DISTR. UNIFORME CONTÍNUA

NOTAÇÃO: $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$

- FDA: $F_X(x) = \left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) I_{[a,b]}(x) + I_{(b,\infty)}(x)$

- FDP: $f_X(x) = \dfrac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$

COM $-\infty < a < b < \infty$

- QUANDO $a = 0$ E $b = 1$, TEMOS:

  - DISTRIBUIÇÃO UNIFORME $(0, 1)$

- DISTRIBUIÇÃO IMPORTANTE P/ A GERAÇÃO DE NÚMEROS ALEATÓRIOS

- É POSSÍVEL DEFINÍ-LA TAMBÉM NOS INTERVALOS:

  - $(a, b]$
  - $[a, b)$
  - (a, b)

TODAS AS 4 DENSIDADES POSSÍVEIS TÊM A MESMA FDA.

DENSIDADE NÃO É PROBABILIDADE!

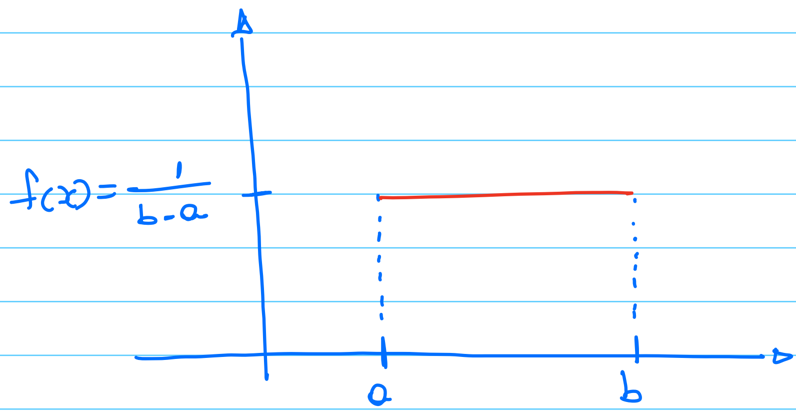
QUALQUER FDP PODE SER > 1.

EXEMPLO:

$b < a < 1$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{b-a} = 1 \cdot \dfrac{2}{1} = 2$

$a = 0,5$

$b = 1$



$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

PROVAS:

$$E(X) = \int_a^b x \, f_X(x) \, dx$$

$$= \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} \, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{(b-a)(a+b)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \int_a^b x^2 f_X(x) \, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} + c - \frac{(a+b)^2}{2^2}$$

$$= \frac{b^3}{3(b-a)} - \frac{a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3(b-a)} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2}$$

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2}$$

$$= \frac{4(a^2 + ab + b^2) - 3(a^2 + 2ab + b^2)}{12}$$

$$= \frac{4a^2 - 3a^2 + 4ab - 6ab + 4b^2 - 3b^2}{12}$$

$$= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$m_x(t) = E(e^{tx}) = \int_a^b e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} \, dx$$

$u = tx$
$du = t \, dx$
$dx = \frac{1}{t} du$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{u} \frac{1}{t} \, du$$

$$= \frac{1}{(b-a)t} \int_a^b e^{u} \, du$$

$$= \frac{1}{(b-a)t} e^{u} + C = \frac{e^{tx}}{(b-a)t} + C$$

$$= \frac{e^{bt}}{(b-a)t} - \frac{e^{at}}{(b-a)t} = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

EXEMPLO:

SE UMA RODA É GIRADA ATÉ SEU REPOUSO, O PONTO DA CIRCUNFERÊNCIA DA RODA QUE ESTARÁ LOCALIZADO EM FRENTE A UM DETERMINADO MARCADOR FIXO PODE SER CONSIDERADO O VALOR DE UMA V.A. X UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA SOBRE A CIRCUNFERÊNCIA DA RODA.

PODE-SE ENTÃO CALCULAR A PROBABILIDADE DE X PARAR EM QUALQUER REGIÃO DO ARCO.