Universidade Federal do Paraná - Mestrado em Métodos Numéricos
Probabilidade e Estatística Matemática I
Prof. José Luiz Padilha da Silva
Lista de Exercícios

Q1) Prove ou refute cada uma das afirmações.

a. Se $P(A) = P(B) = p$, então $P(A \cap B) \leq p^2$.
b. Se $P(A) = 0$, então $A = \phi$.
c. Se $P(A) = 0$, então $P(A \cap B) = 0$.

Q2) Prove ou refute cada uma das afirmações. (Assuma que nenhum dos eventos tem probabilidade nula.)

a. Se $P(A|B) > P(A)$, então $P(B|A) > P(B)$.
b. Se $P(A) > P(B)$, então $P(A|C) > P(B|C)$.

Q3) Prove: Se $P(A^c) = \alpha$ e $P(B^c) = \beta$ então $P(A \cap B) \geq 1 - \alpha - \beta$.

Q4) Prove ou refute cada uma das afirmações.

a. Se A e B são eventos independentes, então $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.
b. Se $P(A|B) = P(B)$, então A e B são independentes.
c. Se A, B e C são independentes, então $P(B|A \cap C) = P(B|(A \cup C)) = P(B)$.

Q5) Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eventos mutualmente disjuntos, e seja $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Suponha que $P(B_j) > 0$ e $P(A|B_j) = p$, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Mostre que $P(A|B) = p$.

Q6) Mostre que cada uma das seguintes são funções densidade de probabilidade:

a. $f_1(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$
b. $f_2(x) = 2e^{-2x} I_{(0,\infty)}(x)$
c. $f(x) = (\theta + 1) f_1(x) - \theta f_2(x), \quad 0 < \theta < 1$.

Q7) Ao responder um teste de múltipla escolha, o estudante ou sabe a resposta ou chuta. Seja p a probabilidade de que o estudante saiba a resposta e $1 - p$ a probabilidade de que o estudante chute a resposta. Assuma que o estudante que chuta a resposta vai acertá-la com probabilidade $1/m$, em que m é o número de alternativas na questão de múltipla escolha. Se ele souber a resposta, responderá corretamente com probabilidade 1.

a. Qual é a probabilidade condicional de que um estudante sabia a resposta, dado que ele a respondeu corretamente?
b. Determine o limite desta probabilidade se $m \to \infty$ com p fixo. O que ocorre se $p \to 0$ com m fixo?

Q8) Responda

a. Seja X uma variável aleatória tendo distribuição binomial com parâmetros $n = 25$ e $p = 0,2$. Calcule $P(X < \mu_x - 2\sigma_X)$.
b. Se X é uma variável aleatória com distribuição de Poisson satisfazendo $P(X = 0) = P(X = 1)$, quanto vale $E(X)$?
c. Suponha que X tenha distribuição binomial com parâmetros n e p. Para qual valor de p a $Var(X)$ é maximizada.

Q9) A função geradora de momentos de uma variável aleatória X é dada por

$$m_X(t) = \left(\frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}\right)^4.$$

Qual é a distribuição de X? Quanto valem $E(X)$ e $Var(X)$?

Q10) Responda:

a. Se X é uma variável aleatória tal que $E(X) = 3$ e $E(X^2) = 13$, use a desigualdade de Chebyshev para encontrar um limite inferior para $P(-2 < X < 8)$.
b. Seja X uma variável aleatória discreta com densidade

$$f_X(x) = \frac{1}{8}I_{\{-1\}}(x) + \frac{6}{8}I_{\{0\}}(x) + \frac{1}{8}I_{\{1\}}(x).$$

Para $k = 2$ avalie $P(|X - \mu_X| \geq k\sigma_x)$. (Isso mostra que em geral a desigualdade de Chebyshev não pode ser melhorada.)
c. Se X é uma variável aleatória com $E(X) = \mu$ satisfazendo $P(X \leq 0) = 0$, mostre que $P(X > 2\mu) \leq \frac{1}{2}$.

Q11) Um teste laboratorial de sangue é 95% efetivo em detectar uma certa doença quando, de fato, ela está presente. Contudo, o teste também produz um resultado *falso positivo* para 1% das pessoas saudáveis testadas. (Isto é, se uma pessoa saudável é testada, então, com probabilidade 0,01, o resultado do teste indicará que a pessoa está doente.) Se 0,5% da população de fato tem a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa tenha a doença dado que o resultado do teste foi positivo?

Q12) Uma turma escolar de 120 alunos está sendo conduzida em 3 ônibus para uma apresentação sinfônica. Há 36 estudantes em um dos ônibus, 40 em outro, e 44 no terceiro ônibus. Quando os ônibus chegam, um dos 120 alunos é aleatoriamente escolhido. Seja X o número de estudantes no ônibus em que estava o aluno aleatoriamente escolhido. Encontre $E(X)$.

Q13) Cada um dos membros de um painel de 7 juízes independentemente toma uma decisão correta com probabilidade 0,8. Se a decisão do painel for tomada por maioria, responda:

a) Qual é a probabilidade de que o painel de juízes faça a decisão correta?
b) Dado que 4 dos juízes concordaram em suas decisões, qual é a probabilidade de que o painel tenha feito a decisão correta?

Q14) Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens e os seguintes eventos:

$$H = \text{freguês é homem}; \quad A = \text{ freguês prefere salada.}$$
$$M = \text{freguês é mulher}; \quad B = \text{ freguês prefere carne.}$$

Calcular:

a) $P(H)$, $P(A|H)$, $P(B|M)$.
b) $P(A \cap H)$, $P(A \cup H)$.
c) $P(M|A)$.

Q15) Considere N pessoas numa sala.

a) Qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês?
b) A partir de qual valor de N essa probabilidade é maior que 0,5?

Q16) Um fabricante afirma que apenas 5% de todas as válvulas que produz têm duração inferior a 20 horas. Uma indústria compra semanalmente um grande lote de válvulas desse fabricante, mas sob a seguinte condição: ela aceita o lote se, em dez válvulas escolhidas ao acaso, no máximo uma tiver duração inferior a 20 horas; caso contrário, o lote todo é rejeitado.

a) Se o fabricante de fato tem razão, qual a probabilidade de um lote ser rejeitado?
b) Suponha agora que o fabricante esteja mentindo, isto é, na verdade a proporção de válvulas com duração inferior a 20 horas é de 10%. Qual a probabilidade de um lote ser aceito, segundo o critério acima?

Q17) Prove que, quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, mas de tal sorte que $np \to \lambda$, temos

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Sugestão: use o fato: $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$ quando $n \to \infty$.

Q18) Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em 1.000 horas) que possa ser considerado uma variável aleatória contínua com função de densidade $f(x) = e^{-x},\ x > 0$. Suponha que o custo de fabricação de um item seja 2,00 reais e o preço de venda seja 5,00 reais. O fabricante garante total devolução se $X \leq 0,9$. Qual o lucro esperado por item?

Q19) Pequenos motores elétricos são expedidos em lotes de 50 unidades. Antes que uma remessa seja aprovada, um inspector escolhe 5 desses motores e os inspeciona. Se nenhum dos motores inspecionados for defeituoso, o lote é aprovado. Se um ou mais forem verificados defeituosos, todos os motores da remessa são inspecionados. Suponha que exista, de fato, 3 motores defeituosos no lote. Qual é a probabilidade de que a inspeção total seja necessária?

Q20) Suponha que o custo de realização de um experimento seja de \$1000. Se o experimento falhar, ocorrerá um custo adicional de \$300 em virtude de serem necessárias algumas alterações antes que a próxma tentativa seja executada. Se a probabilidade de sucesso em uma tentativa qualquer foi de 0,20, se as provas forem independentes, e se os experimentos continuarem até que o primeiro resultado exitoso seja alcançado, qual será o custo esperado do procedimento completo?