}_{12} & 1 & \dots & \hat{\rho}_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\rho}_{1p} & \hat{\rho}_{2p} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

**Exercício 5**

- a) Escrever o estimador da matriz de covariância de três variáveis aleatórias  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , com base em  $n$  observações emparelhadas de cada variável.
- b) Escrever o estimador da matriz de correlação de três variáveis aleatórias  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , com base em  $n$  observações emparelhadas de cada variável.

## 6. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

### 6.1 - INTRODUÇÃO À CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Um dos principais propósitos de um projeto estrutural é garantir o desempenho do sistema dentro de restrições econômicas. De fato, a garantia do desempenho, incluindo segurança, é a primeira (se não a única) responsabilidade dos engenheiros. A realização deste objetivo não é um problema simples, principalmente, para grandes estruturas. Sistemas estruturais, ocasionalmente, falham na sua função pretendida, incluindo raros exemplos de colapso de grandes estruturas. De acordo com PUGSLEY (1966), o risco está, geralmente, implícito em todos os sistemas de engenharia.

A existência de incertezas nas cargas, nas propriedades mecânicas dos materiais, nos parâmetros de resistência do solo e nas propriedades geométricas das formas dos elementos estruturais projetados, contribui para que exista um risco de que a estrutura não atenda a finalidade para a qual foi projetada. Este risco é denominado como probabilidade de falha e pode ser avaliado pelos métodos de análise de confiabilidade estrutural.

A análise de confiabilidade estrutural é uma metodologia que permite ao engenheiro avaliar as incertezas inerentes às variáveis de projeto. De modo que por meio das distribuições de probabilidade dessas variáveis aleatórias, é possível obter uma avaliação da probabilidade de falha da estrutura e a sensibilidade do projeto em relação a estas variáveis. Esta informação pode ser de fundamental importância na tomada de decisões que envolvam a segurança da estrutura.

Muitos projetos de engenharia são finalizados sem o conhecimento completo dessas informações; conseqüentemente, a garantia do desempenho pode, raramente, ser completa. Além disso, muitas decisões que são necessárias durante o processo de planejamento são feitas na condição de incerteza. Por essa razão, há alguma chance de não satisfazer ou falhar; conseqüentemente, o risco é inevitável. Segundo FREUDENTHAL (1947), sob tais condições, não é possível (praticamente ou economicamente) assegurar absoluta segurança ou desempenho de sistemas de engenharia.

No caso de uma estrutura, sua segurança é, claramente, função do máximo carregamento (ou combinação de cargas) que pode ser imposto por toda a vida útil da estrutura. A segurança estrutural também dependerá da resistência da estrutura ou de seus componentes. Como a máxima carga existente e a atual capacidade de uma estrutura são difíceis de prever exatamente, e qualquer precisão está sujeita às incertezas, a absoluta garantia de segurança de uma estrutura não é possível.

De maneira que, segurança e utilização podem estar asseguradas somente em termos da probabilidade de que a resistência existente (ou capacidade estrutural) seja adequada para resistir à máxima carga existente. Problemas de confiabilidade envolvem uma determinação ou garantia da adequação de um sistema durante sua vida útil. Portanto, pode-se definir confiabilidade como uma medida probabilística de garantia do desempenho, ou seja, a segurança do desempenho pode ser realisticamente estabelecida somente em termos de probabilidade.

Assim, a análise estrutural probabilística é segundo DITLEVSEN et al. (1996), a arte de formular um modelo matemático dentro do qual pode-se propor e responder o seguinte problema: *“qual é a probabilidade de que uma estrutura comporte-se de uma*

*forma especificada, uma vez que uma ou mais das propriedades dos materiais que a constituem ou ainda das suas dimensões geométricas, são de natureza não completamente conhecidas ou aleatórias”.*

Dentre as várias aplicações práticas da confiabilidade estrutural (ou análise estrutural probabilística) é possível citar: calibrações de normas de projeto, reanálise de estruturas existentes, revisão de planos de inspeções, avaliação de segurança de novas concepções estruturais e na escolha de alternativas de projeto.

Muitas das normas de projeto utilizam fatores parciais de carga e de resistência. Antigamente estes coeficientes eram, basicamente, definidos na experiência de profissionais envolvidos em projetos estruturais. Atualmente, com o auxílio da confiabilidade estrutural é possível calibrar os fatores de segurança de uma maneira racional, a partir da definição de um nível alvo considerado aceitável para a probabilidade de falha estrutural. Neste sentido, a confiabilidade tem sido muito usada na revisão de normas antigas e na elaboração de códigos de projeto para novas concepções estruturais.

Em geral as estruturas existentes estão sujeitas aos acidentes e desgastes ao longo da vida útil, tais como: corrosão, trincas, etc. Porém, devido à redundância estrutural e a certas características de projeto, a falha (ou o desgaste) de um elemento não representa necessariamente a falha da estrutura como um todo. Através da análise de confiabilidade estrutural é possível avaliar o nível de segurança global da estrutura como um todo. Esta informação se constitui num elemento auxiliar valioso na tomada de decisões com relação à operação, à segurança física e ao estabelecimento de um cronograma de reparos para a estrutura.

Nas estruturas submetidas a cargas cíclicas, a fadiga é muitas vezes um fator determinante do projeto. Devido à existência de muitas incertezas no cálculo da vida útil à fadiga, é comum inspecionar estas estruturas ao longo de sua vida útil. Geralmente os dados de inspeções anteriores não eram considerados na determinação do cronograma das inspeções futuras. Porém, com a utilização da análise de confiabilidade e da Inferência Bayesiana, é possível reavaliar os prazos de inspeção em função dos resultados obtidos nas últimas inspeções, de forma a manter um nível de segurança aceitável da estrutura ao longo de sua vida útil.

Muitas vezes o engenheiro deve decidir qual a alternativa de projeto a ser escolhida dentre várias alternativas possíveis, envolvendo a utilização de novos materiais e de novas concepções estruturais. Nestes casos, a confiabilidade estrutural, juntamente com a análise de custos, fornece as informações necessárias para a avaliação dos riscos associados aos projetos, fornecendo deste modo uma informação fundamental para a análise de decisões.

Embora a confiabilidade possa ser uma técnica de apoio muito importante nos vários ramos da engenharia, é importante ressaltar que a análise de confiabilidade depende da qualidade dos dados estatísticos relacionados ao problema e da precisão do modelo matemático usado para a análise das funções de estado limite.

Os problemas de confiabilidade estrutural podem ser formulados como a determinação da capacidade de um sistema de engenharia satisfazer certas exigências. Na consideração da segurança de uma estrutura, o interesse é garantir que a resistência da estrutura seja suficiente para resistir à máxima carga aplicada.

Tradicionalmente, a confiabilidade estrutural é alcançada através do uso de fatores ou margens de segurança e adotando suposições conservativas na etapa de projeto; isto é, pela determinação da mínima condição resistente que permanecerá adequada sob a máxima



carga aplicada. As condições de mínima resistência e o máximo carregamento são definidas a partir de julgamentos subjetivos. É importante considerar que a adequação ou não das “margens” aplicadas pode ser avaliada ou calibradas somente em termos de experiências passadas com sistemas similares.

A aproximação tradicional é de difícil quantificação e necessita de bases lógicas para o tratamento das incertezas. Além disso, para novos sistemas em que não há, *a priori*, bases para calibração, o problema para assegurar o desempenho, obviamente, torna-se difícil. Na realidade, a determinação da resistência disponível, bem como a determinação da máxima carga aplicada, não são problemas simples. Estimativas e suposições são necessárias para estas propostas. Nestes processos as incertezas são inevitáveis pela simples razão de que as informações são incompletas. A partir de tais incertezas, a resistência disponível e o carregamento não podem ser determinados precisamente, mas podem ser descritos como parte de respectivas faixas (ou populações) de possível resistência e carregamento. A fim de representar ou refletir o significado de incerteza, a resistência disponível e a carga existente podem ser modeladas como variáveis aleatórias. Nestes termos, portanto, a confiabilidade de um sistema pode ser mais realisticamente medida em termos de probabilidade. Por esse propósito, definem-se as seguintes variáveis aleatórias:

$X$  = resistência

$Y$  = solicitação

Sendo assim, o objetivo da análise de confiabilidade é assegurar o evento ( $X > Y$ ) por toda a vida útil de uma estrutura. A garantia é possível somente em termos de probabilidade  $P(X > Y)$ . Esta probabilidade, conseqüentemente, representa uma medida realista da confiabilidade do sistema. Por outro lado, a probabilidade do evento complementar ( $X < Y$ ) é a correspondente medida de não confiabilidade.

Assume-se que as distribuições de probabilidade de  $X$  e  $Y$ ;  $F_X(x)$  ou  $f_X(x)$  e  $F_Y(y)$  ou  $f_Y(y)$ , respectivamente, são conhecidas.

Assim, a confiabilidade de uma estrutura,  $C$ , pode ser definida como o complemento da probabilidade de falha,  $p_f$ , ou seja,

$$C = 1 - p_f$$

Estruturas e elementos estruturais devem cumprir e obedecer alguns requisitos básicos, tais como:

- Uma estrutura deve permanecer em condições satisfatórias para a execução da função para a qual foi projetada durante todo o período de vida útil;
- Uma estrutura deve estar em condições de suportar, sem entrar em colapso ou apresentar danos severos permanentes, carregamentos extremos que podem ocorrer esporadicamente e carregamentos que ocorrem de forma repetida aos quais está sujeita em todo o seu período de vida útil.
- Uma estrutura não deve ser danificada acidentalmente por incêndio, explosão, impacto, terremoto ou falha humana de modo desproporcional à severidade do acidente.

- Uma estrutura deve atender aos três primeiros requisitos sem comprometer sua condição de gerar lucro, sem o qual o seu projeto torna-se economicamente inviável. Neste requisito deve-se levar em conta: custos de projeto, construção, manutenção, operação da estrutura e custos de falha.
- Uma estrutura deve atender aos quatro primeiros requisitos com nível de risco aceitável para a sociedade. O nível adequado de segurança deve levar em conta as consequências da falha em termos de: risco de morte, danos à saúde, potencial de prejuízo econômico e ambiental.

Estes requisitos devem ser atendidos por meio do projeto estrutural com o dimensionamento adequado. E, estes requisitos básicos, dos sistemas estruturais podem ser equacionados na forma de estados limites. E, evidentemente, o não atendimento de um requisito básico de segurança ou de serviço representa um estado indesejável da estrutura. E, este estado configura uma falha. Os estados limites podem ser agrupados em duas classes:

#### 1ª.) Estados limites últimos

São aqueles que correspondem aos requisitos de segurança e abrangem: capacidade máxima de carga ou de deformação da estrutura e que levam ao colapso ou dano grave e permanente.

Nessa classe podem ser citados:

- Perda de equilíbrio da estrutura ou de parte da mesma por movimento de corpo rígido;
- Atingir a capacidade máxima das seções, membros ou conexões, seja por ruptura ou deformação;
- Ruptura de membros ou conexões por fadiga ou outros efeitos dependentes do tempo;
- Instabilidade da estrutura ou de partes da mesma;
- Entre outros.

#### 2ª.) Estados limites de serviço

São aqueles que correspondem aos requisitos de serviço da estrutura e as condições normais de uso.

Nessa classe podem ser citados:

- Danos localizados, tipo fissuras ou trincas, que prejudicam a durabilidade e a aparência da estrutura no todo ou em membros estruturais e não estruturais.
- Dano causado por fadiga ou outros efeitos dependentes do tempo, tais como: corrosão, desgaste e fluência.
- Deformação em nível não aceitável, que afeta o uso eficiente ou a aparência de membros estruturais ou não estruturais, ou ainda, que afeta o funcionamento de equipamentos.

- Vibração excessiva, que causa desconforto ao usuário ou afeta o funcionamento de equipamentos.

Os estados limites podem ser definidos quantitativamente através de equações denominadas **equações de estado limite**. Assim, para cada estado limite da estrutura uma equação pode ser escrita em função das variáveis de projeto  $X_1, X_2, \dots, X_p$  que compõem o vetor  $\underline{X}$ . Estas variáveis  $X_i$   $i = 1, 2, \dots, p$  geralmente são variáveis aleatórias. De modo que se tem a equação de estado limite seguinte:

$$g(\underline{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_p) = 0$$

E, de acordo com o valor assumido por  $g(\underline{X})$  tem-se o atendimento ao requisito ( $g(\underline{X}) > 0$ ) e o não atendimento (falha) ( $g(\underline{X}) < 0$ ). De modo que a equação de estado limite define a fronteira entre os pontos que formam o domínio do estado de falha e os pontos que formam o domínio do estado de não falha, que são:

$$D_f = \{\underline{x} \in R^p | g(\underline{x}) < 0\} \text{ e } D_s = \{\underline{x} \in R^p | g(\underline{x}) > 0\}$$

A equação de estado limite pode ser colocada em função do tempo e, portanto, define para os estados limite processos estocásticos:

$$D_f(t) = \{\underline{x} \in R^p | g(\underline{x}, t) < 0\} \text{ e } D_s(t) = \{\underline{x} \in R^p | g(\underline{x}, t) > 0\}$$

Mas, a equação de estado limite mais simples é aquela que depende de apenas duas variáveis. Por exemplo, uma variável pode ser a resistência,  $R$ , do sistema estrutural e a outra variável pode ser a solicitação,  $S$ , a que o sistema está sujeito. De forma que a equação de estado limite é:

$$g(R, S) = R - S = 0$$

Nas seções a seguir se estuda este tema desde variáveis aleatórias até os métodos de Delineamento de Experimento úteis a Confiabilidade de Sistemas de Engenharia.

**Exercícios** - Complete o texto de forma que ele se torne verdadeiro.

- 1) Em todo Sistema Estrutural de Engenharia ..... incertezas nas cargas, nas ..... mecânicas dos materiais, nas ..... de resistência do solo e nas ..... geométricas. Assim, essas incertezas contribuem para que exista uma probabilidade ..... de que o Sistema Estrutural não atenda aos objetivos para os quais foi projetado. Esta probabilidade é definida como probabilidade de .....,  $p_f$ , e pode ser avaliada pelos ..... de análise de confiabilidade estrutural.
- 2) A análise de confiabilidade estrutural é uma ..... que permite ao engenheiro considerar as incertezas ..... às variáveis de projeto, através das correspondentes distribuições de ....., obtendo assim, resultados tais como: a probabilidade de ..... da estrutura e a sensibilidade do projeto em relação a estas variáveis. Estas informações podem ser de fundamental importância na tomada de ..... que envolvam a segurança da estrutura.

- 3) As principais aplicações práticas da análise de confiabilidade estrutural são, entre outras: calibrações de normas de ....., re-análise de estruturas ....., revisão de ..... de inspeções, avaliação de ..... de novas concepções estruturais e escolha de ..... de projeto.
- 4) As normas de projeto, na sua maioria, utilizam ..... parciais de carga e de resistência. Antigamente estes coeficientes eram, basicamente, definidos com base na ..... de profissionais envolvidos em projetos estruturais. Nos dias de hoje, com o auxílio da confiabilidade ..... é possível calibrar os fatores de segurança de uma maneira racional, a partir da definição de um nível alvo considerado ..... para a probabilidade de falha estrutural. A confiabilidade tem sido usada na revisão de normas ..... e na elaboração de códigos de ..... para novas concepções estruturais.
- 5) Todas as estruturas existentes estão sujeitas a .....e desgastes ao longo da vida útil, tais como: corrosão, trincas, etc. Porém, devido à redundância estrutural e a certas características de ....., a falha (ou o desgaste) de um elemento não representa necessariamente a falha da estrutura como um ..... Através da análise de confiabilidade estrutural é possível ..... o nível de segurança global da estrutura como um todo. Esta informação se constitui num elemento auxiliar valioso na tomada de decisões com ..... à operação, à segurança física e ao estabelecimento de um cronograma de reparos para a estrutura.
- 6) As estruturas submetidas a cargas ....., têm na fadiga um fator ..... do projeto. Devido à existência de muitas ..... no cálculo da vida útil à fadiga é comum inspecionar estas estruturas ao longo de sua ..... útil. Geralmente os dados de inspeções anteriores não eram considerados na determinação do cronograma das inspeções futuras. Mas, com a utilização da ..... de confiabilidade e da teoria Bayesiana de probabilidades, é possível reavaliar os prazos de inspeção em função dos resultados obtidos nas últimas inspeções, de forma a manter um nível de segurança aceitável da estrutura ao longo de sua vida útil.
- 7) Os engenheiros, muitas vezes, devem decidir qual a alternativa de ..... a ser escolhida dentre várias ..... possíveis, envolvendo a utilização de novos materiais e de novas concepções estruturais. Então, a confiabilidade ....., juntamente com a análise de custos, fornece as informações necessárias para a avaliação dos riscos associados aos projetos, fornecendo deste modo uma informação fundamental para a ..... de decisões.
- 8) A confiabilidade é uma técnica de apoio muito ..... nos vários ramos da engenharia. Mas, é importante ressaltar que a ..... de confiabilidade depende da qualidade dos dados estatísticos relacionados ao problema e da precisão do modelo matemático usado para a análise das funções de estado limite.
- 9) Escreva a equação de estado limite que envolve apenas duas variáveis: a capacidade  $C$  do sistema estrutural e a demanda  $D$  a que esse sistema está sujeito.

- 10) A equação de estado limite de um sistema estrutural está sujeito a 5 variáveis. Escreva a equação de estado limite e os estados que essa equação faz fronteira.

## 6.2 - Definição de Probabilidade de Falha

Já se disse que a probabilidade de falha é uma medida muito importante na análise de segurança de estruturas. A avaliação da probabilidade de falha é baseada numa função do desempenho do sistema em questão. Esta função é conhecida como *função de estado limite* ou *função de falha* e é denominada  $g(\underline{X})$ , onde  $\underline{X}$  é um vetor que inclui todas as variáveis aleatórias consideradas na análise. No caso bidimensional, ou seja, com duas variáveis  $X_1$  e  $X_2$  e considerando a função de estado limite como  $g(\underline{X}) = g(X_1, X_2) = 0$  tem-se que  $g(\underline{X})$  é uma superfície conhecida como *superfície de falha*. As figuras 6.1a e 6.1b mostram as regiões de **segurança** e de **falha** em destaque. Na figura abaixo  $X_1$  pode ser a resistência  $R$  e  $X_2$  a solicitação  $Q$ .

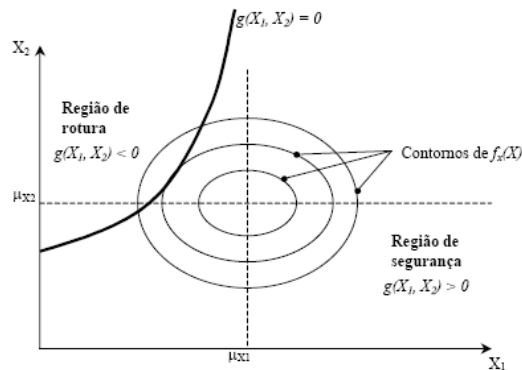


Fig. 6.1a – Função de Estado Limite e Regiões de Segurança e de Falha

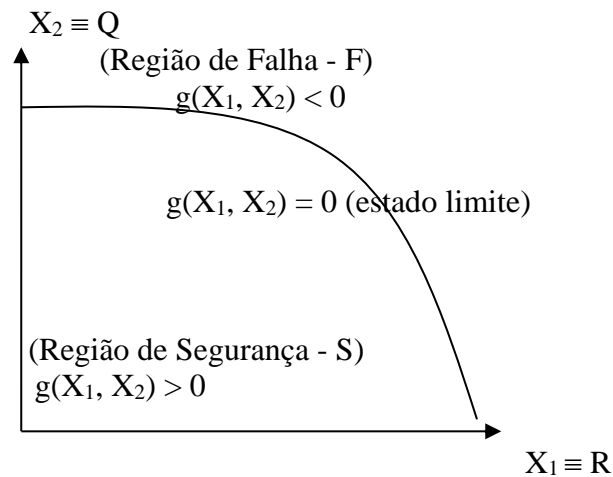


Fig. 6.1b – Função de Estado Limite e Regiões de Segurança e de Falha

- 1) Observe a fig. 6.1a e responda as questões adiante.

- a) Quais as coordenadas do centro das elipses da fig. 6.1a?

R.:  $\mu_{X_1}$  e  $\mu_{X_2}$

- b) Admitindo, por simplicidade, que a distribuição do vetor  $[X_1, X_2]$  seja uma Normal Bivariada,  $N_2(\underline{\mu}; \Sigma)$ , e que a forma geométrica das curvas seja uma elipse, você diria que as variáveis representadas na fig. 6.1a são correlacionadas?

R.: Sim, pois existe uma relação entre os eixos. Se não fossem correlacionadas a curva seria um círculo.

- c) Quais as expressões da distribuição conjunta  $f(x_1, x_2)$ , do vetor médio  $\underline{\mu}$  e da matriz de covariância  $\Sigma$ , admitindo a Normal Bivariada  $N_2(\underline{\mu}; \Sigma)$ ?

$$R.: f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{\mu})' \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu})\right] \quad \underline{x}, \underline{\mu} \in \mathbb{R}^p \text{ e } \Sigma \text{ de ordem } p \times p.$$

Especificamente com  $p = 2$  tem-se:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}$$

observe que dentro do colchete tem-se a expressão de uma elipse e se  $\rho$  fosse nulo ter-se-ia:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \text{ e a expressão dentro do colchete é a}$$

de um círculo.

O vetor médio é:  $\underline{\mu} = [\mu_1 \mu_2]'$  e a matriz de covariância é  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$  (simétrica)

onde a covariância entre  $X_1$  e  $X_2$  é  $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$ .

- d) Qual o significado das várias elipses da fig. 6.1a? Explique em detalhes.

R.: As elipses são curvas de nível traçadas em pontos constante  $c$  do eixo vertical  $f(x_1, x_2)$ .

Quando se analisa a segurança de uma estrutura, o interesse principal está na possibilidade de acontecerem falhas, ou seja, na probabilidade da *função de estado limite* ou *função de falha*  $g(\underline{X})$  assumir valores pertencentes ao domínio de falha. Essa probabilidade é usualmente definida como *probabilidade de falha* e é definida por,

$$p_f = P[g(\underline{X}) < 0, 0]$$

Logo, a probabilidade de falha é dada por,

$$p_f = \int_F f_{\underline{X}}(\underline{X}) d\underline{X}$$

onde  $F$  indica o domínio de falha,  $g(\underline{X}) < 0$ , conforme ilustra a figura 6.1 para o caso bidimensional (duas variáveis aleatórias). A função  $f_{\underline{X}}(\underline{X})$  é a f.d.p. conjunta das variáveis.

## 6.3 – Medidas de Confiabilidade Estrutural

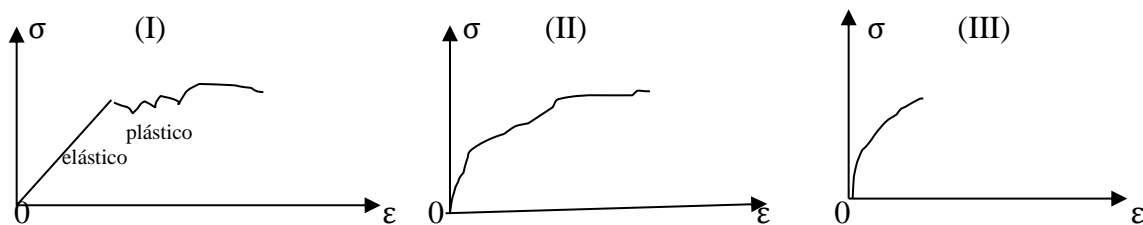
### 6.3.1 – Estados Limites para Estruturas

Se uma estrutura de engenharia é carregada de alguma forma, ela responderá de um modo que depende do tipo e grandeza da carga, da resistência e da flexibilidade da estrutura. Para que a resposta seja considerada satisfatória depende das necessidades que ela deve satisfazer. Tais requerimentos podem incluir segurança contra um colapso total, danos limitados na estrutura, segurança contra alguma flexão ou segurança contra algum dano específico. Esses requerimentos podem ser denominados como “**estado limite**” e a violação de um estado limite pode ser conceituada como uma condição inaceitável para a estrutura. São exemplos típicos: tombamento ou escorregamento, ruptura, colapso progressivo, corrosão, fadiga, fissuração excessiva ou prematura, deformação, excessiva flexão, excessiva vibração, entre outros. Dificilmente ocorre uma violação extrema do estado limite, tal como o desabamento de um prédio ou de uma ponte. Mas, é possível citar vários exemplos.

O interesse no estudo da Confiabilidade Estrutural está no cálculo e previsão da probabilidade de violação do estado limite para estruturas de engenharia em algum estágio durante a sua vida útil. E, a avaliação dessa probabilidade leva em conta qualquer incerteza sobre qualquer variável. Porém, esse não é o caminho tradicional de se medir a segurança. Tradicionalmente, usa-se o **coeficiente de segurança**  $\phi$  ou o **fator de carga**  $\lambda$  que são medidas “determinísticas”.

#### Coeficiente de Segurança $\phi$

Antes de apresentar o Coeficiente de Segurança  $\phi$  é necessário visualizar o Gráfico de Tensão x Deformação, da Lei de Hooke, nos gráficos adiante para materiais dúcteis e frágeis;



Os materiais dúcteis apresentam grandes deformações antes da ruptura, como o aço e o alumínio, podem apresentar escoamento como o aço (I), ou não como o alumínio (II). Um material dúctil pode apresentar escoamento definido como o aço (I), ou não, como o alumínio (II). Já os materiais frágeis como o concreto, ferro fundido e o vidro (III) rompem sem apresentar grandes deformações.

O método padrão de se estabelecer a segurança de uma estrutura ou elemento da estrutura é através do coeficiente de segurança  $\phi$ , que é geralmente associado à análise da tensão no estado elástico do material submetido a ela. De forma que se exige que a tensão aplicada no ponto E do elemento i da estrutura seja significativamente menor ou igual à tensão admissível, ou seja,

$$\sigma_i(E) \leq \bar{\sigma}_i(E) = \sigma_{adm} \quad (1)$$

A tensão admissível  $\sigma_{adm}$  é definida como a tensão limite do material  $\sigma_L$  minorada através do coeficiente de segurança  $\phi > 1$ , isto é:

$$\bar{\sigma}_i(E) = \sigma_{adm} = \frac{\sigma_L}{\phi} \quad (2)$$

A tensão limite do material,  $\sigma_L$ , é obtida do gráfico tensão x deformação que por sua vez é construído experimentalmente. No caso de material frágil a tensão limite,  $\sigma_L$ , é representada por  $\sigma_R$  (tensão de ruptura do material) e no caso de material dúctil  $\sigma_L$  é representada por  $\sigma_e$  (tensão de escoamento do material). O coeficiente de segurança  $\phi$  é definido pelas normas técnicas de engenharia. Então, de acordo com a expressão  $\sigma_i(E) \leq \bar{\sigma}_i(E) = \sigma_{adm}$ , a falha do elemento estrutural  $i$  poderia ocorrer quando a tensão aplicada alcançar um valor superior a  $\sigma_{adm}$ .

### Condição de Violação do Estado Limite

Trabalhando com as expressões (1) e (2) tem-se que:

$$\frac{\sigma_L}{\phi} \leq \sigma_i(E) \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_L}{\phi \sigma_i(E)} \leq 1 \quad (3)$$

que é a condição de violação do estado limite.

### Fator de carga $\lambda$

O fator de carga  $\lambda$  é um tipo especial de fator de segurança que foi desenvolvido para aplicação na análise de tensão no estado plástico do material submetido a ela. Trata-se de um fator pelo qual as cargas que agem sobre uma estrutura são multiplicadas, teoricamente, exatamente para causar o colapso da estrutura. Então, para um dado tipo de colapso, considera-se que a estrutura falhou ou entrou em colapso quando as resistências  $R_{pi}$  estão relacionadas às cargas multiplicadas pelo fator de carga ( $\lambda Q$ ) de acordo com a relação:

$$W_R(\underline{R}_p) < W_Q(\lambda \underline{Q})$$

onde  $\underline{R}_p$  é o vetor de todas as resistências (no estado plástico),  $\underline{Q}$  é o vetor de todas as cargas aplicadas,  $W_R(.)$  é a função de trabalho interna e  $W_Q(.)$  é a função de trabalho externa. E, a equação de estado limite pode ser expressa considerando proporcionalidade como:

$$\frac{W_R(R_{pi})}{\lambda W_Q(Q_D + Q_L + \dots)} = 1 \quad \text{e a falha ocorre para} \quad \frac{W_R(R_{pi})}{\lambda W_Q(Q_D + Q_L + \dots)} < 1$$

A diferença entre o coeficiente de segurança  $\phi$  e o fator de carga  $\lambda$  está no nível de referência nos quais as duas medidas operam. O primeiro no nível das cargas de trabalho e o segundo no nível das cargas de colapso.

### Exercício 1 – Deficiência nas Medidas de Segurança Determinísticas: Falta de Invariância.

A estrutura de um pórtico simples da fig. 1a está sujeita aos carregamentos  $Q_1$  e  $Q_2$ . Se os momentos de inércia dos elementos são conhecidos, o diagrama do momento fletor numa análise no estado elástico é mostrado na fig. 1b e no estado plástico na fig. 1c.



- a) Escreva os estados limites para a resistência à flexão nas seções 1, 2 e 3 considerando a análise no estado elástico.

Os  $M_{ci}$   $i = 1, 2, 3$  são as capacidades últimas requeridas nas secções  $i$  para o pórtico ser considerado seguro.

$$\text{secção 2: } \phi M_{c2} = \gamma_1 \frac{3\ell}{16} Q_1 + \gamma_2 \frac{3\ell}{16} Q_2$$

$$\text{secção 1 e 3: } \phi M_{cj} = \gamma_1 \frac{\ell}{16} Q_1 + \gamma_2 \frac{\ell}{16} Q_2 \quad j = 1, 3;$$

onde  $\phi$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são fatores de carga parciais de norma de engenharia.

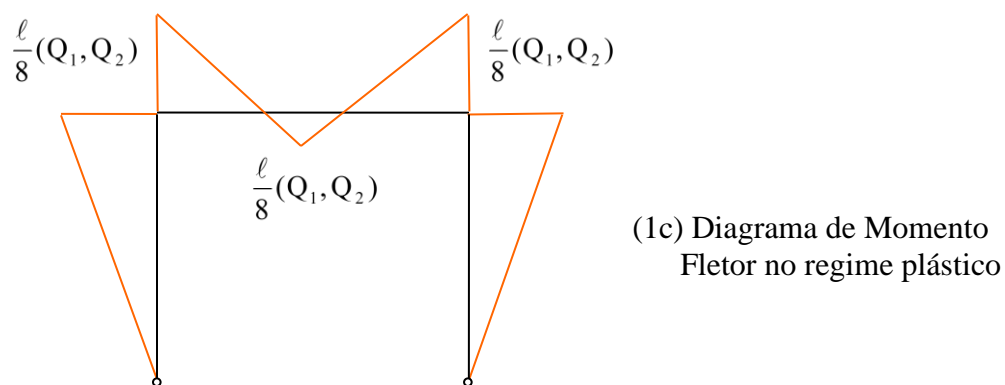
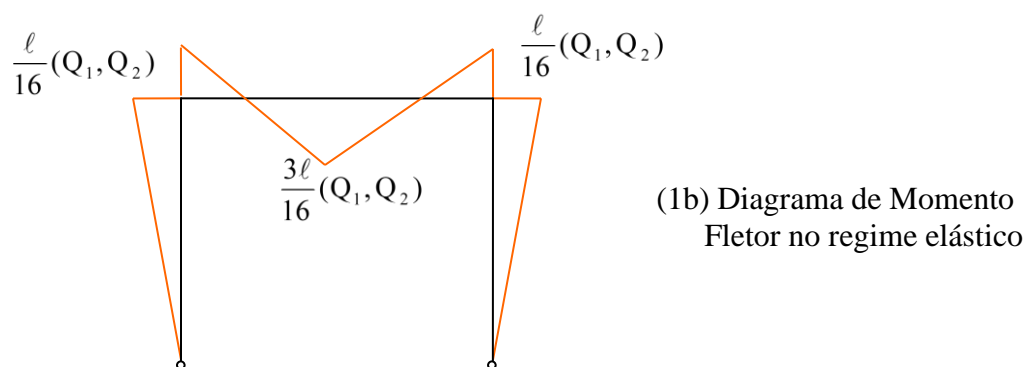
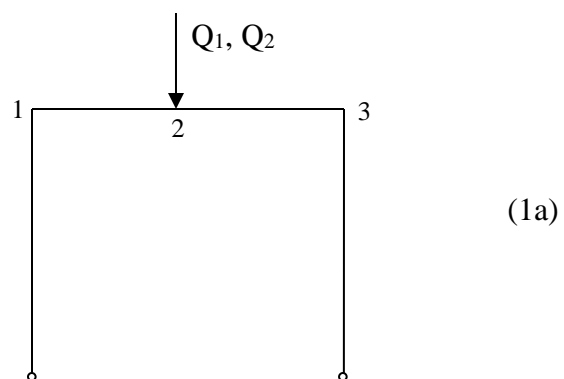
- b) Escreva os estados limites para a resistência à flexão nas seções 1, 2 e 3 considerando a análise no estado plástico.

Os momentos  $M_i$   $i = 1, 2, 3$  nas secções do pórtico são conhecidos e iguais, portanto uma única equação de estado limite é necessária para as secções 1, 2 e 3.

$$\phi_p M_{pi} = \gamma_{p1} \frac{\ell}{8} Q_1 + \gamma_{p2} \frac{\ell}{8} Q_2$$

onde  $M_{pi}$  é a capacidade (momento) necessária no estado plástico e  $\phi_p$ ,  $\gamma_{p1}$  e  $\gamma_{p2}$  são fatores de carga parciais de norma de engenharia e que são diferentes de  $\phi$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

Assim, desse exercício, é fácil ver que existem diferentes caminhos nos quais o relacionamento entre resistência e solicitações pode ser definido. O ideal seria que a medida de segurança não dependesse da definição de solicitações e resistências.



## Exercício 2 - Deficiência nas Medidas de Segurança Determinísticas: Falta de Invariância.

A estrutura mostrada na fig. 2 é suportada por duas colunas. A resistência à compressão da coluna B é  $R = 24$ . A segurança da estrutura pode ser medida de três modos distintos usando o tradicional “coeficiente de segurança”. São eles:

a) Resistência ao tombamento em torno de A

$$F_1 = \frac{\text{momento de resistência em torno de A}}{\text{momento de tombamento em torno de A}} = \frac{dR}{Hh + Wd/2} = \frac{24 \times 10}{10 \times 10 + 4 \times 5} = \frac{240}{120} = 2$$

b) Resistência à compressão da coluna B

$$F_2 = \frac{\text{resistência à compressão da coluna B}}{\text{carga de compressão na coluna B}} = \frac{R}{Hh/d + W/2} = \frac{24}{10 \times 10 / 10 + 4 / 2} = \frac{24}{12} = 2$$

c) Capacidade líquida da coluna B

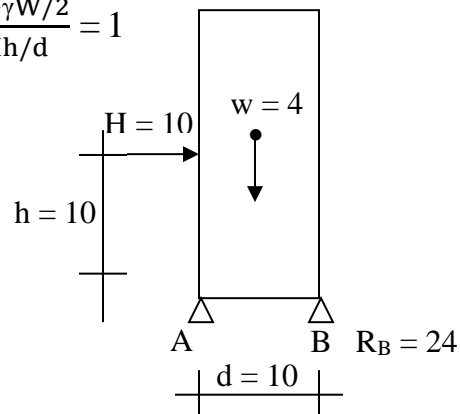
$$F_3 = \frac{\text{resistência à compressão líquida da coluna B}}{\text{carga de compressão na coluna B}} = \frac{R - W/2}{Hh/d} = \frac{24 - 2}{10 \times 10 / 10} = \frac{22}{10} = 2,2$$

Assim, todos os três fatores de segurança para a coluna B aplicam-se a mesma estrutura e ao mesmo carregamento, tal que a diferença nos valores é devido às definições de resistência e cargas aplicadas. Contudo, é fácil ver que os cálculos resultam em resultados idênticos  $F_1 = F_2 = F_3 = 1,0$  se um fator de segurança parcial  $\phi = 1/2$  é aplicado à resistência  $R$ , ou seja,

$$F_1 = \frac{d\phi R}{Hh + Wd/2} = \frac{\frac{1}{2} 240}{120} = 1 \quad F_2 = \frac{\phi R}{Hh/d + W/2} = \frac{\frac{1}{2} 24}{12} = 1 \quad \text{e} \quad F_3 = \frac{\phi R - W/2}{Hh/d} = \frac{\frac{1}{2} 24 - 2}{10} = 1$$

E, o resultado  $F_1 = F_2 = F_3 = 1,0$  também poderia ser alcançado se as cargas  $H$  e  $W$  fossem multiplicadas pelo fator  $\gamma = 2$ , ou seja,

$$F_1 = \frac{d\phi R}{\gamma(Hh + Wd/2)} \quad F_2 = \frac{\phi R}{\gamma(Hh/d + W/2)} \quad F_3 = \frac{\phi R - \gamma W/2}{\gamma Hh/d} = 1$$



Uma medida de segurança alternativa muito útil é a **segurança marginal**, que mede o excesso de resistência em comparação com a solicitação, ou seja:

$$M = R - S$$

### Exercício 3

Mostre que as seguranças marginais baseadas em  $M = R - S$  (do exercício anterior) são equivalentes no ponto de falha, ou seja, em  $M = 0$ .

Solução:

$$M = R - S$$

$$M_1 = dR - (Hh + Wd/2)$$

$$M_2 = R - (Hh/d + W/2)$$

$$M_3 = R - (W/2 - Hh/d)$$

### 6.2.2 – Avaliação da Probabilidade de Falha

A avaliação da probabilidade de falha não é simples. O resultado 1, adiante, garante essa avaliação em um primeiro caso.

#### Resultado 1

Seja a v.a.  $X$  que representa a capacidade de resistência de um determinado sistema estrutural sujeito à solicitação de carga  $Y = y$ , que também é uma v.a. Então a probabilidade de falha do sistema, se os eventos são **dependentes**, é:

- no caso discreto:

$$p_F = P(X < Y) = \sum_y P(X < Y | Y = y) \cdot P(Y = y)$$

e na suposição mais realista de independência dos eventos tem-se:

$$P(X < Y | Y = y) = P(X < y)$$

e

$$p_F = P(X < Y) = \sum_y P(X < Y) \cdot P(Y = y)$$

- no caso contínuo:

$$p_F = P(X < y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) \cdot f_Y(y) dy$$

E quando as v.a's contínuas são independentes tem-se a probabilidade de falha igual a:

$$p_F = P(X < y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) \cdot f_Y(y) dy$$

### Prova

Da definição de probabilidade condicional  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ,  $A, B \in \mathcal{A}$ , pode-se

escrever:

$$P(X < Y | Y = y) = \frac{P[(X < Y) \cap (Y = y)]}{P(Y = y)}$$

e, a probabilidade da ocorrência simultânea dos eventos  $(X < Y)$  e  $(Y = y)$  é :

$$P[(X < Y) \cap (Y = y)] = P(Y = y).P(X < Y | Y = y)$$

e considerando  $\forall y$  tem-se:

$$p_F = P(X < Y) = \sum_y P(X < Y | Y = y).P(Y = y)$$

Como a resistência e a solicitação,  $X$  e  $Y$ , são, em geral, estatisticamente independentes, isto é,  $P(X < Y | Y = y) = P(X < y)$  tem-se:

$$p_F = P(X < Y) = \sum_y P(X < Y).P(Y = y)$$

Já no caso das v.a's serem contínuas resulta da função distribuição de  $X$ :

$$F_X(a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

e conseqüentemente:

$$F_X(y) = P(X < y) = \int_{-\infty}^y f_X(x)dx$$

sendo que  $\forall y$  resulta:

$$p_F = P(X < y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y).f_Y(y)dy$$

Esse resultado, também, pode ser expresso em função da densidade de  $X$  e da distribuição de  $Y$ , já que se tem uma convolução e assim,

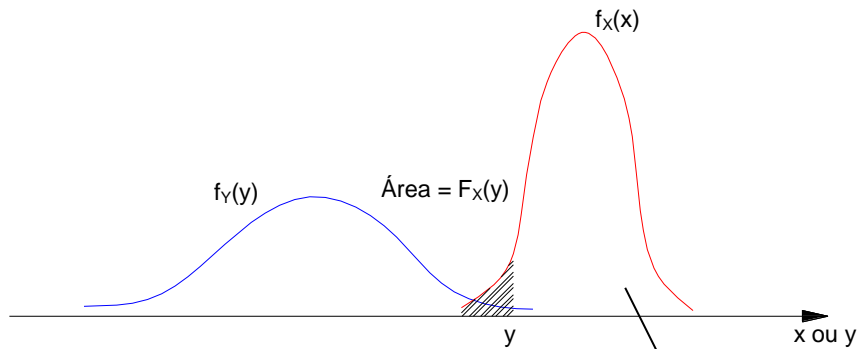
$$p_F = P(X < y) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_Y(x)].f_X(x)dx$$

□

A confiabilidade do sistema ou probabilidade de não falhar é medida por:

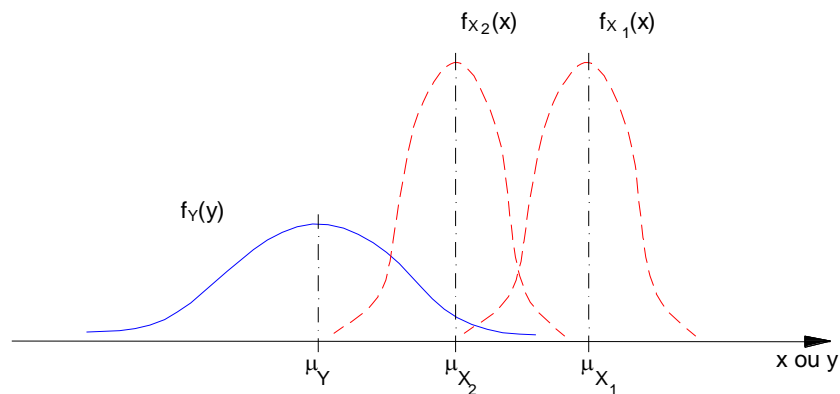
$$p_s = 1 - p_F$$

e a figura 6.2 retrata os argumentos abordados,

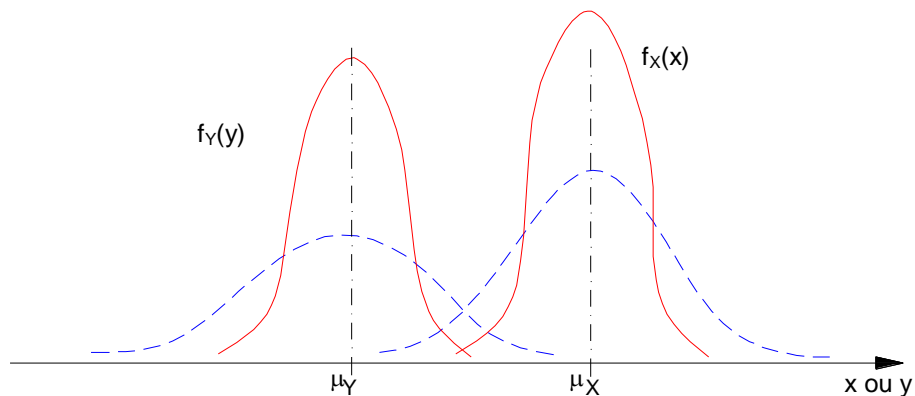


**Fig. 6.2** – f.d.p.'s  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$

Está claro através da expressão  $p_s = 1 - p_F$  que à medida que se aumenta a confiabilidade se diminui a probabilidade de falha. E, observa-se nas figuras 6.2, 6.3a e 6.3b que a região coberta pela intersecção das curvas correspondentes às f.d.p.'s de X e Y depende das posições relativas de  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$  em R, ou melhor, à medida que os parâmetros de locação das densidades se afastam,  $p_F$  diminui, e à medida que eles se aproximam  $p_F$  aumenta.



**Fig. 6.3a** - Efeito da posição relativa entre  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$  em  $p_F$



**Fig. 6.3b** – Efeito das dispersões em  $f_X(x)$  e  $f_Y(y)$  em  $p_F$

Consequentemente, um índice de confiabilidade para o sistema pode ser obtido em função dos parâmetros de locação (médias) das distribuições. De modo que a posição relativa entre  $f_x(x)$  e  $f_y(y)$  pode ser medida pela razão  $\frac{\mu_x}{\mu_y}$ . Esta razão costuma ser chamada

de “**fator de segurança central**”. E, ainda, essa posição relativa pode ser medida pela diferença  $(\mu_x - \mu_y)$ , que é denominada “**margem de segurança**”. É claro que a região coberta pela interseção das curvas depende, também, da dispersão das v.a's  $X$  e  $Y$ . E, como é bem conhecido, as dispersões são medidas pelos desvios padrões das v.a's ou pelos seus quadrados, as variâncias. E um modo de relacionar as médias e as variâncias é através dos coeficientes de variação. Assim, tem-se as medidas relativas de dispersão envolvendo os parâmetros dos quais depende a probabilidade de falha,  $p_F$ . Portanto, com as v.a's distribuídas conforme segue,

$$X \sim (\mu_x, \sigma_x^2) \text{ e } Y \sim (\mu_y, \sigma_y^2)$$

se obtém os coeficientes de variação  $CV_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$  e  $CV_y = \frac{\sigma_y}{\mu_y}$ .

A probabilidade de falha do sistema,  $p_F$ , também depende da forma de  $f_x(x)$  e  $f_y(y)$ . Entretanto, na prática as informações sobre as formas dessas funções são, muitas vezes, poucas e, quando muito, existem informações suficientes apenas para avaliar os principais parâmetros, ou seja:  $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y$  e os correspondentes coeficientes de variação  $CV_x$  e  $CV_y$ .

Na determinação de  $p_F$  assume-se que as v.a's  $X$  e  $Y$  sejam independentes. Porém, essas variáveis podem ser correlacionadas e a determinação de  $p_F$  é mais difícil. Quando se tem variáveis aleatórias correlacionadas, a probabilidade condicional de uma delas em relação à outra é diferente da probabilidade simples, ou seja:

$$P(Y < X \mid X = x) \neq P(Y < x) \quad \text{e} \quad P(X < Y \mid Y = y) \neq P(X < y)$$

Neste caso, a probabilidade de falha,  $p_F$ , pode ser determinada através de cálculo envolvendo a f.d.p. conjunta das v.a's  $X$  e  $Y$  ou seja:

$$p_F = \int_0^\infty \left[ \int_0^y f_{x,y}(x, y) dx \right] dy$$

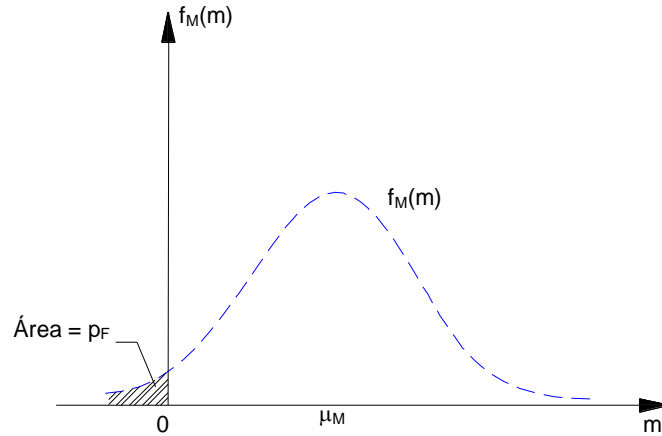
e a confiabilidade correspondente é:

$$p_s = 1 - p_F = \int_0^\infty \left[ \int_0^x f_{x,y}(x, y) dy \right] dx$$

A margem de segurança,  $\mu_x - \mu_y$ , pode ser usada na questão da “resistência-solicitação”. A princípio, deve-se considerar a diferença entre as v.a's  $M = X - Y$  que é também uma variável aleatória, pois é função de duas variáveis aleatórias. Dentro desta abordagem, entende-se por falha a ocorrência do evento aleatório  $M < 0$  e, consequentemente, a probabilidade de falha é dada por:

$$p_F = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = F_M(0) = P(M < 0)$$

onde  $f_M(m)$  é a função densidade de probabilidade da variável aleatória  $M$  e  $F_M$  é a função distribuição de probabilidade. A probabilidade de falha,  $p_F$ , corresponde à área hachurada na Figura 6.4.



**Figura 6.4** – f.d.p. da margem de segurança  $M$

Supondo-se a construção de um índice de confiabilidade ou índice de segurança para sistemas estruturais, evidentemente, deve-se ter informações sobre a variável aleatória  $R$  que corresponde à resistência do sistema e também sobre a solicitação  $Q$ . É possível assumir que ambas tenham distribuições Gaussianas, sendo  $R \sim N(\mu_R, \sigma_R^2)$  e  $Q \sim N(\mu_Q, \sigma_Q^2)$ .

Dentro dessa suposição,  $M = R - Q$  será também Gaussiana, pois se trata de uma combinação linear de v.a's Gaussianas e combinação linear de v.a's Gaussianas é também Gaussiana. Na realidade essa suposição só poderia ser assumida após testes de ajustamento do modelo de probabilidade Gaussiano às amostras de observações das v.a's  $[r_1, r_2, \dots, r_{nr}]$  e  $[q_1, q_2, \dots, q_{nq}]$ . Então, os parâmetros da v.a.  $M$  são:

Esperança:  $\mu_M = E(M) = E[R - Q] = \mu_R - \mu_Q$

Variância:  $\sigma_M^2 = V(M) = V(R - Q) = V(R) + V(Q) = \sigma_R^2 + \sigma_Q^2$

A colocação da v.a.  $M$  na forma da Normal Padrão é indicada para que se possa evitar a dependência dos valores dos parâmetros no cálculo das probabilidades na Normal. Assim,

a v.a.  $Z = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M}$  tem distribuição Normal Padrão, ou seja,  $Z \sim N(0, 1)$  e aplicando esses

argumentos tem-se que:

$$p_F = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = F_M(0) = P(M < 0)$$

$$p_F = P\left(\frac{M - \mu_M}{\sigma_M} < \frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = P\left(Z < \frac{-\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi\left(\frac{-\mu_M}{\sigma_M}\right)$$

e da simetria da curva do modelo Normal obtém-se a probabilidade de falha



$$p_F = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = 1 - \Phi(\beta)$$

E, assim,  $\beta$  é denominado índice de confiabilidade. Portanto, a confiabilidade é dada por:

$$p_S = 1 - p_F = \Phi\left(\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

O índice de confiabilidade pode ser escrito como:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}.$$

De forma que é possível construir a Tabela 1 com os valores da probabilidade de falha baseados na diferença das médias das variáveis aleatórias,  $\mu_R - \mu_Q$  e também das medidas de dispersão,

$$\sigma_M^2 = \sigma_R^2 + \sigma_Q^2$$

Probabilidade de falha $p_F = 1 - \Phi(\beta)$	Índice de Confiabilidade $\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_Q}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}$
0,50	0
0,25	0,67
0,16	1,00
0,10	1,28
0,05	1,65
0,01	2,33
$10^{-3}$	3,10
$10^{-4}$	3,72
$10^{-5}$	4,25
$10^{-6}$	4,75

**Tabela 1-** Valores de  $\beta$  e de  $p_F$

Os números da tabela 1 mostram que a confiabilidade do sistema,  $p_S = 1 - p_F$ , depende da posição relativa das distribuições  $f_R(r)$  e  $f_Q(q)$  medida pela margem de segurança média  $\mu_M = \mu_R - \mu_Q$ , e do grau de dispersão das distribuições medido pelo desvio padrão  $\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}$ . O índice de confiabilidade  $\beta$  é uma função desses dois fatores, sendo que depende diretamente da distância entre os pontos médios das distribuições e inversamente do desvio padrão da variável aleatória correspondente à essa distância. Assim, quanto maior a diferença,  $R - Q$ , entre a resistência  $R$  e a carga  $Q$ , maior será a confiabilidade. Além da margem de segurança  $\mu_M = \mu_R - \mu_Q$  e do índice de confiabilidade

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}$$

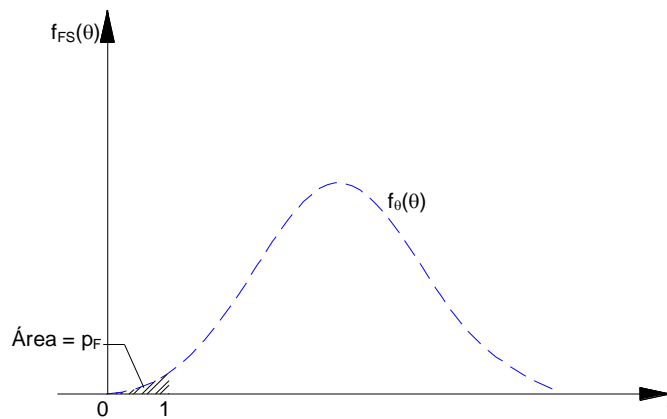
existe, também, outra estatística (v.a.) muito importante nos sistemas estruturais. Trata-se do **fator de segurança (FS ou  $\theta$ )** definido pela razão entre a capacidade de resistência do sistema e a solicitação, ou seja:

$$\theta = FS = \frac{R}{Q}$$

O fator de segurança,  $\theta = FS = \frac{R}{Q}$ , é uma variável aleatória, pois é função de duas variáveis aleatórias. Portanto, possui uma distribuição de probabilidades que pode ser definida por uma f.d.p. Neste caso, a falha é o evento ( $\theta = FS < 1$ ) e a probabilidade de falha correspondente, consequentemente, é:

$$p_F = \int_0^1 f_{FS}(\theta) d\theta = F_{FS}(1)$$

que corresponde a área hachurada na Figura 6.5.



**Figura 6.5** – f.d.p. do fator de segurança FS

### Índice de Confiabilidade de Segunda Ordem

Define-se **Índice de Confiabilidade de Segunda Ordem** como aquele que se baseia apenas na média, no desvio padrão e no coeficiente de correlação das v.a's envolvidas.

Desconsidera-se, portanto, as distribuições de probabilidade dessas v.a's. e, desta forma, evita-se as dificuldades de cálculo.

#### Exercício 1

Seja uma estrutura com resistência  $R$  sujeita a uma solicitação  $Q$ . Suponha que  $R$  e  $Q$  sejam v.a's com médias  $\mu_R$  e  $\mu_Q$  e desvios padrões  $\sigma_R$  e  $\sigma_Q$ , respectivamente. Suponha ainda, que a função de estado limite para a estrutura (função de falha) seja  $M = R - Q$ . Determine o índice de confiabilidade de segunda ordem para a estrutura.

Solução:

Considere a equação  $p_F = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm = F_M(0) = P(M < 0)$  e

$M = R - Q$  é a margem de segurança;

$M > 0$  é o estado de segurança;

$M < 0$  é o estado de falha;

$M = 0$  é o estado limite (fronteira).

Desta forma,  $E(M) = E(R - Q) = E(R) - E(Q) = \mu_R - \mu_Q = \mu_M$

$$V(M) = V(R - Q) = V(R) + V(Q) = \sigma_R^2 + \sigma_Q^2 = \sigma_M^2$$

E, em termos de variáveis reduzidas (padronizadas) tem-se:

$$Z_R = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}, Z_Q = \frac{Q - \mu_Q}{\sigma_Q} \text{ e } Z_M = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M}$$

$$p_F = F_M(0) = P(M < 0) = P\left(\frac{M - \mu_M}{\sigma_M} < \frac{0 - \mu_M}{\sigma_M}\right) = P\left(Z_M < \frac{-\mu_M}{\sigma_M}\right) = P\left(Z_M < \frac{-(\mu_R - \mu_Q)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z_M < \frac{(\mu_R - \mu_Q)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}\right) = 1 - P\left(Z_M < \frac{(\mu_R - \mu_Q)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}\right) = 1 - P\left(Z_M < \frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \text{ e}$$

$$p_S = 1 - p_F = 1 - [1 - P\left(Z_M < \frac{\mu_M}{\sigma_M}\right)] = P\left(Z_M < \frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) = \Phi(\beta)$$

$$\text{E, } \beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{(\mu_R - \mu_Q)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}} \text{ é o índice de confiabilidade de 2ª. ordem.}$$

## Exercício 2

Suponha que as forças de ação sobre a estrutura do exercício 1 sejam v.a's Lognormais, com médias e desvios padrões, respectivamente,  $\lambda_R$ ,  $\lambda_Q$ ,  $\xi_R$  e  $\xi_Q$ .

a) Mostre que os parâmetros das distribuições normais correspondentes, ou seja, de

$$\ln(R) \text{ e } \ln(Q) \text{ são: } \mu_R = \ln(\lambda_R) - \frac{1}{2} \sigma_R^2, \mu_Q = \ln(\lambda_Q) - \frac{1}{2} \sigma_Q^2, \sigma_R^2 = \ln\left(1 + \frac{\xi_R^2}{\lambda_R^2}\right) \text{ e } \sigma_Q^2 = \ln\left(1 + \frac{\xi_Q^2}{\lambda_Q^2}\right).$$

Solução:

Uma v.a. X tem distribuição Lognormal quando a função de X,  $Y = \ln(X)$ , tem distribuição Normal. A f.d.p. da v.a. X com distribuição Lognormal é:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x) - \mu)^2} \text{ com } x \in \mathbb{R}_+, \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \sigma \in \mathbb{R}_+$$

E, mostrando primeiro que  $E(Y) = E[\ln(X)] = \mu$  e  $V(Y) = V[\ln(X)] = \sigma^2$ , então, como  $x = e^y$  tem-se:

$$E(Y) = E[\ln(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \ln(e^y) \frac{1}{e^y \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[y - \mu]^2} e^y dy$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[y - \mu]^2} dy = \mu$$

$$\text{e}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{e^y \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[y-\mu]^2} e^y dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[y-\mu]^2} dy$$

e fazendo  $\frac{y-\mu}{\sigma\sqrt{2}} = z$  tem-se  $y = \mu + \sigma\sqrt{2} z$ , logo  $dy = \sigma\sqrt{2} dz$ , e

$$E(Y^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma\sqrt{2}z)^2 e^{-[z]^2} \sigma\sqrt{2} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu^2 + 2\mu\sigma\sqrt{2}z + 2\sigma^2 z^2) e^{-[z]^2} dz$$

$$E(Y^2) = \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-[z]^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\mu\sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-[z]^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-[z]^2} dz$$

função par                  função impar                  função par

$$E(Y^2) = \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} 2 \int_0^{\infty} e^{-[z]^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\mu\sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} ze^{-[z]^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sigma^2 2 \int_0^{\infty} z^2 e^{-[z]^2} dz$$

$$E(Y^2) = \frac{\mu^2}{\sqrt{\pi}} 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sigma^2 2 \frac{\Gamma(\frac{2+1}{2})}{2 \times 1^{\frac{2}{2}}} = \mu^2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sigma^2 2 \frac{\Gamma(\frac{2+1}{2})}{2 \times 1^{\frac{2}{2}}} =$$

$$= \mu^2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sigma^2 \Gamma(\frac{1}{2} + 1)$$

$$E(Y^2) = \mu^2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2\sigma^2 \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \mu^2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sigma^2 \sqrt{\pi} = \mu^2 + \sigma^2$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

Agora, mostrando o que foi proposto, ou seja,

$$\mu_R = \ln(\lambda_R) - \frac{1}{2} \sigma_R^2 \quad \text{e} \quad \sigma_R^2 = \ln(1 + \frac{\xi_R^2}{\lambda_R^2})$$

$$\mu_Q = \ln(\lambda_Q) - \frac{1}{2} \sigma_Q^2, \quad \text{e} \quad \sigma_Q^2 = \ln(1 + \frac{\xi_Q^2}{\lambda_Q^2})$$

Por simplicidade seja  $\lambda = \lambda_R$ ,  $\sigma^2 = \sigma_R^2$  e  $\xi^2 = \xi_R^2$ , então, tem-se:

$$E(X) = E(e^Y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^y \frac{1}{e^y \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} e^y dy$$

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^y e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^y e^{-[\frac{y^2 - 2\mu y + \mu^2}{2\sigma^2}]} dy =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[\frac{2\sigma^2 y - y^2 + 2\mu y - \mu^2}{2\sigma^2}]} dy$$

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[y^2 - 2\sigma^2 y - 2\mu y + \mu^2]} dy \quad \text{e completando o quadrado:}$$

$$[y - (\mu + \sigma^2)]^2 = y^2 - 2(\mu + \sigma^2)y + (\mu + \sigma^2)^2 = y^2 - 2\mu y - 2\sigma^2 y + \mu^2 + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4$$

$$E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\{[y-(\mu+\sigma^2)]^2 - (2\mu\sigma^2 + \sigma^4)\}} dy =$$

$$= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(-2\mu\sigma^2 - \sigma^4)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[y-(\mu+\sigma^2)]^2} dy$$

$$E(X) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(-2\mu\sigma^2 - \sigma^4)} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \text{ e fazendo } E(X) = \lambda \text{ tem-se: } \ln(\lambda) = \mu + \frac{\sigma^2}{2} \text{ e}$$

$$\mu = \ln(\lambda) - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\text{De forma semelhante } E(X^2) = e^{2(\mu+\sigma^2)} \text{ e } V(X) = e^{2(\mu+\sigma^2)} - [e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}]^2 = e^{2(\mu+\sigma^2)} - e^{2\mu+2\sigma^2}$$

$$\text{Então, fazendo } V(X) = \xi^2 = e^{2(\mu+\sigma^2)} - e^{2\mu+2\sigma^2} = e^{2(\mu+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma^2)} - e^{2[\ln(E(X))]}$$

$$\xi^2 = e^{2(\ln[E(X)] + \frac{\sigma^2}{2})} - e^{2[\ln(E(X))]} = e^{2\ln[E(X)] + \sigma^2} - e^{2[\ln(E(X))]}$$

$$\xi^2 = e^{2\ln[E(X)]} e^{\sigma^2} - e^{2[\ln(E(X))]} = e^{\ln[E(X)]^2} e^{\sigma^2} - e^{\ln[(E(X))]^2} =$$

$$\xi^2 = \lambda^2 e^{\sigma^2} - \lambda^2 = \lambda^2 (e^{\sigma^2} - 1)$$

$$\frac{\xi^2}{\lambda^2} = (e^{\sigma^2} - 1)$$

$$\sigma^2 = \ln(1 + \frac{\xi^2}{\lambda^2})$$

- b) Mostre que o fator de segurança  $\theta = \frac{R}{Q}$  é também Lognormal com parâmetros

$$\mu_\theta = \mu_R - \mu_Q \text{ e } \sigma_\theta^2 = \sigma_R^2 + \sigma_Q^2.$$

Solução:

O fator de segurança  $\theta$  é um quociente entre duas v.a's Lognormal. Assim, observe que se  $z = \prod_{i=1}^n x_i$  com  $x_i \sim \text{LN}$  e independentes tem-se:

$\ln(z) = \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$  e  $\ln(x_i) \sim \text{Normal}$  por definição e como  $\ln(z)$  é uma C.L. de v.a's Gaussianas é também Gaussiana e ainda  $\ln(z) \sim \text{Normal}$  resulta que  $z$  é Lognormal.

Agora, raciocinando com  $\theta = \frac{R}{Q}$  com  $R \sim \text{LN}(\lambda_R, \xi_R^2)$  e  $Q \sim \text{LN}(\lambda_Q, \xi_Q^2)$

$\ln(\theta) = \ln(R) - \ln(Q)$ , então,  $\ln(R)$  é Normal,  $\ln(Q)$  é Normal e  $\ln(\theta)$  é Normal (C.L.) E, os parâmetros são:

$$\mu_\theta = E[\ln(\theta)] = E[\ln(R) - \ln(Q)] = E[\ln(R)] - E[\ln(Q)] = \mu_R - \mu_Q$$

$$\sigma_\theta^2 = V[\ln(\theta)] = V[\ln(R) - \ln(Q)] = V[\ln(R)] + V[\ln(Q)] = \sigma_R^2 + \sigma_Q^2$$

- c) Mostre que em termos das medianas  $R_m$  e  $Q_m$   $\mu_R = \ln(R_m)$ ,  $\mu_Q = \ln(Q_m)$  e, então,  $\mu_\theta = \ln(R_m) - \ln(Q_m) = \ln(\frac{R_m}{Q_m})$ . A razão  $\frac{R_m}{Q_m}$  é chamada de *fator de segurança mediano*.

Solução:

$$P(R \leq R_m) = F(R_m) = 0,50 \text{ e } P(Q \leq Q_m) = F(Q_m) = 0,50$$

$$\text{Assim, } \theta = \frac{R_m}{Q_m} \text{ e } \ln(\theta) = \ln(R_m) - \ln(Q_m)$$

$$E[\ln(\theta)] = E[\ln(R_m) - \ln(Q_m)]$$

$$\mu_\theta = \mu_R - \mu_Q \text{ e como } R_m \text{ e } Q_m \text{ são parâmetros}$$

$$= \ln(R_m) - \ln(Q_m) \Rightarrow \mu_\theta = \ln\left(\frac{R_m}{Q_m}\right) \text{ e } \frac{R_m}{Q_m} \text{ é o fator de segurança mediano.}$$

- d) Finalmente, qual a distribuição de  $\ln(\theta)$ ?

Solução:

$\theta = \frac{R}{Q}$  e  $\ln(\theta) = \ln(R) - \ln(Q)$ , então como  $\ln(R)$  é Normal e  $\ln(Q)$  é Normal tem-se que  $\ln(\theta)$  é Normal pois é C.L. de v.a's Gaussianas.

- e) Calcule a probabilidade de falha  $p_F = P(\theta < 1) = F_\theta(1,0)$ .

Solução:

$$p_F = P(\theta < 1) = P[\ln(\theta) < \ln(1)] = P\left[\frac{\ln(\theta) - \mu_\theta}{\sigma_\theta} < \frac{\ln(1) - \mu_\theta}{\sigma_\theta}\right]$$

$$p_F = P\left[Z < \frac{0 - \mu_\theta}{\sigma_\theta}\right] = P\left[Z < \frac{-\mu_\theta}{\sigma_\theta}\right] = \Phi\left(\frac{-\mu_\theta}{\sigma_\theta}\right)$$

- f) Escreva o índice de confiabilidade  $\beta$ , justificando.

Solução:

$$\beta = \frac{\mu_\theta}{\sigma_\theta} \text{ com } \mu_\theta = \ln\left(\frac{R_m}{Q_m}\right) \text{ e } \sigma_\theta = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}$$

### Exercício 3

Uma v.a.  $X$  tem distribuição assintótica de máximo do Tipo I (Gumbel) com média  $\mu = 20$  e variância  $\sigma^2 = 4$ .

- a) Escreva a expressão da f.d. da v.a.  $X$ ;

Solução:

$$F(x) = \exp[-e^{-\alpha(x-u)}] \quad x, \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } u > 0$$

- b) Determine a f.d.p. da v.a.  $X$ ;

Solução:

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \exp[-e^{-\alpha(x-u)}] \frac{\partial [-e^{-\alpha(x-u)}]}{\partial x} = \exp[-e^{-\alpha(x-u)}] [-e^{-\alpha(x-u)}] \frac{\partial [-\alpha(x-u)]}{\partial x}$$

$$f(x) = \exp[-e^{-\alpha(x-u)}] [-e^{-\alpha(x-u)}] (-\alpha)$$

$$f(x) = \alpha \exp[-e^{-\alpha(x-u)}] [e^{-\alpha(x-u)}] = \alpha \exp[-e^{-\alpha(x-u)} - \alpha(x-u)]$$

$$f(x) = \alpha e^{-[e^{-\alpha(x-u)} + \alpha(x-u)]} \quad x, \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } u > 0$$

- c) Escreva a expressão da média  $E(X)$  e a da  $V(X)$ ;

Solução:

$$E(X) = u + \frac{0,577216}{\alpha} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}$$

- d) Calcule os valores dos parâmetros  $u$  e  $\alpha$ ;

Solução:

$$V(X) = \frac{\pi^2}{6\alpha^2} \Rightarrow 4 = \frac{\pi^2}{6\alpha^2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{\pi^2}{4 \times 6} = 0,4112335 \Rightarrow \alpha = 0,6413$$

$$E(X) = u + \frac{0,577216}{\alpha} \Rightarrow 20 = u + \frac{0,577216}{0,6413} \Rightarrow u = 20 - \frac{0,577216}{0,6413} \Rightarrow u = 19,0999$$

- e) Calcule o valor da f.d. e da f.d. de  $X$  no ponto  $x = 25$ ;

Solução:

$$F(x) = \exp[-e^{-\alpha(x-u)}]$$

$$F(25) = \exp[-e^{-0,6413(25 - 19,0999)}] = \exp[-e^{-3,7837}] = 0,9775$$

$$f(x) = \alpha e^{-[e^{-\alpha(x-u)} + \alpha(x-u)]}$$

$$f(25) = 0,6413.(e^{-[e^{-0,6413(25-19,0999)} + 0,6413(25-19,0999)]})$$

$$f(25) = 0,6413.(e^{-[e^{-3,7837} + 3,7837]}) = 0,6413.(e^{-[0,022738 + 3,78373]})$$

$$f(25) = 0,6413.(0,02222) = 0,01425$$

- f) Determine a média e o desvio padrão da normal equivalente no ponto  $x = 25$ .

Solução:

$$\mu_X^N = x - \sigma_X^N \Phi^{-1}[F_X(x)] \quad \text{e} \quad \sigma_X^N = \frac{\phi[\Phi^{-1}(F_X(x))]}{f_X(x)}$$

$$\mu_X^N = 25 - \sigma_X^N \Phi^{-1}[0,9775] = 25 - \sigma_X^N . 2,0466$$

$$\sigma_X^N = \frac{\phi[2,0466]}{0,01425} \quad \text{e} \quad \sigma_X^N = \frac{0,0534895}{0,01425} = 3,7536 \Rightarrow \mu_X^N = 25 - 3,7536 \times 2,0466 = 17,3178$$

Normal Equivalente no ponto 25 é  $N(17,3178; 3,7536^2)$

#### Exercício 4

Mostre que a média e a variância de uma distribuição normal equivalente a uma variável aleatória  $X$  Lognormal, com parâmetros  $\lambda$  e  $\xi$ , no ponto  $y$ , são, respectivamente,  $\mu_X^N = y[1 - \ln(y) + \lambda]$  e  $\sigma_X^N = y^2 \xi^2$ .

Solução:

A notação  $\lambda = \mu$  e  $\xi = \sigma$  (da expressão da f.d.p  $f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2}$ ).

$X \sim LN(\lambda, \xi)$  e a média e o desvio padrão da normal equivalente no ponto  $X = y$  já foram estabelecidos anteriormente,  $\mu_X^N$  e  $\sigma_X^N$ , bem como a f.d.p e a f.d. da Lognormal.

A função distribuição de  $X$  no ponto  $X = y$  é  $F_X(y) = \int_0^y \frac{1}{x\xi\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\xi^2}(\ln(x)-\lambda)^2} dx$ .

Mudando a variável  $\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right) = s$  tem-se  $ds = \frac{1}{\xi} \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = \xi x ds$  e os limite são:

$$x \rightarrow y \quad s \rightarrow \frac{\ln(y)-\lambda}{\xi} \quad \text{e} \quad x \rightarrow 0 \quad s \rightarrow \frac{\ln(0)-\lambda}{\xi} = -\infty \quad (\text{lembre } x = e^{s\xi+\lambda})$$

Então,  $F_X(y) = \int_{-\infty}^{\frac{\ln(y)-\lambda}{\xi}} \frac{1}{x\xi\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}s^2} \xi x ds$  e simplificando os fatores comuns tem-se

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{\frac{\ln(y)-\lambda}{\xi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \Phi\left(\frac{\ln(y)-\lambda}{\xi}\right) \text{ e a inversa dessa função é}$$

$$\Phi^{-1}(F_X(y)) = \frac{\ln(y)-\lambda}{\xi}. \text{ Agora, entrando com a inversa dessa função em}$$

$$\sigma_X^N = \frac{\Phi[\Phi^{-1}(F_X(x))]}{f_X(y)} \text{ (já estabelecido) no numerador e a a f.d.p. no denominador resulta}$$

$$\sigma_X^N = \frac{\frac{\phi\left[\frac{\ln(y)-\lambda}{\xi}\right]}{\frac{1}{y\xi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\xi^2}(\ln(x)-\lambda)^2}}}{\frac{1}{y\xi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\xi^2}(\ln(y)-\lambda)^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\xi^2}(\ln(y)-\lambda)^2}}{\frac{1}{y\xi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\xi^2}(\ln(y)-\lambda)^2}} = y\xi$$

$$\text{E a média é } \mu_X^N \text{ (já estabelecida) } \mu_X^N = y - \sigma_X^N \Phi^{-1}(F_X(y)) = y - y\xi \cdot \frac{\ln(y)-\lambda}{\xi} =$$

$$\mu_X^N = y[1 - (\ln(y) - \lambda)].$$

Então, os parâmetros da Normal Equivalente são:  $\mu_X^N = y[1 - \ln(y) + \lambda]$  e  $\sigma_X^N = y\xi$

## 6.5 - Sistemas do Tipo R-S (Resistência-Solicitação)

O índice de confiabilidade de segunda ordem foi o começo da análise de confiabilidade estrutural uma vez que ele significa uma medida de segurança e com ele é possível avaliar a **pf** no caso de uma função linear de variáveis aleatórias normais. O desenvolvimento do estudo da confiabilidade estrutural permitiu o surgimento de métodos eficientes para estimação da probabilidade de falha, como será visto adiante. Assim, o índice  $\beta_{SO}$  tem um sentido histórico e só deve ser considerado na situação citada.

A análise de confiabilidade estrutural pode ser entendida como um problema de suprimento versus demanda, ou seja, um problema de confiabilidade pode ser definido como a avaliação da probabilidade de que a demanda (a solicitação máxima na estrutura) exceda a capacidade de suprimento (a resistência da estrutura) durante a vida útil da estrutura. Genericamente para uma viga pode-se definir:

R = resistência da viga (suprimento)

S = carga máxima na estrutura (demanda)

Assim a função de falha (ou estado limite)  $g(\underline{X})$  com  $\underline{X}' = [R, S]$ , pode ser escrita como  $g(\underline{X}) = R - S$  e o tratamento é aquele visto para construir o índice de confiabilidade. É claro que a avaliação da probabilidade de falha a partir do uso da equação

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$$

é bem mais simples. A simplicidade dessa equação é devido às propriedades da distribuição Gaussiana, daí o cálculo se torna fácil.



### 6.5.1 - Espaço Reduzido

A avaliação da probabilidade de falha para um sistema R - S, com R e S v.a's Gaussianas, pode ser feita também utilizando variáveis Normal Padrão. Assim, tem-se:

$$r = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad \text{e} \quad s = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad \text{com } r, s \sim N(0, 1).$$

E, no espaço das variáveis Normal Padrão (espaço reduzido) a função de falha (ou estado limite)  $g(\underline{X}) = g(R, S) = R - S$  pode ser escrita como:

$$g(\underline{X}) = R - S = r\sigma_R + \mu_R - s\sigma_S - \mu_S$$

A figura (6.6) mostra a superfície de falha ( $Z = g(\underline{X}) = g(R, S) = 0$ ) no espaço das variáveis reduzidas

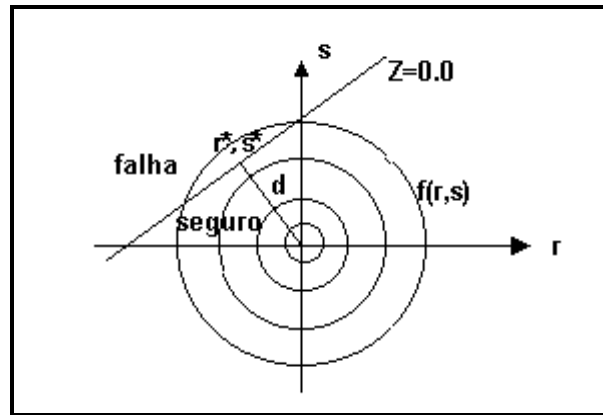


Figura 6.6 - Representação da superfície de falha no espaço reduzido

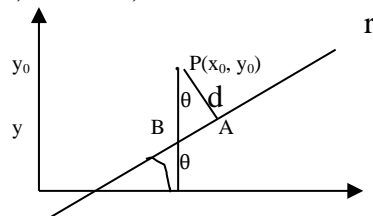
Demonstra-se que a distância da reta  $Z = g(r, s) = 0$  até a origem, no espaço das variáveis reduzidas, é igual a:

$$d = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}.$$

**Exercício 5:** Demonstre a assertiva enunciada na sentença anterior.

Prova:

Considere a fig. 6.6, anterior, de onde se construiu o detalhe seguinte:



No triângulo retângulo APB tem-se que  $\cos(\theta) = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{d}{y_0 - y} = \frac{1}{\sec(\theta)} \Rightarrow d = \frac{y_0 - y}{\sec(\theta)}$  e  
 $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) \Rightarrow d^2 = \frac{(y_0 - y)^2}{\sec^2(\theta)} = \frac{(y_0 - y)^2}{1 + \tan^2(\theta)} \quad (I)$

Então,  $B \in r$  e suas coordenadas satisfazem a equação geral da reta  $ax + by + c = 0$ , ou seja,  $ax_0 + by + c = 0$ . Assim,  $y = -\frac{ax_0 + c}{b}$  e substituindo em (I) resulta  $d^2 = \frac{(y_0 + \frac{ax_0 + c}{b})^2}{1 + (\frac{a}{b})^2} =$

$$d^2 = \frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2} \Rightarrow d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (II)$$

E, a distância entre a equação da reta  $Z = g(r, s) = 0$  até a origem  $(0, 0)$  no espaço Normal Padrão é obtida da margem de segurança  $m(r, s) = \sigma_R r - \sigma_S s + \mu_R - \mu_S$  onde  $a = \sigma_R$ ,  $b = -\sigma_S$  e  $c = \mu_R - \mu_S$  que substituídos em (II) resulta em

$$d = \frac{|\sigma_R \cdot 0 - \sigma_S \cdot 0 + \mu_R - \mu_S|}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{|\mu_R - \mu_S|}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}.$$

Assim, pode-se observar que esse resultado é idêntico ao obtido no problema da margem de segurança. Então, tem-se que a generalização passa a ser:

$$d_{\min} = \beta$$

e como a probabilidade de falha é calculada a partir do índice de confiabilidade  $\beta$  o resultado é:

$$p_f = \Phi(-\beta)$$

O resultado mostra que o índice de confiabilidade  $\beta$  é uma medida geométrica da probabilidade de falha e essa medida vem a ser a **mínima distância** entre a equação do estado limite ( $g(\underline{X})$ ) e a origem do espaço Normal Padrão (espaço reduzido). A expressão  $p_f = \Phi(-\beta)$  é exata para problemas envolvendo variáveis de projeto Gaussianas e com equação de estado limite linear. Porém, poderá sempre ser utilizada como aproximação na solução de problemas com equação de estado limite não linear ou com variáveis tendo outras distribuições de probabilidade, diferentes da Gaussiana.

Portanto,  $d$  é exatamente o índice de confiabilidade  $\beta$  definido anteriormente e a distância do ponto sobre a superfície de falha mais próximo à origem é o próprio índice de confiabilidade. Deve ser observado que o ponto sobre a superfície de falha e mais próximo à origem,  $(r^*, s^*)$  é também o ponto sobre a reta (ou função linear), cujo valor da função densidade de probabilidades conjunta ( $f_{R,S}(r, s) = f_R(r) \cdot f_S(s)$ ) das duas variáveis é maior. Este ponto é conhecido como **ponto de projeto** ou **ponto mais provável de falha**.

Os resultados anteriores, como já se citou, podem ser estendidos facilmente para um número  $p$  qualquer de variáveis aleatórias Gaussianas estatisticamente independentes  $X_i \sim N(\mu_i; \sigma_i^2)$  i.i.d.. Portanto, usando  $\underline{X}$  para identificar as variáveis aleatórias envolvidas na análise e  $\underline{Z}$  para as correspondentes variáveis reduzidas (padronizadas), tem-se:

$$g(\underline{X}) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i X_i$$

E, o índice de confiabilidade é dado por:

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \mu_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^p a_i^2 \sigma_{X_i}^2}}$$

A expressão de  $\beta$  corresponde à distância do hiperplano, que representa a superfície de falha, até a origem no espaço das variáveis reduzidas.

**Exercício 6:** Demonstre a assertiva enunciada na sentença anterior.

Solução:

Seja o hiperplano  $\alpha$  com equação  $a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_p X_p = 0$ . Então, a distância do hiperplano ao ponto  $P_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{p0})$  é dada pela expressão:

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|a_0 + a_1 x_{10} + a_2 x_{20} + \dots + a_p x_{p0}|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2}}$$

Assumindo que  $X_i \sim N(\mu, \sigma_i^2)$  i.i.d. tem-se que  $z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \Rightarrow X_i = \mu_i + \sigma_i z_i$  que substituindo na equação do plano  $\alpha$ , obtém-se:

$$a_0 + a_1(\mu_1 + \sigma_1 z_1) + a_2(\mu_2 + \sigma_2 z_2) + \dots + a_p(\mu_p + \sigma_p z_p) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \mu_i + \sum_{i=1}^p a_i \sigma_i z_i = 0$$

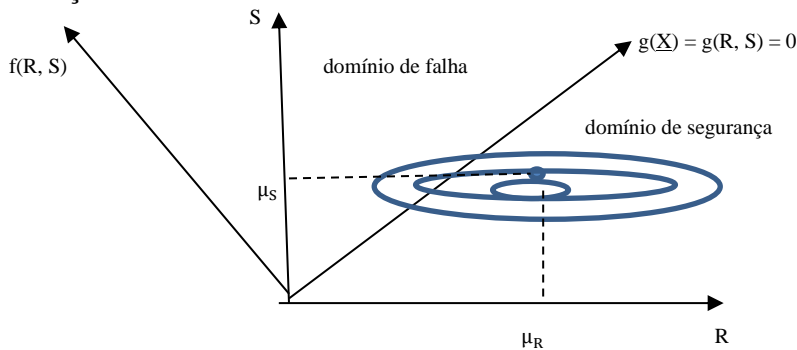
$$\text{E, a distância da origem ao hiperplano } \alpha \text{ é } d(O, \alpha) = \frac{|a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \mu_i + 0|}{\sqrt{\sum_{i=1}^p a_i^2 \sigma_i^2}} = \frac{|a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \mu_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^p a_i^2 \sigma_i^2}}$$

**Exercício 7: Interpretação Geométrica do Problema Fundamental da Confiabilidade**

A ideia fundamental do Método FOSM (primeira ordem e segundo momento) pode ser mostrada por meio da interpretação geométrica do problema fundamental de confiabilidade, em termos de v.a's Gaussianas. Sejam, então, as variáveis aleatórias Gaussianas  $R$  e  $S$ , independentes, que compõem o vetor  $\underline{X}$ . Então, pede-se:

- a) Faça um esboço no espaço tridimensional envolvendo a superfície  $g(R, S)$ , coloque os eixos  $R$  e  $S$  e escreva a função de estado limite  $g(\underline{X})$  em função de  $R$  e  $S$ .

Solução:



- b) Transforme as v.a's R e S nas v.a's padronizadas  $N(0, 1)$ ,  $y_r$  e  $y_s$ , considerando  $R \sim N(\mu_R, \sigma_R^2)$  e  $S \sim N(\mu_S, \sigma_S^2)$ .

Solução:

$$y_r = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad \text{e} \quad y_s = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S}$$

- c) Escreva a Função de Estado Limite em função de  $y_r$  e  $y_s$  e a expressão da margem de segurança em função dessas variáveis.

Solução:

$$\text{A margem de segurança é } M(R, S) = R - S = \sigma_R y_r + \mu_R - \sigma_S y_s - \mu_S$$

$$\text{e fazendo } M(R, S) = 0, \text{ a Função de Estado Limite é } \sigma_R y_r + \mu_R - \sigma_S y_s - \mu_S = 0$$

- d) Escreva a expressão da distância quadrática entre um ponto qualquer ( $y_r, y_s$ ) e a origem no Espaço Normal Padrão (Espaço Reduzido).

Solução:

A distância quadrática do ponto ( $y_r, y_s$ ) a origem  $O(0, 0)$  é:

$$d^2 = (y_r - 0)^2 + (y_s - 0)^2 = y_r^2 + y_s^2$$

- e) Determine o ponto da superfície  $g(R, S)$  que tem menor distância à origem.

Solução:

Derivando-se  $d^2$  em relação a  $y_r$  (resistência) e igualando a zero obtém-se a condição de mínimo, ou seja,

$$\frac{\partial d^2}{\partial y_r} = 2y_r + 2y_s \frac{\partial y_s}{\partial y_r} = 2y_r + 2y_s \frac{\partial(\frac{\sigma_R y_r + \mu_R - \mu_S}{\sigma_S})}{\partial y_r} = 2y_r + 2y_s \frac{\sigma_R}{\sigma_S} = 0 \Rightarrow y_r = -y_s \frac{\sigma_R}{\sigma_S}$$

$$\text{E, como } y_r = -y_s \frac{\sigma_R}{\sigma_S} \text{ é condição de mínimo pois } \frac{\partial^2 d^2}{\partial y_r^2} = 2 > 0.$$

- f) Mostre que essa distância corresponde ao índice de confiabilidade  $\beta$ . Consequentemente o ponto de mínimo encontrado ( $y_r^*, y_s^*$ ) é o ponto de projeto.

Solução:

$$y_r = -y_s \frac{\sigma_R}{\sigma_S} = -\left(\frac{\sigma_R y_r + \mu_R - \mu_S}{\sigma_S}\right) \cdot \frac{\sigma_R}{\sigma_S} \Rightarrow y_r \sigma_S^2 = -(\sigma_R y_r + \mu_R - \mu_S) \sigma_R = -\sigma_R^2 y_r - \sigma_R \mu_R + \sigma_R \mu_S$$

$$y_r(\sigma_S^2 + \sigma_R^2) = \sigma_R(\mu_S - \mu_R) \Rightarrow y_r^* = \frac{\sigma_R(\mu_S - \mu_R)}{(\sigma_S^2 + \sigma_R^2)}$$

$$\text{e com } y_s = -y_r \frac{\sigma_S}{\sigma_R} \text{ resulta } y_s^* = -\frac{\sigma_R(\mu_S - \mu_R)}{(\sigma_S^2 + \sigma_R^2)} \frac{\sigma_S}{\sigma_R} \Rightarrow y_s^* = \frac{\sigma_S(\mu_R - \mu_S)}{(\sigma_S^2 + \sigma_R^2)}$$

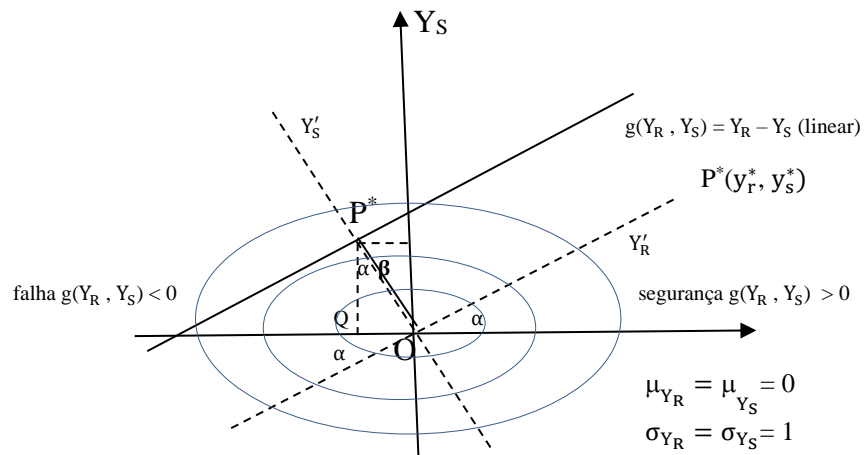
Então, o ponto de mínimo é ( $y_r^*, y_s^*$ ).

$$\text{E, } d^2 = y_r^2 + y_s^2 \text{ no ponto de mínimo é } d^2 = \frac{\sigma_R^2(\mu_R - \mu_S)^2}{[\sigma_S^2 + \sigma_R^2]^2} + \frac{\sigma_S^2(\mu_R - \mu_S)^2}{[\sigma_S^2 + \sigma_R^2]^2} = \frac{\sigma_R^2(\mu_R - \mu_S)^2 + \sigma_S^2(\mu_R - \mu_S)^2}{[\sigma_S^2 + \sigma_R^2]^2}$$

$$d^2 = \frac{(\mu_R - \mu_S)^2(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)}{[\sigma_S^2 + \sigma_R^2]^2} = \frac{(\mu_R - \mu_S)^2}{\sigma_S^2 + \sigma_R^2} \Rightarrow d = \frac{|\mu_R - \mu_S|}{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_R^2}} = \beta \text{ que é o ponto de projeto } P^*(y_r^*, y_s^*).$$

- g) Faça um esboço das curvas de nível da superfície  $f(Y_r, Y_s)$  no espaço Normal Padrão mostrando a região de falha, a região de segurança, o ponto de projeto  $P^*(y_r^*, y_s^*)$  e a distância  $\beta$ .

Solução:



- h) Determine o ângulo  $\alpha$  de uma rotação ortogonal que faz com que o eixo  $Y_S$  rotacionado ( $Y'_S$ ) contenha o segmento  $OP^*$ , que é o índice de confiabilidade  $\beta$ .

Solução:

$$P^*(y_R^*, y_S^*) = \left( \frac{\sigma_R(\mu_S - \mu_R)}{(\sigma_S^2 + \sigma_R^2)}, \frac{\sigma_S(\mu_R - \mu_S)}{(\sigma_S^2 + \sigma_R^2)} \right)$$

Seja a figura anterior e o triângulo retângulo  $OP^*Q \Rightarrow$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\frac{\sigma_R(\mu_S - \mu_R)}{(\sigma_S^2 + \sigma_R^2)}}{\frac{\sigma_S(\mu_R - \mu_S)}{(\sigma_S^2 + \sigma_R^2)}} = \frac{|\sigma_R(\mu_S - \mu_R)|}{|\sigma_S(\mu_R - \mu_S)|} = \frac{\sigma_R}{\sigma_S} \Rightarrow \alpha = \arctg\left(\frac{\sigma_R}{\sigma_S}\right)$$

**Exercício 8:** Seja uma barra tracionada por uma força  $F$ , de modo que a tensão solicitante é  $S = \frac{F}{A}$ , onde  $A$  é a área da secção da barra. A resistência a esse esforço é feita pela tensão

resistente  $R$ . Assumindo que  $R \sim N(\mu_R, \sigma_R^2)$ ,  $S \sim N(\mu_S, \sigma_S^2)$ , e são independentes com parâmetros  $\mu_R = 32$  MPa,  $\sigma_R = 1,0$ ,  $\mu_S = 28$  MPa e  $\sigma_S = 2,0$ ;

- Escreva as expressões das f.d.p's de  $R$  e  $S$ ;
- Escreva a expressão da f.d.p. conjunta de  $R$  e  $S$ ;
- Escreva a função de estado limite  $g(R, S)$ ;
- Escreva a expressão da probabilidade de falha  $p_f$ ;
- Escreva a função de estado limite em função das variáveis padronizadas  $Z_R$  e  $Z_S$ ;
- Escreva a função de densidade conjunta das variáveis padronizadas  $Z_R$  e  $Z_S$ ;
- Escreva a expressão da probabilidade de falha  $p_f$  no espaço padronizado.
- Determine o ponto de projeto;
- Determine o ângulo da função de falha com o eixo  $Z_R$ ;
- Determine o índice de confiabilidade;
- Qual a probabilidade de falha?

Das figuras feitas nos exercícios anteriores pode-se notar que à medida que a função de estado limite (ou “superfície” de falha ou “superfície” de estado limite) situa-se mais longe ou mais perto da origem no Espaço Normal Reduzido, a região de segurança  $g(\underline{X}) > 0$  aumenta ou diminui. De forma que a posição da função de estado limite relativamente à

origem das variáveis Normal Padrão determina a segurança ou confiabilidade do sistema. A posição da função de estado limite em relação à origem pode ser representada pela distância mínima de  $g(\underline{X}) = 0$  à origem das variáveis Normal Padrão. Então, o ponto na “superfície” de falha que tem distância mínima até a origem é o mais provável **ponto de falha** ou **ponto crítico** ou **ponto de projeto**. Assim, nesse sentido essa distância mínima pode ser usada como uma medida da confiabilidade.

Seja, agora, o ponto da função de falha no Espaço Normal Padrão,  $\underline{Z}' = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n]$ . Então, a distância desse ponto (da “superfície” de falha) à origem é dada por:

$$D = d(P^*, O) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2} = \sqrt{\underline{Z}' \underline{Z}} \text{ (raiz quadrada do produto interno)}$$

O ponto na função de falha,  $\underline{Z}^{**} = [Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_n^*]$ , que tem distância mínima à origem pode ser determinado minimizando a função D com a restrição  $g(\underline{Z}) = 0$ , isto corresponde ao problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & D = \sqrt{\underline{Z}' \underline{Z}} \\ \text{Sujeito a} & g(\underline{Z}) = 0 \end{array}$$

Então, para resolver este problema o método dos multiplicadores de Lagrange pode ser usado. Assim, tem-se:

$$L = D + \lambda g(\underline{Z})$$

ou

$$L = (\underline{Z}' \underline{Z})^{1/2} + \lambda g(\underline{Z})$$

e tratando o problema na abordagem escalar tem-se;

$$L = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2} + \lambda g(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$$

com

$$X_i = \sigma_i Z_i + \mu_i$$

E, para fazer a minimização de L constrói-se um sistema com  $n + 1$  equações e  $n + 1$  incógnitas, ou seja,

$$\frac{\partial L}{\partial Z_i} = \frac{Z_i}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial Z_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = 0 \quad (I)$$

A solução desse sistema de equações é o mais provável ponto de falha, ou seja, o ponto de projeto  $\underline{Z}^* = [Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_n^*]$ . Então, entrando com o vetor Gradiente:

$$\underline{G}' = \left[ \frac{\partial g}{\partial Z_1} \frac{\partial g}{\partial Z_2} \dots \frac{\partial g}{\partial Z_n} \right]$$

com

$$\frac{\partial g}{\partial Z_i} = \frac{\partial g}{\partial X_i} \cdot \frac{dX_i}{dZ_i} = \sigma_{X_i} \frac{\partial g}{\partial X_i}$$

E, escrevendo o sistema de equações proposto na forma matricial tem-se:

$$\frac{\underline{Z}}{(\underline{Z}'\underline{Z})^{1/2}} + \lambda \underline{G} = 0$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= -\lambda (\underline{Z}'\underline{Z})^{1/2} \underline{G} = -\lambda \underline{D} \underline{G} \\ \underline{Z}'\underline{Z} &= -\lambda \underline{Z}'(\underline{Z}'\underline{Z})^{1/2} \underline{G} \\ (\underline{Z}'\underline{Z})^{1/2}(\underline{Z}'\underline{Z})^{1/2} &= -\lambda \underline{Z}'(\underline{Z}'\underline{Z})^{1/2} \underline{G} \\ (\underline{Z}'\underline{Z})^{1/2} &= -\lambda \underline{Z}'\underline{G} \\ (\underline{Z}'\underline{Z})^{1/2} &= -\lambda (-\lambda \underline{G}'\underline{D}) \underline{G} \\ (\underline{Z}'\underline{Z})^{1/2} &= \lambda^2 \underline{D}(\underline{G}'\underline{G}) \\ \underline{I} &= \lambda^2 (\underline{G}'\underline{G}) \end{aligned}$$

e obtém-se o vetor

$$\underline{Z} = \frac{-\underline{D}\underline{G}}{(\underline{G}'\underline{G})^{1/2}} \quad (II)$$

e

$$\underline{D} = \frac{-\underline{G}'\underline{Z}}{(\underline{G}'\underline{G})^{1/2}}$$

Substituindo (II) em (I) resulta uma única equação com incógnita D e a solução dessa equação é a distância mínima  $d_{\min} = \beta$ , dada por:

$$\beta = \frac{-\underline{G}^*{}'\underline{Z}^*}{(\underline{G}^*{}'\underline{G}^*)^{1/2}}$$

onde  $\underline{G}^*$  é o vetor gradiente no mais provável ponto de falha  $\underline{Z}^* = [Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_n^*]$ . A expressão de  $\beta$  na forma escalar é:

$$\beta = \frac{-\sum_{i=1}^n z_i^* \left( \frac{\partial g}{\partial Z_i} \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial Z_i} \right)^2}}$$

onde as derivadas  $\frac{\partial g}{\partial Z_i}$  são calculadas em  $[z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*]$ .

E, entrando com  $\beta$  na equação II obtém-se o mais provável ponto de falha:

$$\underline{Z}^* = \frac{-\beta \underline{G}^*}{(\underline{G}^* \cdot \underline{G}^*)^{1/2}}$$

As componentes de  $\underline{Z}^*$ , ou seja, as coordenadas na forma escalar do ponto mais próximo à origem,  $P^* \equiv \underline{Z}^*$ , no espaço das variáveis reduzidas (padronizadas), são dadas por:

$$z_i^* = -\alpha_i^* \beta \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

onde  $\alpha_i^*$  é a componente do vetor normal à superfície de falha, calculado no ponto de projeto e definida por:

$$\alpha_i^* = \frac{\frac{\partial g(\underline{Z})}{\partial Z_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g(\underline{Z})}{\partial Z_i} \right)^2}}$$

onde as derivadas  $\frac{\partial g}{\partial Z_i}$  são calculadas em  $[z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*]$ . Assim,  $\alpha_i^*$  é o coseno diretor do vetor que une o ponto de projeto à origem com relação ao eixo da variável  $Z_i$ .

No espaço original, o ponto de projeto pode ser obtido através da generalização da expressão anterior. Assim, tem-se:

$$X_i^* = \mu_i + z_i^* \sigma_i$$

De acordo com as equações anteriores, nota-se que o gradiente da função de falha no espaço reduzido se relaciona ao gradiente avaliado no espaço original por meio de uma função.

## 6.5 - Classificação das Incertezas na Análise de Confiabilidade Estrutural

As várias incertezas relacionadas ao projeto, fabricação e uso de uma estrutura podem ser classificadas em incertezas normais e incertezas associadas a erros humanos e outros fatores que independem do engenheiro estrutural. As incertezas normais podem ser



ainda subdivididas em incertezas inerentes ou fundamentais e incertezas devido ao incompleto ou imperfeito conhecimento na avaliação das cargas, solicitações e resistência de uma estrutura. As incertezas inerentes ou fundamentais resultam da variabilidade natural de uma determinada variável, por exemplo, altura de onda, velocidade do vento, etc. Estas incertezas não podem ser eliminadas com um maior número de informações. As incertezas devido ao imperfeito ou incompleto conhecimento, também denominadas como epistêmicas, estão diretamente relacionadas à quantidade limitada de dados para definir estatisticamente as incertezas fundamentais e à imperfeição nos modelos matemáticos usados para calcular cargas, solicitações e a capacidade resistente de uma estrutura. Estas incertezas podem ser reduzidas a partir de um número maior de informações ou através do emprego de modelos matemáticos mais precisos.

Incertezas associadas a erros humanos e outros fatores, tais como sabotagem (p.ex. World Trade Center), colisões, etc., estão presentes no projeto, execução, manutenção e uso de uma estrutura e podem ser reduzidas através de mecanismos como controle de qualidade, inspeções, sistemas de alarme, etc.

As incertezas normais podem ser representadas através de variáveis aleatórias enquanto que as incertezas associadas a fatores humanos não. Estas últimas podem ser tratadas através de uma taxa de ocorrência a partir de um histórico de observações e contempladas no âmbito da confiabilidade de sistemas.

A análise de confiabilidade estrutural determina a probabilidade de uma estrutura falhar associada às incertezas normais e não contempla aquelas relacionadas a erros humanos. Assim esta probabilidade constitui-se de apenas uma parcela que contribui para a probabilidade “real” de falha de uma estrutura. Por este motivo, a probabilidade de falha calculada pela confiabilidade estrutural não pode ser comparada a valores obtidos a partir de falhas acontecidas com estruturas.

## 7. MÉTODOS PARA ANÁLISE DA CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

De acordo com o que foi definido anteriormente, um dos objetivos da confiabilidade é a avaliação da integral  $p_f = \int_F f_{\underline{x}}(\underline{X}) d\underline{x}$ , ou seja,  $p_f = P[g(\underline{X}) < 0,0]$ . Em problemas reais podem existir várias variáveis, umas dependentes de outras. E, ainda, não-Gaussianas e com função de falha complexa. Assim, a avaliação numérica da equação  $p_f = P[g(\underline{X}) < 0,0]$  não é fácil de ser obtida. Portanto, métodos alternativos são geralmente empregados na sua avaliação.

Na maioria dos problemas de confiabilidade as informações limitam-se às funções distribuições marginais e em alguns casos ao coeficiente de correlação entre pares de variáveis. Os diferentes métodos de solução correspondem a diferentes níveis de aproximação para a função conjunta  $f_{\underline{x}}(\underline{X})$ .

Estes métodos se dividem basicamente em métodos analíticos e na simulação de Monte Carlo.

No método FOSM (1ª. ordem e 2º. momento) a equação de estado limite  $g(\underline{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0,0$  é aproximada por uma função linear e a informação estatística disponível para construção da função distribuição conjunta são a média e o desvio padrão. E, ainda, nesse método assume-se que todas as variáveis  $X_i$  são Gaussianas.

Já no método FORM (First Order Reliability Method) toda informação estatística à respeito das v.a.'s do problema é utilizada, ou seja, utiliza-se também:

- distribuições marginais não Gaussianas;
- Coeficientes de Correlação entre pares de variáveis

A diferença entre o método SORM e o método FORM é que no SORM a equação de estado limite  $g(\underline{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0,0$  é aproximada por uma superfície quadrática, no espaço reduzido.

A seguir são apresentados os métodos analíticos, conhecidos como FOSM, FORM e SORM.

### 7.1 - Método FOSM (First Order and Second Moment Reliability Method)

#### 7.1.1 – Introdução

O método FOSM é baseado na transformação do espaço de projeto de  $\underline{X}$  para o espaço Normal Padrão de  $\underline{Z}$ . A formulação da equação de estado limite é feita no espaço de projeto de  $\underline{X}$  e os elementos do vetor gradiente são avaliados também nesse espaço. Já a solução do problema de otimização é obtida no espaço reduzido de  $\underline{Z}$ .

O processo de aplicação do Método FOSM segue a sequência enunciada no algoritmo adiante.

### 7.1.2 - Algoritmo do Método FOSM

- 1<sup>o</sup>. – Escolhe-se um ponto inicial qualquer  $\underline{x}_0$  para a iteração  $k = 0$ . Este ponto não necessita estar obrigatoriamente sobre a equação de estado limite. Geralmente escolhe-se o ponto médio.
- 2<sup>o</sup>. – A transformação do espaço de  $\underline{X}$  para o espaço de  $\underline{Z}$  (Normal Padrão) pode ser feita pela matriz Jacobiana  $J$ . De modo que se tem:

$$J = [J_{ij}] = \left[ \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad e \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$J^{-1} = \left[ \frac{\partial x_i}{\partial z_j} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad e \quad j = 1, 2, \dots, n$$

E, a matriz Jacobiana é:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z_n}{\partial x_1} & \frac{\partial z_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Lembrando que  $Z_i = \frac{X_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}$  e que as derivadas são iguais a:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\sigma_{x_i}} \quad \text{para } i = j \quad e \quad \frac{\partial z_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

tem-se que a matriz Jacobiana corresponde a matriz desvio padrão invertida, ou seja:

$$J = D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{x_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{x_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_{x_n}} \end{bmatrix}$$

Então,  $J^{-1} = D$  e o vetor de médias é  $\underline{M}' = [\mu_{x_1} \quad \mu_{x_2} \quad \dots \quad \mu_{x_n}]$ .

**3<sup>o</sup>** – Transforma-se o ponto inicial  $\underline{x}_0$  no ponto  $\underline{z}_0$  na interação  $k$ , de forma que se tem:

$$\underline{z}^k = J[\underline{x}^k - \underline{M}] = D^{-1}[\underline{x}^k - \underline{M}]$$

**4<sup>o</sup>** – Avalia-se  $g(\underline{x}^k)$ .

**5<sup>o</sup>** – Calcula-se o vetor gradiente da seguinte forma:

5.1- Calcula-se as derivadas parciais de  $g(\underline{x})$  no espaço de  $\underline{X}$ ;

5.2- Transforma-se o vetor gradiente para o espaço de  $\underline{Z}$ . Desta forma se tem:

$$\nabla g(\underline{z}^k) = J^{-1} \nabla g(\underline{x}^k);$$

5.3- Calcula-se os fatores de sensibilidade  $\alpha(\underline{z}^k)$  que poderão ser usados para eliminar da solução v.a's que tenham pouca influência na estimação de  $p_F$ .

**6<sup>o</sup>** – Calcula-se o novo ponto  $\underline{z}^{k+1}$  pelo algoritmo HLRF ou HLRF-M;

**7<sup>o</sup>** – Transforma-se o ponto  $\underline{z}^{k+1}$  do espaço de  $\underline{Z}$  para o espaço de  $\underline{X}$ :

$$\underline{x}^{k+1} = J^{-1} \underline{z}^{k+1} + \underline{M}$$

**8<sup>o</sup>** – Verifica-se se o critério de convergência é satisfeito e em caso positivo para-se a interação; em caso contrário retorna-se ao 4<sup>o</sup> passo e continua-se com o procedimento até a convergência ser alcançada.

$$1 - \left| \frac{(\nabla g(\underline{z}^{k+1}))g(\underline{z}^{k+1})}{\|(\nabla g(\underline{z}^{k+1}))\| \|g(\underline{z}^{k+1})\|} \right| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |g(\underline{z}^{k+1})| < \delta$$

**9<sup>o</sup>** – Calcula-se o índice de confiabilidade  $\beta$  no ponto de projeto alcançado em  $\underline{z}^*$ , ou seja,

$$\beta = \|\underline{z}^*\|$$

**Exercício 9:** Seja uma viga sujeita a flexão conforme fig. 7.1 adiante.

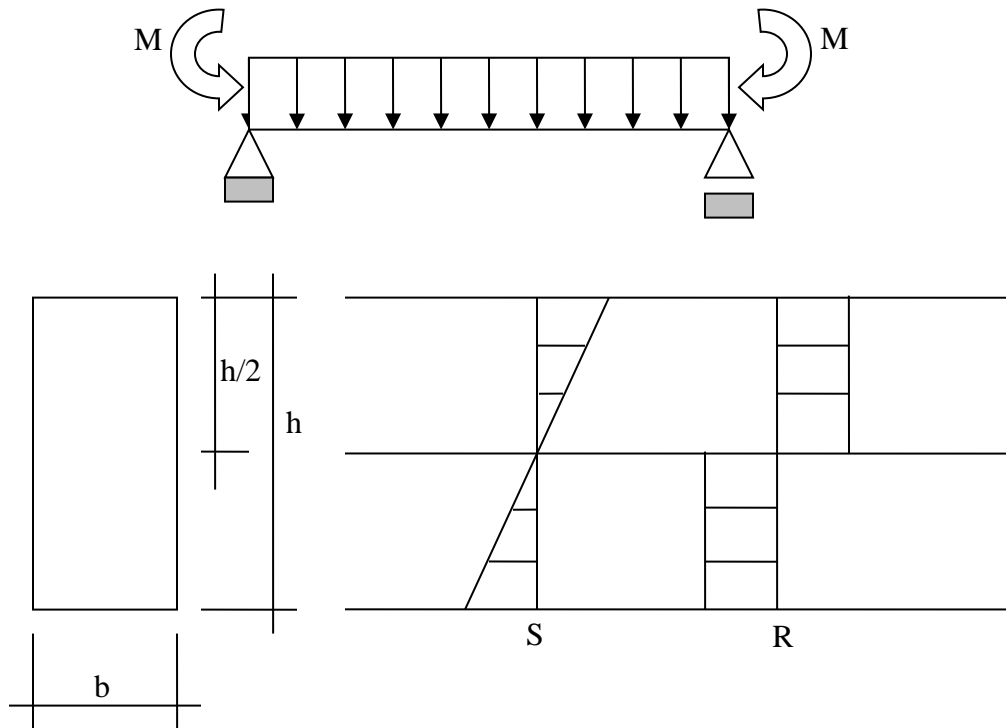


Fig. 7.1 – Viga sujeita a flexão.

Resistência  $R$  é o momento elástico máximo  $R = \sigma_{esc} \cdot \frac{I}{y} = \sigma_{esc} W$

onde  $I$  = momento de inércia da seção da viga;  
 $y$  = posição da linha neutra (tensões nulas);

$W = \frac{I}{y}$  módulo de resistência à flexão;

Solicitação  $S$  é o  $M = \sigma_{esc} \frac{bh^2}{4}$  momento de plastificação, onde  $\sigma_{esc}$  é a tensão de escoamento do aço;

Então, sejam as v.a's:

$$X_1 = \sigma_{esc} \sim N(40; 5^2) \text{ kN/cm}^2$$

$$X_2 = W \sim N(50; 2,5^2) \text{ cm}^3$$

$$X_3 = M \sim N(1000; 200^2) \text{ kN.cm}$$

Pede-se:

a) Escreva o vetor de médias (vetor médio)  $\underline{M}$ ;

- b) Escreva a matriz desvio padrão D;
- c) Calcule o vetor gradiente  $\nabla g(\underline{x})$ ;
- d) Calcule a matriz Jacobiana;
- e) Prossiga com o algoritmo até obter o valor do índice de confiabilidade  $\beta$ .

## 7.2 - Método FORM (First Order Reliability Method)

### 7.2.1 – Introdução

No espaço padronizado das variáveis estatisticamente independentes e para uma função de falha linear, a confiabilidade pode ser facilmente obtida através da distância da função de falha até a origem. Essa é a idéia principal do método FORM.

No método FORM, as variáveis aleatórias componentes do vetor aleatório  $\underline{X}$  têm distribuições quaisquer e podem ser dependentes entre si ou não. Elas são transformadas em variáveis normais padrão componentes do vetor  $\underline{Z}$ , estatisticamente independentes, ou seja, i.i.d.. A função de falha  $G(\underline{X})$  é escrita em função de  $\underline{Z}$  como  $g(\underline{Z})$ . Depois disso, a equação de estado limite  $g(\underline{Z}) = 0,0$  é aproximada por uma função linear (ou hiperplano) no ponto com a menor distância até a origem. Este ponto é identificado como  $\underline{Z}^*$  e é conhecido como ponto de projeto no espaço das variáveis reduzidas. A partir daí a probabilidade de falha, de acordo com o que foi apresentado anteriormente, pode ser simplesmente calculada como:

$$p_F = \Phi(-\beta)$$

Nessa expressão  $\beta$  é a distância do ponto  $\underline{Z}^*$  até a origem e é calculado de acordo com a expressão:

$$\beta = |\underline{Z}^*|$$

Então, tem-se que

$$\underline{Z}^* = -\underline{\alpha}\beta \quad \text{e} \quad g(\underline{Z}) = \beta - \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i$$

onde  $\underline{\alpha}$  é o vetor ortogonal à superfície de falha no ponto de projeto.

Adiante, na figura (7.2) é ilustrado o procedimento de cálculo da probabilidade de falha pelo método FORM.

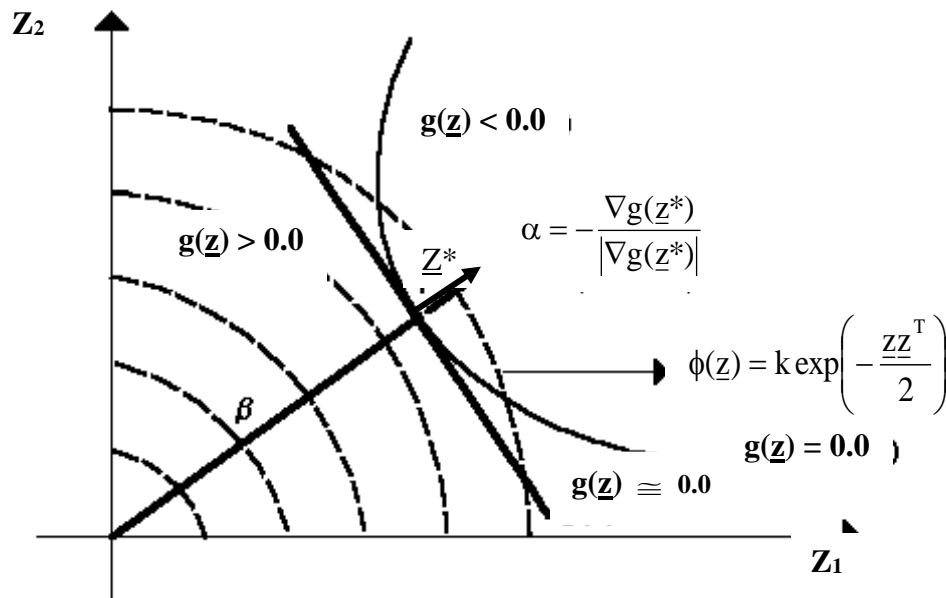


Fig. 7.2 - Representação gráfica do método FORM para Sup. Côncavas e Convexas

Deve ser observado que o método FORM é um método que calcula a probabilidade de falha de forma aproximada e é dependente da forma da função  $g(\underline{Z})$  no espaço das variáveis reduzidas. Como mostra a figura (7.2), a aproximação pode ser a favor da segurança quando  $g(\underline{Z})$  for convexa em torno do ponto de projeto ou ser contra a segurança no caso contrário. Porém, para casos práticos de estruturas, a diferença entre valor real e o valor aproximado da probabilidade de falha é irrelevante.

Os principais desafios no método FORM são: a busca do ponto de projeto  $\underline{Z}^*$  e a transformação das variáveis em normais padrão. Adiante se verá que a transformação das variáveis pode ser feita utilizando as distribuições normais equivalentes e o ponto de projeto pode ser obtido através da solução de um problema de otimização (programação não-linear).

### 7.2.2 - Transformação de variáveis

Existem várias possibilidades para transformar as variáveis aleatórias componentes de  $\underline{X}$  em normal padrão, estatisticamente independentes  $\underline{Z}$ . Porém, a metodologia com maior uso em confiabilidade estrutural, baseia-se na transformação de variáveis normais correlacionadas em variáveis normais estatisticamente independentes. Esta transformação é conhecida como transformação de Nataf [Kiureghian and Liu, 1986].

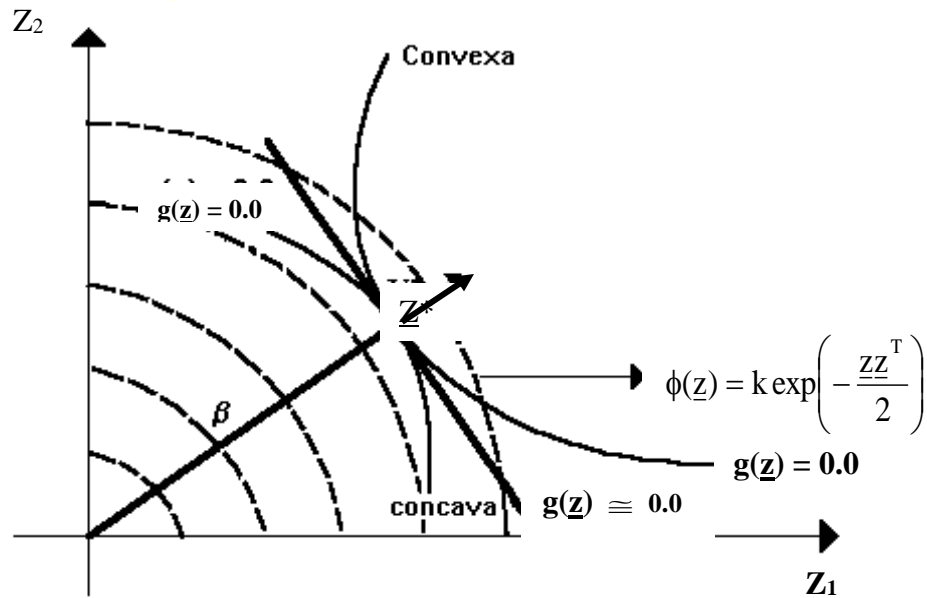


Fig. 7.3 - Aproximação pelo FORM para superfícies côncavas e convexas

Se o vetor aleatório  $\underline{X}$  tiver por componentes somente variáveis Gaussianas e se estas forem correlacionadas entre si (ou não) um conjunto de variáveis normais padrão estaticamente independentes pode ser obtido pela seguinte transformação:

$$\underline{Z} = L^{-1}D^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu})$$

onde  $\underline{\mu}$  é o vetor médio ( $E(\underline{X})$ ),  $D$  é a matriz desvio padrão com a diagonal formada com os desvios padrões das variáveis componentes de  $\underline{X}$  e  $L$  é a matriz triangular inferior obtida da decomposição de Choleski da matriz de correlação de  $\underline{X}$ , e que é expressa por

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{22} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{1n} & L_{2n} & \cdot & L_{nn} \end{bmatrix}$$

onde  $n$  é o número de variáveis aleatórias envolvidas na transformação e os termos  $L_{ij}$  são definidos por:



$$\begin{aligned}
L_{11} &= 1.0 \\
L_{i1} &= \rho_{i1} \quad i = 1, n \\
L_{ik} &= \frac{1}{L_{kk}} \left( r_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij} L_{kj} \right) \quad 1 < k < i \\
L_{ii} &= \sqrt{1 - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}^2} \quad i > 1
\end{aligned}$$

onde  $\rho_{ij}$  é o coeficiente de correlação entre as variáveis  $X_i$  e  $X_j$ .

A determinação do ponto de projeto depende da definição do Jacobiano da transformação, ou seja,

$$J = \frac{\partial \underline{Z}}{\partial \underline{X}}$$

Então, a partir da equação,  $\underline{Z} = L^{-1}D^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu})$ , tem-se

$$J = L^{-1}D^{-1}$$

Na realidade, em grande parte dos casos as variáveis não são Gaussianas e, então, uma transformação em **normal equivalente**, como apresentada anteriormente, pode ser empregada para se poder operar com a equação  $\underline{Z} = L^{-1}D^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu})$ . A transformação em normais equivalentes não considera casos onde as variáveis são correlacionadas. No caso de variáveis correlacionadas também é possível usar a mesma transformação para se obter normais equivalentes, desde que os coeficientes de correlações entre as variáveis originais sejam corrigidos para coeficientes de correlações entre as normais equivalentes.

Sejam as variáveis  $X_i$  e  $X_j$  com distribuições de probabilidades quaisquer e dependentes entre si. Essa dependência é definida pelo coeficiente de correlação  $\rho_{ij}$  e, então, o coeficiente de correlação equivalente entre as duas distribuições normais equivalentes às das variáveis  $X_i$  e  $X_j$  é definido como:

$$\rho_{ij}^E = F\rho_{ij}$$

com  $F$  sendo um fator que depende somente de  $\rho_{ij}$  e dos coeficientes de variação das variáveis  $X_i$  e  $X_j$ . O fator  $F$  não depende do ponto onde a transformação está sendo realizada. Kiureghian and Liu [1986] desenvolveram expressões analíticas para o valor do fator  $F$  para um grande número de distribuições de probabilidades.

Assim, com as normais equivalentes para as variáveis componentes de  $\underline{X}$  definidas e as suas correlações equivalentes, a expressão  $\underline{Z} = L^{-1}D^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu})$  pode ser empregada para obter variáveis normais padrões estatisticamente independentes  $\underline{Z}$ .

A transformação de Nataf descrita anteriormente opera com a distribuição marginal das variáveis aleatórias e com o coeficiente de correlação entre as variáveis, ou seja, a função densidade de probabilidades conjunta  $f_{\underline{X}}(\underline{X})$  não é conhecida. Por este motivo, se diz que tais informações, distribuição marginal e coeficientes de correlação, são informações probabilísticas incompletas. Porém, este é o caso da grande maioria das aplicações práticas.

No caso onde as informações probabilísticas completas são conhecidas, ou seja,  $f_{\underline{X}}(\underline{X})$  é conhecida, a transformação de Rosenblatt [Madsen, et al. 1986] é a mais indicada para a transformação das variáveis  $\underline{X}$  em  $\underline{Z}$ . Esta transformação é definida por:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \Phi^{-1}[F_{x1}(X_1)] \\ Z_2 &= \Phi^{-1}[F_{x2}(X_2|X_1)] \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ Z_n &= \Phi^{-1}[F_{xn}(X_n|X_1X_2\dots\dots\dots X_{n-1})] \end{aligned}$$

onde  $F_{xi}(X_n|X_1X_2\dots\dots\dots X_{n-1})$  é a função distribuição acumulada de probabilidades da variável  $X_i$  condicionada a valores conhecidos da variáveis  $X_1, X_2, \dots\dots, X_{n-1}$  e  $\Phi^{-1}(\cdot)$  é o inverso da função distribuição acumulada normal padrão. Como poucas vezes na prática estão disponíveis os dados na forma adequada para serem utilizados na transformação de Rosenblatt, a transformação de Nataf é a mais usada. Mesmo para os casos onde a distribuição de probabilidade conjunta das variáveis é conhecida, o modelo de Nataf pode ser empregado, utilizando alguns detalhes a mais do que foi apresentado anteriormente. Este tópico pode ser visto com maiores detalhes em [Kiureghian and Liu, 1986].

### 7.2.3 – Pesquisa do Ponto do Projeto

Uma das etapas fundamentais para o cálculo da probabilidade de falha pelo método FORM é o de encontrar o ponto  $\underline{Z}^*$  sobre a superfície de falha que seja mais próximo à origem. Evidentemente, este é um problema de otimização com solução por programação não-linear com uma restrição tal que:

$$\begin{aligned} P1: & \text{minimize } |\underline{Z}| \\ & \text{Sujeito a } g(\underline{Z}) = 0 \end{aligned}$$

Diversos algoritmos de otimização são usados para resolver este problema. O algoritmo de uso mais comum na análise de confiabilidade estrutural é o devido a Hasofer and Lind [1974] e aprimorado por Rackwitz and Fiessler [1978]. Este algoritmo é comumente identificado como HL-RF e é resumido pela seguinte expressão recursiva:

$$\underline{Z}^{K+1} = \frac{1}{|\nabla g(\underline{Z}^K)|^2} \left[ \nabla g(\underline{Z}^K)^T \underline{Z}^K - g(\underline{Z}^K) \right] \nabla g(\underline{Z}^K)^T$$

onde  $\nabla g(\underline{Z}^k)$  é o gradiente da função de falha no espaço reduzido e  $g(\underline{Z}^k)$  é o valor da função de falha, ambos avaliados no ponto  $\underline{Z}^k$ .

As seguintes relações são de muita utilidade no uso do algoritmo de HL-RF,

$$\underline{Z} = L^{-1}D^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu})$$

$$\nabla g(\underline{Z}) = (J^{-1})^T \nabla G(\underline{X})$$

onde  $\nabla G(\underline{X})$  é o gradiente da função de falha no espaço original avaliado no ponto  $\underline{X}$ . Mas, na maioria das vezes este método alcança a convergência rapidamente, porém pode não convergir em algumas situações.

#### 7.2.4 – Resumo e Algoritmo do Método FORM

##### Resumo

- 1<sup>o</sup>. – As variáveis componentes do vetor  $\underline{X}$  com distribuições quaisquer são transformadas em variáveis componentes do vetor  $\underline{Z}$ , normais padrão, estatisticamente independentes.
- 2<sup>o</sup>. – A função de falha  $g(\underline{X})$  passa a ser função de  $\underline{Z}$ ,  $g(\underline{Z})$ .
- 3<sup>o</sup>. – A função de estado limite  $g(\underline{Z}) = 0$  é aproximada por um plano ou hiperplano no ponto,  $\underline{Z}^*$ , de menor distância da origem que é chamado ponto de projeto.
- 4<sup>o</sup>. – O cálculo do índice de confiabilidade  $\beta$  é dado pela distância do ponto de projeto,  $\underline{Z}^*$ , à origem, ou seja:  $\beta = |\underline{Z}^*|$ .

Então, é importante destacar que:

##### A) Transformação de Variáveis

Na transformação de variáveis aplica-se a Transformada de Nataf que torna v.a's Gaussianas correlacionadas em v.a's estatisticamente independentes. Assim, verifica-se se as variáveis aleatórias componentes do vetor  $\underline{X}$  são Gaussianas, caso não sejam deve-se obter as normais equivalentes.

Então, com as v.a's Gaussianas ou normais equivalentes correlacionadas, ou não, entre si, obtém-se as v.a's componentes de  $\underline{Z}$  normais padrão por:

$$\underline{Z} = L^{-1}D^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu})$$

onde  $\underline{\mu} = E(\underline{X})$ ,  $D$  é a matriz desvio padrão e  $L$  é a matriz triangular inferior obtida pela decomposição de Choleski da matriz de correlação de  $\underline{X}$ ,

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & & & \\ L_{21} & L_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ L_{p1} & L_{p2} & \dots & L_{pp} \end{bmatrix}$$

e onde p é o número de variáveis.

## B) O Ponto de Projeto

O ponto de projeto  $\underline{Z}^*$  é o ponto da função estado limite no espaço reduzido de  $\underline{Z}$  com a maior densidade de probabilidade, ou seja, é o ponto máximo entre a origem e a superfície de falha. Para determinar este ponto existem vários algoritmos. O mais conhecido é o HLRF (Hasover Lind, 1974; Rackwitz e Fiessler 1978). De forma que o ponto de projeto é a solução de um problema de otimização com a restrição dada por:

$$\underline{Z}^* = \arg \min \{ \|\underline{Z}\| \mid g(\underline{Z}) = 0 \}$$

onde

- $\underline{Z}^*$  é o ponto de projeto
- $\arg \min$  é o argumento da função minimizante
- $\underline{Z}$  é o vetor de variáveis no espaço reduzido
- $g(\underline{Z})$  é a função de falha no espaço reduzido

## Algoritmo

$$\underline{Z}^{k+1} = \frac{1}{|\nabla g(\underline{Z}^k)|^2} [\nabla g(\underline{Z}^k)' \underline{Z}^k - g(\underline{Z}^k)] \nabla g(\underline{Z}^k)$$

onde

- $\nabla g(\underline{Z}^k)$  é o gradiente da função de falha no espaço reduzido do ponto  $\underline{X}^k$  na iteração k;
- $g(\underline{Z}^k)$  é o valor da função de falha no ponto  $\underline{Z}^k$ .

Então, o procedimento em detalhes do algoritmo é o seguinte:

Admitindo-se um sistema do tipo Resistência x Solicitação para o qual se quer determinar a confiabilidade do sistema que tem função de falha  $g(\underline{X}) = R - S$  deve-se seguir os passos:

**1º.** – Construir a matriz  $L = \begin{bmatrix} L_{11} & & & \\ L_{21} & L_{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ L_{p1} & L_{p2} & \dots & L_{pp} \end{bmatrix}$  triangular inferior obtida usando a

decomposição de Choleski da matriz de correlação de  $\underline{X}$ .

**2º.** – Tomar o vetor médio  $\underline{\mu} = E(\underline{X})$  como ponto inicial no espaço original.

**3º.** – Calcular as médias e os desvios padrões das normais equivalentes no ponto inicial e montar o vetor  $\underline{M}$  e a matriz  $D^{-1}$  com esses valores.

**4º.** – Avaliar a função de falha e seus gradientes no espaço original e, depois, no reduzido (Normal Padrão):

$$g(\underline{X}) = R - S \quad \text{no espaço original}$$

$$g(\underline{Z}) \quad \text{com } \underline{Z} = LD^{-1}(\underline{X} - \underline{M}) \quad \text{no espaço reduzido}$$

$$J = LD^{-1} \quad \text{matriz Jacobiana}$$

$$\nabla g(\underline{Z}) = (J^{-1})' \nabla g(\underline{X})$$

**5º.** – Avaliar o novo ponto de projeto dado por HLRF

$$\underline{Z}^{k+1} = \frac{1}{|\nabla g(\underline{Z}^k)|^2} [\nabla g(\underline{Z}^k)' \underline{Z}^k - g(\underline{Z}^k)] \nabla g(\underline{Z}^k)$$

**6º.** – Calcular o índice de confiabilidade  $\beta$  dado por  $\beta = |\underline{Z}^{k+1}|$

**7º.** –  $\underline{Z}^{k+1}$  será o novo ponto de projeto se verificar o critério de convergência seguinte:

$$\frac{|\underline{Z}^{k+1}| - |\underline{Z}^k|}{|\underline{Z}^{k+1}|} \leq \text{tol} \quad (\text{tolerância})$$

**8º.** – Se  $\frac{|\underline{Z}^{k+1}| - |\underline{Z}^k|}{|\underline{Z}^{k+1}|} > \text{tol}$  o processo recomeça com o ponto resultante sendo o inicial e, de novo, calculam-se as médias e os desvios padrões da normal equivalente nesse ponto e repete-se tudo.

**9º.** – Uma vez verificada a convergência tem-se o ponto de projeto definitivo e no espaço original tem-se:

$$\underline{X}^{k+1} = \underline{X}^k + (J^{-1})'(\underline{Z}^{k+1} - \underline{Z}^k)$$

**10<sup>o</sup>** – Calcula-se a probabilidade de falha  $p_f = \Phi(-\beta)$ .

**Exercício 10:** Hatashita L. S. e Machado, R. D apresentam uma aplicação do Método FORM bastante interessante, é o seguinte: seja parte de uma estrutura metálica treliçada projetada em perfis do tipo cantoneira em aço carbono (veja figura no quadro branco). A solicitação sobre esta estrutura é composta das seguintes partes:

1. peso próprio;
2. equipamentos suportados pela estrutura;
3. esforços causados pelo vento.

Pede-se o cálculo da confiabilidade em uma cantoneira qualquer da estrutura (barra). As variáveis envolvidas na resistência e na solicitação são consideradas independentes e tem-se os seguintes dados para solução do problema de confiabilidade:

1. Resistência  $R$  é uma v.a. lognormal com média  $\mu_R = 249,78$  kN;  $cv_R = 0,10$  e  $\sigma_R = 24,978$  kN;
2. Solicitação devido ao peso próprio  $S_{pp}$  é uma v.a.  $N(19,86 ; 0,993^2)$  e  $cv_{pp} = 0,05$ ;
3. Solicitação devido ao vento  $S_{sv}$  é uma v.a. Gumbel Tipo I (máximo) com média  $\mu_{sv} = 78,84$  kN;  $\sigma_{sv} = 15,768$  kN e  $cv_{sv} = 0,20$ .

Pede-se o cálculo da confiabilidade em uma cantoneira qualquer da estrutura (barra) seguindo a sequência de itens:

- a) calcule os parâmetros da distribuição lognormal de  $R \sim LN(\lambda_R ; \xi_R^2)$ ;
- b) calcule os parâmetros da distribuição de Gumbel de  $S_v \sim G(\alpha ; u)$ ;
- c) calcule os parâmetros da normal equivalente à lognormal  $R$  para o ponto médio  $\mu_R = 249,78$  kN;
- d) calcule os parâmetros da normal equivalente à Gumbel  $S_v$  para o ponto médio  $\mu_{sv} = 78,84$  kN;
- e) escreva a função de falha  $g(\underline{X})$ ;
- f) construa a matriz  $L$ , lembrando que as v.a.'s são independentes;
- g) aplique o algoritmo para obter o ponto de projeto, o índice de confiabilidade  $\beta$  e a probabilidade de falha  $p_f$ .

### 7.3 - Método SORM (Second Order Reliability Method)

#### 7.3.1- Introdução

A diferença entre os métodos SORM e FORM está na aproximação feita para a superfície de falha no espaço reduzido. No método SORM, ao invés de se trabalhar com um hiperplano no ponto de projeto  $\underline{Z}^*$  se faz uma aproximação por uma superfície quadrática, como mostra a figura (7.4).

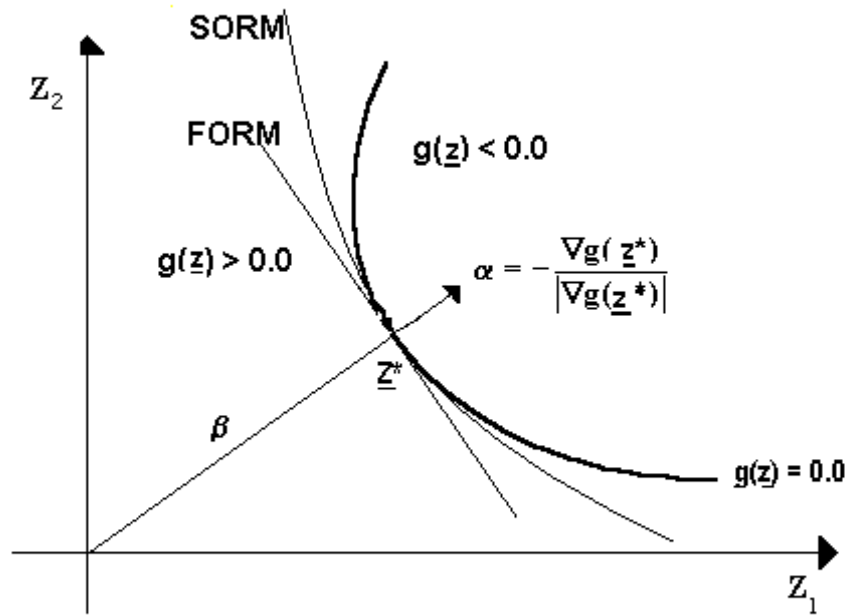


Fig. 7.4 - Ilustração dos Métodos Analíticos FORM e SORM

Existem várias expressões para o cálculo, com essa aproximação, da probabilidade de falha  $p_f$ . Porém, a mais simples delas é a fórmula de Breitung [Breitung, 1984],

$$p_f = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-1/2}$$

onde  $k_i$  são as curvaturas principais da superfície de falha no ponto de projeto  $\underline{Z}^*$  e  $n$  é o número de variáveis aleatórias na análise. A avaliação de  $k_i$  é feita conforme os procedimentos apresentados em [Liu and Kiureghian, 1989; Madsen et al., 1986; Breitung, 1984]. Esses procedimentos envolvem o cálculo das derivadas de segunda ordem da função de falha no ponto de projeto.

A expressão de  $p_f$  citada é uma aproximação assintótica, de modo que ela converge para o valor exato para valores pequenos de  $p_f$ . A solução exata para a probabilidade correspondente a uma superfície de estado limite quadrática foi recentemente obtida por Tvedt [1990]. Esta solução é um pouco mais complicada que a expressão anterior pois a mesma envolve uma integração envolvendo números complexos.

### 7.3.2 - Algoritmo para Análise de Confiabilidade pelos Métodos FORM e SORM

A análise de confiabilidade pelos métodos analíticos FORM e SORM podem ser resumida pelo seguinte algoritmo:

- 1) Estimar as correlações equivalentes entre as variáveis e montar a matriz  $L^{-1}$  ;
- 2) Escolher um ponto de partida  $\underline{X}_0$  no espaço original, geralmente usa-se as médias;
- 3) Estimar as médias e desvios padrões das normais equivalentes no ponto de partida  $\underline{X}_0$  através das expressões:

$$\hat{\sigma}_{X_i}^N = \frac{\phi\{\Phi^{-1}(F_{X_i}(X_i^*))\}}{f_{X_i}(X_i^*)}$$

$$\hat{\mu}_{X_i}^N = X_i^* - \sigma_{X_i}^N \Phi^{-1}(F_{X_i}(X_i^*))$$

e depois montar a matriz D e o vetor  $\hat{\underline{\mu}}$ , com os respectivos desvios padrões e médias das normais equivalentes;

- 4) Estimar a função de falha  $G(\underline{X})$ , o Jacobiano e o gradiente de  $G(\underline{X})$  no espaço reduzido através das expressões:

$$g(\underline{Z}) = G(\underline{X})$$

$$\underline{J} = L^{-1} D^{-1}$$

$$\nabla g(\underline{Z}) = (\underline{J}^{-1})^T \nabla G(\underline{X})$$

- 5) Transformar o ponto de partida para o espaço reduzido usando

$$\underline{Z} = \underline{J}(\underline{X} - \hat{\underline{\mu}})$$

- 6) Avaliar o novo ponto  $\underline{Z}^{\text{seguinte}}$  através do algoritmo HL-RF

$$\underline{Z}^{\text{seguinte}} = \frac{1}{|\nabla g(\underline{Z})|^2} [\nabla g(\underline{Z})^T \underline{Z} - g(\underline{Z})] \nabla g(\underline{Z})^T$$

- 7) Avaliar o índice de confiabilidade

$$\beta = |\underline{Z}^{\text{seguinte}}|$$



8) Avaliar o novo ponto  $\underline{X}^{\text{segu inte}}$  no espaço original através da seguinte expressão

$$\underline{X}^{\text{segu inte}} = \underline{X} + (\underline{J}^{-1})^T (\underline{Z}^{\text{segu inte}} - \underline{Z})$$

9) Tomar  $\underline{X}^{\text{segu inte}}$  como novo ponto de partida e repetir os passos 3 a 8 até a convergência. Assim, tem-se:

$$\frac{|\underline{Z}^{\text{segu inte}}| - |\underline{Z}|}{|\underline{Z}^{\text{segu inte}}|} \leq \text{tolerância fixada}$$

10) Avaliar a probabilidade de falha pelo método FORM usando a expressão:

$$p_f^{\text{FORM}} = \Phi(-\beta)$$

11) Avaliar a probabilidade de falha pelo método SORM usando a expressão:

$$p_f^{\text{SORM}} = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta_{k_i})^{-1/2}$$

A estimação da probabilidade de falha pelo método FORM envolve além da avaliação da função de falha nos pontos calculados pelo algoritmo o cálculo das suas derivadas para compor o vetor gradiente. Em problemas práticos o cálculo destas derivadas pode ser feito numericamente via diferenças finitas. Este cálculo envolve no mínimo  $n$  avaliações a mais da função de falha por iteração do algoritmo HL-RF, onde  $n$  é o número de variáveis aleatórias. Portanto, para problemas onde a função de falha  $G(\underline{X})$  é computacionalmente cara de ser avaliada é melhor, se possível, trabalhar com derivadas analíticas e não numéricas.

No SORM é necessário calcular as derivadas de segunda ordem de  $G(\underline{X})$  para a avaliação das curvaturas no ponto de projeto. Embora o cálculo destas derivadas possa ser feito somente quando houve a convergência do algoritmo HL-RF, valem as observações feitas anteriormente para funções de falha que requerem elevados tempos de computador para serem avaliadas. Na grande maioria dos problemas práticos apenas o método FORM tem sido usado

## 8. SUPERFÍCIES DE RESPOSTA NA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

Foi visto anteriormente que a análise de confiabilidade estrutural é baseada na existência de uma função de falha  $g(\underline{X})$ . Em muitos problemas reais, esta função pode ser

computacionalmente muito cara de ser avaliada. Isto significa que cada avaliação de  $g(\underline{X})$  demanda um elevado tempo de trabalho computacional de CPU. Este é um problema sério para praticamente todos os métodos de análise de confiabilidade. Até o método analítico FORM, que é supostamente o método que requer menos avaliações de  $g(\underline{X})$ , pode ficar inviabilizado devido à necessidade da avaliação numérica do gradiente  $\nabla g(\underline{X})$ . Devido a isto surgiu a idéia de se obter uma função de falha  $\bar{g}(\underline{X})$  mais simples de ser avaliada e que aproxime de maneira adequada a função de falha original  $g(\underline{X})$ . Para esta finalidade é utilizada a chamada técnica de superfície de resposta.

Superfície de resposta é uma técnica estatística clássica usada para aproximar um modelo complexo por uma relação funcional mais simples que relaciona os resultados de um experimento às variáveis de entrada. Frequentemente, estas relações são representadas por superfícies lineares, quadráticas ou cúbicas. E, para obtenção das mesmas são empregados o método dos mínimos quadrados ou a expansão em série de Taylor. Mais recentemente, procedimentos de interpolação empregam funções do tipo *spline*, que têm se mostrado bastante atrativas.

Para uma função de falha aproximada  $\bar{g}(\underline{X})$  qualquer um dos métodos de confiabilidade pode ser utilizado. No caso dos métodos analíticos uma das principais vantagens é que o gradiente  $\nabla g(\underline{X})$  é facilmente obtido. Entretanto, o sucesso desta técnica depende do grau de aproximação da função  $\bar{g}(\underline{X})$  na região de interesse, ou seja, próximo ao ponto de projeto.

Deve-se enfatizar que não necessariamente toda  $g(\underline{X})$  precisa ser substituída por uma função aproximada. Por exemplo, se  $g(\underline{X})$  pode ser desmembrada em  $g(\underline{X}) = R(\underline{X}) - S(\underline{X})$ ,  $R(\underline{X})$  pode ser representada por função aproximada  $\bar{R}(\underline{X})$ , enquanto  $S(\underline{X})$  calculada sem nenhuma aproximação, ou vice-versa. Aplicações desta natureza podem ser vistas em Holm (1990); Sagrilo et al. (1996).

## 8.1 - Aproximação por Superfícies Lineares e Quadráticas

A maneira mais simples de se obter uma superfície aproximada para uma função  $f(\underline{x})$ , qualquer, onde  $\underline{x}' = [x_1, x_2, \dots, x_p]$ , é a aproximação feita por uma superfície linear (ou hiperplano) da forma:

$$\bar{f}(\underline{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x_i$$

onde,  $a_0, a_1, \dots, a_p$  são os coeficientes do hiperplano e  $p$  é o número de variáveis envolvidas. Os coeficientes  $a_i$  são obtidos a partir de  $p+1$  pontos iniciais (ponto onde a verdadeira  $f(\underline{x})$  deve ser avaliada)  $\underline{x}^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_p^i]$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, p$  e da solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1^0 & \cdots & x_p^0 \\ 1 & x_1^1 & \cdots & x_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^p & \cdots & x_p^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_p) \end{bmatrix}$$

Mas, os casos em que  $f(\underline{x})$  não é linear a aproximação dada pela equação:

$$\hat{f}(\underline{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x_i$$

pode ser bastante pobre dando bons resultados somente onde os pontos iniciais  $\underline{x}^i$  foram tomados. Notar que neste caso  $p+1$  avaliações de  $f(\underline{x})$  se fazem necessários.

Uma melhor aproximação de  $f(\underline{x})$  pode ser obtida através do uso de uma superfície quadrática completa ou incompleta. Uma superfície quadrática incompleta corresponde ao hiperplano linear acrescido dos termos quadráticos diagonais, ou seja,

$$\hat{f}(\underline{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x_i + \sum_{i=1}^p b_i x_i^2$$

onde  $a_0, a_1, \dots, a_p$  são os coeficientes dos termos lineares e  $b_0, b_1, \dots, b_p$  são os coeficientes correspondentes aos termos quadráticos. Os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  são obtidos a partir de  $2p+1$  pontos iniciais  $\underline{x}^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_p^i]$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 2p$  e da solução do seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1^0 & \cdots & x_p^0 & (x_1^0)^2 & \cdots & (x_p^0)^2 \\ 1 & x_1^1 & \cdots & x_p^1 & (x_1^1)^2 & \cdots & (x_p^1)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^{p+1} & \cdots & x_p^{p+1} & (x_1^{p+1})^2 & \cdots & (x_p^{p+1})^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^{2p} & \cdots & x_p^{2p} & (x_1^{2p})^2 & \cdots & (x_p^{2p})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{p+1}) \\ \vdots \\ f(x_{2p}) \end{bmatrix}$$

Uma superfície quadrática completa corresponde à superfície quadrática incompleta acrescentada dos termos quadráticos cruzados, i.e.,

$$\hat{f}(\underline{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x_i + \sum_{i=1}^p b_i x_i^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=j+1}^p c_{jk} x_j x_k$$

onde  $c_{jk}$  são os coeficientes dos termos cruzados. Os coeficientes da expressão são obtidos de forma semelhante aos das superfícies anteriores, porém neste caso o número de pontos iniciais para obter a superfície completa é  $(p+1)(p+2)/2$ , o que limita a sua aplicação. Para que a matriz do sistema de equações apresentado anteriormente não se torne singular,

é necessário tomar alguns cuidados na geração dos pontos iniciais. Uma maneira de se proceder, no caso se uma aproximação linear, é a partir de um ponto inicial  $\underline{x}^0 = [x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0]$  arbitrário, determinar os demais pontos a partir da expressão

$$\underline{x}_i = \underline{x}_0 + \Delta \underline{x}_i$$

onde  $\Delta \underline{x}_i$  é um vetor que contém um determinado incremento arbitrário  $\delta x_i$  somente para a variável  $x_i$ , i.e.,

$$\Delta \underline{x}_i = [0, 0, \dots, \delta x_i, \dots, 0]$$

Para outros tipos de superfícies a idéia é semelhante, i.e., para completar o número de pontos emprega-se mais um  $\delta x_i$  diferente do primeiro. A experiência acumulada no uso de técnicas de superfícies de resposta permite melhores escolhas dos pontos iniciais.

## **8.2 - Aplicação de Técnicas de Superfície de Resposta na Análise de Confiabilidade pelos Métodos Analíticos FORM e SORM**

Embora a aplicação de técnicas de superfície de resposta não se restrinja aos métodos analíticos, no que segue somente este tipo de aplicação será abordado.

A aplicabilidade das técnicas de superfície de resposta na análise de confiabilidade pelos métodos FORM e SORM é uma aplicação direta do que foi aplicado na seção anterior. A função de falha  $G(\underline{X})$  é representada por uma superfície linear ou quadrática  $\bar{G}(\underline{X})$  e esta é então usada na análise. Deve-se notar que esta aproximação pode ser feita tanto no espaço original como no espaço das variáveis reduzidas. Porém, neste curso nos limitaremos a comentar somente o caso do espaço original por ser uma aplicação simples e direta. Maiores detalhes sobre aproximações feitas no espaço das variáveis reduzidas podem ser encontrados em Holm (1990) e Sagrilo (1994).

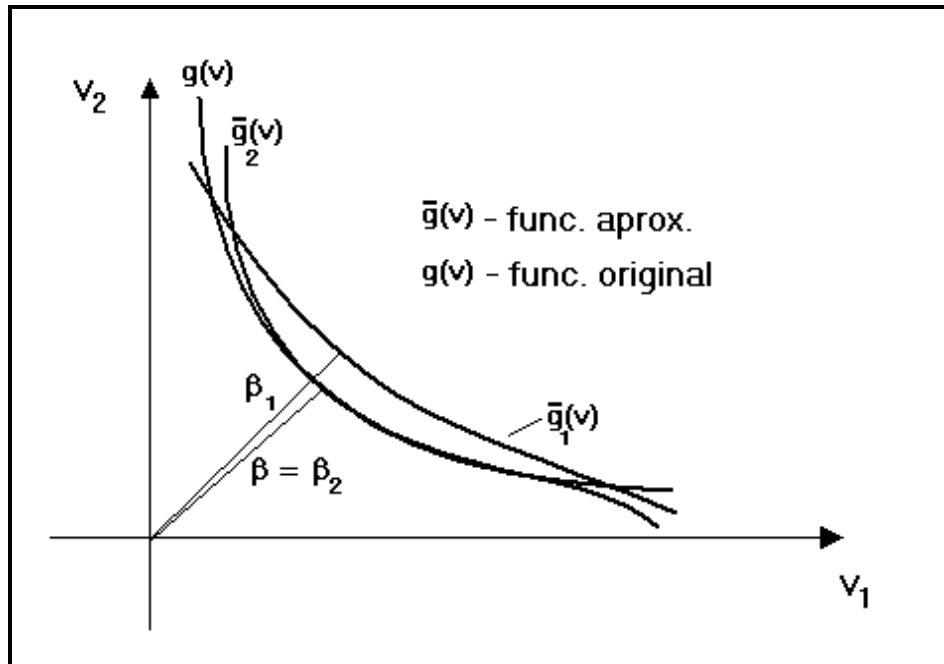


Fig. 8.1 - Aproximações por superfícies de falha

Deve-se salientar que a base dos métodos analíticos é o ponto de projeto, ou seja, o ponto sobre a superfície de falha cuja distância até a origem, no espaço das variáveis reduzidas, é menor. Como inicialmente este ponto de projeto não é conhecido, a superfície aproximada pode ser bastante imprecisa na região do mesmo ou, em outras palavras, o ponto de projeto calculado a partir da função aproximada  $\bar{G}(\underline{X})$  pode ser diferente do verdadeiro. Para melhorar a precisão nestes casos, sugere-se que uma nova função de falha seja definida tomando-se como ponto de partida para definição dos coeficientes desta função o ponto de projeto obtido com a primeira função aproximada. Este procedimento é ilustrado na Figura (8.1).

### Exercício 8.1

Dada a seguinte função de falha

$$G(\underline{X}) = d_{\max} - d(\underline{E}, \underline{A}, \underline{P})$$

onde as variáveis aleatórias componentes de  $\underline{X} = (\underline{E}, \underline{A}, \underline{P})$  são definidas na tabela abaixo,

Variável	Distribuição	Média	Desvio Padrão
E	Lognormal	5.00	0.40
A	Normal	3.00	0.30
P	Gumbel	10.0	2.00

A função  $d(\underline{E}, \underline{A}, \underline{P})$  é definida como o primeiro componente do vetor  $\underline{d}$ , i.e.  $d_1$ , conforme definido pelo sistema  $\mathbf{K}\underline{d} = \underline{F}$  onde

$$K = \begin{bmatrix} \frac{(EA)^{3/2}}{L} & \frac{EA}{L^2} & \frac{EA}{L^2} \\ & \left(\frac{EA}{2L}\right)^2 & -\frac{EA}{L^2} \\ & & \left(\frac{EA}{L}\right)^2 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} (3P)^{\frac{8}{9}} \\ 2P^{\frac{1}{2}} \\ P^2 \end{bmatrix}.$$

Sabendo-se que  $L = 2.0$  e  $d_{\max} = 1.0$ , calcule a probabilidade de  $G(\underline{X}) \leq 0.0$  usando o método FORM clássico.

### 8.3 – Conceituação Clássica de Superfície de Resposta

#### 8.3.1- Planejamento e Metodologia da Superfície de Resposta

A metodologia estatística da superfície de resposta é composta por um conjunto de técnicas de estatística matemática usadas na análise e modelagem de experimentos em que a resposta de interesse é função de variáveis (explicativas) e o objetivo é otimizar a variável resposta.

Seja a situação onde um engenheiro químico deseja determinar os níveis de duas variáveis ( $X_1$  e  $X_2$ ) que otimizam a variável  $Y$ , ou melhor, o engenheiro deseja maximizar o rendimento ( $Y$ ) de um processo que depende da temperatura  $X_1$  e da concentração da alimentação  $X_2$ . Fica claro que o rendimento do processo é uma função dos níveis de temperatura e dos níveis de concentração da alimentação. Assim, tem-se

$$Y = f(X_1, X_2) + \varepsilon$$

No modelo da superfície de resposta definido anteriormente,  $\varepsilon$  é a parte estocástica e  $f(X_1, X_2) = E(Y) = \eta$  é a parte sistemática e que deve ser modelada. Então,  $\eta = f(X_1, X_2)$  é denominada *superfície de resposta*. A figura a seguir mostra o gráfico de uma superfície de resposta,  $VISCOSIDADE = f(TEMPO, TEMP)$ .

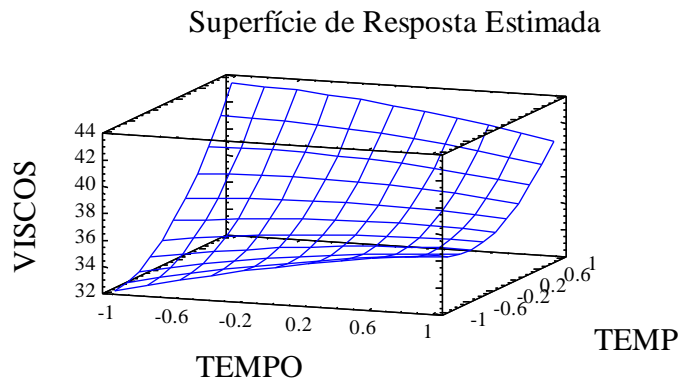


Fig. 8.2 – Superfície de Resposta Estimada

A figura anterior tem o objetivo de permitir a visualização da forma da superfície de resposta. No gráfico tridimensional cada contorno (curva de nível, linha de resposta) corresponde a uma altura particular da superfície de resposta. Geralmente, a forma de  $E(Y) = \eta = f(X_1, X_2)$  é desconhecida. Portanto, na metodologia da superfície de resposta, de início deve-se encontrar uma aproximação adequada para a relação entre a resposta  $Y$  e as variáveis independentes  $X_i$   $i = 1, 2, \dots, p-1$ . Deve-se começar com um polinômio de baixo grau e se a resposta  $Y$  for bem modelada pela função linear das variáveis explicativas tem-se um modelo de 1ª. ordem como função de aproximação

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

Na existência de curvatura no sistema deve-se usar um polinômio de grau maior, p.ex., um de segundo grau que define um modelo de 2ª. ordem como função de aproximação

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \sum_i \sum_{j(i < j)} \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon$$

Difícilmente, se consegue uma aproximação válida para o relacionamento funcional em todo o espaço das variáveis independentes. Mas, em uma região relativamente pequena as aproximações costumam funcionar bem.

A estimação dos parâmetros do modelo nas aproximações polinomiais é feita pelo Método dos Mínimos Quadrados e a análise da superfície de resposta é, então, feita com base na superfície ajustada.

A metodologia da superfície de resposta é um procedimento sequencial.

### 8.3.2- *Método da Ascendente de Maior Inclinação (Steepest Ascent) e Método da Descendente de Maior Inclinação (Steepest Descent)*

No início da aplicação da metodologia de superfície de resposta a estimativa inicial costuma se situar longe do ótimo. Assim, o experimentador deve deslocar a estimativa em direção à vizinhança geral do ponto ótimo. O **Método da Ascendente de Maior Inclinação** é a técnica usada para deslocar sequencialmente ao longo do **caminho ascendente de maior inclinação**, ou seja, na direção de aumento máximo na variável resposta. E, quando a minimização da variável resposta é o objetivo da aplicação da metodologia, então o **Método da Descendente de Maior Inclinação** é usado. Se a aproximação é feita por um modelo

de 1ª. ordem,  $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \sum_{i=1}^k \hat{\beta}_i X_i$ , então os **contornos de  $\hat{y}$**  serão linhas paralelas (um plano).

Assim, a direção da ascendente de maior inclinação será aquela em que  $\hat{y}$  cresce mais rapidamente e, essa direção, é normal aos contornos da superfície de resposta ajustada. Geralmente, toma-se como o **caminho ascendente de maior inclinação** a linha que passa através do centro da região de interesse e que seja normal aos contornos da superfície ajustada. Assim, as etapas ao longo do caminho são proporcionais aos coeficientes de

regressão  $\hat{\beta}_i$  e o tamanho real de cada etapa é fixado pelo experimentador dependendo das informações do processo.

### EXEMPLO 1

Um engenheiro químico está estudando a conversão percentual ou o rendimento de um processo. Há duas variáveis de interesse: o tempo de reação e a temperatura. Devido não ter certeza da linearidade da região de experimentação, o engenheiro planeja um delineamento  $2^2$ , com uma replicação em cada corrida fatorial e aumentado com 5 pontos centrais.

Tempo	Temperatura	Rendimento	Tempo codificado	Temperatura codificada	Rendimento
150	30	39,3	-1	-1	39,3
150	40	40,9	-1	+1	40,9
155	35	40,3	0	0	40,3
155	35	40,5	0	0	40,5
155	35	40,7	0	0	40,7
155	35	40,2	0	0	40,2
155	35	40,6	0	0	40,6
160	30	40,0	+1	-1	40,0
160	40	41,5	+1	+1	41,5

a) Faça a Análise da Variância para o delineamento

#### Análise da Variância

Fonte	SQ	GL	QM	F	valor-P
A:tempo	2.4025	1	2.4025	55.87	0.0017
B:temp	0.4225	1	0.4225	9.83	0.0350
AA+BB (Curvatura)	0.00272222	1	0.00272222	0.06	0.8137
AB	0.0025	1	0.0025	0.06	0.8213
Total error	0.172	4	0.043		
Total (corr.)	3.00222	8			

$R^2 = 94.2709\%$   
 $R^2 = 88.5418\%$  (ajustado pelos G.Ls)  
 Erro padrão da Estimativa = 0.207364  
 Erro médio absoluto = 0.0933333  
 Estatística deDurbin-Watson = 3.11163 (P=0.0061)  
 Lag 1 residual autocorrelation = -0.555814

b) Enuncie hipóteses nulas e teste-as, sobre os fatores, interação e curvatura.

$H_{01}: \alpha_i = 0$ , ou seja, não existe diferença entre os níveis do fator TEMPO;

**Conclusão:** o valor-p do teste F é  $p = 0,0017$ , logo rejeita-se  $H_0$  e os níveis do tempo influenciam de modo diferente o rendimento.

$H_{02}: \beta_j = 0$ , ou seja, não existe diferença entre os níveis do fator TEMPERATURA;



**Conclusão:** o valor-p do teste F é  $p = 0,0350$ , logo rejeita-se  $H_0$  e os níveis da temperatura influenciam de modo diferente o rendimento.

$H_{03}$ :  $(\alpha\beta)_{ij} = 0$ , ou seja, não existe interação entre os fatores tempo e temperatura.

**Conclusão:** o valor-p do teste F é  $p = 0,8213$ , aceita-se  $H_0$  e não existe interação entre tempo e temperatura influenciando o rendimento.

$H_{04}$ :  $\sum_{i=1}^k \beta_{ii} = 0$ , ou seja, não existe curvatura nas linhas de superfície;

**Conclusão:** o valor-p do teste F é  $p = 0,8137$ , logo aceita-se  $H_{04}$  e não existe curvatura nas curvas de nível.

## CONCLUSÃO GERAL

Ambos os fatores são importantes para o rendimento, não existe interação entre os fatores e a superfície de resposta não apresenta curvatura.

## EXEMPLO 2

Continuando o experimento, o engenheiro considerou adequada a aproximação pelo modelo  $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ , que foi estimado por  $\hat{y} = 40,46 + 0,775x_1 + 0,325x_2$  onde o efeito médio é 40,46; 0,775 é a metade do efeito do tempo e 0,325 é a metade do efeito da temperatura. Então, para se afastar do centro da região do planejamento  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$ , deslocando-se na direção do caminho ascendente é necessário se mover 0,775 na direção  $X_1$  para cada 0,325 na direção  $X_2$ . Assim, o caminho ascendente passa pelo ponto (0, 0) e tem uma inclinação de 0,325/0,775. Nestas condições o engenheiro especifica o tempo de reação de 5 minutos como o tamanho básico do passo, que é equivalente a 1 com as variáveis codificadas,  $\Delta x_1 = 1$ . Portanto, as etapas ao longo do caminho ascendente de maior inclinação são  $\Delta x_1 = 1$  e  $\Delta x_2 = 0,325/0,775 = 0,419$ . Assim, um deslocamento de  $\Delta x_2 = 0,419$  na variável codificada  $x_2$  é equivalente a  $2^\circ\text{F}$  na variável temperatura. Enfim, o engenheiro caminhará com experimentos aumentando o tempo de 5 min e a temperatura de  $2^\circ\text{F}$ . Uma observação será obtida em cada ponto. A tabela a seguir mostra os resultados reais:

Tempo	Temperatura	Rendimento
40	157	40,5
45	159	51,3
50	161	59,6
55	163	67,1
60	165	63,6
65	167	60,7

Observando a tabela anterior que mostra as observações reais, nota-se que o rendimento cresce até o ponto (55, 163) onde se tem o rendimento máximo (67,1) e a partir daí o rendimento cai. Agora, que o experimentador já está relativamente próximo do ótimo, um

modelo de 2<sup>a</sup>. ordem é necessário por causa da curvatura que deve existir na verdadeira superfície de resposta.

### EXEMPLO 3

O modelo de 2<sup>a</sup>. ordem a ser ajustado é  $Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \sum_{i,j(i<j)} \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon$

num delineamento composto central, ou seja, quadrado mais estrela com 5 pontos centrais centrado em 55 min e 165°F. A tabela a seguir mostra os resultados do experimento com este novo delineamento.

Tempo	Temperatura	Tempo	Temperatura	Rendimento
50	160	-1	-1	65,3
60	160	+1	-1	68,2
50	170	-1	+1	66
60	170	+1	+1	69,8
48	165	-1,414	0	64,5
62	165	+1,414	0	69
55	158	0	-1,414	64
55	172	0	+1,414	68,5
55	165	0	0	68,9
55	165	0	0	69,7
55	165	0	0	68,5
55	165	0	0	69,4
55	165	0	0	69

a) Construa o quadro da Análise de Variância do experimento.

Análise da Variância

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
A:tempo	21.3335	1	21.3335	34.71	0.0006
B:temp	9.38236	1	9.38236	15.26	0.0058
AA	6.52633	1	6.52633	10.62	0.0139
AB	0.2025	1	0.2025	0.33	0.5839
BB	10.3305	1	10.3305	16.81	0.0046
Total error	4.3026	7	0.614657		
Total (corr.)	50.1923	12			

$R^2 = 91,4278\%$

$R^2(\text{ajustado p/G.L.}) = 85,3047\%$

Erro padrão de est. = 0.784001

- Da Análise da Variância conclui-se que:

- O modelo ajustado é significativo pelos valores-p apresentados.
- A curvatura é significativa pelos valores-p apresentados (de AA e de BB).
- A interação não é significativa (de AB).

- Os coeficientes de regressão do modelo são:

Coeficientes de Regressão

```
-----
constant = 69.0999
A:tempo  = 1.63312
B:temp   = 1.08304
AA       = -0.968796
AB       = 0.225
BB       = -1.21887
-----
```

The StatAdvisor

-----  
This pane displays the regression equation which has been fitted to the data. The equation of the fitted model is

```
rend = 69.0999 + 1.63312*tempo + 1.08304*temp - 0.968796*tempo^2 + 0.225*tempo*temp -
      1.21887*temp^2
```

where the values of the variables are specified in their original units. To have STATGRAPHICS evaluate this function, select Predictions from the list of Tabular Options. To plot the function, select Response Plots from the list of Graphical Options.

- O Gráfico da Superfície de Resposta estimada é:

Superfície de Resposta Estimada

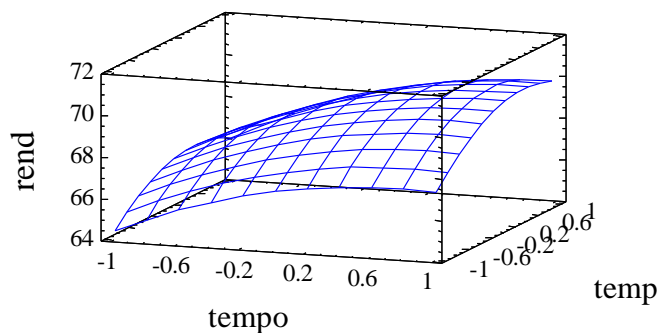


Fig. 8.3 – Superfície de Resposta Estimada (Rendimento)

- O Gráfico das Curvas de Nível da Superfície de Resposta Estimada (Rendimento) é mostrado na fig. 8.4, adiante.

Curvas de Nível da Superfície de Resposta Estimada

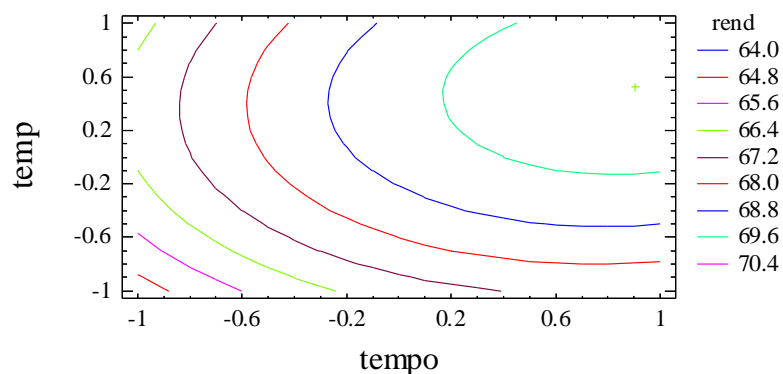


Fig. 8.4 - Curvas de Nível da Superfície de Resposta Estimada

- A resposta otimizada é dada por:

Optimize Response

Goal: maximize rend

Optimum value = 70.124

Factor	Low	High	Optimum
tempo	-1.414	1.414	0.903973
temp	-1.414	1.414	0.527424

The StatAdvisor

This table shows the combination of factor levels which maximizes rend over the indicated region. Use the Analysis Options dialog box to indicate the region over which the optimization is to be performed. You may set the value of one or more factors to a constant by setting the low and high limits to that value.

- O Diagrama de Pareto dos Efeitos é dado por adiante na fig. 8.5

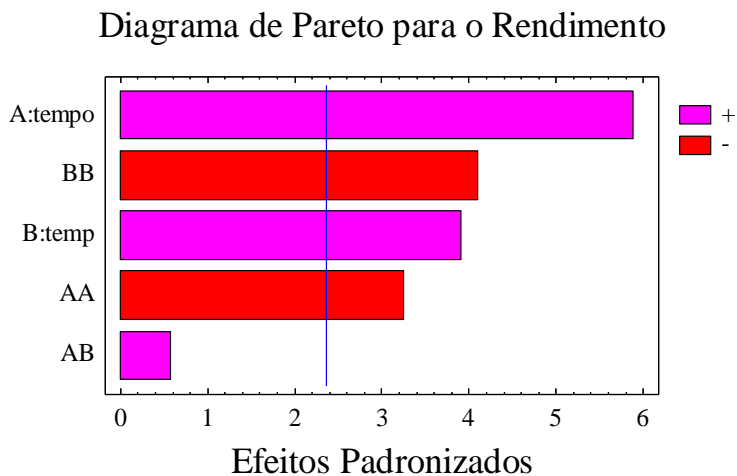


Fig. 8.5 - Curvas de Nível da Superfície de Resposta Estimada (Rendimento)

## 9. SIMULAÇÃO MONTE CARLO

### 9.1- Introdução

O Método de Simulação Monte Carlo é um processo de gerar soluções determinísticas de forma repetida. Assim, cada solução corresponde a um conjunto de valores fixados vindos de variáveis aleatórias. O principal elemento de uma Simulação Monte Carlo é a geração de números aleatórios de uma distribuição específica (Gaussiana, Lognormal, etc).

Uma vez que a solução por Simulação Monte Carlo requer um grande número de repetições sua aplicação em problemas complexos requer um alto custo computacional. Existe, portanto, uma boa razão para se usar a solução Monte Carlo com alguma cautela, ou seja, ela só deve ser usada quando a solução analítica ou aproximada não é disponível ou é inadequada. Muitas vezes a Simulação Monte Carlo é usada para verificar a validade de algum método aproximado de cálculo de alguma probabilidade.

Nas propostas da Engenharia, a Simulação Monte Carlo pode ser aplicada para prever ou estudar o desempenho e/ou a resposta de um sistema. Assim, com um conjunto de valores fixados para os parâmetros do sistema (ou variáveis de projeto), o processo de simulação produz um valor específico para a medida do desempenho ou resposta. Então, repetindo-se este procedimento (simulação) com variação dos valores dos parâmetros do sistema (variáveis de projeto) o desempenho do sistema (ou da variável resposta) pode ser examinado ou avaliado. Desta forma a Simulação Monte Carlo pode ser usada para avaliar (estimar) modelos alternativos ou determinar o procedimento ótimo.

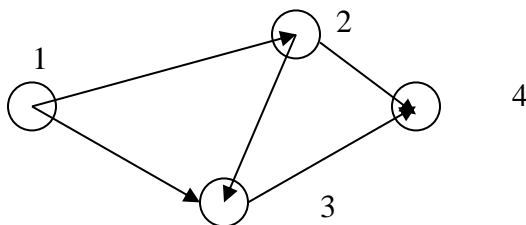
A Simulação Monte Carlo é, particularmente, requerida quanto se tem problemas envolvendo variáveis aleatórias com distribuições de probabilidades conhecidas. Então, no processo de simulação usa-se em cada uma das repetições um particular conjunto de valores das variáveis aleatórias de acordo com as correspondentes distribuições de probabilidade.

Desta forma, por repetição, tem-se uma amostra de soluções, cada uma correspondendo a um conjunto diferente de valores das variáveis aleatórias. Portanto, uma amostra de resultados de uma Simulação Monte Carlo é similar a uma amostra de observações experimentais e consequentemente essa amostra de resultados Monte Carlo pode ser tratada estatisticamente. E, como consequência, os resultados podem ser apresentados na forma de histograma e os métodos de estimação e de inferência estatística podem ser aplicados. Devido isto, a Simulação Monte Carlo é também uma técnica de amostragem e, como tal, compartilha dos mesmos problemas da Teoria da Amostragem, ou seja, os resultados estão sujeitos a erros de amostragem. Geralmente, os resultados das soluções por Simulação Monte Carlo oriundos de amostras finitas não são exatos. Isto poderia ocorrer se a amostra fosse infinitamente grande.

### EXEMPLO 1

Suponha a construção da rede, a seguir, onde as setas representam atividades; enquanto os nós representam o final de uma ou mais atividades e o início da ou das atividades subsequentes. As durações das várias atividades são aleatoriamente distribuídas e estatisticamente independentes. As durações possíveis e as probabilidades associadas são dadas na tabela que segue. Tem-se na tabela as distribuições de probabilidades das durações das atividades. Suponha, ainda, que seis (6) dias tenham sido programados para a execução do projeto. Seja, então, a problema de determinar a probabilidade de que o projeto seja completado no tempo previsto.

Atividade	Duração (dias)	Probabilidade
1-2	2	1/3
	3	1/3
	4	1/3
1-3	4	1/2
	5	1/2
2-3	1	2/3
	2	1/3
2-4	2	1/2
	3	1/2
3-4	2	1



### Solução:

- O término do projeto em 6 dias requer que todos os três (3) possíveis caminhos de atividades (1-2-4, 1-3-4 e 2-3-4) sejam completados. Então, denotando o tempo da atividade  $i-j$  como  $T_{ij}$ , a probabilidade de terminar o projeto dentro de seis (6) dias é dada por:

$$P(T \leq 6) = P[(T_{12} + T_{24} \leq 6) \cap [(T_{12} + T_{23} + T_{34} \leq 6) \cap [(T_{13} + T_{34} \leq 6)]]$$

- Se a atividade 2-3 não existisse, então existiriam apenas dois (2) caminhos de atividades 1-2-4 e 1-3-4, que são independentes. Assim, a solução seria simples. Mas, como 2-3 existe a solução da equação acima é complicada, pois além de surgir um caminho adicional cria, também, correlação entre os vários caminhos. Como alternativa uma simulação pode ser feita; para isto é necessário primeiro gerar os possíveis conjuntos de durações das atividades. Assim, como a duração da atividade 1-3 é de 4 ou 5 dias com igual probabilidade, tem-se que essa duração tem distribuição uniforme discreta com  $P(T_{13} = 4) = P(T_{13} = 5) = 1/2$ . A geração dessa variável aleatória pode ser feita pelo lançamento de uma moeda honesta (cara = 4 e coroa = 5). Da mesma forma a duração da atividade 1-2 tem distribuição uniforme discreta com  $P(T_{12}=2) = P(T_{12}=3) = P(T_{12}=4) = 1/3$ . A geração dessa variável aleatória pode ser feita pelo lançamento de um dado (face 1 e face 2 = 2, face 3 e face 4 = 3 e face 5 e face 6 = 4). Finalmente, têm-se as tabelas a seguir que resumem estes conceitos.

#### Resultados da Simulação (números gerados)

Amostra	1-2	1-3	2-3	2-4	3-4	1-2-4	1-3-4	1-2-3-4	T > 6 ??
1	2	5	1	3	2	5	7	5	Sim
2	2	4	1	3	2	5	6	5	Não
3	4	4	2	2	2	6	6	8	Sim
4	4	5	1	2	2	6	7	7	Sim
5	3	5	1	3	2	6	7	6	Sim
6	2	5	2	2	2	4	7	6	Sim
7	3	5	1	3	2	6	7	6	Sim
8	3	5	2	2	2	5	6	7	Sim
9	3	4	1	2	2	5	6	6	Não
10	3	5	1	2	2	5	7	6	Sim
11	4	5	2	2	2	6	7	8	Sim
12	4	5	1	3	2	7	7	7	Sim
13	3	5	2	2	2	5	7	7	Sim
14	3	5	1	3	2	6	7	6	Sim
15	2	5	1	2	2	4	7	5	Sim

Observando os números gerados tem-se que a probabilidade do projeto ser completado em um tempo menor ou igual a 6 é:

$$P(T \leq 6) = P[(T_{12} + T_{24} \leq 6) \cap [(T_{12} + T_{23} + T_{34} \leq 6) \cap [(T_{13} + T_{34} \leq 6)]] = 2/15 = 13,3\%$$

Mas, se for gerado 18 amostras de tamanho n = 15 e outras 18 de tamanho n = 30 os números resultantes estão na tabela adiante.

**Probabilidades Estimadas de Término do Projeto em 6 ou menos dias**

Repetição de amostra	Probabilidade com n = 15	Probabilidade com n = 30
1	0,13	0,23
2	0,33	0,30
3	0,40	0,30
4	0,27	0,30
5	0,20	0,27
6	0,33	0,33
7	0,33	0,30
8	0,27	0,34
9	0,13	0,20
10	0,44	0,35
11	0,33	0,30
12	0,27	0,17
13	0,20	0,27
14	0,07	0,10
15	0,20	0,33
16	0,20	0,23
17	0,33	0,37
18	0,27	0,23
Probabilidade média	0,2611 = 26,11%	0,2733 = 27,33%
Desvio padrão	0,0974	0,0692

$$\text{I.C. de nível 95\% são : } 0,2611 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,2611 \times 0,7389}{18 \times 15}} = > [0,2087 ; 0,3135]$$

$$0,2733 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,2733 \times 0,7267}{18 \times 30}} = > [0,2357 ; 0,3109]$$



## BIBLIOGRAFIA

- [1] Ang, A. H-S and Tang, W. H. – **Probability Concepts in Engineering Planning and Design**, v.I, J. Willey & Sons, N.Y., 1975.
- [2] Ang, A. H-S and Tang, W. H. – **Probability Concepts in Engineering Planning and Design**, v.II, J. Willey & Sons, N.Y., 1984.
- [3] Beck, A. T – **Curso de Confiabilidade Estrutural**, USP Escola de Engenharia de S. Carlos, 2009.
- [4] Billinton, Roy and Allan, R. N. – **Reliability Evaluation of Engineering Systems, Concepts and Techniques**, 2a. ed., Plenum Press, N.Y. 1992.
- [5] Breitung, K. - **Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 110, No.3, 1984.
- [6] Ditlevsen, O. and Madsen, H.O. – **Structural Reliability Methods**, J. Willey & Sons, N.Y., 1996.
- [7] Fogliatto, F. S. & Ribeiro, J. L. Dantas – **Confiabilidade e Manutenção Industrial**, Elsevier Editora Ltda., 2009.
- [8] Freitas, M. & Colosimo, E. A. – **“Confiabilidade: Análise de Tempo de Falha e Testes de Vida Acelerados”**, UFMG, Fundação Cristiano Ottoni, B. Horizonte, 1997.
- [9] Haldar, A. and Mahadevan, S. – **Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design**, J. Willey & Sons, 2000.
- [10] Haldar, A. and Mahadevan, S. – **Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis**, J. Willey & Sons, 2000.
- [11] Hasofer, A.M. and Lind, N.C. - **Exact and Invariant Second-Moment Code Format**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 100, No. EM1, 1974.
- [12] Hatashita, L. S. – **Análise de Confiabilidade de Torres de Transmissão de Energia Elétrica Quando Sujeitas a Ventos Fortes via Método Analítico FORM**, Dissertação de Mestrado, PPGEM – PUC/PR, 2007.
- [13] Holm, C.A. - **Reliability Analysis of Structural Systems Using Nonlinear Finite Element Methods**, D. Sc. Thesis, Division of Structural Engineering, The Norwegian Institute of Technology, The University of Trondheim, 1990.
- [14] Kiureghian, A.D. and Liu, P.L. - **Structural Reliability Under Incomplete Probability Information**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 112, No.1, 1986.
- [15] Lafraia, J. R. B. - **“Manual de Confiabilidade, Manutenibilidade e Disponibilidade”** – Edt. Qualitymark, 1ª Edição, 2001.
- [16] Liu, P.L. and Kiureghian, A.D. - **Finite-Element Reliability Methods for Geometrically Nonlinear Stochastic Structures**, Report No UCB/SEMM-89/05, Department of Civil Engineering, University of California at Berkeley, 1989.
- [17] Madsen, H.O., Krenk, S., Lind, N.C. - **Methods of Structural Safety**, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1986.
- [18] Madsen, H.O. - **Omission Sensitivity Factors**, *Structural Safety*, Vol. 5, 1988.
- [19] Melchers, R. E. - **Structural reliability: analysis and prediction**, 1a. ed. J. Wiley & Sons, 1987.
- [20] Palady, Paul **“FMEA – Análise de Modos e Efeitos de Falha”** Edt. IMAM, 3ª Edição, 2004.

- [21] Piazza, Gilberto - “**Introdução a Engenharia da Confiabilidade**”, Edt. EDUCS, 1ªEdição, 2000.
- [22] Racwitz, R. and Fiessler, B. - **Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences**, *Computer and Structures*, Vol. 9, 1978.
- [23] Sagrilo, L.V. S. - *Análise de Confiabilidade Estrutural Utilizando os Métodos Analíticos FORM e SORM*, Tese de Doutorado, Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 1994.
- [24] Tvedt, L. - **Distribution of Quadratic Forms in Normal Space - Application to Structural Reliability**, *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 116, No.6, 1990.