

Universidade Federal do Paraná
Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia
Avaliação de Inferência Bayesiana
Prof. Paulo Justiniano

Antonio C. da Silva Júnior

12/09/2022

1 Questão 1

Suponha que os maiores partidos da Inglaterra, “Labour”, “Conservative”, “LibDems”, obtiveram 35, 42, e 20% dos votos em uma eleição recente. O restante foi distribuído entre partidos menores. Tem-se ainda que os percentuais de favoráveis ao BREXIT em cada um destes partidos é de 15, 62 e 40%, respectivamente. Não se sabe sobre os demais mas assume-se que seja de 50%. Entrevistou-se uma pessoa que se declarou favorável ao BREXIT. Qual a probabilidade de que ela seja apoiadora do “Labour”? E dos “LibDem”?

A: apoiador do Labour

B: apoiador do Conservative

C: apoiador do LibDem

D: apoiador de outros partidos

E: favorável ao BREXIT

$$P(A) = 0.35$$

$$P(B) = 0.42$$

$$P(C) = 0.20$$

$$P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = 0.03$$

$$P(E | A) = 0.15$$

$$P(E | B) = 0.62$$

$$P(E | C) = 0.40$$

$$P(E | D) = 0.50$$

$$P(E \cap A) = P(E | A)P(A) = 0.15 \times 0.35 = 0.0525$$

$$P(E \cap B) = P(E | B)P(B) = 0.62 \times 0.42 = 0.2604$$

$$P(E \cap C) = P(E | C)P(C) = 0.40 \times 0.20 = 0.08$$

$$P(E \cap D) = P(E | D)P(D) = 0.50 \times 0.03 = 0.015$$

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C) + P(E \cap D) = 0.4079$$

$$P(A | E) = \frac{P(E | A)P(A)}{P(E)} = \frac{P(E \cap A)}{P(E)} = \frac{0.0525}{0.4079} = 0.128708$$

$$P(C | E) = \frac{P(E | C)P(C)}{P(E)} = \frac{P(E \cap C)}{P(E)} = \frac{0.08}{0.4079} = 0.1961265$$

Portanto, 0.129 é a probabilidade de que a pessoa entrevistada seja apoiadora do Labour, e 0.197 é a probabilidade de que seja apoiadora do LibDem.

2 Questão 2

No contexto do problema anterior:

- Escreva os dados e quantidades de interesse na notação geral de variável observada Y e parâmetro θ .
- Forneça a distribuição a priori do problema.
- Forneça a verossimilhança do problema.
- Encontre a distribuição a posteriori.
- Esboce um gráfico com distribuições priori e posteriori.

2.1 Dados e quantidades

| | Partido (θ_i) | Favorável BREXIT (y) |
|---|------------------------|--------------------------|
| 1 | Labour | 0.15 |
| 2 | Conservative | 0.62 |
| 3 | LibDem | 0.40 |
| 4 | Outros | 0.50 |

2.2 Priori e verossimilhança

| | $f(\theta_i)$ | $f(y \theta_i)$ |
|---|---------------|-------------------|
| 1 | 0.35 | 0.15 |
| 2 | 0.42 | 0.62 |
| 3 | 0.20 | 0.40 |
| 4 | 0.03 | 0.50 |

2.3 Posteriori

$$f(\theta_i | y) = \frac{f(y | \theta_i)f(\theta_i)}{f(y)}$$

Em que

$$f(y) = \sum_{i=1}^4 f(y, \theta_i)$$

| |
|--------|
| $f(y)$ |
| 0.4079 |

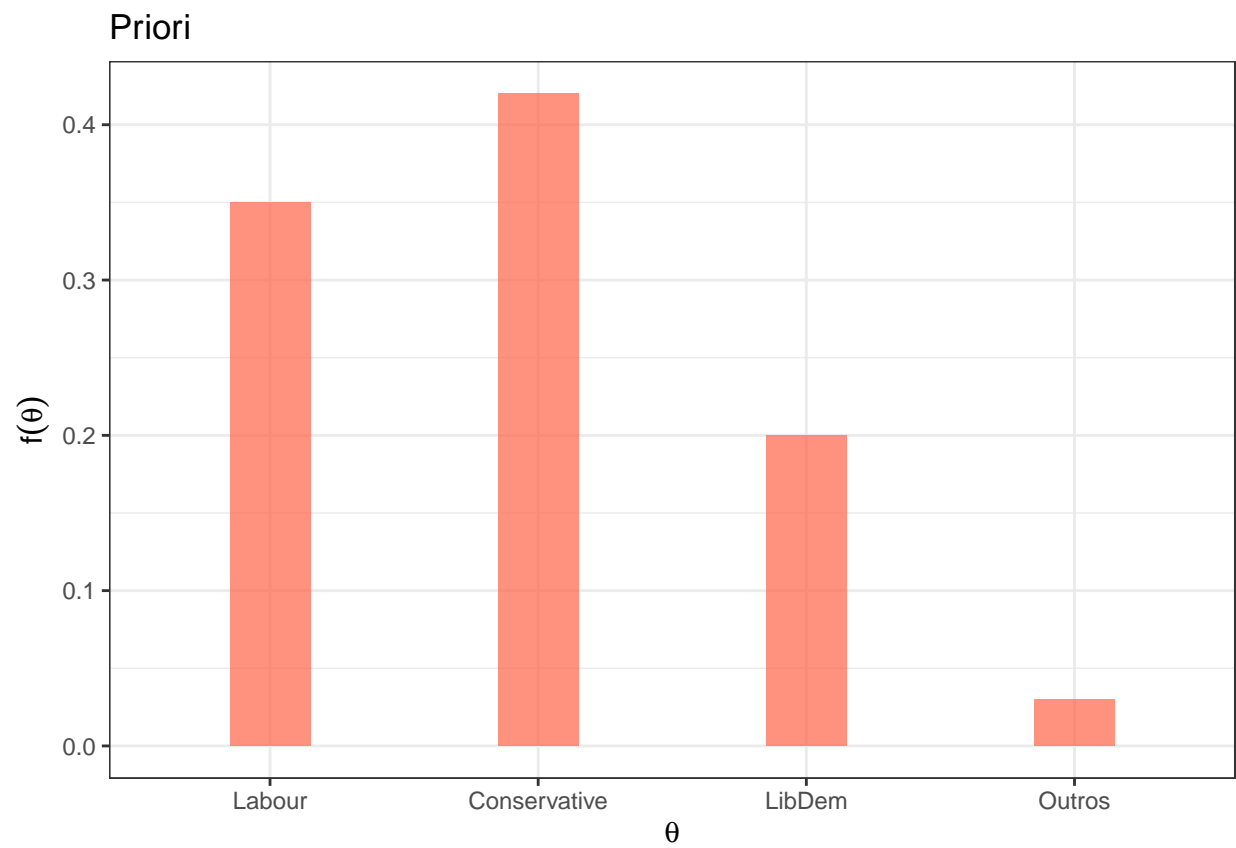
e

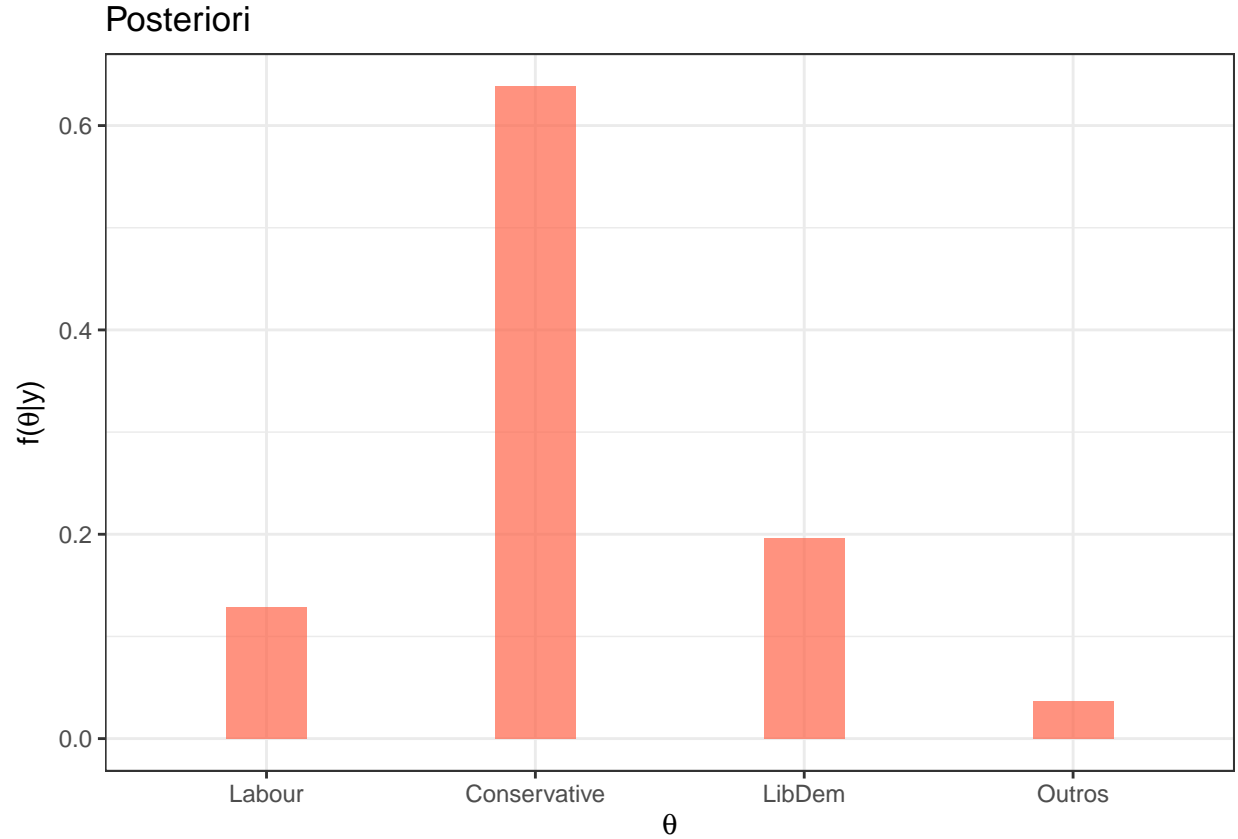
| $f(y \mid \theta_i)f(\theta_i)$ | |
|---------------------------------|--------|
| 1 | 0.0525 |
| 2 | 0.2604 |
| 3 | 0.0800 |
| 4 | 0.0150 |
| | |

Portanto,

| $f(\theta_i \mid y)$ | |
|----------------------|-----------|
| 1 | 0.1287080 |
| 2 | 0.6383918 |
| 3 | 0.1961265 |
| 4 | 0.0367737 |
| | |

2.4 Gráficos





3 Questão 3

Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma distribuição com função de probabilidades:

$$f(x | \theta) = \theta \exp \{-\theta x\}, \text{ com } x > 0 \text{ e } \theta > 0.$$

Suponha o modelo a priori de Jeffreys para θ (ou seja, $\pi(\theta) \propto 1/\theta$, $\theta > 0$). Com isso, considere o teste de hipóteses: $H_0 : \theta \leq 1$ vs $H_1 : \theta > 1$.

- Obtenha o modelo a posteriori de θ , e expresse o estimador de Bayes sob perda quadrática para θ .
- Obtenha a expressão da distribuição preditiva.
- Supondo $\sum_{i=1}^n x_i = 1.5$, decida sobre H_0 contra H_1 considerando a seguinte estrutura de perda:

| $L(\theta, a)$ | Decisão | |
|-----------------|-----------------|--------------|
| | $\theta \leq 1$ | $\theta > 1$ |
| $\theta \leq 1$ | 0 | 1 |
| $\theta > 1$ | 1 | 0 |

3.1 Posteriores de θ e estimador de Bayes

Verossimilhança:

$$L(\theta | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

$$L(\theta | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \theta \exp \{-\theta x_i\}$$

$$L(\theta | \mathbf{x}) = \theta^n \prod_{i=1}^n \exp \{-\theta x_i\}$$

$$L(\theta | \mathbf{x}) = \theta^n \exp \{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\}$$

Posteriori:

$$f(\theta | \mathbf{x}) = L(\theta | \mathbf{x})\pi(\theta)$$

$$f(\theta | \mathbf{x}) = \theta^n \exp \{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\} \frac{1}{\theta}$$

$$f(\theta | \mathbf{x}) = \theta^{n-1} \exp \{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\}$$

Estimador de Bayes:

$$\rho(a, x) = \int L(\theta, a) f(\theta | \mathbf{x}) d\theta$$

$$L(\theta, a) = (\theta - a)^2 \implies \rho(a, x) = \int (\theta - a)^2 \theta^{n-1} \exp \{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\} d\theta$$

3.2 Distribuição preditiva

Assumindo que

- X_1, \dots, X_n são independentes;
- $\theta | x \sim Ga(n, \sum_{i=1}^n x_i)$.

$$f(x_p | \mathbf{x}) = \int f(x_p | \theta) f(\theta | \mathbf{x}) d\theta$$

$$f(x_p | \mathbf{x}) = \int \theta \exp \{-\theta x_p\} \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{\Gamma(n)} \theta^{n-1} \exp \{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\} d\theta$$

$$f(x_p | \mathbf{x}) = \int \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{\Gamma(n)} \theta^n \exp \{-\theta x_p - \theta \sum_{i=1}^n x_i\} d\theta$$

$$f(x_p | \mathbf{x}) = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{\Gamma(n)} \int \theta^n \exp \{-\theta(x_p + \sum_{i=1}^n x_i)\} d\theta$$

Observa-se que $\theta^n \exp \{-\theta(x_p + \sum_{i=1}^n x_i)\}$ corresponde ao núcleo de uma $Ga(\alpha = n + 1, \beta = x_p + \sum_{i=1}^n x_i)$

Sabendo que $\int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \exp \{-\theta\beta\} \theta^{\alpha-1} d\theta = 1$

Temos,

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \exp\{-\theta\beta\} \theta^{\alpha-1} = 1$$

$$\int_0^\infty \exp\{-\theta\beta\} \theta^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} = \frac{\Gamma(n+1)}{(x_p + \sum_{i=1}^n x_i)^{n+1}}$$

Portanto,

$$f(x_p | \mathbf{x}) = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{\Gamma(n)} \int \theta^n \exp\{-\theta(x_p + \sum_{i=1}^n x_i)\} d\theta$$

$$f(x_p | \mathbf{x}) = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{\Gamma(n)} \times \frac{\Gamma(n+1)}{(x_p + \sum_{i=1}^n x_i)^{n+1}}$$

$$f(x_p | \mathbf{x}) = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{(x_p + \sum_{i=1}^n x_i)^{n+1}} \times \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)}$$

$$f(x_p | \mathbf{x}) = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{(x_p + \sum_{i=1}^n x_i)^{n+1}} \times \frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(n)}$$

$$f(x_p | \mathbf{x}) = \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{(x_p + \sum_{i=1}^n x_i)^{n+1}}$$

3.3 Decisão sobre H_0 contra H_1

Considerando $\theta \in \Theta$, em que

$$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$$

$$\Theta_0 = \{\theta \mid 0 < \theta \leq 1\}$$

$$\Theta_1 = \{\theta \mid \theta > 1\}$$

Teste de hipóteses:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$

$$H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Estrutura de perda:

| $L(\theta, a)$ | Decisão | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | $\theta \in \Theta_0$ | $\theta \in \Theta_1$ |
| $\theta \in \Theta_0$ | 0 | β |
| $\theta \in \Theta_1$ | α | 1 |

Se $P(\theta \in \Theta_0 | \mathbf{x}) > \frac{\beta}{\alpha + \beta}$, então H_0 é preferível a H_1 .

Desenvolvimento:

$$P(\theta \in \Theta_0 | \mathbf{x}) = \int_0^1 f(\theta | \mathbf{x}) d\theta$$

$$P(\theta \in \Theta_0 | \mathbf{x}) = \int_0^1 \theta^{n-1} \exp\{-\theta \sum_{i=1}^n x_i\} d\theta$$

$$P(\theta \in \Theta_0 | \mathbf{x}) = \int_0^1 \theta^{n-1} \exp\{-1.5\theta\} d\theta$$

$$P(\theta \in \Theta_0 \mid \mathbf{x}) = \int_0^1 Ga(n, 1.5) d\theta$$

Portanto, se o valor do parâmetro n resultar em $P(\theta \in \Theta_0 \mid X) > 1/2$, conclui-se que H_0 é preferível a H_1 .

3.4 Atividade adicional

Supondo $\sum_{i=1}^n x_i = 1.5$ e $n = 10$, traçar os gráficos da priori, verossimilhança, posteriori e preditiva.

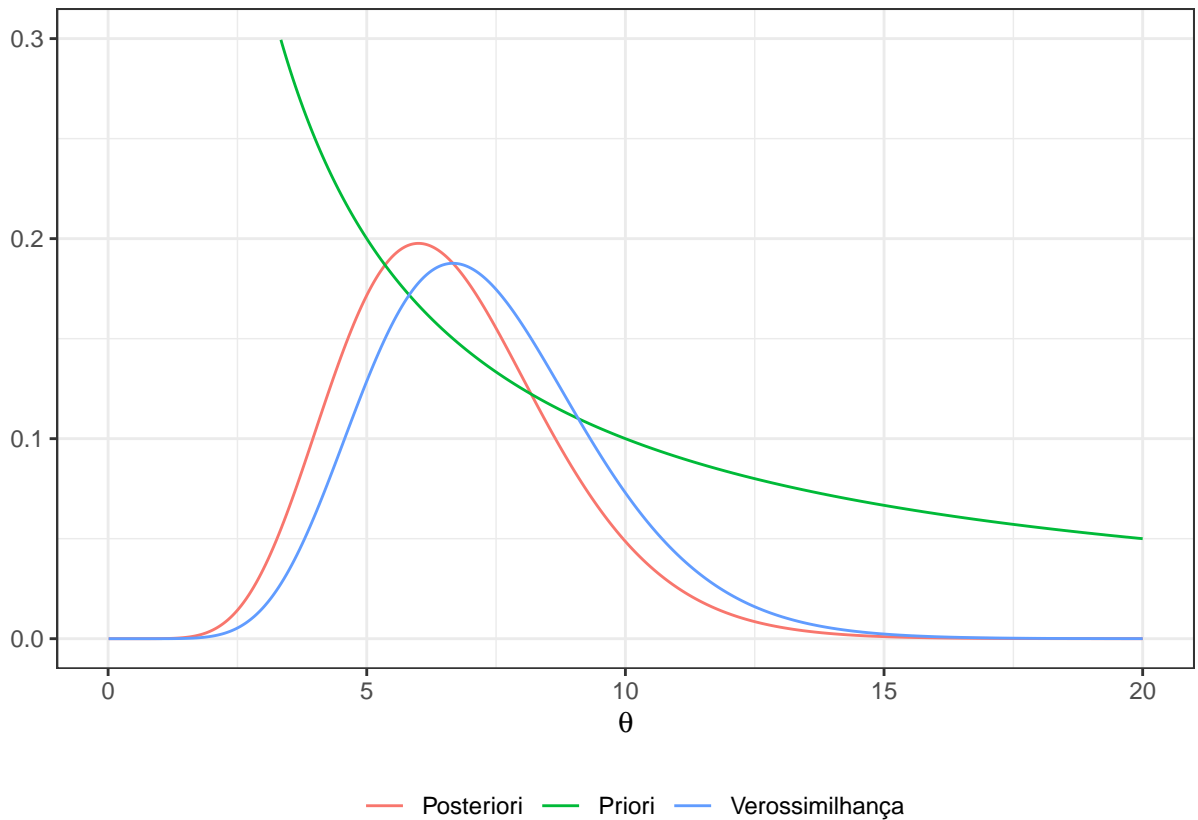
Código 3.1: Construção do gráfico da priori, verossimilhança e posteriori

```
library(tidyverse)

n <- 10
beta <- 1.5

THETA <- seq(0.01, 20, 0.01)
df_plot <- data.frame(THETA)
df_plot$Priori <- 1/THETA
df_plot$`Verossimilhança` <- dgamma(THETA, n+1, beta)
df_plot$Posteriori <- dgamma(THETA, n, beta)

df_plot %>%
  pivot_longer(!THETA, names_to = 'distr', values_to = 'value') %>%
  ggplot(aes(x=THETA, y=value, color=distr)) +
  geom_line() +
  ylim(0, 0.30) +
  labs(x = expression(theta), y='', color='') +
  theme(legend.position="bottom")
```

Código 3.2: Construção do gráfico da preditiva

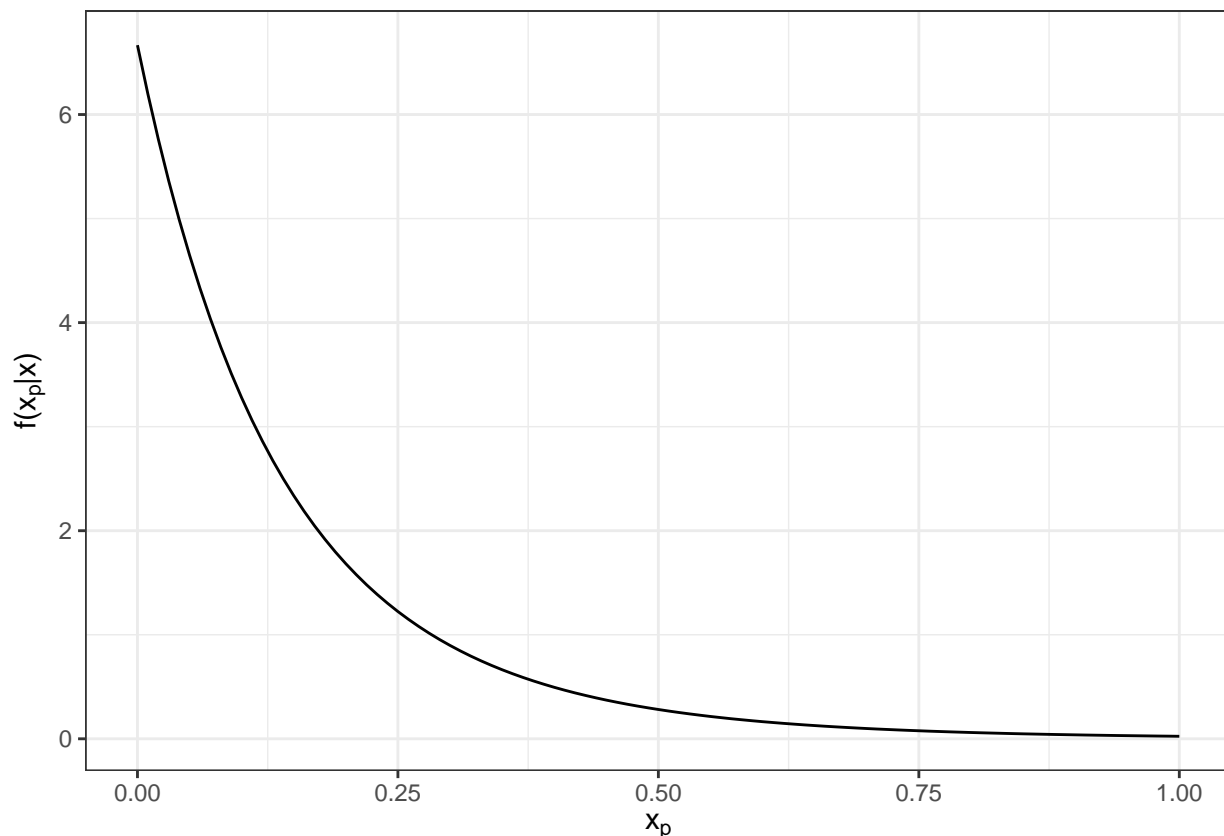
```
library(tidyverse)

X <- seq(0, 1, 0.01)

f_pred <- function(x) (n * sum_x^n) / (x + sum_x)^(n+1)

n <- 10
sum_x <- 1.5

data.frame(X, pred=f_pred(X)) %>%
  ggplot(aes(x=X, y=pred)) +
  geom_line() +
  labs(x = expression(x["p"]), y=expression(paste(f, "(", x["p"], "|", x, ")")))
```



4 Questão 4

Considere os dados (iid) $y = (y_1, \dots, y_n)$ das taxas de sucesso no primeiro saque de um jogador de tênis em n jogos de um campeonato. Assuma o modelo $Y | \theta \sim f(y_i | \theta) = \theta(\theta + 1)y_i^{\theta-1}(1 - y_i)$ com $y_i \in (0, 1)$ e $\theta > 0$. Não existe uma família conjugada usual para este modelo e adota-se uma priori gama $\theta \sim Ga(1, 1)$. Foram obtidos dados tal que $n = 20$, $\sum_i \log(y_i) = -4.59$. Obtenha a expressão da posteriori e discuta como obter inferências (bayesianas) de interesse, incluindo resumos da posteriori e preditivas. Discuta e explique procedimentos e passos adotados em situações em que não há expressões analíticas (fechadas)

Priori:

Sabendo que $\theta \sim Ga(1, 1)$, temos

$$f(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} \exp\{-\beta\theta\}$$

$$f(\theta) = \frac{1^1}{\Gamma(1)} \theta^{1-1} \exp\{-1\theta\}$$

$$f(\theta) = \exp\{-\theta\}$$

Verossimilhança:

$$L(\theta | \mathbf{y}) = \prod_{i=1}^n \theta(\theta + 1)y_i^{\theta-1}(1 - y_i)$$

$$L(\theta | \mathbf{y}) = \theta^n(\theta + 1)^n \prod_{i=1}^n y_i^{\theta-1}(1 - y_i)$$

$$L(\theta | \mathbf{y}) = \theta^n(\theta + 1)^n \prod_{i=1}^n y_i^\theta y_i^{-1}(1 - y_i)$$

$$L(\theta \mid \mathbf{y}) = \theta^n (\theta + 1)^n \prod_{i=1}^n y_i^\theta \prod_{i=1}^n y_i^{-1} (1 - y_i)$$

$$L(\theta \mid \mathbf{y}) \propto \theta^n (\theta + 1)^n \prod_{i=1}^n y_i^\theta$$

$$L(\theta \mid \mathbf{y}) \propto \theta^n (\theta + 1)^n \exp \left\{ \log \left(\prod_{i=1}^n y_i^\theta \right) \right\}$$

$$L(\theta \mid \mathbf{y}) \propto \theta^n (\theta + 1)^n \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \log(y_i^\theta) \right\}$$

$$L(\theta \mid \mathbf{y}) \propto [\theta(\theta + 1)]^n \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\}$$

$$L(\theta \mid \mathbf{y}) \propto (\theta^2 + \theta)^n \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\}$$

Posteriori:

$$f(\theta \mid y) \propto L(\theta \mid y) f(\theta)$$

$$f(\theta \mid y) \propto (\theta^2 + \theta)^n \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\} \times \exp \{-\theta\}$$

$$f(\theta \mid y) \propto (\theta^2 + \theta)^n \exp \left\{ -\theta + \theta \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right\}$$

$$f(\theta \mid y) \propto (\theta^2 + \theta)^n \exp \left\{ -\theta \left[1 - \sum_{i=1}^n \log(y_i) \right] \right\}$$

A obtenção de inferências, bem como medidas resumo da posteriori é preditiva, neste caso que a distribuição posteriori não se apresenta na forma de uma distribuição conhecida, depende de uma abordagem baseada em simulação ou (hoje menos utilizada) por meio de uma aproximação Normal.

Abaixo demonstro de forma simplificada como obter amostras e resumo da posteriori via aproximação Normal. O primeiro passo, baseado nas informações sobre os dados mencionada no enunciado ($n = 20$ e $\sum_i \log(y_i) = -4.59$), foram simuladas 20 amostras:

Código 4.1: Amostras simuladas

```
y <- c(0.796001, 0.8991, 0.795701, 0.8080,
       0.907901, 0.796001, 0.90102, 0.5068,
       0.7180, 0.9569, 0.893201, 0.8939, 0.6889,
       0.7989, 0.9129, 0.6886, 0.681901, 0.7992,
       0.965001, 0.6699)
```

Código 4.2: Soma dos logs de y

```
sum(log(y))
```

```
## [1] -4.59
```

Código 4.3: Número de amostras em y

```
length(y)
```

```
## [1] 20
```

Observou-se que a $f(y_i \mid \theta)$ informada no enunciado corresponde à densidade de uma $Beta(\theta, 2)$, conforme a demonstração abaixo:

Seja $Y \sim B(\alpha, \beta)$

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1 - y)^{\beta-1}$$

Considerando $\alpha = \theta$ e $\beta = 2$, temos

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\theta + 2)}{\Gamma(\theta)\Gamma(2)} y^{\theta-1} (1-y)^{2-1}$$

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\theta + 1 + 1)}{\Gamma(\theta)\Gamma(1 + 1)} y^{\theta-1} (1-y)$$

Considerando $z = \theta + 1$

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(z + 1)}{\Gamma(\theta)\Gamma(1 + 1)} y^{\theta-1} (1-y)$$

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{z\Gamma(z)}{\Gamma(\theta) \cdot 1\Gamma(1)} y^{\theta-1} (1-y)$$

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{(\theta + 1)\Gamma(\theta + 1)}{\Gamma(\theta)} y^{\theta-1} (1-y)$$

$$f(y; \alpha, \beta) = \frac{(\theta + 1)\theta\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta)} y^{\theta-1} (1-y)$$

$$f(y; \alpha, \beta) = \theta(\theta + 1)y^{\theta-1}(1-y)$$

Sendo assim, na construção da função de verossimilhança considerou-se $Y | \theta \sim \text{Beta}(\theta, 2)$.

Código 4.4: Construção das funções priori, verossimilhança e posteriori

```
# Priori:
prio <- function(par) exp(-par)

# Verossimilhança:
L <- function(par, x=y) {
  out <- prod(dbeta(x=y, shape1 = par, shape2 = 2))
  return(out)
}

# Posteriori:
post <- function(par) log(L(par) * prio(par))
```

Em seguida, encontra-se numericamente o θ que maximiza a função posteriori, bem como o hessiano, para obter μ e σ da Normal.

Código 4.5: Obtenção da média e desvio padrão da Normal

```
theta_hat_p <- optimize(post, interval = c(0, 60), maximum = TRUE)$maximum
theta_hess_p <- optimHess(theta_hat_p, post)[1]

mu <- theta_hat_p
sigma <- sqrt((-theta_hess_p)^-1)
```

Por fim, o código para a visualização das curvas da Priori, Verossimilhança e Posteriori na escala 0, 1 para melhorar a visualização.

Código 4.6: Construção do gráfico da priori, verossimilhança e posteriori

```
library(tidyverse)

THETA <- seq(1, 12, 0.01)
df_plot <- data.frame(THETA)
df_plot$Priori <- dgamma(THETA, 1, 1)
df_plot$`Verossimilhança` <- as.numeric(lapply(df_plot$THETA, L))
df_plot$Posteriori <- dnorm(THETA, mean=mu, sd=sigma)
```

```

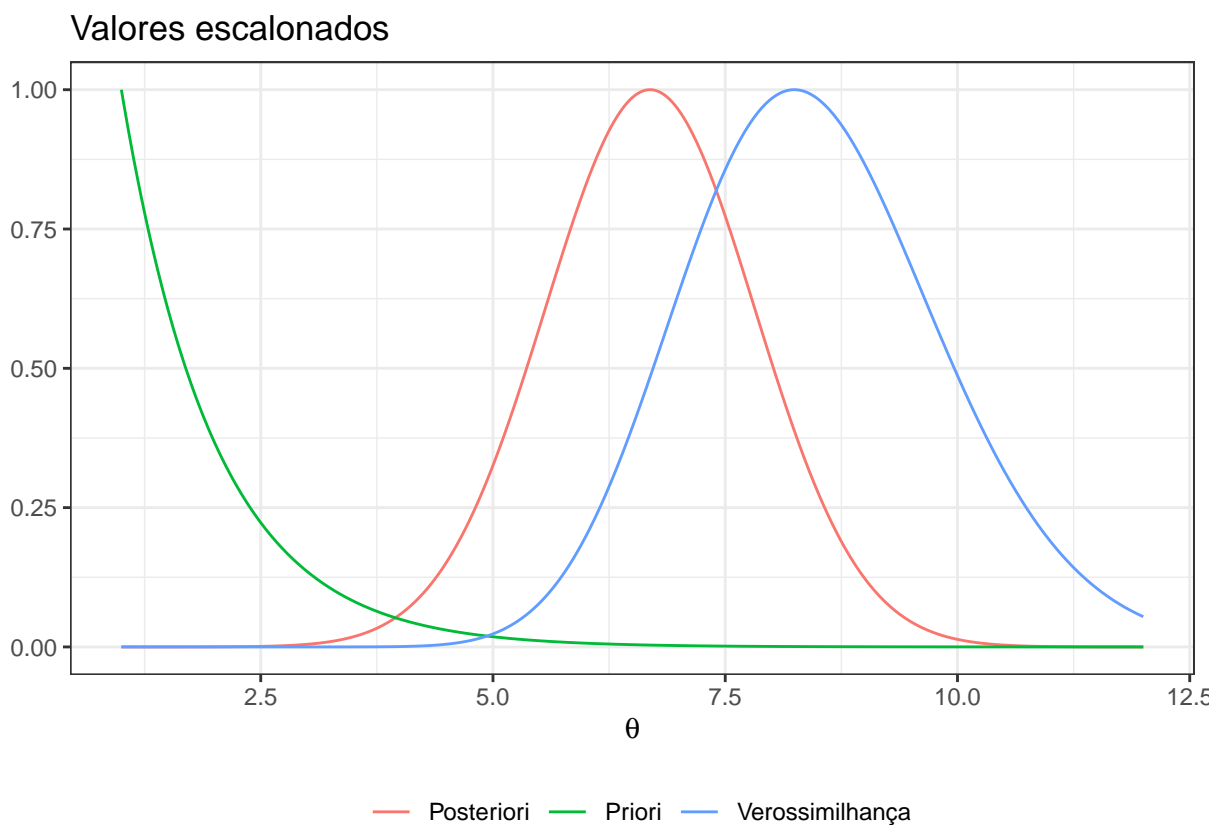
#Escalaonamento dos dados para visualização gráfica:
df_plot$Priori <- (
  df_plot$Priori - min(df_plot$Priori)) / (
    max(df_plot$Priori) - min(df_plot$Priori))

df_plot$`Verossimilhança` <- (
  df_plot$`Verossimilhança` - min(df_plot$`Verossimilhança`)) / (
    max(df_plot$`Verossimilhança`) - min(df_plot$`Verossimilhança`))

df_plot$Posteriori <- (
  df_plot$Posteriori - min(df_plot$Posteriori)) / (
    max(df_plot$Posteriori) - min(df_plot$Posteriori))

df_plot %>%
  pivot_longer(!THETA, names_to = 'distr', values_to = 'value') %>%
  ggplot(aes(x=THETA, y=value, color=distr)) +
  geom_line() +
  labs(x = expression(theta), y='', color='', title='Valores escalonados') +
  theme(legend.position="bottom")

```



Uma vez que a Posteriori foi aproximada pela Normal, pode-se facilmente obter as medidas de resumo:

Código 4.7: Obtenção das medidas de resumo da posteriori aproximada pela Normal

```

list(
  media=round(theta_hat_p, 4),

```

```

mediana=round(theta_hat_p, 4),
`IC 95%`=round(qnorm(c(0.025, 0.975), mean = mu, sd = sigma),4))

## $media
## [1] 6.6904
##
## $mediana
## [1] 6.6904
##
## $`IC 95%`
## [1] 4.4782 8.9026

```

4.1 Atividade adicional

Usando algum algoritmo para obter amostras da posteriori e preditiva (com respectivos gráficos de densidade) e resumos (média e intervalo de credibilidade).

Para obtenção das amostras e medidas de resumo da posteriori utilizou-se um algoritmo baseado nos métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov.

O primeiro passo é definir o número de amostras que deseja-se simular, um valor inicial para θ e o tamanho da janela de busca.

Código 4.8: Definições iniciais para a simulação de amostras da posteriori

```

n <- 100000
theta_ini <- 1
window <- 1

theta_sampled <- numeric(n)
theta_sampled[1] <- theta_ini
selected <- 0

```

Em seguida, utilizando as 20 amostras simuladas no Código 4.1, e as funções construídas no Código 4.4, realiza-se o processo iterativo de amostragem.

Código 4.9: Processo iterativo de amostragem da posteriori

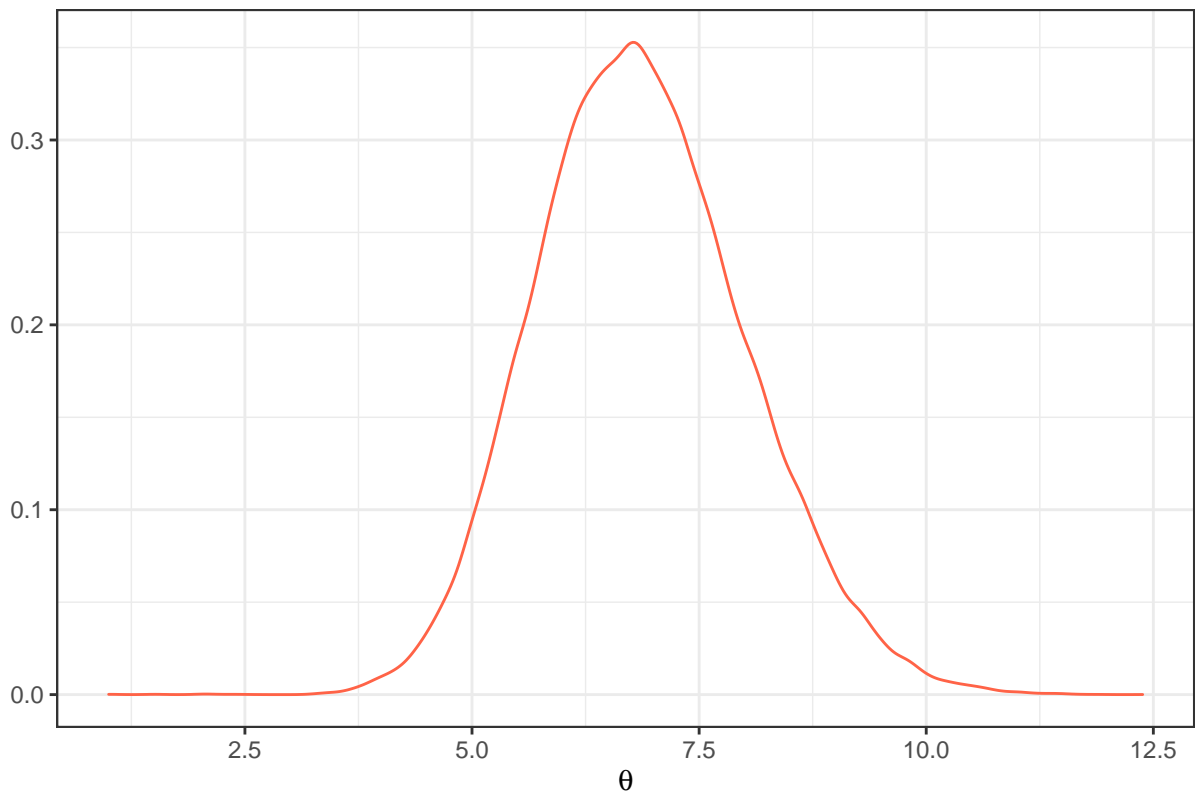
```

set.seed(1000)

for (i in 2:n) {
  theta_old <- theta_sampled[i-1]
  theta_new <- runif(1, min=theta_old-window, max=theta_old+window)
  alpha <- min(1, exp(post(theta_new) - post(theta_old)))
  if (runif(1) <= alpha) {
    theta_sampled[i] <- theta_new
    selected <- selected+1
  } else {
    theta_sampled[i] <- theta_old
  }
}

```

Posteriori simulada



Por fim, a obtenção das medidas de resumo da posteriori simulada.

Código 4.10: Obtenção das medidas de resumo da posteriori simulada

```
library(coda)

list(
  media=round(mean(theta_sampled), 4),
  mediana=round(median(theta_sampled), 4),
  `IC 95%`=round(quantile(theta_sampled, probs = c(0.025, 0.975)),4),
  `IC 95% HPD`=round(HPDinterval(as.mcmc(theta_sampled)), 4))

## $media
## [1] 6.8676
##
## $mediana
## [1] 6.8127
##
## $'IC 95%'
## 2.5% 97.5%
## 4.7846 9.2479
##
## $'IC 95% HPD'
## lower upper
## var1 4.687 9.1297
## attr("Probability")
## [1] 0.95
```

Para obtenção das amostras e medidas de resumo da preditiva, o primeiro passo é definir o tamanho amostra e o y_p inicial.

Código 4.11: Definições iniciais para a simulação de amostras da preditiva

```
n <- 100000
y_ini <- 0.01

y_sampled <- numeric(n)
y_sampled[1] <- y_ini
selected <- 0
```

Código 4.12: Processo iterativo de amostragem da preditiva

```
set.seed(1000)

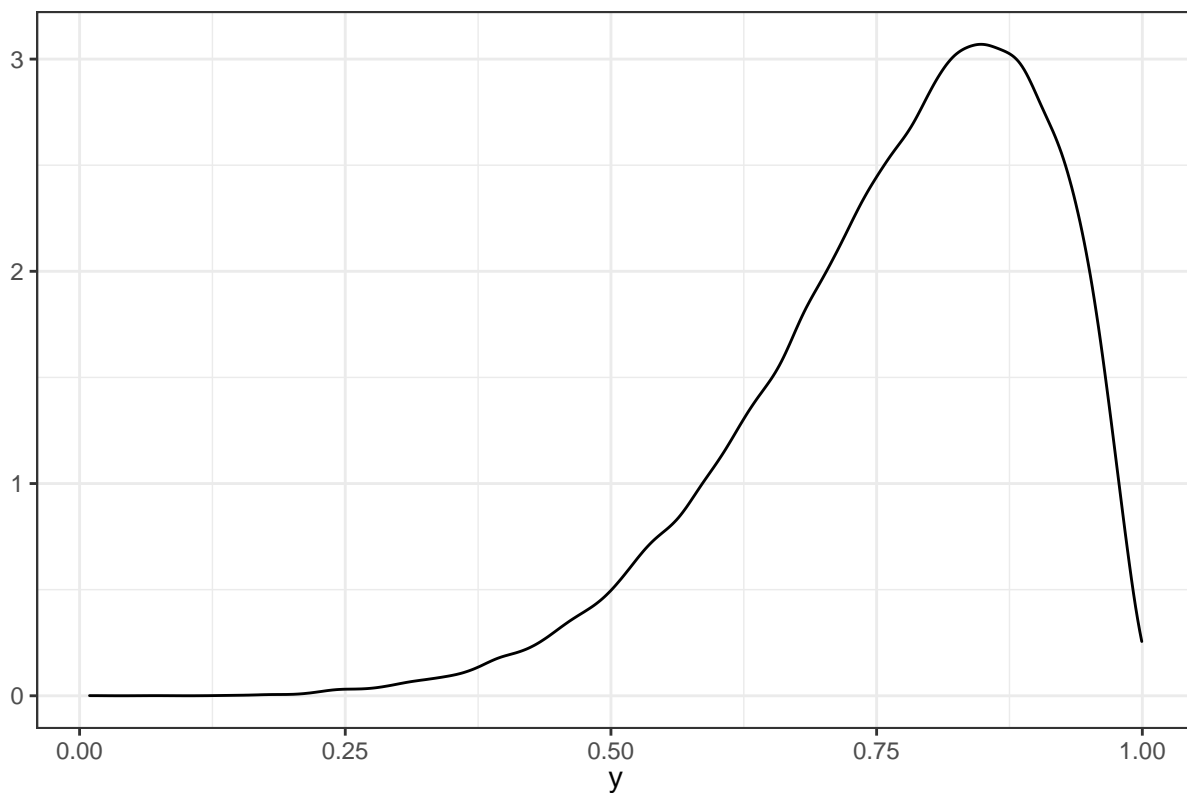
for (i in 2:n) {
  theta <- sample(theta_sampled, 1) # sorteia um valor de theta a partir dos thetas simulados
  y_sampled[i] <- rbeta(1, theta, 2) # sorteia uma valor de y com base no theta sorteado
}
```

Código 4.13: Construção do gráfico da densidade da preditiva simulada

```
library(tidyverse)

data.frame(y_sampled) %>%
  ggplot(aes(x=y_sampled)) +
  geom_density() +
  labs(x=expression(y), y='', title='Preditiva simulada')
```


Preditiva simulada



Código 4.14: Obtenção das medidas de resumo da preditiva simulada

```
library(coda)

list(
  media=round(mean(y_sampled), 4),
  mediana=round(median(y_sampled), 4),
  `IC 95%`=round(quantile(y_sampled, probs = c(0.025, 0.975)),4),
  `IC 95% HPD`=round(HPDinterval(as.mcmc(y_sampled)), 4))
```

```
## $media
## [1] 0.7705
##
## $mediana
## [1] 0.7941
##
## $'IC 95%'
##   2.5% 97.5%
## 0.4487 0.9671
##
## $'IC 95% HPD'
##      lower upper
## var1 0.5039 0.9892
## attr("Probability")
## [1] 0.95
```