Estatística Inferencial

Prof. Wagner Hugo Bonat

Departamento de Estatística
Universidade Federal do Paraná

Reparametrização

Reparametrização

- Interesse pode ser sobre alguma função de um ou mais parâmetros.
- Existem situações em que pode ser mais fácil estimar um quantidade em relação a outra.
- Exemplo: $Y_i : i = 1, \ldots, n$ iid com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(y; \theta) = 2\theta y \exp^{\{-\theta y^2\}} \quad : \quad y \geq 0.$$

- Considere que seja de interesse a reparametrização $\theta = \frac{1}{\mu}$.

Reparametrização

- Verossimilhança

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} 2\theta y_i \exp\{-\theta y_i^2\} = (2\theta)^n \prod_{i=1}^{n} y_i \exp\left[-\theta \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right],$$

- Log-verossimilhança

$$l(\theta) = n \log 2 + n \log \theta + \sum_{i=1}^{n} \log y_i - \theta \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

- Função escore

$$U(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

- EMV

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Reparametrização

- Informação observada

$$I_O(\theta) = -\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2}.$$

- Informação esperada

$$I_E(\theta) = E(I_O(\theta)) = E\left(\frac{n}{\theta^2}\right) = \frac{n}{\theta^2}.$$

- Intervalo *deviance*

$$D(\theta) = 2\left[n \log\left(\frac{\hat{\theta}}{\theta}\right) + (\theta - \hat{\theta})\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right] \leq c^*.$$

Reparametrização

- Considere que estamos interessados em μ. Então, reescrevemos a verossimilhança

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} 2\mu^{-1} y_i \exp\left[-\frac{y_i^2}{\mu}\right] = (2\mu^{-1})^n \exp\left[-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right] \prod_{i=1}^{n} y_i.$$

- Log-verossimilhança

$$l(\mu) = n \log 2 - n \log \mu - \mu^{-1} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \log y_i.$$

- Função escore

$$U(\mu) = -\frac{n}{\mu} + \mu^{-2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Estimador de máxima verossimilhança

- EMV

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n}.$$

- Informação observada

$$\mathrm{I_O}(\mu) = -\frac{\partial^2 \mathrm{l}(\mu)}{\partial \mu^2} = -\frac{\partial}{\partial \mu}\left[-\frac{n}{\mu} + \mu^{-2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right]$$

$$= -n\mu^{-2} + 2\mu^{-3}\sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

- Informação esperada

$$\mathrm{I_E}(\mu) = \mathrm{E}(\mathrm{I_O}(\mu)) = \mathrm{E}\left(-n\mu^{-2} + 2\mu^{-3}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Informação esperada

- Precisamos obter $\mathrm{E}(Y_i^2)$ que é a solução da integral

$$\mathrm{E}(Y_i^2) = \int_0^\infty Y_i^2 2\mu^{-1} Y_i \exp\left[-\frac{Y_i^2}{\mu}\right] dY_i = \mu.$$

- Resolvendo, temos

$$\mathrm{I_E}(\mu) = \mathrm{E}[-n\mu^{-2} + 2\mu^{-3} n\mu] = n\mu^{-2}.$$

- Intervalos de confiança

$$\mathrm{D}(\mu) = 2\left[n \log\left(\frac{\mu}{\hat{\mu}}\right) + (\mu^{-1} - \hat{\mu}^{-1}) \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right].$$

Intervalos de confiança

- Intervalo de Wald

$$\hat{\theta}_L = \hat{\theta} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{\theta}^2/n} \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_U = \hat{\theta} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{\theta}^2/n}.$$

- Ver `Reparametrização.R`.

Reparametrização

- Em geral, em termos práticos não precisamos percorrer todo esse caminho.
- Considere que temos estimativas pontuais e intervalares de θ.
- Queremos estimação pontual e intervalar para μ.
- $\theta = 1/\mu$, logo $\mu = 1/\theta$ por invariância $\hat{\mu} = 1/\hat{\theta}$.
- Função *deviance* também são invariantes então basta aplicar a transformação inversa igual feito para a estimativa pontual.
- Vamos usar o método Delta. Note que $\mu = g(\theta)$.
- Temos que $V(\hat{\theta}) = \hat{\theta}^2/n$.
- Qual é a variância de $\hat{\mu}$?

Método Delta: Aplicação

- Método Delta diz que $\text{V}(\hat{\mu}) = g'(\hat{\theta})^2 I_E(\hat{\theta})^{-1}$.
- Particularizando, para nosso exemplo

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\hat{\theta}} = \text{g}(\hat{\theta}) \rightarrow \text{g}'(\hat{\theta}) = -\frac{1}{\hat{\theta}^2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{V}(\hat{\mu}) &= \left(-\frac{1}{\hat{\theta}^2}\right)^2 \frac{\hat{\theta}^2}{n} \\
&= \frac{1}{\hat{\theta}^4}\frac{\hat{\theta}^2}{n} = \frac{1}{\hat{\theta}^2 n} \\
&= \frac{1}{0.400^2 \cdot 10} = 0.625
\end{aligned}$$

Perfil de verossimilhança

Perfil de verossimilhança

- Suponha que o vetor de parâmetros pode ser particionado em $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\phi}^\top, \boldsymbol{\lambda}^\top)^\top$.
- ϕ é chamado de interesse e λ de incomodo.
- Podemos calcular um intervalo/região de confiança aproxima para ϕ usando o resultado assintótico.
- No caso da aproximação quadrática não ser boa o suficiente, podemos usar a **verossimilhança perfilhada**.
- **Verossimilhança perfilhada** - A verossimilhança perfilhada de ϕ é definida por

$$\mathrm{L}(\boldsymbol{\phi}) = \mathrm{L}(\boldsymbol{\phi}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{\phi}).$$

- Baseado na perfilha calculamos a *deviance*.
- *Deviance* baseado na perfilhada

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{\phi}) = -2[\mathrm{l}(\boldsymbol{\phi}) - \mathrm{l}(\hat{\boldsymbol{\phi}})] \sim \chi^2_d$$

onde d é a dimensão de $\boldsymbol{\phi}$.

Exemplo: Distribuição Gama

- Sejam $Y_i \sim Ga(a, s)$ iid. Obtenha o EMV para a e s. Intervalos de confiança assintóticos e baseados em perfil de verossimilhança.
- Função densidade probabilidade

$$f(y) = \frac{1}{s^a \Gamma(a)} y^{a-1} \exp\{-y/s\}, \quad \text{para} \quad y > 0 \quad \text{e} \quad a, s > 0.$$

- Nesta parametrização, $E(Y) = a \cdot s$ e $V(Y) = a \cdot s^2$.
- Ver script `Gamma.R`.