Probabilidade e Estatística Matemática I

Parte 3: Distribuições Univariadas Discretas

Silva, J.L.P.

Junho de 2022

Distribuição uniforme discreta

Distribuição uniforme discreta: definição

Definição Cada membro da família de funções de densidade discreta

$$f_X(x) = f_X(x; N) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{N} & \text{para} \quad x = 1, 2, \ldots, N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{array} \right\} = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\ldots,N\}}(x),$$

em que o parâmetro N é um número positivo inteiro, é dito ter *distribuição uniforme discreta*.

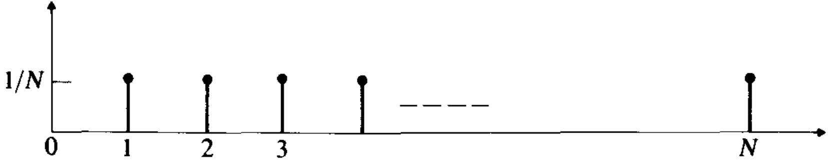

Figura 1: Densidade da unforme discreta. Fonte: Mood et. al (1974)

Distribuição uniforme discreta: teorema

Teorema Se X tem distribuição uniforme discreta, então

$$E(X) = \frac{(N+1)}{2}, \quad Var(X) = \frac{(N^2-1)}{12}, \quad \text{e} \quad m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{j=1}^{N} e^{jt}\frac{1}{N}.$$

Prova

$$E(X) = \sum_{j=1}^{N} j\frac{1}{N} = \frac{(N+1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} Var(X) =& E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{j=1}^{N} j^2\frac{1}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\ =& \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N} - \frac{(N+1)^2}{4} = \frac{(N^2-1)}{12}. \end{aligned}$$

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{j=1}^{N} e^{jt}\frac{1}{N}.$$

Distribuição uniforme discreta: exemplo

Exemplo Lançamos um dado equilibrado e observamos a face que ocorreu. Sendo X essa variável vemos que X tem distribuição uniforme discreta com função de probabilidade

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{6}, \quad \text{para} \quad x = 1, 2, \ldots, 6.$$

Note que $E(X) = 7/2 = 3,5$ não é um dos valores possíveis da variável aleatória.

Distribuições Bernoulli e Binomial

Distribuição Bernoulli: definição

Definição Uma *va* X tem *distribuição Bernoulli* se sua função densidade discreta é dada por

$$f_X(x) = f_X(x;p) = \left\{ \begin{array}{ll} p^x(1-p)^{1-x} & \text{para} \quad x = 0,1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{array} \right\} = p^x(1-p)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x),$$

em que o parâmetro p satisfaz $0 \leq p \leq 1$. Geralmente denota-se $q = 1 - p$.

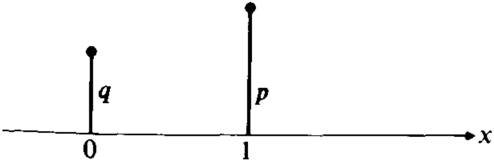

Figura 2: Densidade Bernoulli. Fonte: Mood et. al (1974)

Distribuição Bernoulli: teorema

Teorema Se X tem distribuição Bernoulli, então

$$E(X) = p, \quad Var(X) = pq, \quad \text{e} \quad m_X(t) = pe^t + q.$$

Prova

$$\begin{aligned} E(X) =& 0q + 1p = p. \\ Var(X) =& E(X^2) - [E(X)]^2 = 0^2q + 1^2p - p^2 = pq. \\ m_X(t) =& E(e^{tX}) = q + pe^t. \end{aligned}$$

Distribuição Bernoulli: exemplo

Exemplo Para um espaço de probabilidade arbitrário $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot))$ e para A pertencendo a $\mathcal{A}$, defina a variável aleatória X como a função indicadora de A, isto é, $X(\omega) = I_A(\omega)$.

Então X tem distribuição Bernoulli com parâmetro $p = P(X = 1) = P(A)$.

Distribuição Binomial: definição

Definição Uma *va* X tem *distribuição binomial* se sua função densidade discreta é dada por

$$f_X(x) = f_X(x; n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{para} \quad x = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x),$$

em que o parâmetro p satisfaz $0 \leq p \leq 1$ e n é um inteiro positivo. Geralmente denota-se $1 - p$ por q.

Distribuição Binomial

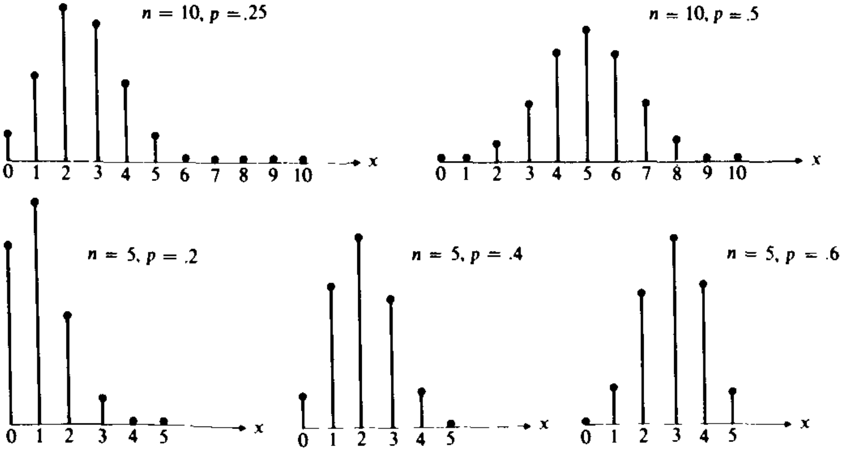

Figura 3: Densidade Binomial. Fonte: Mood et. al (1974)

Distribuição Binomial: teorema

Teorema Se X tem distribuição binomial, então

$$E(X) = np, \quad Var(X) = npq, \quad \text{e} \quad m_X(t) = (pe^t + q)^n.$$

Prova

$$\begin{aligned} m_X(t) = E(e^{tX}) &= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} = (pe^t + q)^n \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} m_X^{'}(t) =& npe^t (pe^t + q)^{n-1} \\ m_X^{''}(t) =& n(n-1)(pe^t)^2 (pe^t + q)^{n-2} + npe^t (pe^t + q)^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Distribuição Binomial: teorema

Prova (cont) Logo,

$$\begin{aligned} E(X) =& m_X^{'}(0) \\ =& np, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Var(X) =& E(X^2) - [E(X)]^2 \\ =& m_X^{''}(0) - (np)^2 \\ =& n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\ =& np(1-p). \end{aligned}$$

A distribuição binomial se reduz à Bernoulli quando $n = 1$.

Distribuição Binomial: exemplo

Exemplo Considere amostrar com reposição de uma urna contendo M bolas, K das quais são defeituosas. Seja X o número de bolas defeituosas em uma amostra de tamanho N.

As retiradas individuais são *ensaios de Bernoulli* em que *defeituoso* corresponde a *sucesso*, e o experimento de tirar um amostra de tamanho n com reposição consiste de n ensaios de Bernoulli repetidos e independentes em que $p = P(\text{sucesso}) = k/M$.

Assim, X tem distribuição binomial:

$$\binom{n}{x}\left(\frac{K}{M}\right)^x\left(1-\frac{K}{M}\right)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

Distribuição Binomial: exemplo

Exemplo A taxa de imunização de uma vacina é de 80%. Se um grupo de 20 pessoas foi vacinado, desejamos saber o comportamento probabilístico do número de pessoas imunizadas desse grupo.

Seja X a variável de interesse. Para cada pessoa do grupo, a probabilidade de interesse é de 0,80 e admitimos, ainda, independência entre os resultados das várias pessoas vacinadas. Assim, $X \sim Binomial(n = 20, p = 0,80)$.

Por exemplo, a probabilidade de 15 imunizados é dada por

$$f_X(15; 20, 0.80) = P(X = 15) = \binom{20}{15} 0,80^{15} 0,20^{20-15} = 0,175.$$

```
dbinom(x = 15, size = 20, prob = 0.80)
```

```
[1] 0.1745595
```

Distribuição Binomial: teorema

Teorema Seja X tendo distribuição binomial com densidade $f_X(x; n, p)$. Então, para $x = 0, 1, \ldots, n$:

i) $f_X(x-1; n, p) < f_X(x; n, p)$ para $x < (n+1)p$;
ii) $f_X(x-1; n, p) > f_X(x; n, p)$ para $x > (n+1)p$;
iii) $f_X(x-1; n, p) = f_X(x; n, p)$ para $x = (n+1)p$ e $(n+1)p$ inteiro.

Prova

$$\frac{f_X(x; n, p)}{f_X(x-1; n, p)} = \frac{n-x+1}{x} \cdot \frac{p}{q} = 1 + \frac{(n+1)p - x}{xq},$$

que é maior que 1 se $x < (n+1)p$, menor que 1 se $x > (n+1)p$, e igual a 1 se o inteiro x valer $(n+1)p$.

Distribuição Hipergeométrica

Distribuição Hipergeométrica: definição

Definição Uma *va* X tem *distribuição hipergeométrica* se sua função densidade discreta é dada por

$$f_X(x; M, K, n) = \begin{cases} \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} & \text{para} \quad x = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x),$$

em que M é um número inteiro positivo, K é um inteiro não negativo que vale no máximo M, e n é um inteiro que vale no máximo M.

Distribuição Hipergeométrica

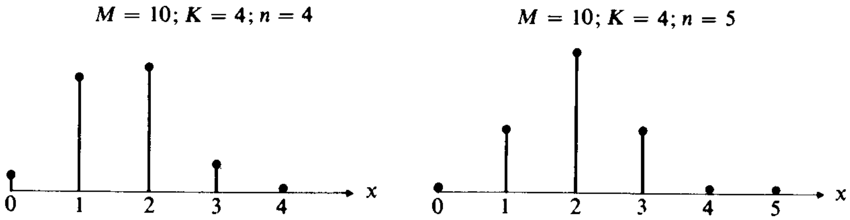

Figura 4: Densidade Hipergeométrica. Fonte: Mood et. al (1974)

Distribuição Hipergeométrica: teorema

Teorema Se X tem distribuição hipergeométrica, então

$$E(X) = n \cdot \frac{K}{M} \quad \text{e} \quad Var(X) = n \cdot \frac{K}{M} \cdot \frac{M-K}{M} \cdot \frac{K-n}{M-1}.$$

Prova As provas podem ser consultadas no livro do Mood.

Para a distribuição hipergeométrica, a função geradora de momentos não é útil.

Distribuição Hipergeométrica: exemplo

Exemplo Seja X o número de itens defeituosos em uma amostra de tamanho n quando a amostragem é feita sem reposição de uma urna contendo M bolas, K das quais são defeituosas.

Então X tem distribuição hipergeométrica:

$$f_X(x; M, K, n) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}$$

Distribuição Hipergeométrica: exemplo

Exemplo Suponha que queremos calcular a probabilidade de que, em certo jogo de cartas, uma mão com 13 cartas contenha exatamente 6 *espadas*. Há $M = 52$ cartas no total, e podemos assumir que as 13 cartas representam uma amostra de tamanho 13 sem reposição das 52 cartas.

Há um total de 6 espadas (bolas defeituosas no exemplo anterior). Logo, a probabilidade desejada é

$$\frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} = \frac{\binom{13}{6}\binom{52-13}{13-6}}{\binom{52}{13}} = 0,0416.$$

```
dhyper(x = 6,#número de bolas brancas amostradas sem reposição de
       #uma urna contendo bolas pretas e brancas
       m = 13,#número de bolas brancas
       n = 52 - 13,#número de bolas pretas
       k = 13#número de bolas retiradas da urna
       )
```

```
[1] 0.04156398
```

Distribuição de Poisson

Distribuição Poisson: definição

Definição Uma *va* X tem *distribuição Poisson* se sua função densidade discreta é dada por

$$f_X(x) = f_X(x;\lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{para} \quad x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{array} \right\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x),$$

em que o parâmetro λ satisfaz $\lambda > 0$.

Distribuição Poisson

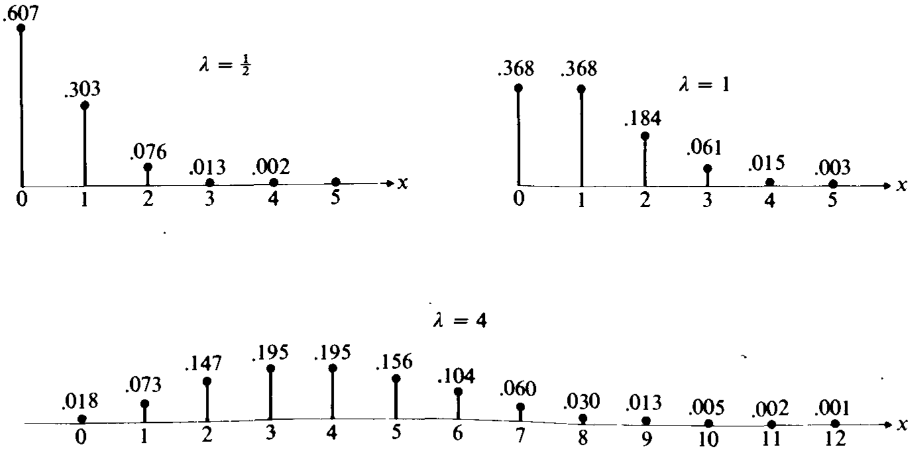

Figura 5: Densidade Poisson. Fonte: Mood et. al (1974)

Distribuição Poisson: teorema

Teorema Se X tem distribuição Poisson, então

$$E(X) = \lambda, \quad Var(X) = \lambda, \quad \text{e} \quad m_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

Prova

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tX} e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} m_X^{'}(t) &= \lambda e^{-\lambda} e^t e^{\lambda e^t} \\ m_X^{''}(t) &= \lambda e^{-\lambda} e^t e^{\lambda e^t} (\lambda e^t + 1). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} E(X) &= m_X^{'}(0) = \lambda \\ Var(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = m_X^{''}(0) - \lambda^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda. \end{aligned}$$

Distribuição Poisson: exemplo

Exemplo Suponha que o número médio de chamadas para determinada empresa seja de 30 por hora.

(i) Qual a probabilidade de que não cheguem chamadas em um período de 3 minutos?
(ii) Qual a probabilidade de que chegarão mais de cinco chamadas em um intervalo de 5 minutos?

Assuma que o número de chamadas durante qualquer período de tempo seja Poisson e que o tempo seja medido em minutos. Assim, a *taxa média de ocorrência* é de 0,5 por minuto.

Sendo v a *taxa média de ocorrência por unidade de tempo*, as probabilidades acima podem ser calculadas de uma distribuição Poisson com parâmetro $\lambda = vt$.

Distribuição Poisson: exemplo

Exemplo (cont)

(i)

$$P(\text{nenhuma chamada em 3 minutos}) = e^{-(0{,}5)(3)} = e^{-1{,}5} = 0.223$$

```r
dpois(x = 0, lambda = 0.5*3)
```

```
[1] 0.2231302
```

(ii)

$$P(\text{mais que 5 chamadas em 5 minutos}) = \sum_{k=6}^{\infty} e^{-(0{,}5)(5)}(2,5)^k/k! = 0.042.$$

```r
1 - sum(dpois(x = 0:5, lambda = 0.5*5))
```

```
[1] 0.04202104
```

Distribuições Geométrica e Binomial Negativa

Distribuição Geométrica: definição

Definição Uma *va* X tem *distribuição geométrica* (ou *Pascal*) se sua função densidade discreta é dada por

$$f_X(x) = f_X(x;p) = \left\{ \begin{array}{ll} p(1-p)^x & \text{para} \quad x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{array} \right\} = p(1-p)^x I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x),$$

em que o parâmetro p satisfaz $0 < p \leq 1$.

Distribuição Geométrica

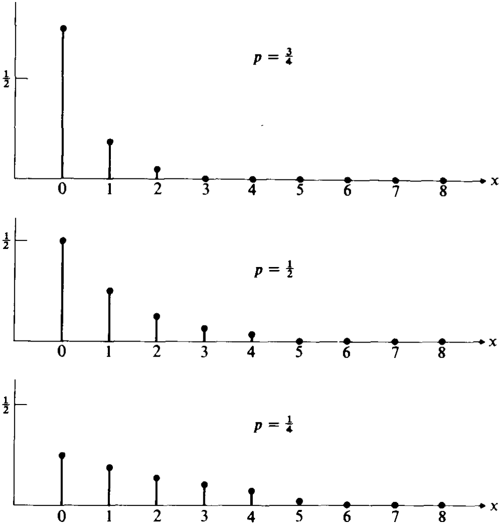

Figura 6: Densidade Geométrica. Fonte: Mood et. al (1974)

Distribuição Binomial Negativa: definição

Definição Uma *va* X tem *distribuição binomial negativa* se sua função densidade discreta é dada por

$$f_X(x) = f_X(x; r, p) = \begin{cases} \binom{r+x-1}{x} p^r q^x = \binom{-r}{x} p^r (-q)^x & \text{para} \quad x = 0, 1, 2 \ldots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$= \binom{r+x-1}{x} p^r q^x I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x),$$

em que os parâmetros r e p satisfazem $r = 1, 2, 3, \ldots$ e $0 < p \leq 1$ $(q = 1 - p)$.

Se tivermos $r = 1$ na distribuição binomial negativa, então a distribuição geométrica surge como caso particular.

Distribuição Geométrica: teorema

Teorema Se X tem distribuição geométrica, então

$$E(X) = \frac{q}{p}, \quad Var(X) = \frac{q}{p^2}, \quad \text{e} \quad m_X(t) = \frac{p}{1 - qe^t}.$$

Prova A prova será dada para a distribuição binomial negativa. Como a distribuição geométrica é caso particular da distribuição binomial negativa, o presente teorema é um corolário do teorema a ser provado.

Distribuição Geométrica: teorema

Teorema Se X tem densidade geométrica com parâmetro p, então

$$P(X \geq i+j|X \geq i) = P(X \geq j), \quad \text{para } i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

Prova

$$\begin{aligned}
P(X \geq i+j|X \geq i) =& \frac{P(X \geq i+j)}{P(X \geq i)} \\
=& \frac{\sum\limits_{x=i+j}^{\infty} p(1-p)^x}{\sum\limits_{x=i}^{\infty} p(1-p)^x} = \frac{(1-p)^{i+j}}{(i-p)^i} \\
=& (1-p)^j \\
=& P(X \geq j).
\end{aligned}$$

Distribuição Geométrica: exemplo

Exemplo Considere uma sequência de ensaios Bernoulli independentes, cada um com probabilidade p de sucesso. Seja X a variável aleatória que representa o número de ensaios necessários antes do primeiro sucesso[1]. Então X terá distribuição geométrica.

Note que o primeiro sucesso ocorrerá no ensaio $x+1$ se tal ensaio retornar sucesso e os primeiros x ensaios retornarem fracasso. Por independência, x falhas sucessivas seguidas por um fracasso tem probabilidade $(1-p)^x p$.

No contexto deste exemplo, o teorema diz que a probabilidade de que $i+J$ ensaios sejam necessários antes do primeiro sucesso, dado que houve i falhas sucessivas, é igual à probabilidade não condicional de que pelo menos j ensaios sejam necessários antes do primeiro sucesso.

Tal propriedade é conhecida como *falta de memória*.

[1] Em outras palavras, X representa o número de falhas antes de observarmos o primeiro sucesso.

Distribuição Geométrica: exemplo

Exemplo Uma linha de fabricação de um equipamento de precisão é interrompida na primeira ocorrência de um defeito. A partir da manutenção, o equipamento tem probabilidade de 0,01 de apresentar defeito em um dia qualquer.

Deseja-se planejar o cronograma de manutenção preventiva e, para tal, decidiu-se avaliar probabilisticamente a espera até a produção ser interrompida. Seja X a *va* que conta o número de dias que antecedem a interrupção. Admitindo que o desempenho, nos sucessivos dias, sejas independentes, temos

$$f_X(x;p) = P(X = x) = 0,01 \times 0,99^x, \quad x = 0,1,2,\ldots$$

Por ex., para interrupção no sexto dia temos $P(X = 5) = 0,01 \times 0,99^5 = 0,0095$.

```
dgeom(x = 5, p = 0.01)
```

```
[1] 0.0095099
```

Distribuição Geométrica: exemplo

Exemplo (cont) Qual seria o intervalo ideal para uma manutenção preventiva se desejamos uma probabilidade de, pelo menos, 0,90 de que o defeito não ocorrerá?

Precisamos determinar quantos dias são necessários para acumular uma probabilidade de defeito próxima de 0,10. Ou obter k tal que

$$P(X \leq k) = 1 - P(X > k) = 1 - 0,99^{k+1} \approx 0,10.$$

Obtemos $P(X \leq 9) = 0,0956$ e $P(X \leq 10) = 0,1047$. Assim, a manutenção preventiva deverá ser feita após 9 dias de operação. Dessa forma, teremos probabilidade de $0,9044$ de um defeito não ocorrer entre essas manutenções.

```
c(sum(dgeom(x = 0:9, p = 0.01)), sum(dgeom(x = 0:10, p = 0.01)))
```

```
[1] 0.09561792 0.10466175
```

Distribuição Geométrica: observação

Alguns autores definem a distribuição geométrica assumindo 1 (no lugar de 0) como menor ponto de massa.

A densidade tem a forma

$$f(x;p) = p(1-p)^{x-1} I_{\{1,2,\dots\}}(x),$$

com média $1/p$, variância q/p^2 e função geradora de momentos $pe^t/(1-qe^t)$.

Assim, a variável aleatória X representa o número de ensaios necessários para se obter o primeiro sucesso.

Distribuição Binomial Negativa: teorema

Teorema Se X tem distribuição binomial negativa, então

$$E(X) = \frac{rq}{p}, \quad Var(X) = \frac{rq}{p^2}, \quad \text{e} \quad m_X(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r.$$

Prova

$$\begin{aligned} m_X(t) = E(e^{tX}) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \binom{-r}{x} p^r (-q)^x \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} p^r (-qe^t)^x = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} m_X^{'}(t) =& p^r(-r)(1-qe^t)^{-r-1}(-qe^t) \\ m_X^{''}(t) =& rqp^r[q(r+1)e^{2t}(1-qe^t)^{-r-2} + e^t(1-qe^t)^{-r-1}]. \end{aligned}$$

Distribuição Binomial Negativa: teorema

Prova (cont) Logo,

$$E(X) = m_X^{'}(0) = \frac{rq}{p},$$

e

$$\begin{aligned}
Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 =& m_X^{''}(0) - \left(\frac{rq}{p}\right)^2 \\
=& rqp^r[qp^{-r-2}(r+1) + p^{-r-1}] - \left(\frac{rq}{p}\right)^2 \\
=& \frac{rq^2}{p^2} + \frac{rq}{p} = \frac{rq}{p^2}.
\end{aligned}$$

Diferente da distribuição Poisson, em que a média e variância são iguais, a variância da distribuição binomial negativa é maior que sua média.

Distribuição Binomial Negativa: exemplo

Exemplo Considere uma sequência de ensaios Bernoulli independentes, cada um com probabilidade p de sucesso. Seja a variável aleatória X o número de falhas antes do r-ésimo sucesso.

Então X tem distribuição binomial negativa. Para ver isso, note que o último ensaio deve resultar em um sucesso, tendo probabilidade p. Entre os $x + r - 1$ ensaios deve haver $r - 1$ sucessos e x falhas, o que pode ser calculado pela Binomial com parâmetros $x + r - 1$ e p.

Tal probabilidade é

$$\binom{x+r-1}{r-1} p^{r-1} q^{x} = \binom{r+x-1}{x} p^{r-1} q^{x},$$

que, multiplicado por p, produz o resultado desejado.

Outras Distribuições Discretas

Outras Distribuições Discretas: truncamento

Novas famílias de distribuições discretas podem ser formadas por vários procesos. Um deles é o *truncamento*.

O processo será ilustrado para a *distribuição de Poisson truncada em 0*. Suponha que o valor 0 não possa ser observado, embora a distribuição de Poisson pareça um modelo adequado.

A probabilidade no ponto 0 é distribuída proporcionalmente aos outros pontos de massa, retornando a família de densidades

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!(1-e^{-\lambda})} & \text{para} \quad x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Outras Distribuições Discretas: censura

Outro processo de obtenção de uma nova família de densidades também pode ser ilustrado com a distribuição de Poisson.

Suponha que a variável aleatória X, representando algum tipo de contagem, tenha distribuição de Poisson. Se o instrumento de medida é tal que não permite contagens além do 2, a variável aleatória tem densidade dada por

z	0	1	2
$f(z)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$

Distribuição Beta-binomial: definição

Definição A *distribuição beta-binomial* tem densidade discreta

$$f_X(x) = f(x; n, \alpha, \beta) = \binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} I_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x),$$

em que n é um inteiro não negativo, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

$\Gamma(m)$ é a função gamma $\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} dx$ para $m > 0$. Tem-se

$$E(X) = \frac{n\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{n\alpha\beta(n+\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Tal distribuição possui os mesmos pontos de massa da distribuição binomial. Se $\alpha = \beta = 1$, então a distribuição beta-binomial se reduz à distribuição uniforme nos inteiros $0, 1, \ldots, n$.

Distribuição Logarítmica: definição

Definição A distribuição com função de densidade discreta

$$f_X(x) = f_X(x;p) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{q^x}{-x \log p} & \text{para} & x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{caso contrário} & \end{array} \right\} = \frac{q^x}{-x \log p} I_{\{1,2,\ldots\}}(x),$$

em que o parâmetro p satisfaz $0 < p < 1$ e $q = 1 - p$ é chamada de *distribuição logarítmica*.

A distribuição logarítmica tem

$$E(X) = \frac{q}{-p \log p} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{q(q + \log p)}{-(p \log p)^2}.$$