DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

F.D.P: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x)$

com $\lambda > 0$.

NOTAÇÃO: $X \sim Exp(\lambda)$

$E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $\quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ $\quad m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

F.D.A: $F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} \, dx$

$$F_X(x) = \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} \, dx$$

$u = -\lambda x$

$du = -\lambda \, dx$

$dx = -\frac{1}{\lambda} du$

$$= \lambda \int_0^x e^{u} \, -\frac{1}{\lambda} \, du$$

$$= -\int_0^x e^{u} \, du = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x$$

$$= -e^{-\lambda x} - \left[-e^{-\lambda 0}\right] = -e^{-\lambda x} + 1 = \underline{\underline{1 - e^{-\lambda x}}}$$

LOGO,

F.D.A $= F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

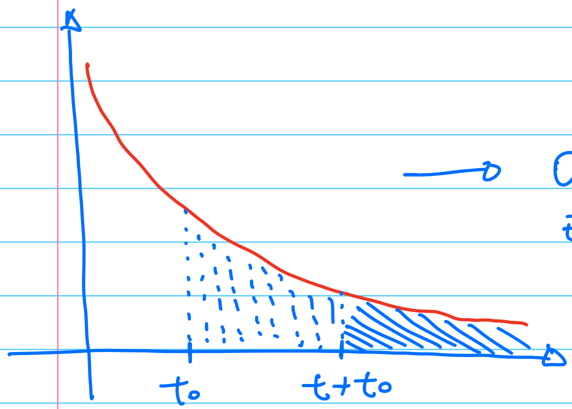
SE $P(X \leq x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

ENTÃO $P(X > x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = 1 - 1 + e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x}$

FALTA DE MEMÓRIA DA DISTR. EXPONENCIAL:

"A PROBABILIDADE DE UM EVENTO ACONTECER NAS PRÓXIMAS t UNIDADES DE TEMPO NÃO DEPENDE DAS ÚLTIMAS t_0 UNIDADES DE TEMPO."

$$P(X > t + t_0 \mid X > t_0) = P(X > t)$$



→ OBSERVA-SE QUE $P(X > t + t_0)$ ESTÁ CONTIDA EM $P(X > t_0)$

LOGO:

$$P(X > t + t_0 \cap X > t_0) = P(X > t + t_0)$$

PROVA:

$$P(X > a+b \mid X > a) = \frac{P(X > a+b \cap X > a)}{P(X > a)}$$

$$= \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda a - \lambda b}}{e^{-\lambda a}} = \frac{e^{-\lambda a} e^{-\lambda b}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b} = \underline{\underline{P(X > b)}}$$

COMENTÁRIOS:

- MUITO UTILIZADA COMO MODELO P/ TEMPOS DE VIDA
- É UM CASO PARTICULAR DA GAMA
- A SOMA DE VAs EXPONENCIAIS INDEPENDENTES E IDENTICAMENTE DISTRIBUÍDAS TEM DISTR. GAMA
- A DURAÇÃO DO INTERVALO DE TEMPO ENTRE EVENTOS TEM DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL DESDE QUE O Nº DE TEMPOS, EM UM INTERVALO FIXO, TENHA DISTRIBUIÇÃO POISSON

EXEMPLO:

PODEMOS MEDIR O Nº DE km PERCORRIDOS POR UM DETERMINADO CARRO ANTES QUE SEU MOTOR PARE DE FUNCIONAR. SUPONHA QUE ESTA DISTRIBUIÇÃO SEJA REGIDA PELA EXPONENCIAL COM MÉDIA 100.000. QUAL É A PROB. DE QUE O MOTOR DE UM CARRO FALHE DURANTE SEUS PRIMEIROS 25.000 km?

$$E(X) = 100.000$$

$$\frac{1}{\lambda} = 100.000$$

$$\lambda = \frac{1}{100.000}$$

SENDO ASSIM, $X \sim Exp(\lambda = 1/100.000)$

ENTÃO, SENDO $x = 25.000$, TEMOS QUE:

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\frac{25}{100}} = 0,2212 .$$

PORTANTO, A PROBABILIDADE DO CARRO FALHAR NOS PRIMEIROS 25.000 km É $\underline{\underline{0,2212}}$.