Universidade Federal do Paraná
Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia
Probabilidade e Estatística Matemática I
Prof. José Luiz Padilha
Lista de Exercícios

Antonio C. da Silva Júnior

2022-06-23

0.0.1 Questão 1

Prove ou refute cada uma das afirmações.

a. Se $P(A) = P(B) = p$, então $P(A \cap B) \leq p^2$

Contraexemplo: Lançamento de duas moeadas honestas

$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

$A = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

$B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$

$A \cap B = \{(0, 1), (1, 0)\}$

$P(A) = 3/4 = 0.75$

$P(B) = 3/4 = 0.75$

$P(A \cap B) = 1/2 = 0.5$

$0.75 \leq (0.5)^2$ é falso.

Refutado!

b. Se $P(A) = 0$, então $A = \emptyset$

Contraexemplo:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$

$P(\Omega) = \sum_{j=1}^{n} P(\omega_j) = 1$

Se $A = \omega_1$ e $P(A) = P(\omega_1) = 0$

Então $P(\Omega) = P(A) + P(A^c) = 1$

Refutado!

c. Se $P(A) = 0$, então $P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = 0 + P(B) - 0$

$P(A \cup B) = P(B)$

Propriedades:

Se $A = \emptyset, P(A) = 0$

$A \cup B = B,\ P(A \cup B) = P(B)$

$A \cap B = A = \emptyset,\ P(A \cap B) = P(A) = 0$

Provado!

....

0.0.2 Questão 2

Prove ou refute cada uma das afirmações, assumindo que nenhum dos eventos tem probabilidade nula.

a. Se $P(A \mid B) > P(A)$, então $P(B \mid A) > P(B)$

$$P(A \mid B) > P(A) \implies \frac{P(A \cap B)}{P(B)} > P(A)$$

$$P(A \mid B) > P(A) \implies P(A \cap B) > P(A)P(B)$$

$$P(A \mid B) > P(A) \implies P(B \cap A) > P(B)P(A)$$

$$P(A \mid B) > P(A) \implies \frac{P(B \cap A)}{P(A)} > P(B)$$

$$P(A \mid B) > P(A) \implies P(B \mid A) > P(B)$$

Provado!

b. Se $P(A) > P(B)$, então $P(A \mid C) > P(B \mid C)$

Contraexemplo: Lançamento de duas moedas não viciadas.

$\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$A = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$

$B = \{(0,1),(1,1)\}$

$C = \{(1,1)\}$

$P(A) = 3/4 = 0.75$

$P(B) = 1/2 = 0.5$

$P(A \mid C) = 1$

$P(B \mid C) = 1$

$P(A) > P(B)$ é verdadeiro

$P(A \mid C) > P(B \mid C)$ é falso

Refutado!

. . . .

0.0.3 Questão 3

Prove: Se $P(A^c) = \alpha$ e $P(B^c) = \beta$, então $P(A \cap B) \geq 1 - \alpha - \beta$

$P(A \cap B) \geq 1 - \alpha - \beta$;

$P(A \cap B) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c)$;

$P(A \cap B) \geq 1 - [1 - P(A)] - [1 - P(B)]$;

$P(A \cap B) \geq 1 - 1 + P(A) - 1 + P(B)$;

$P(A \cap B) \geq P(A) - 1 + P(B)$;

$-P(A) - P(B) + P(A \cap B) \geq -1$

Multiplicando por -1:

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$

$P(A \cup B) \leq 1$ é verdadeiro

Provado!

. . . .

0.0.4 Questão 4

Prove ou refute cada uma das afirmações.

a. Se A e B são eventos independentes, então $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C)$

(Está relecionado ao paradoxo de Simpson)

Contraexemplo: Lançamento de duas moedas não viciadas.

$\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$A = \{(1,0),(1,1)\}$

$B = \{(0,1),(1,1)\}$

$C = \{(0,1),(1,0),(1,1)\}$

$A \cap B = \{(1,1)\}$

$P(A \cap B \mid C) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$

$P(A \cap B \mid C) = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

$P(A \mid C) = \dfrac{2}{3}$

$P(B \mid C) = \dfrac{2}{3}$

$P(A \mid C)P(B \mid C) = \dfrac{4}{9}$

Refutado!

b. Se $P(A \mid B) = P(B)$, então A e B são independentes

$P(A \mid B) = P(B)$

$\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B)$

$P(A \cap B) = P(B)P(B)$

Se A e B fossem independentes, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Refutado!

c. Se A, B e C são independentes, então $P(B \mid A \cap C) = P(B \mid A \cup C) = P(B)$

$P(B \mid A \cap C) = P(B)$

$\dfrac{P[B \cap (A \cap C)]}{P(A \cap C)} = P(B)$

$\dfrac{P(B \cap A \cap C)}{P(A \cap C)} = P(B)$

Se A, B e C são independentes, então:

$\dfrac{P(B)P(A)P(C)}{P(A)P(C)} = P(B)$

$P(B) = P(B)$ é verdadeiro

$P(A \mid A \cup C) = P(B)$

$\dfrac{P[B \cap (A \cup C)]}{P(A \cup C)} = P(B)$

$\dfrac{P(B)P(A \cup C)}{P(A \cup C)} = P(B)$

$P(B) = P(B)$ é verdadeiro.

Provado!

....

0.0.5 Questão 5

Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eventos mutualmente disjuntos, e seja $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Suponha que $P(B_j) > 0$ e $P(A \mid B_j) = p$, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Mostre que $P(A \mid B) = p$

Se $B_1, B_2, \ldots, B_n$ são mutualmente disjuntos, então

$P(B) = P(B_1 \cup B_2 \ldots B_n) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = q$

Como $P(A \mid B_1) = P(A \mid B_2) = \ldots - P(A \mid B_n) = p$

Temos que $P(B_1) = P(B_2) = \ldots = P(B_n) = \dfrac{q}{n}$

$p = P(A \mid B_j)$

$p = \dfrac{P(A \cap B_j)}{P(B_j)}$

$p = \dfrac{P(A \cap B_j)}{\frac{q}{n}}$

$p = \dfrac{nP(A \cap B_j)}{q}$

$p = \dfrac{P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)}{q}$

$p = \dfrac{P[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)]}{q}$

$p = \dfrac{P[A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n)]}{q}$

$p = \dfrac{P(A \cap B)}{q}$

$p = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$p = P(A \mid B)$

Provado!

....

0.0.6 Questão 6

Mostre que cada uma das seguintes são funções densidade de probabilidade:

- a. $f_1(x) = e^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$

Para que uma função seja uma Função Densidade de Probabilidade:

- $f(x) \geq 0$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Observa-se que $f_1(x) \geq 0 \ \ \forall x$

$\int_0^{\infty} e^{-x}dx$

$u = -x$

$du = -1dx \implies dx = -du$

$\int_0^{\infty} e^{-x}dx \implies \int_0^{\infty} e^{u}(-du) \implies -\int_0^{\infty} e^{u}du$

$-\int_0^{\infty} e^{u}du = -e^{u} = -e^{-x}$

$-e^{-\infty} - [-e^{-0}] =$

$-e^{-\infty} + e^{0} =$

$0 + 1 = 1$

Provado!

- b. $f_2(x) = 2e^{-2x}I_{(0,\infty)}(x)$

Observa-se que $f_2(x) \geq 0 \ \ \forall x$

$\int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx$

$u = -2x$

$du = -2dx$

$dx = \frac{du}{-2}$

$\int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx \implies \int_0^{\infty} 2e^{u}\frac{du}{-2} \implies -\int_0^{\infty} e^{u}du$

$-\int_0^{\infty} e^{u}du = -e^{u} = -e^{-2x}$

$-e^{-2\infty} - [-e^{-2(0)}] =$

$-e^{-\infty} + e^{0} =$

$0 + 1 = 1$

Provado!

- c. $f(x) = (\theta + 1)f_1(x) - \theta f_2(x), \ \ 0 < \theta < 1$

Observa-se que $f_1(x) \geq 0,\ f_2(x) \geq 0$ e $0 < \theta < 1$

Logo, $f(x) \geq 0 \ \ \forall x$

$$\int_0^\infty (\theta+1)f_1(x) - \theta f_2(x)dx$$

$$\int_0^\infty (\theta+1)f_1(x)dx - \int_0^\infty \theta f_2(x)dx$$

$$(\theta+1)\int_0^\infty f_1(x)dx - \theta\int_0^\infty f_2(x)dx$$

$$[-(\theta+1)e^\infty + (\theta+1)e^0] - [-\theta e^\infty + \theta e^0]$$

$$-(\theta+1)e^\infty + (\theta+1)e^0 + \theta e^\infty - \theta e^0$$

$$\theta + 1 - \theta = 1$$

Provado!

....

0.0.7 Questão 7

Ao responder um teste de múltipla escolha, o estudante ou sabe a resposta ou chuta. Seja p a probabilidade de que o estudante saiba a resposta e $1-p$ a probabilidade de que o estudante chute a resposta. Assuma que o estudante que chuta a resposta vai acertá-la com probabilidade $1/m$, em que m é o número de alternativas na questão de múltipla escolha. Se ele souber a resposta, responderá corretamente com probabilidade 1

a. Qual é a probabilidade condicional de que um estudante sabia a resposta, dado que ele respondeu corretamente?

A: o estudante sabe a resposta

B: o estudante acerta a resposta

$P(A) = p$

$P(A^c) = 1 - p$

$P(B \mid A^c) = 1/m$

$P(B \mid A) = 1$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{1(p)}{1(p) + (1/m)(1-p)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{p}{p + \dfrac{1-p}{m}}$$

- b. Determine o limite desta probabilidade se $m \to \infty$ com o p fixo. O que ocorre se $p \to 0$ com m fixo?

Se $m \to \infty$, $P(A \mid B) = 1$

Se $p \to 0$, $P(A \mid B) = 0$

. . . .

0.0.8 Questão 8

- a. Seja X uma variável aleatória tendo distribuição binomial com parâmetros $n = 25$ e $p = 0.2$. Calcule $P(X < \mu_x - 2\sigma_x)$

$\mu = E(X) = np = 25(0.2) = 5$

$\sigma^2 = Var(X) = npq = 25(0.2)(0.8) = 4$

$\sigma = \sqrt{4} = 2$

$P(X < \mu_x - 2\sigma_x) \implies P(X < 5 - 1) \implies P(X < 1) \implies P(X = 0)$

$P(X = 0) = \binom{25}{0} 0.2^0 (1 - 0.2)^{25-0} = 0.8^{25} = 0.003777893$

- b. Se X é uma variável aleatória com distribuição de Poisson satisfazendo $P(X = 0) = P(X = 1)$, quanto vale $E(X)$?

$P(X = 0) = P(X = 1)$

$\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!}$

$\dfrac{e^{-\lambda}1}{1} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda}{1}$

$e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\lambda$. Para ser verdadeira, $\lambda = 1$

Portanto,

$E(X) = \lambda = 1$

- c. Suponha que X tenha distribuição binomial com parâmetros n e p. Para qual valor de p a $Var(X)$ é maximizada?

$Var(X) = npq$

$q = 1 - p$

Logo, $p = q = 0.5$ maximiza a variância.

. . . .

0.0.9 Questão 9

A função geradora de momentos de uma variável aleatória X é dada pela expressão abaixo. Qual é a distribuição de X? Quanto valem $E(X)$ e $Var(X)$?

$m_X(t) = \left(\frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}\right)^4$

Função geradora de momentos da distribuição binomial:

$mb_x(t) = (pe^t + q)^n$

Podemos dizer que:

$p = 1/3$

$q = 1 - 1/3 = 2/3$

$n = 4$

Logo, X tem distribuição binomial

$E(X) = np = 4/3$

$Var(x) = npq = 8/9$

....

0.0.10 Questão 10

Responda

- a. Se X é uma variável aleatória tal que $E(X) = 3$ e $E(X^2) = 13$, use a desigualdade de Chebyshev para encontrar o limite inferior para $P(-2 < X < 8)$

$P(\mu_X - r\sigma_X < X < \mu_X + r\sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{r^2}$, em que:

$\mu_X - r\sigma_X = -2$

$\mu_X + r\sigma_X = 8$

$\mu_X = E(X) = 3$

$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2} = \sqrt{13 - 3^2} = 2$

$\mu_X - r\sigma_X = -2$

$3 - 2r = -2$

$-r = \frac{-2-3}{2}$

$r = \frac{5}{2}$

Prova:

$\mu_X + r\sigma_X = 8$

$3 + 2r = 8$

$2r = 8 - 3$

$r = \frac{5}{2}$

Sendo assim,

$P(3 - 2r < X < 3 + 2r) \geq 1 - \frac{1}{r^2}$

$P(-2 < X < 8) \geq 1 - \frac{1}{(5/2)^2}$

$P(-2 < X < 8) \geq 1 - \frac{1}{25/4}$

$P(-2 < X < 8) \geq 1 - \frac{4}{25}$

$P(-2 < X < 8) \geq \frac{21}{25}$

- b. Seja X uma variável aleatória discreta com densidade

$f(x) = \frac{1}{8}I_{\{-1\}}(x) + \frac{6}{8}I_{\{0\}}(x) + \frac{1}{8}I_{\{1\}}(x)$

Para $k = 2$ avalie $P(|X - \mu_x| \geq k\sigma_x)$. (Isso mostra que em geral a desigualdade de Chebyshev não pode ser melhorada.)

$\mu = E(X) = (-1)\frac{1}{8} + (0)\frac{6}{8} + (1)\frac{1}{8}$

$\mu = E(X) = \frac{-1}{8} + \frac{1}{8} = 0$

$\sigma^2 = Var(X) = \sum_j (x_j - \mu_x)^2 f_x(x_j)$

$\sigma^2 = Var(X) = (-1 - 0)^2\frac{1}{8} + (0 - 0)^2\frac{6}{8} + (1 - 0)^2\frac{1}{8}$

$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$\sigma = \sqrt{1/4} = 1/2$

Desigualdade de Chebyshev

$P(|X - \mu_x| \geq k\sigma_x) \leq \frac{1}{k^2}$

$P(|X - 0| \geq 2(0.5)) \leq \frac{1}{2^2}$

$P(|X| \geq 1) \leq \frac{1}{4}$

- c. Se X é uma variável aleatória com $E(X) = \mu$ satisfazendo $P(X \geq 0) = 0$, mostre que $P(X > 2\mu) \leq \frac{1}{2}$

Teorema desigualdade:

$P(X \geq k) \leq \frac{E(X)}{k}$

$P(X \geq 2\mu) \leq \frac{\mu}{2\mu}$

$P(X \geq 2\mu) \leq \frac{1}{2}$

. . . .

0.0.11 Questão 11

Um teste laboratorial de sangue é 95% efetivo em detectar uma certa doença quando, de fato, ela está presente. Contudo, o teste também produz um resultado *falso positivo* para 1% das pessoas saudáveis testadas. (Isto é, se uma pessoa saudável é testada, então, com probabilidade de 0.01, o resultado do teste indicará que a pessoa está doente.) Se 0.5% da população de fato tem a doença, qual é a probabilidade de que uma pessoa tenha a doença dado que o resultado do teste foi positivo

A: teste positivo

B: ter realmente a doença

$P(A \mid B) = 0.95$

$P(A \mid B^c) = 0.01$

$P(B) = 0.005$

$P(B^c) = 0.995$

Teorema de Bayes:

$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)}$

$P(B \mid A) = \frac{0.95(0.005)}{0.95(0.005) + 0.01(0.995)}$

$P(B \mid A) = \frac{0.00475}{0.00475 + 0.00995}$

$P(B \mid A) = 0.3231293$

. . . .

0.0.12 Questão 12

Uma turma escolar de 120 alunos está sendo conduzida em 3 ônibus para uma apresentação sinfônica. Há 36 estudantes em um dos ônibus, 40 em outro, e 44 no terceiro ônibus. Quando os ônibus chegam, um dos 120 alunos é aleatoriamente escolhido. Seja X o número de estudantes no ônibus em que estava o aluno aleatoriamente escolhido. Encontre $E(X)$

$X = \{34, 40, 44\}$

$E(X) = \sum x_j f_x(x_j)$

$E(X) = 36(36/120) + 40(40/120) + 44(44/120) = 40.27$

. . . .

0.0.13 Questão 13

Cada um dos membros de um painel de 7 juízes independentemente toma uma decisão correta com probabilidade de 0,8. Se a decisão do painel for tomada por maioria, responda:

- a. Qual é a probabilidade de que o painel de juízes faça a decisão correta?

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$P(X = 1) = \dfrac{7!}{6!1!}0.8^1(0.2)^6 = \dfrac{7 \times 6!}{6!}0.8^1(0.2)^6 = 7(0.8)^1(0.2)^6 = 0.0003584$

$P(X = 2) = \dfrac{7!}{5!2!}0.8^2(0.2)^5 = \dfrac{7 \times 6 \times 5!}{5!2!}0.8^2(0.2)^5 = \dfrac{7 \times 6}{2}0.8^2(0.2)^5 = 21(0.8)^2(0.2)^5 = 0.0043008$

$P(X = 3) = \dfrac{7!}{4!3!}0.8^3(0.2)^4 = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!3!}0.8^3(0.2)^4 = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3!}0.8^3(0.2)^4 = 35(0.8)^3(0.2)^4 = 0.028672$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3)$

$P(X \geq 4) = 1 - 0.0003584 - 0.0043008 - 0.028672$

$P(X \geq 4) = 0.9666688$

- b. Dado que 4 dos juízes concordam em suas decisões, qual é a probabilidade de que o painel tenha feito a decisão correta?

A: o painel tomou a decisão correta:

$P(A) = P(X \geq 4) = 0.9666688$

B: 4 juízes concordaram na decisão:

$P(B) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.14336$

O painel tomou a decisão correta e exatamente 4 juízes concordaram:

$P(A \cap B) = P(X = 4) = 0.114688$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(X = 4)}{P(X = 3) + P(X = 4)} = \frac{0.114688}{0.14336} = 0.8$$

. . . .

0.0.14 Questão 14

Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos freqeses são homens e os seguintes eventos:

- H = freguês é homem;
- M = freguês é mulher;
- A = freguês prefere salada;
- B = freguês prefere carne.

Calcular:

a. $P(H)$, $P(A \mid H)$, $P(B \mid M)$

$$P(H) = 0.75 \text{ 75\% dos fregueses são homens}$$

$$P(A \mid H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{0.2(0.75)}{0.75} = 0.2$$

$$P(B \mid M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{0.3(0.25)}{0.25} = 0.3$$

b. $P(A \cap H)$, $P(A \cup H)$

$$P(A \cap H) = 0.2(0.75) = 0.15$$

$$P(A) = P(A \cap H) + P(A \cap H^c) = 0.2(0.75) + 0.7(0.25) = 0.325$$

$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) = 0.325 + 0.75 - 0.15 = 0.925$$

c. $P(M \mid A)$

$$P(M \mid A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0.25(0.7)}{0.325} = 0.5384615$$

....

0.0.15 Questão 15

Considere n pessoas numa sala

- a. Qual é a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia e mês?

1 - Assume-se que todos os anos possuem 365 dias; 2 - Assume-se que das 365 datas de aniversário são equiprováveis;

Calculando a probabiliade das N pessoas fazerem aniversário em datas diferentes:

$P(A^c) = \dfrac{365!}{365^n(365-n)}$

Portanto,

$P(A) = 1 - P(A^c)$

. . . .

- b. A partir de qual valor de N essa probabilidade é maior que 0.5?

$\dfrac{365!}{365^n(365-n)} > 0.5$

. . . .

0.0.16 Questão 16

Um fabricante afirma que apenas 5% de todas as válvulas que produz têm duração inferior a 20 horas. Uma indústria compra semanalmente um grande lote de válvulas desse fabricante, mas sob a seguinte condição: ela aceita o lote se, em dez válvulas escolhidas ao acaso, no máximo uma tiver duração inferior a 20 horas; caso contrário, o lote todo é rejeitado.

- a. Se o fabricante de fato tem razão, qual a probabilidade de um lote ser rejeitado?

A: a válvula dura menos de 20 horas

$P(A) = 0.05$

$P(X=0) = \dfrac{10!}{0!10!}0.05^0(0.95)^{10} = (0.95)^{10} = 0.5987369$

$P(X=1) = \dfrac{10!}{1!9!}0.05^1(0.95)^9 = 10(0.05)^1(0.95)^9 = 0.3151247$

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0.5987369 + 0.3151247 = 0.9138616$ é a probabilidade do lote ser aceito

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.9138616 = 0.0861384$ é a probabilidade do lote ser rejeitado

- b. Suponha agora que o fabricante esteja mentindo, isto é, na verdade a proporção de válvulas com duração inferior a 20 horas é de 10%. Qual a probabilidade de um lote ser aceito, segundo o critério acima?

$P(A) = 0.1$ probabilidade da válvula durar menos de 20 horas

$P(X=0) = \dfrac{10!}{0!10!}0.1^0(0.9)^{10} = (0.9)^{10} = 0.3486784$

$P(X=1) = \dfrac{10!}{1!9!}0.1^1(0.9)^9 = 10(0.1)^1(0.9)^9 = 0.3874205$

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0.3486784 + 0.3874205 = 0.7360989$ é a probabilidade do lote ser aceito

. . . .

0.0.17 Questão 17

Prove que, quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, mas de tal sorte que $np \to \lambda$, temos

$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Sugestão: use o fato $(1 - \frac{\lambda}{n})^n \to e^{-\lambda}$ quando $n \to \infty$

$E(x) = np = \lambda$

$p = \dfrac{\lambda}{n}$

$1 - p = 1 - \dfrac{\lambda}{n} = \dfrac{n}{n} - \dfrac{\lambda}{n} = \dfrac{n-\lambda}{n}$

Considerando $n \to \infty$

$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \left(\dfrac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \left(\dfrac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \left(\dfrac{\lambda^k}{n^k}\right) \left(\dfrac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda^k n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \left(\dfrac{1}{n}\right)^k \left(\dfrac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \left(\dfrac{1}{n}\right)^k \left(\dfrac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n^k} \left(\dfrac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}$

....

0.0.18 Questão 18

Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em 1000 horas) que possa ser considerado uma variável aleatória contínua com função de densidade $f(x) = e^{-x}, x > 0$. Suponha que o custo de fabricação de um item seja 2,00 reais e o preço de venda seja 5,00 reais. O fabricante garante total devolução se $X \leq 0.9$. Qual o lucro esperado por item?

X: tempo de vida do equipamento

$P(X \leq 0.9) = \displaystyle\int_0^{0.9} e^{-x}dx$

$\displaystyle\int_0^{0.9} e^{-x}dx$

$u = -x$

$du = -1dx \implies dx = -du$

$$\int_0^{0.9} e^{-x}dx \implies -1\int_0^{0.9} e^u du = -e^{-0.9} - [-e^{-0}] = 0.5934303$$

$P(X \leq 0.9) = 0.5934303$ é a probabilidade do fabricante realizar integralmente a devolução

Lucro/prejuízo por item vendido (ok): $5 - 2 = 3$

Lucro/prejuízo por item vendido (defeituoso): -2

$E(X) = -2(0.5934303) + 3(1 - 0.5934303) = 0.0328485$

Lucro esperado: 0,3 centavos por item

. . . .

0.0.19 Questão 19

Pequenos motores elétricos são expedidos em lotes de 50 unidades. Antes que uma remessa seja aprovada, um inspector escolhe 5 desses motores e os inspeciona. Se nenhum dos motores inspecionados for defeituoso, o lote é aprovado. Se um ou mais forem verificados defeituosos, todos os motores da remessa são inspecionados. Suponha que exista, de fato, 3 motores defeituosos no lote. Qual é a probabilidade de que a inspeção total seja necessária?

Distribuição Hipergeométrica:

$$P(X >= 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}$$

$$P(X >= 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{50-3}{5-0}}{\binom{50}{5}}$$

$$P(X >= 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}}$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} = 1$$

$$\binom{47}{5} = \frac{47!}{5!(47-5)!} = \frac{47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43}{5!} = 1533939$$

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{5!45!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46}{5!} = 2118760$$

$$P(X >= 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1533939}{2118760} = 0.2760204$$

. . . .

0.0.20 Questão 20

Suponha que o custo de realização de um experimento seja de 1000 reais. Se o experimento falhar, ocorrerá um custo adicional de 300 reais em virtude de serem necessárias algumas alterações antes que a próxma tentativa seja executada. Se a probabilidade de sucesso em uma tentativa qualquer foi de 0,20, se as provas forem independentes, e se os experimentos continuarem até que o primeiro resultado exitoso seja alcançado, qual será o custo esperado do procedimento completo?

X: número de falhas até o primeiro sucesso.

$p = 0.2$

Distribuição Geométrica

Esperança:

$E(X) = \dfrac{1-p}{p} = \dfrac{0.8}{0.2} = 4$

Custo total:

$E(X) \times 1300 + 1000 = 6200$

$$D(c,d|y) = -2\Bigg\{\Bigg[nlog(c_0 d_0) - (c_0+1)\sum_{i=1}^{n} log(y_i) - (d_0+1)\sum_{i=1}^{n}(1+y_i^{-c_0})\Bigg] - \\ \Bigg[nlog(\hat{c}\hat{d}) - (\hat{c}+1)\sum_{i=1}^{n} log(y_i) - (\hat{d}+1)\sum_{i=1}^{n}(1+y_i^{-\hat{c}})\Bigg]\Bigg\}$$