PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA MATEMÁTICA I

ARA, A.

ara@ufpr.br

Slide 04

TRANSFORMAÇÕES

TRANSFORMAÇÕES

Anteriormente vimos distribuições marginais, condicionais, independência e esperança.

Nesta aula, vamos introduzir alguns métodos de transformações de vetores aleatórios.

TRANSFORMAÇÕES

Seja X e Y variáveis aleatórias, possíveis transformações envolvem

$$X + Y; \min(X, Y); \frac{X}{Y}; XY \ldots$$

TRANSFORMAÇÕES

Método via Função Distribuição

Seja $Y = g(X)$, conhecendo a função de massa de probabilidade ou função densidade de probabilidade de X, podemos obter a função de massa de probabilidade ou função densidade de probabilidade de Y através da função distribuição de Y:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq h(y)) = F_X(h(y))$$

com $h(y) = g^{-1}(y)$ função inversa de g aplicada a y.

TRANSFORMAÇÕES

Exemplo: Se $Y = X^2$ com $X \sim U(-1,1)$, ou seja, $f_X(x) = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$ para $x \in (-1,1)$, então:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

Como $0 \leq \sqrt{y} < 1$ e $-1 < -\sqrt{y} \leq 0$, resulta que $f_X(\sqrt{y}) = f_X(-\sqrt{y}) = 2^{-1}$, temos que

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = \int_{-1}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx - \int_{-1}^{-\sqrt{y}} \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{\sqrt{y} - 1}{2} - \frac{-\sqrt{y} - 1}{2} = \sqrt{y} \end{aligned}$$

TRANSFORMAÇÕES

Continuando o caso anterior, temos que

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & 0 < y \\ \sqrt{y} & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} I_{(0,1)}(y)$$

Exemplo: Sejam $X \sim U(0,1)$ e $Y = -\log X$. Vamos calcular a função densidade de probabilidade de Y.

Como esta é uma função estritamente decrescente, ela é inversível, sua inversa é dada por:

$$y = g(x) = -\ln x \implies \ln x = -y \implies g^{-1}(y) = x = e^{-y}$$

$\forall\, y \in \mathbb{R}$

Além disso,

$$g(x) \leq y \iff x \geq g^{-1}(y)$$

Assim,

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \leq y) &= P(-\ln(X) \leq y) = P(X \geq e^{-y}) \\ &= 1 - P(X < e^{-y}) = 1 - e^{-y} \end{aligned}$$

Continuando o caso anterior, temos que

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y \\ 1 - e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy} = \exp\{-y\} I_{(0,\infty)}(y)$$

Note que $Y \sim \mathbf{Exp}(1)$.

Método Jacobiano

Seja X e Y variáveis aleatórias contínuas, com $f_{X,Y}(x,y)$ função de densidade conjunta,

$U_1 = g_1(X,Y)$ e $U_2 = g_2(X,Y)$ são variáveis aleatórias, sendo g_1 e g_2 funções 1 a 1 (injetoras).

$$X = h_1(U_1, U_2) \quad \text{e} \quad Y = h_2(U_1, U_2)$$

com h_1 e h_2 funções inversas de g_1 e g_2

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

sendo J a matriz jacobiana

A função densidade conjunta de U_1 e U_2 é dada por:

$$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2) = f_{X,Y}(h_1(u_1,u_2), h_2(u_1,u_2)) \times |J|$$

Método Jacobiano

Para o caso mais simples $Y = g(X)$ sendo $h(y) = g^{-1}(y)$ a inversa da função $g(x)$ e $\mathcal{Y}$ o domínio de Y, o método jacobiano se reduz a

$$f_Y(y) = f_x(h(y)) \left| \frac{d}{dy} h(y) \right| I_{\mathcal{Y}}(y)$$

Método Jacobiano

Exemplo: Seja $X \sim \text{Beta}(a, b)$, encontre a distribuição de $Y = -\ln X$

Temos que $h(y) = g^{-1}(y) = e^{-y}$, assim

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| I_{\mathcal{Y}}(y) \\
&= \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}\left(e^{-y}\right)^{a-1}\left(1-e^{-y}\right)^{b-1} \times e^{-y} \times I_{(0,\infty)}(y) \\
&= \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} e^{-ay}\left(1-e^{-y}\right)^{b-1} I_{(0,\infty)}(y).
\end{aligned}$$

Em particular, se $b = 1$, então $B(a, b) = 1/a$; então $f_Y(y) = ae^{-ay}I_{(0,\infty)}(y)$, ou seja $Y \sim \text{Exp}(a)$

Método Jacobiano

Exemplo: Seja $X \sim U(0,1)$ e $Y \sim U(0,1)$ com $X \perp Y$, encontre a distribuição de $(X+Y, X-Y)$.

Assumindo $U_1 = X+Y$ e $U_2 = X-Y$, então

$$x = \frac{1}{2}(u_1 - u_2) = g_1^{-1}(u_1, u_2) = h_1(u_1, u_2)$$

e

$$y = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = g_2^{-1}(u_1, u_2) = h_2(u_1, u_2)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Método Jacobiano

Continuando o exemplo anterior,

$$|J| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

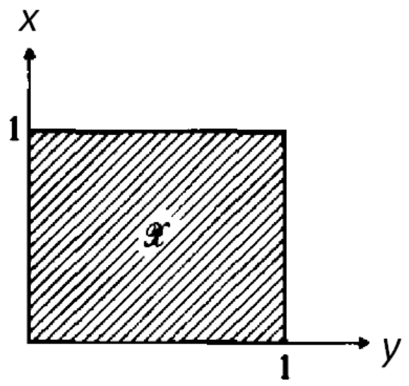
Assim,

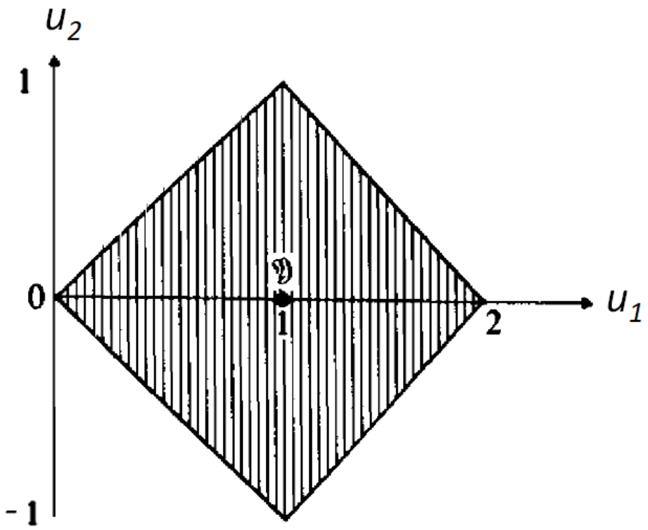
$$\begin{aligned} f_{U_1,U_2}(u_1,u_2) &= f_{X,Y}\left(h_1(u_1,u_2), h_2(u_1,u_2)\right)|J| \\ &= f_{X,Y}\left(g_1^{-1}(u_1,u_2), g_2^{-1}(u_1,u_2)\right)|J| \\ &= \frac{1}{2} I_{(0,1)}\left(\frac{u_1-u_2}{2}\right) I_{(0,1)}\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para } (u_1,u_2) \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

Método Jacobiano

Note mudança de espaço para

$$(0,1)^2 \to \mathcal{U}$$





Método Jacobiano

OBS: Quando a função não for 1 a 1, o domínio de X é dividido em regiões onde $g(X)$ seja biunívoca, assim o método jacobiano é aplicado em cada uma das regiões e a densidade de Y é a soma das densidades obtidas para cada região.

Método Jacobiano

Exemplo: Se $Y = X^2$ com $X \sim U(-1, 1)$, temos o caso que a função não é $1a1$, porém temos que se $Y = X^2$ então $h(y) = g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$, ou seja, $g_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$ e $g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$

Assim,

$$J_1 = \frac{\partial - \sqrt{y}}{dy} = -\frac{1}{2}y^{-1/2}$$

e

$$J_2 = \frac{\partial\sqrt{y}}{dy} = \frac{1}{2}y^{-1/2}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}y^{-1/2}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}y^{-1/2}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{y} \;\; \textbf{para} \;\; y > 0$$

TRANSFORMAÇÕES

Convolução

Seja a soma de duas variáveis aleatórias contínuas X e Y, isto é, $U = X + Y$ e sendo elas independentes temos que $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ assim temos:

$$f_U(u) = \int f_X(x) f_Y(u - x) dx$$

que é chamada de convolução de f_x e f_Y.

A SHORT REVIEW:

- Transformações de variáveis aleatórias
- Método da função distribuição
- Método jacobiano
- Convolução