PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA MATEMÁTICA I

ARA, A.

ara@ufpr.br

Slide 01

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

Anteriormente foram vistas algumas distribuições de probabilidade para variáveis aleatórias discretas:

- Bernoulli
- Binomial
- Hipergeométrica
- Poisson
- Geométrica e Binomial Negativa
- Outras Distribuições Discretas

Nesta aula, vamos conhecer algumas distribuições de probabilidade para variáveis aleatórias contínuas.

DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

Lembre-se: A v.a. X é chamada contínua se existe uma função $f_X(\cdot)$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

para cada número real x.

Lembre-se: Qualquer função $f_X(\cdot)$ com domínio na reta real e contradomínio $[0, \infty)$ é definida como uma função densidade de probabilidade se e somente se

i. $f_X(x) \geq 0$ para todo x.

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

A função de distribuição acumulada $F_X(\cdot)$ de uma va contínua X é chamada *absolutamente contínua*.

Distribuição Uniforme contínua

DISTRIBUIÇÃO UNIFORME CONTÍNUA

Definição: Uma variável aleatória X tem distribuição uniforme contínua se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

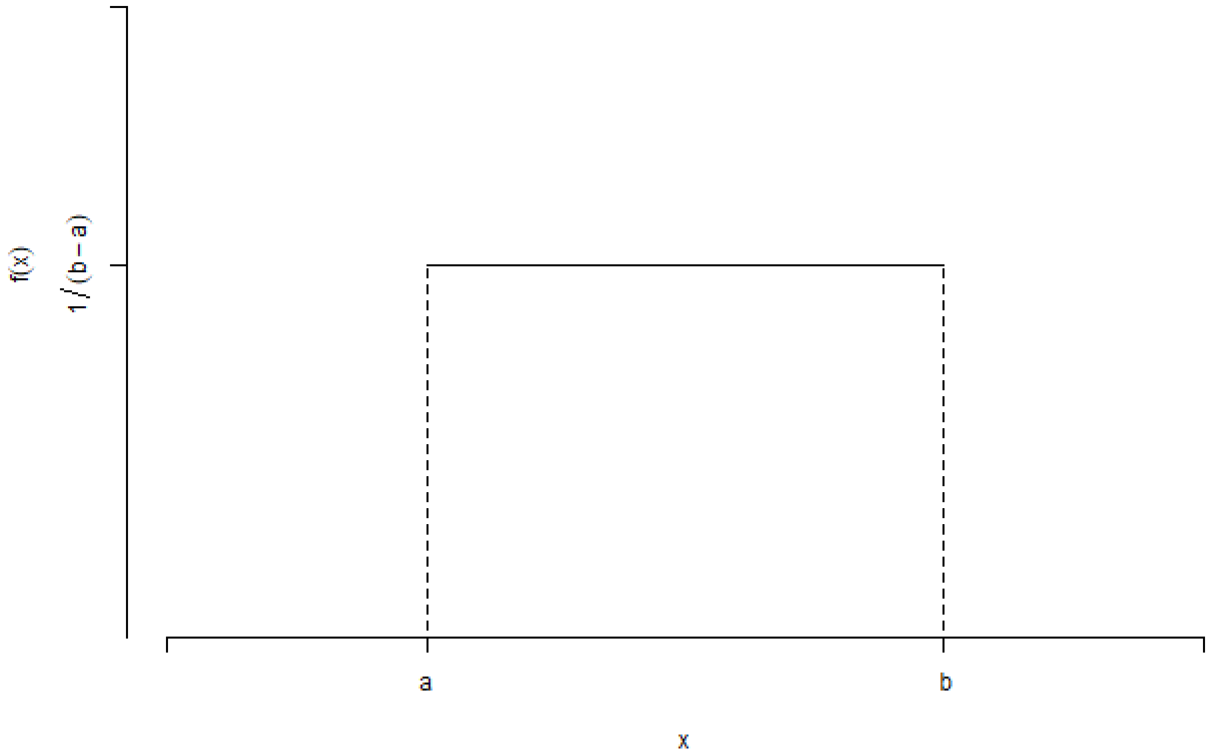
com $-\infty < a < b < \infty$.

- Notação: $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$.

Lembre-se: Densidade não é probabilidade. Note que qualquer função densidade de probabilidade pode ser maior que 1, no caso anterior se $b - a < 1$.

A integral de $f_X(x)$ sobre valores próximos de x nos fornece a probabilidade de que X esteja próximo de x, sendo a integral nunca maior que 1.

DISTRIBUIÇÃO UNIFORME CONTÍNUA



DISTRIBUIÇÃO UNIFORME CONTÍNUA

Teorema: Se X é uma variável aleatória que tem distribuição uniforme contínua, então:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

DISTRIBUIÇÃO UNIFORME CONTÍNUA

PROVA:

$$E(X) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

DISTRIBUIÇÃO UNIFORME CONTÍNUA

PROVA:

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

DISTRIBUIÇÃO UNIFORME CONTÍNUA

Alguns comentários

- Sua função de distribuição acumulada é dada por

$$F_X(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right) I_{[a,b]}(x) + I_{(b,\infty)}(x)$$

- Quando $a = 0$ e $b = 1$ temos a distribuição Uniforme (0,1);
- Distribuição importante para geração de números aleatórios;
- Embora tenhamos definido a distribuição uniforme como sendo uniformemente distribuída no intervalo fechado $[a, b]$, poderíamos defini-la também sobre os intervalos $(a, b]$, $[a, b)$ ou (a, b). Todas as quatro densidades possíveis têm a mesma função de distribuição acumulada.

DISTRIBUIÇÃO UNIFORME CONTÍNUA

EXEMPLO: Se uma roda é girada até seu repouso, o ponto na circunferência da roda que estará localizado em frente a um possível determinado marcador fixo pode ser considerado o valor de uma variável aleatória X uniformemente distribuída sobre a circunferência da roda.

Pode-se então calcular a probabilidade de X parar em qualquer região (arco).

Distribuição Normal

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

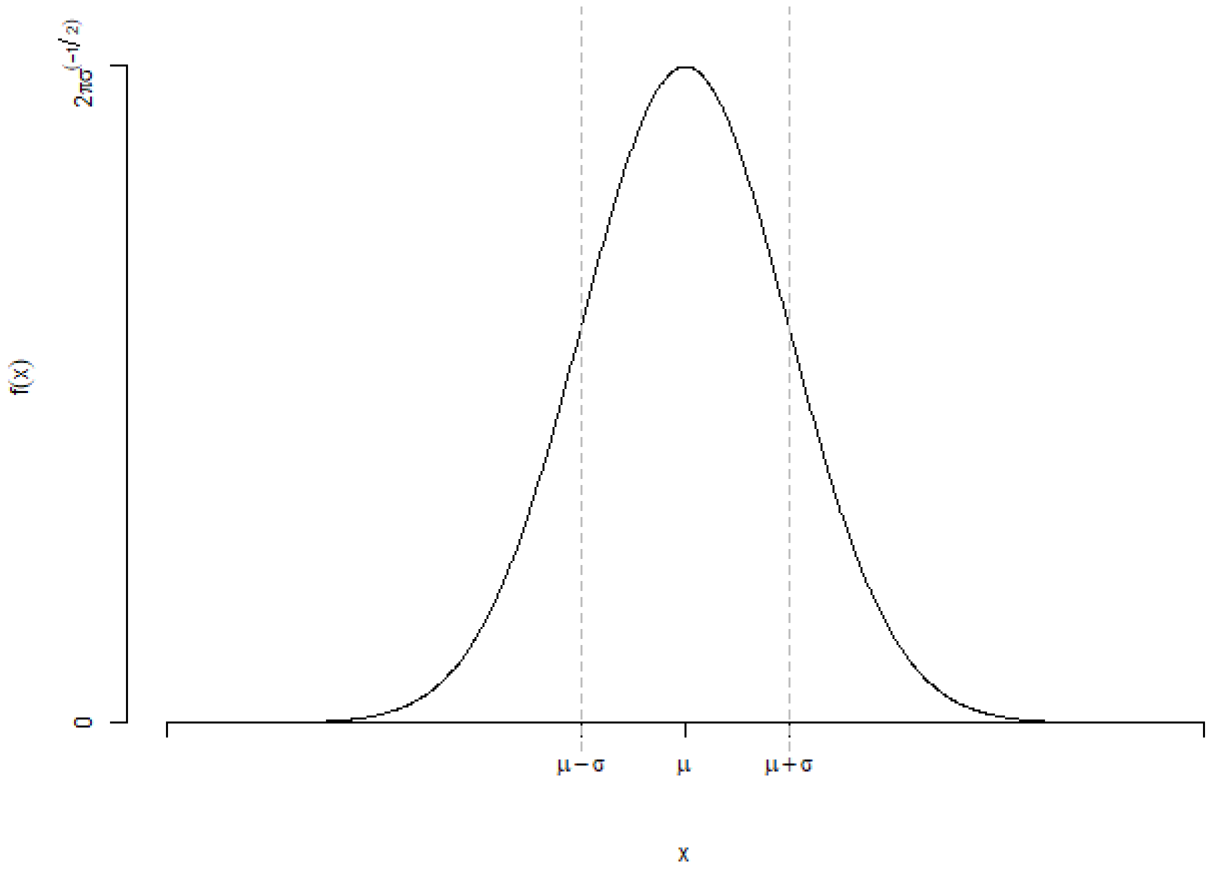
Definição: Uma variável aleatória X tem distribuição normal se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

com $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$.

- Notação: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

DISTRIBUIÇÃO NORMAL



DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Teorema: Se X é uma variável aleatória que tem distribuição normal, então:

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad Var(X) = \sigma^2$$

$$m_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2}$$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Alguns comentários:

- A moda de uma variável aleatória normal ocorre em $x = \mu$ (igual a média) e os pontos de inflexão ocorrem em $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.

- A distribuição normal é muito importante para a Teoria Estatística e é frequentemente utilizada em diversos tipos de aplicação. A distribuição normal também é a distribuição limite no Teorema Central do Limite.

- Se uma variável aleatória normal tem média 0 e variância 1, ela é chamada de variável aleatória normal padrão.

- Em suma, se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO

A função de densidade de probabilidade da distribuição normal padrão é dada por

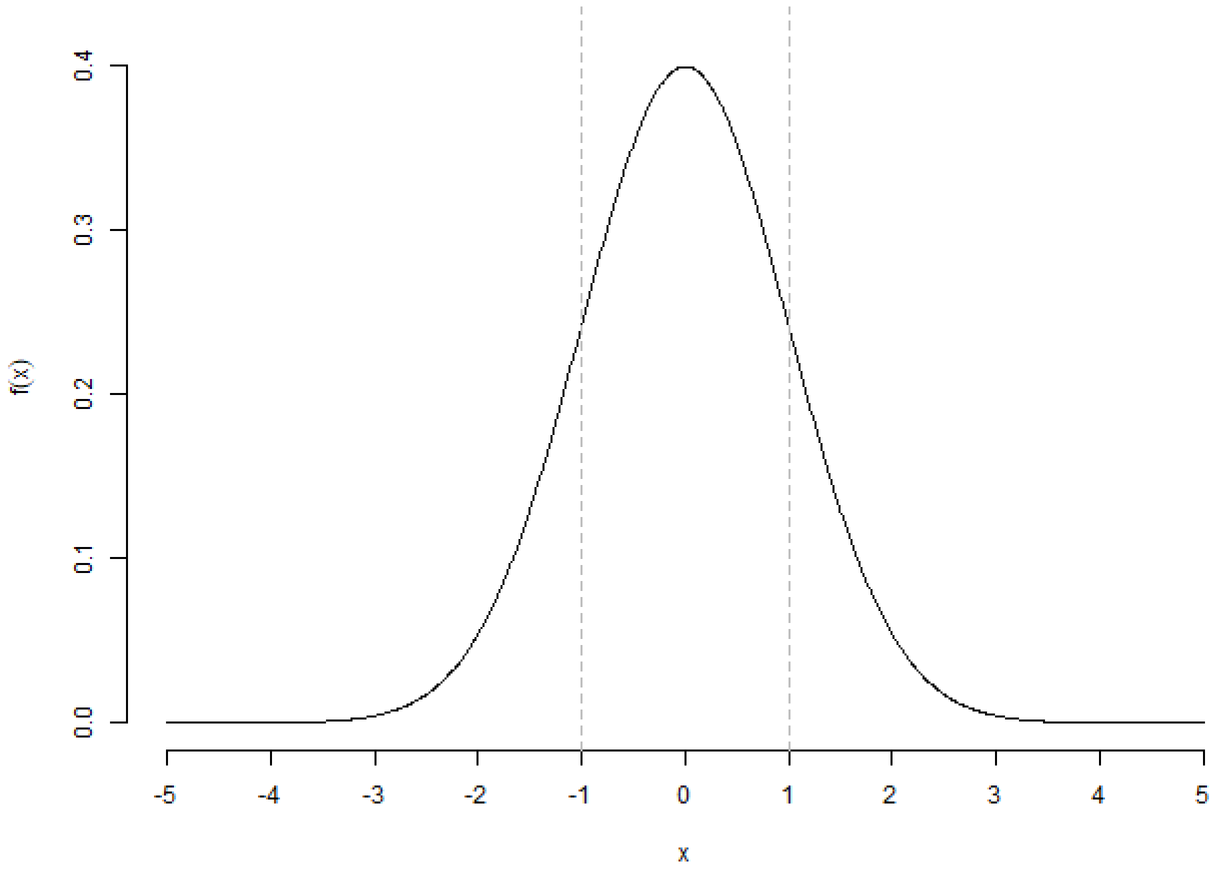
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} = \phi(z)$$

A função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão é dada por

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{\exp\{-z^2\}}{\sqrt{2\pi}} dz = \Phi(z)$$

Note que $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$.

DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO



DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Teorema: Se $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, então

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

PROVA:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= \int_a^b (2\pi\sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-0.5[(x-\mu)\sigma^{-1}]^2\}dx \\ &= \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-0.5z^2\}dz = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

EXEMPLO: Suponha que os diâmetros de eixos fabricados por um determinado processo produtivo sejam variáveis aleatórias normais com média de 10cm e desvio padrão de 0,1cm. Se para uma determinada situação o diâmetro deve estar entre 9,9 e 10,2 centímetros, qual proporção dos eixos fabricados atenderá ao requisito?

$X \sim N(\mu = 10, \sigma^2 = 0.1^2)$

$$P[9.9 < X < 10.2] = \Phi\left(\frac{10.2 - 10}{0.1}\right) - \Phi\left(\frac{9.9 - 10}{0.1}\right)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-1) \approx 0.9772 - 0.1587 = 0.8185.$$

```
pnorm(2)-pnorm(-1)
```

```
## [1] 0.8185946
```

Distribuições Exponencial e Gama

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E GAMA

Definição: Uma variável aleatória X tem distribuição exponencial se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\} I_{[0,\infty)}(x)$$

com $\lambda > 0$.

- Notação: $X \sim \mathbf{Exp}(\lambda)$.

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E GAMA

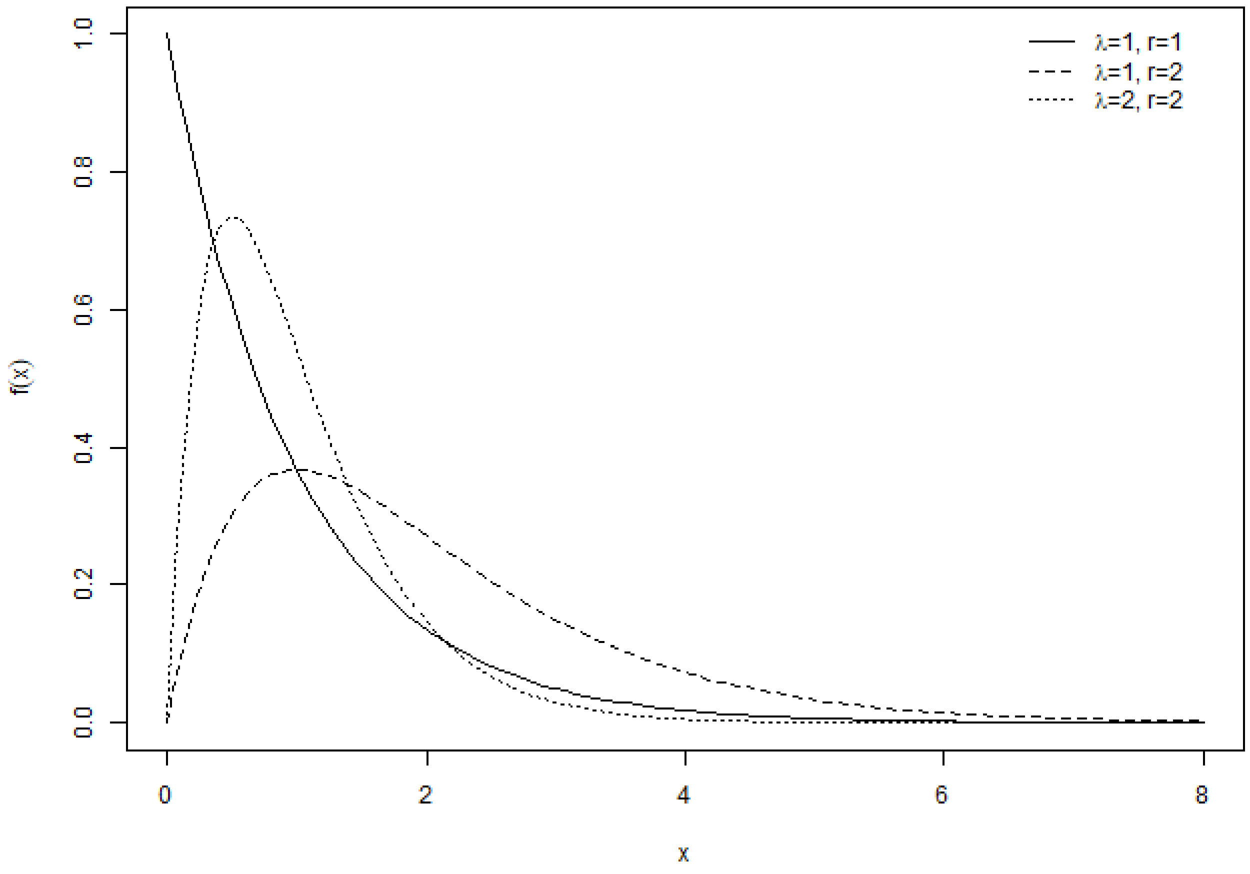
Definição: Uma variável aleatória X tem distribuição gama se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}\exp\{-\lambda x\}I_{[0,\infty)}(x)$$

com $r > 0$, $\lambda > 0$ e $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx$ função gama, se z é inteiro positivo temos que $\Gamma(z) = (n-1)!$.

- Notação: $X \sim \text{Gama}(r, \lambda)$.

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E GAMA



DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E GAMA

Teorema: Se X é uma variável aleatória que tem distribuição gama, então:

$$E(X) = \frac{r}{\lambda} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{r}{\lambda^2}$$

$$m_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$$

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E GAMA

Resultado: Se em uma distribuição gama $r = 1$, a distribuição gama se transforma na distribuição exponencial.

Teorema: Se X é uma variável aleatória que tem distribuição exponencial, então:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E GAMA

Note que se $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, então sua função de distribuição acumulada é dada por

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda \exp\{-\lambda x\} dx$$

$$= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} \exp\{-\lambda x\} \right] \Big|_0^x$$

$$= \lambda \left(\left[-\frac{1}{\lambda} \exp\{-\lambda x\} \right] - \left[-\frac{1}{\lambda} \exp\{-\lambda 0\} \right] \right)$$

$$= 1 - \exp\{-\lambda x\}$$

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E GAMA

Teorema: Se a variável aleatória X tem uma distribuição exponencial com parâmetro λ, então

$$P[X > a + b | X > a] = P[X > b], \text{ para } a > 0 \text{ e } b > 0$$

PROVA:

$$P[X > a + b | X > a] = \frac{P[X > a + b]}{P[X > a]} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b} = P[X > b].$$

Essa propriedade é chamada de propriedade falta memória da distribuição exponencial.

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E GAMA

Alguns comentários

- A distribuição exponencial é bastante utilizada como modelo para tempos de vida em várias situações práticas.
- A exponencial é um caso especial da gama, ou ainda, a distribuição gama é uma forma de generalização da distribuição exponencial.
- A soma de variáveis aleatórias exponenciais independentes e identicamente distribuídas tem distribuição gama,
- Quando introduzimos a distribuição de Poisson, falamos de certos contagem de certos eventos, por exemplo, número de chamadas, ocorrendo no tempo. Pode ser mostrado que a duração do intervalo de tempo entre eventos tem distribuição exponencial, desde que o número de eventos, em um intervalo de tempo fixo, tenha uma distribuição de Poisson.

DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E GAMA

EXEMPLO: Podemos medir o número de quilômetros percorridos por um determinado carro antes que sua motor pare de funcionar. Suponha que essa distribuição seja regida pela distribuição exponencial com média 100 000. Qual é a probabilidade de que o motor de um carro falhe durante seus primeiros 25 000 quilômetros?

$X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/100000)$

$$
\begin{aligned}
P(X < 25000) &= \int_0^{25000} \frac{1}{100000} \exp\left\{-\frac{1}{100000}x\right\} dx \\
&= -\exp\{-x/100000\}\big|_0^{25000} = 1 - e^{-\frac{1}{4}} \approx 0.2212
\end{aligned}
$$

```
pexp(25000,rate=1/100000)
```

```
## [1] 0.2211992
```

Distribuição Beta

DISTRIBUIÇÃO BETA

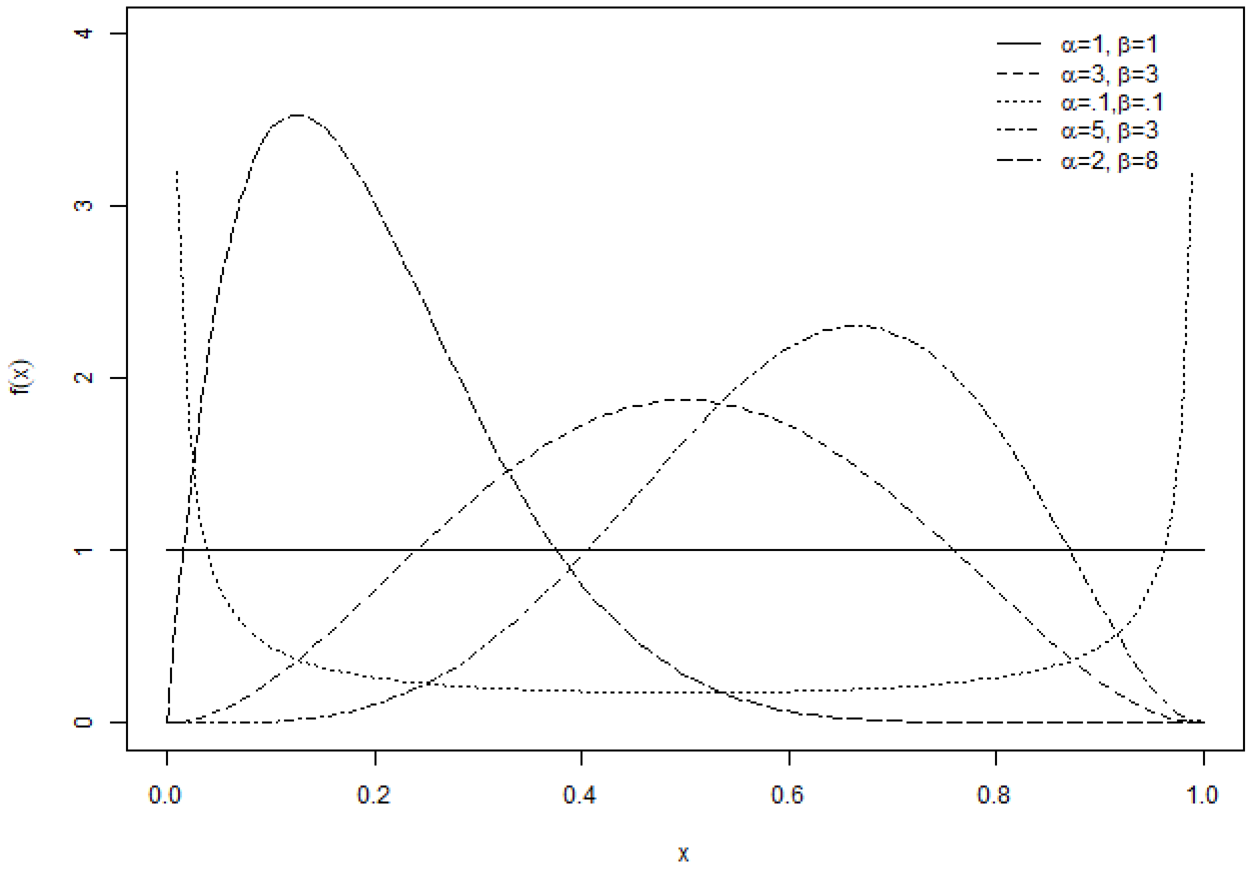
Definição: Uma v.a. X tem distribuição beta se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\text{Beta}(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$$

sendo $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\text{Beta}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}$ função beta, com $\Gamma(.)$ função gama.

- Notação: $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.

DISTRIBUIÇÃO BETA



DISTRIBUIÇÃO BETA

Teorema: Se X é uma variável aleatória que tem distribuição beta, então:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$$

DISTRIBUIÇÃO BETA

Alguns comentários

A distribuição beta não possui sua função geradora de momentos escrita de forma simples, porém seus momentos são facilmente obtidos por definição.

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \frac{1}{\text{Beta}(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{k+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\ &= \frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Assim,

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Exercício: Prove o resultado de $E(X^k)$ e calcule $Var(X)$.

Outras distribuições contínuas

OUTRAS DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

Distribuição Weibull

- $X \sim \text{Weibull}(a, b)$

$$f(x) = abx^{b-1}e^{-ax^b}I_{(0,\infty)}(x)$$

com $a > 0$ and $b > 0$.

Quando $b = 1$ a distribuição Weibull se reduz a distribuição exponencial.

OUTRAS DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

Distribuição Cauchy

- $X \sim \text{Cauchy}(\alpha, \beta)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi\beta\{1 + [(x - \alpha]) / \beta]^2\}}$$

com $-\infty < \alpha < \infty$ e $\beta > 0$.

Embora a distribuição Cauchy seja simétrica em torno de α, sua esperança e momentos superiores não existem.

Aproximações

APROXIMAÇÕES

Teorema: Seja a variável aleatória X uma distribuição de Poisson com parâmetro λ, então para $a < b$ fixos:

$$P\left[a < \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} < b\right] = P[\lambda + a\sqrt{\lambda} < X < \lambda + b\sqrt{\lambda}] \to \Phi(b) - \Phi(a) \text{ com } \lambda \to \infty$$

APROXIMAÇÕES

Teorema de Moivre-Laplace: Seja uma variável aleatória X com distribuição binomial com parâmetros n e p, então para $a < b$ fixos:

$$P\left[a < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < b\right] = P[np + a\sqrt{npq} < X < np + b\sqrt{npq}] \to \Phi(a) - \Phi(b) \text{ com } n \to \infty$$

- Note que aproximamos a distribuição binomial com uma distribuição de Poisson para n grande e p pequeno. O Teorema de Moivre-Laplace fornece uma aproximação da binomial para a distribuição normal para n grande.

APROXIMAÇÕES

EXEMPLO: Suponha que dois dados honestos sejam lançados 600 vezes. Seja X o número de vezes que um total de 7 ocorre. Então X tem uma distribuição binomial com parâmetros $n = 600$ e $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, sendo $E(X) = 100$. Encontre $P[90 < X < 110]$.

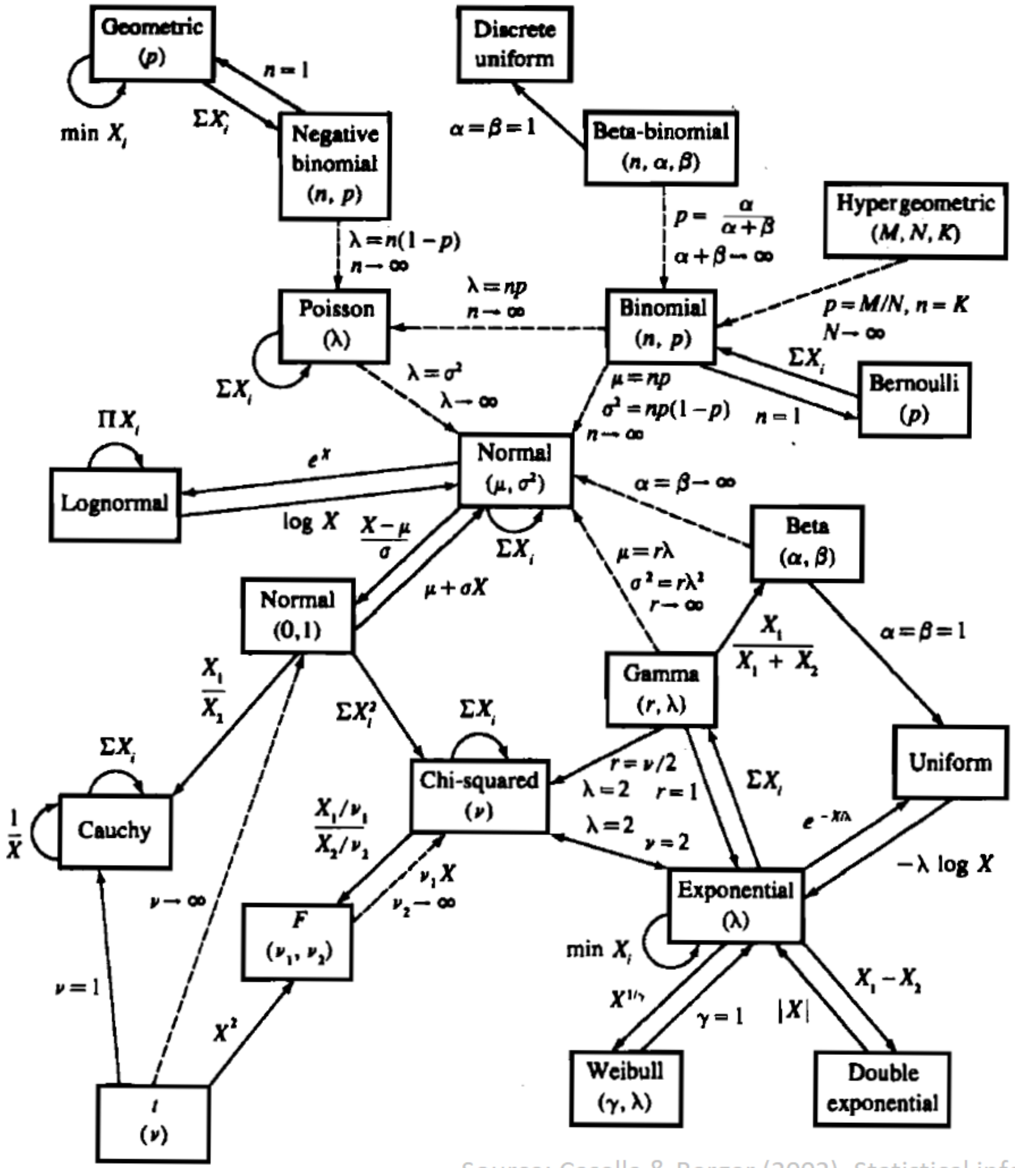
$$P[90 < X < 110] \approx \Phi\left(\frac{110-100}{\sqrt{600\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{90-100}{\sqrt{600\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) \approx \Phi(1.095) - \Phi(-1.095) \approx 0.726$$

```r
pbinom(110,size=600,prob=1/6)-pbinom(90,size=600,prob=1/6)
```

```
## [1] 0.7255352
```

```r
pnorm((110-100)/sqrt(600*(1/6)*(5/6)))-pnorm((90-100)/sqrt(600*(1/6)*(5/6)))
```

```
## [1] 0.7266783
```



Source: Casella & Berger (2002). Statistical inference.

Relação Poisson Exponencial

CASO POISSON-EXPONENCIAL

- Sob certas condições a contagem do número de ocorrências em um intervalo de tempo fixo tem distribuição Poisson com média, parâmetro, proporcional à duração do intervalo.

- Suponha que um evento aconteça:

    - Então qual a distribuição do período de tempo, digamos X, que se esperará até o próximo acontecimento?

$$P[X > t] = P[\textbf{nenhum evento no intervalo do tempo t}] = e^{-vt}$$

com v sendo a taxa média de ocorrência de eventos.

CASO POISSON-EXPONENCIAL

Então,

$$F_X(t) = P[X \leq t] = 1 - P[X > t] = 1 - e^{-vt} = \textbf{ para } t > 0$$

ou seja, $X \sim \textbf{Exp}(v)$.

CASO POISSON-EXPONENCIAL

- Pode-se provar, sob uma suposição de independência, que se os eventos estão ocorrendo no tempo de tal forma que a distribuição dos períodos de tempo entre eventos sucessivos é exponencial, então a distribuição do número de eventos em um intervalo de tempo fixo é distribuição de Poisson.
- Assim, as distribuições exponencial e Poisson estão relacionadas.

A SHORT REVIEW:

- DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS
- DISTRIBUIÇÃO UNIFORME CONTÍNUA
- DISTRIBUIÇÃO NORMAL
- DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E DISTRIBUIÇÃO GAMA
- DISTRIBUIÇÃO BETA
- OUTRAS DISTRIBUIÇÕES
- POISSON-EXPONENCIAL