

# LISTA DE EXERCÍCIOS

## PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA MATEMÁTICA

Prof. Anderson Ara  
PPGMNE - UFPR

**Exercício 01:** Seja  $X$  = distância à origem de um ponto selecionado ao acaso, em um disco de raio  $r$ , sendo  $0 \leq x \leq r$ . Seja

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{r^2} & 0 \leq x \leq r \\ 1 & x > r \end{cases}$$

- Esboce o gráfico da função de probabilidade acumulada de  $X$ ;
- Encontre a função densidade de probabilidade de  $X$  e a esboce-a graficamente;
- Mostre que a função encontrada no item b é uma função densidade de probabilidade;
- Calcule  $E(X)$  e indique-a no gráfico do item b.

**Exercício 02:** Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição uniforme contínua com parâmetros 0 e 4, mostre que a variância de  $X$  é maior que 1.

**Exercício 03:** Seja  $Y \sim \text{Exp}(5)$ :

- Mostre que  $f_Y(y) = 5 \exp\{-5y\}I_{[0,\infty)}(y)$  é uma f.d.p.;
- Calcule a probabilidade  $P(Y \leq 1)$ .

**Exercício 04:** Em um jogo de tabuleiro em que tirar 1 era crucial, um jogador solicitou que gostaria de jogar com seu próprio dado, pois isso poderia aumentar sua moral durante o jogo. Os adversários eram estatísticos desconfiados quiseram analisar o dado com calma. Assim, realizaram dois experimentos lançando o dado 54 vezes a cada experimento. No primeiro obtiveram 10 faces 1 e no segundo 14 faces 1. Considerando que o dado seja honesto e aproximação normal, calcule a probabilidade de o dado resultar face 1:

- 10 vezes ou mais;
- Mais que 14 vezes.
- Entre 10 e 14 vezes.

**Exercício 05:** Seja  $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$  mostre que  $\text{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$

**Exercício 06:** Seja o lançamento de três moedas honestas. Seja  $X$  o número de caras nos dois primeiros lançamentos e  $Y$  o número de caras nos dois últimos.

- Encontre a distribuição conjunta de  $X$  e  $Y$ ;
- Encontre  $E(Y|X = 1)$ ;
- Encontre  $\rho_{X,Y}$ .

**Exercício 07:** Seja

$$f_{X,Y}(x, y) = 4c(x + y - 2xy)I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$$

- Encontre o valor de  $c$  para que  $f_{X,Y}(x, y)$  seja uma f.d.p.;
- Encontre as distribuições marginais das variáveis  $X$  e  $Y$ ;
- $X$  e  $Y$  são v.a. independentes? Justifique.

**Exercício 08:** Seja  $X$  e  $Y$  com distribuição normal bivariada de parâmetros  $\mu_x = 5$ ,  $\mu_y = 10$ ,  $\sigma_x^2 = 1$ , and  $\sigma_y^2 = 25$ . Se  $\rho = 0$ , encontre  $P(X + Y < 16)$ .

**Exercício 09:** Seja

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{8}x(x - y)I_{(0,2)}(x)I_{(-2,2)}(y)$$

- Encontre  $f_Y(y)$ ;
- Encontre  $f_{X|Y}(x|y)$ .

**Exercício 10:** Seja  $X \sim \text{Exp}(1)$ , encontre a função densidade de probabilidade de  $Y = 2X + 1$ .

**Exercício 11:** Seja  $X \sim U(0, 1)$  e  $Y \sim U(0, 1)$  com  $X \perp Y$

- Encontre a função densidade de probabilidade de  $Z = X + Y$ ;
- Calcule  $E(Z)$  via a densidade do item a. e verifique que  $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = E(Z)$ .

---

Respostas:

**E01.** d:  $\frac{2}{3}r$ .

**E02.** Mostre que a variância é  $\frac{4}{3}$

**E03.** b:  $1 - e^{-5} \approx 0,993$

**E04.** a: 0,348; b: 0,034; c: 0,324

**E06.** b: 1; c:  $\frac{1}{2}$

**E07.** a:  $c = \frac{1}{2}$ ; b:  $X \sim U(0, 1)$  e  $Y \sim U(0, 1)$ ; c:  $X \not\perp Y$

**E08.**  $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right) \approx 0,578$

**E09.** a:  $f_Y(y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}y$ ; b  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{x(x-y)}{2\left(\frac{4}{3}-y\right)}$

**E10**  $f_Y(y) = \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{y-1}{2}\right\}I_{[1,\infty)}(y)$

**E11. a.**

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & 0 \leq z < 1 \\ 2 - z & 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

b.  $E(Z) = 1$