Exercício 1

Monday, 26 October 2020 20:27

Lista 3 – Modelagem em Programação Linear Inteira, Binária e Mista. Faça o modelo e resolva utilizando um software a sua escolha.

Ex 1

Um avião de transporte possui quatro compartimentos para carga a saber: compartimento frontal, compartimento central, compartimento da cauda e porão de granel. Os três primeiros compartimentos só podem receber carga em containeres, enquanto o porão recebe material em granel. A tabela a seguir resume a capacidade do aparelho:

Compartimento	Peso Máximo (ton)	Espaço Máximo (m3)
Compartimento Frontal	5	35
Compartimento Central	7	55
Compartimento da Cauda	6	30
Porão de Granel	7	30

Objetivando o equilíbrio de vôo, é indispensável que a distribuição da carga seja proporcional entre os compartimentos. Para carregar o avião, existem três tipos de containeres e duas cargas em granel. Os dois tipos de carga em granel podem ser facilmente transporta dos conjuntamente, por isso essa carga é aceita em qualquer quantidade.

Carga Tipo	Peso por Container ou por m3 – (ton)	Volume por Container (m3)	Lucro $/ton
1 (container)	0,7	0,5	200
2 (container)	0,9	1	220
3 (container)	0,2	0, 25	175
4 (granel)	1,2/m3	—	235
5(granel)	1,7/m3	—	180

Elaborar o problema de programação linear que otimize a distribuição da carga de forma a maximizar o lucro do vôo do cargueiro.

	FRONTAL	CENTRAL	CAUDA	PORÃO
1 - CONTAINER				
2 - CONTAINER				
3 - CONTAINER				
4 - GRANEL				
5 - GRANEL				

PESO MÁXIMO	5	7	6	7	(t)
VOLUME MÁXIMO	35	55	30	30	(m^3)

- DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS DE DECISÃO :

x_{ij} = QUANTIDADE DE CARGA i ARMAZENADA NO COMPARTIMENTO j, EM QUE $i = 1,2,3,4,5$ E $j = 1,2,3,4$

- FUNÇÃO OBJETIVO :

$$\text{MAX } Z = 200(x_{11}+x_{12}+x_{13}) + 220(x_{21}+x_{22}+x_{23}) + 175(x_{31}+x_{32}+x_{33}) + 235x_{44} + 180x_{54}$$

- RESTRIÇÕES :

- PESO:
$$0{,}7x_{11} + 0{,}9x_{21} + 0{,}2x_{31} \leq 5$$
$$0{,}7x_{12} + 0{,}9x_{22} + 0{,}2x_{32} \leq 7$$
$$0{,}7x_{13} + 0{,}9x_{23} + 0{,}2x_{33} \leq 6$$
$$1{,}2x_{44} + 1{,}7x_{54} \leq 7$$

- ESPAÇO:
$$0{,}5x_{11} + x_{21} + 0{,}25x_{31} \leq 35$$
$$0{,}5x_{12} + x_{22} + 0{,}25x_{32} \leq 55$$
$$0{,}5x_{13} + x_{23} + 0{,}25x_{33} \leq 30$$
$$x_{44} + x_{54} \leq 30$$

- EQUILÍBRIO:
$$\frac{0{,}7x_{11} + 0{,}9x_{21} + 0{,}2x_{31}}{5} = \frac{0{,}7x_{12} + 0{,}9x_{22} + 0{,}2x_{32}}{7} = \frac{0{,}7x_{13} + 0{,}9x_{23} + 0{,}2x_{33}}{6} = \frac{1{,}2x_{44} + 1{,}7x_{54}}{7}$$

- INTEGRALIDADE E NÃO NEGATIVIDADE: $x_{ij} \geq 0$, EM QUE $i = 1,2,3,4,5$ E $j = 1,2,3,4$

$x_{ij} \in \mathbb{Z}, \forall i \leq 3$

SOLUÇÃO :

$Z^* = \$ 17.120,83$

CONTAINERS TIPO 3 NO COMPARTIMENTO FRONTAL $(x_{31}) = 25$ UNIDADES

CONTAINERS TIPO 3 NO COMPARTIMENTO CENTRAL $(x_{32}) = 35$ UNIDADES

CONTAINERS TIPO 3 NO COMPARTIMENTO CAUDA $(x_{33}) = 30$ UNIDADES

GRANEL TIPO 4 NO COMPARTIMENTO PORÃO $(x_{44}) = 5{,}83\, m^3$

DESENV. RESTRIÇÃO EQUILÍBRIO

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{7} = \frac{C}{6} = \frac{D}{7}$$

$0{,}7x_{11} + 0{,}9x_{21} + 0{,}2x_{31} = A$

$0{,}7x_{12} + 0{,}9x_{22} + 0{,}2x_{32} = B$

$0{,}7x_{13} + 0{,}9x_{23} + 0{,}2x_{33} = C$

$1{,}2x_{44} + 1{,}7x_{54} = D$

$$\frac{A}{5} - \frac{C}{6} = \frac{B}{7} - \frac{D}{7}$$

$$\frac{6A - 5C}{30} = \frac{B - D}{7}$$

$$\frac{6A - 5C}{30} - \frac{(B - D)}{7} = 0$$

$$\frac{7(6A - 5C) - 30(B - D)}{210} = 0$$

$$\frac{42A - 35C - 30B + 30D}{210} = 0$$

$$\frac{42(0{,}7x_{11} + 0{,}9x_{21} + 0{,}2x_{31}) - 35(0{,}7x_{13} + 0{,}9x_{23} + 0{,}2x_{33}) - 30(0{,}7x_{12} + 0{,}9x_{22} + 0{,}2x_{32}) + 30(1{,}2x_{44} + 1{,}7x_{54})}{210} = 0$$

Exercício 2

Monday, 26 October 2020 20:38

Ex 2

Fase 1: Ataque Massivo

Uma reserva florestal está em chamas e o governo planeja uma operação fulminante de combate ao fogo para amanhã. O incêndio é de pequenas proporções e está se propagando lentamente, devendo ser extinto em cerca de três horas de operação logo após o amanhecer. Estão sendo mobilizados aviões e helicópteros especializados nesse tipo de operações. As características dos aparelhos constam da Tabela 36:

Aparelho	Eficiência no Incêndio (m^2/hora)	Custo (R$/hora)	Necessidade em Pessoal
Helicóptero AH-1	15.000	2.000	2 Pilots.
Avião Tanque	40.000	4.000	2 Pilots. + 1 Op.
Avião B67	85.000	10.000	2 Pilots. + 3 Op.

A área de floresta a ser coberta pelo combate ao fogo é de 3.000.000 m2, envolvendo a frente de fogo (para paralisação do avanço do dano), áreas já queimadas que necessitam de rescaldo (para proteção de animais e segurança contra recrudescimento) e áreas de acero (proteção preventiva indispensável). Nas bases de apoio são disponíveis 14 pilotos de avião e 10 de helicóptero, bem como 22 operadores especializados em combate aéreo de fogo. Formular o problema de programação matemática que minimize os custos da operação.

APARELHOS

1 - HELICÓPTERO AH-1
2 - AVIÃO TANQUE
3 - AVIÃO B67

- DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS DE DECISÃO:

X_j = QUANTIDADE DE AVIÕES/HELICÓPTEROS j A SEREM UTILIZADOS NA OPERAÇÃO, EM QUE $j = 1, 2, 3$.

- FUNÇÃO OBJETIVO:

$$\text{Min } Z = 2000X_1 + 4000X_2 + 10.000X_3$$

- RESTRIÇÕES:

- COBERTURA: $15.000X_1 + 40.000X_2 + 85.000X_3 \geq 1.000.000$ (3 OPERAÇÕES DE 1h)

- PILOTOS DE HELICÓPTERO: $2X_1 \leq 10$

- PILOTOS DE AVIÃO: $2X_2 + 2X_3 \leq 14$

- OPERADORES: $X_2 + 3X_3 \leq 22$

- INTEGRALIDADE E NÃO NEGATIVIDADE: $X_j \geq 0$

$X_j \in \mathbb{Z}$

SOLUÇÃO ÓTIMA:

$Z^* =$ R$ 80.000 POR OPERAÇÃO, TOTAL = R$ 240.000

X_1 = HELICÓPTERO AH1 = 5 POR OPERAÇÃO

X_2 = AVIÃO TANQUE = 0

X_3 = AVIÃO B67 = 7 POR OPERAÇÃO

Exercício 3

Monday, 26 October 2020 20:42

Ex 3

A diretora de pessoal, Elis C. Sempaz, da Companhia Aérea Boa Viagem deve decidir quantas novas aeromoças contratar e treinar nos próximos seis meses. As necessidades, expressas pelo número de aeromoças-horas-de-vôo necessário, são 8.000 em janeiro; 9.000 em fevereiro; 7.000 em março; 10.000 em abril; 9.000 em maio; e 11.000 em junho.

Leva um mês de treinamento antes que uma aeromoça possa ser posta num vôo regular; assim, uma garota deve ser contratada pelo menos um mês antes que ela seja realmente necessária. Cada moça treinada requer 100 horas de supervisão de uma aeromoça experiente durante o mês de treinamento de modo que são disponíveis 100 horas a menos para serviço de vôo por aeromoças regulares.

Cada aeromoça experiente pode trabalhar até 150 horas num mês, e Boa Viagem tem 60 aeromoças regulares disponíveis no *começo* de janeiro. Se o tempo máximo disponível das aeromoças experientes exceder as necessidades de vôo e treinamento de um mês, as garotas regulares trabalham menos que 150 horas e ninguém é dispensado. No fim de cada mês, aproximadamente 10% das aeromoças experientes deixam seus empregos para se casarem ou por outras razões.

Uma aeromoça experiente custa à companhia $850 e uma em treinamento $450 por mês em salário e outros encargos.

(a) Formule o problema de contratar e treinar como um modelo de programação linear. Seja x_t o número de aeromoças que começam o treinamento no Mês t. Defina quaisquer símbolos adicionais que você precise para expressar as variáveis de decisão.

(b) O enunciado acima do problema supõe um horizonte de planejamento de seis meses. Suponha que você acrescente as condições de julho ao modelo. A solução anterior necessariamente mudaria? Explique.

A)

- DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS DE DECISÃO:

X_i^T = QUANTIDADE DE AEROMOÇAS EXPERIENTES DESTINADAS A APLICAR TREINAMENTO NAS NOVAS AEROMOÇAS, NO MÊS i

X_i^V = QUANTIDADE DE AEROMOÇAS EXPERIENTES DISPONÍVEIS PARA VOAR DURANTE TODO O MÊS i

Y_i = QUANTIDADE DE AEROMOÇAS A SEREM CONTRATADAS NO MÊS i P/ ATENDER A DEMANDA DO MÊS i + 1

- RESTRIÇÕES:

- HORAS:

$50X_1^T + 150X_1^V \geq 8000$ (JAN)

$50X_2^T + 150X_2^V + 150Y_1 \geq 9000$ (FEV)

$50X_3^T + 150X_3^V + 150Y_2 \geq 7000$ (MAR)

$50X_4^T + 150X_4^V + 150Y_3 \geq 10.000$ (ABR)

$50X_5^T + 150X_5^V + 150Y_4 \geq 9000$ (MAI)

$50X_6^T + 150X_6^V + 150Y_5 \geq 11.000$ (JUN)

- AEROMOÇAS: $X_1^T + X_1^V = 60$ (JAN)

(FEV)

$X_2^T + X_2^V \leq 0,91(X_1^T + X_1^V) + Y_1 \Rightarrow X_2^T + X_2^V - 0,91X_1^T - 0,91X_1^V - Y_1 \leq 0$

$X_2^T + X_2^V \geq 0,89(X_1^T + X_1^V) + Y_1 \Rightarrow X_2^T + X_2^V - 0,89X_1^T - 0,89X_1^V - Y_1 \geq 0$

(MAR)

$X_3^T + X_3^V \leq 0,91(X_2^T + X_2^V) + Y_2 \Rightarrow X_3^T + X_3^V - 0,91X_2^T - 0,91X_2^V - Y_2 \leq 0$

$X_3^T + X_3^V \geq 0,89(X_2^T + X_2^V) + Y_2 \Rightarrow X_3^T + X_3^V - 0,89X_2^T - 0,89X_2^V - Y_2 \geq 0$

(ABR)

$X_4^T + X_4^V \leq 0,91(X_3^T + X_3^V) + Y_3 \Rightarrow X_4^T + X_4^V - 0,91X_3^T - 0,91X_3^V - Y_3 \leq 0$

$X_4^T + X_4^V \geq 0,89(X_3^T + X_3^V) + Y_3 \Rightarrow X_4^T + X_4^V - 0,89X_3^T - 0,89X_3^V - Y_3 \geq 0$

(MAI)

$X_5^T + X_5^V \leq 0,91(X_4^T + X_4^V) + Y_4 \Rightarrow X_5^T + X_5^V - 0,91X_4^T - 0,91X_4^V - Y_4 \leq 0$

$X_5^T + X_5^V \geq 0,89(X_4^T + X_4^V) + Y_4 \Rightarrow X_5^T + X_5^V - 0,89X_4^T - 0,89X_4^V - Y_4 \geq 0$

(JUN)

$X_6^T + X_6^V \leq 0,91(X_5^T + X_5^V) + Y_5 \Rightarrow X_6^T + X_6^V - 0,91X_5^T - 0,91X_5^V - Y_5 \leq 0$

$X_6^T + X_6^V \geq 0,89(X_5^T + X_5^V) + Y_5 \Rightarrow X_6^T + X_6^V - 0,89X_5^T - 0,89X_5^V - Y_5 \geq 0$

- CONTRATAÇÃO:

$X_1^T - Y_1 = 0$ (JAN)

$X_2^T - Y_2 = 0$ (FEV)

$X_3^T - Y_3 = 0$ (MAR)

$X_4^T - Y_4 = 0$ (ABR)

$X_5^T - Y_5 = 0$ (MAI)

$X_6^T - Y_6 = 0$ (JUN)

- INTEGRALIDADE E NÃO NEGATIVIDADE: $X_i^T, X_i^V, Y_i \geq 0$ E INTEIRAS

- FUNÇÃO OBJETIVO:

$$\text{MIN } Z = \sum_{i=1}^{6} X_i^T + \sum_{i=1}^{6} X_i^V + \sum_{i=1}^{6} Y_i$$

SOLUÇÃO A)

AEROMOÇAS		JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN
EXPERIENTES	X_i^T	4	2	12	6	10	0
	X_i^V	56	56	42	55	51	65
CONTRATADAS	Y_i	4	2	12	6	10	0

//

SOLUÇÃO B)

AEROMOÇAS		JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL
EXPERIENTES	X_i^T	4	2	12	6	10	1	0
	X_i^V	56	56	42	55	51	65	59
CONTRATADAS	Y_i	4	2	12	6	10	1	0

* CONSIDERANDO A DEMANDA DE JUL = 9000 HORAS

AEROMOÇAS		JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL
EXPERIENTES	X_i^T	6	1	12	7	14	15	0
	X_i^V	56	59	43	55	49	56	79
CONTRATADAS	Y_i	6	1	12	7	14	15	0

* CONSIDERANDO A DEMANDA DE JUL = 14000 HORAS

Exercício 4

Monday, 26 October 2020 20:47

Ex 4

Formulação do problema

Uma montadora de automóveis está revisando o projeto de um de seus modelos, que é bem aceito pelos compradores mas está ganhando a fama de ser "beberrão" de gasolina. A direção convocou a equipe de engenheiros para propor alterações técnicas no projeto de forma a reduzir o peso do carro em, pelo menos, 180 kg, e, com isso, aumentar sua eficiência de consumo. A equipe identificou 12 alterações prováveis que podem tornar o carro mais leve. A Tabela 1 mostrou o conjunto de alterações, a economia de peso de cada uma e o custo que a fábrica terá para implementá-la.

TABELA 1: CARACTERÍSTICAS DAS MUDANÇAS PROPOSTAS NO PROJETO DO CARRO

MUDANÇA NO PROJETO	REDUÇÃO NO PESO DO CARRO (KG)	CUSTO DE IMPLEMENTAÇÃO ($)
1	30	130.000
2	20	110.000
3	25	120.000
4	40	150.000
5	15	80.000
6	10	80.000
7	60	360.000
8	80	400.000
9	40	160.000
10	30	120.000
11	50	200.000
12	35	160.000

- DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS DE DECISÃO:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{SE A MUDANÇA NO PROJETO } j \text{ FOR IMPLEMENTADA}, \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases} \quad j = 1, 2, \ldots, 12$$

$= 1, 2, \ldots, 12$

- FUNÇÃO OBJETIVO:

$$\text{Min } Z = 130.000x_1 + 110.000x_2 + \ldots + 200.000x_{11} + 160.000x_{12}$$

- RESTRIÇÕES:

$$30x_1 + 20x_2 + \ldots + 50x_{11} + 35x_{12} \geq 180$$

$$x_j \in \{0, 1\}$$

SOLUÇÃO:

$$Z^* = 740.000 \$$$

$$x_2 = x_4 = x_9 = x_{10} = x_{11} = 1$$

$$x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_{12} = 0$$

Exercício 5

Monday, 26 October 2020 20:49

Ex 5

Uma usina siderúrgica, produtora de vergalhões para a construção civil, abastece seis grandes distribuidoras na Região Sudeste. Para melhorar a qualidade de seu serviço logístico de entrega a usina pretende instalar centros de distribuição (CD) que receberão os produtos da usina e farão as entregas para as empresas de comercialização.

Há seis localidades candidatas com condições de receberem os CD, e elas diferem entre si pelos custos fixos anuais e pelos custos variáveis por tonelada de material distribuído e pela capacidade anual de estocagem e manuseio. A Tabela E1.1 mostra as características de cada local.

Tabela E1.1 Características dos locais candidatos a CD

LOCAL	CAPACIDADE MÁXIMA – em 1.000t (CM_i)	CUSTO FIXO ANUAL ($) ($CF_i$)	CUSTO VARIÁVEL ($/ 1.000t) ($CV_i$)
A	230	1.800	17
B	200	1.700	18
C	190	1.300	20
D	220	2.000	16
E	220	1.800	21
F	240	2.300	20

Os custos de transporte do material de cada local para os seis distribuidores também variam conforme mostra a Tabela E1.2.

Tabela E1.2 Custos de transporte de cada local candidato a CD para os distribuidores

CLIENTE / LOCAL	CUSTO UNITÁRIO DE TRANSPORTE ($/ 1.000t) ($c_{ij}$)					
	1	2	3	4	5	6
A	12	22	40	14	36	28
B	22	14	30	24	40	8
C	44	32	18	18	28	16
D	15	34	18	30	16	38
E	38	40	28	15	12	20
F	28	22	36	19	45	16
DEMANDA ANUAL	90	120	100	100	110	130

- DEFINIÇÃO DAS VARIÁVEIS DE DECISÃO:

X_{ij} = QUANTIDADE DE VERGALHÕES A SER TRANSPORTADA DO CD i PARA O DISTRIBUIDOR j, $i = 1, \dots, 6$ E $j = 1, \dots, 6$.

$Y_i \begin{cases} 1, \text{ SE O CD } i \text{ FOR INSTALADO} \\ 0, \text{ CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$ $i = 1, 2, \dots, 6$.

- RESTRIÇÕES:

- CAPACIDADE:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} \leq 230$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} \leq 200$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} + X_{36} \leq 190$$
$$X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} + X_{46} \leq 220$$
$$X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} + X_{56} \leq 220$$
$$X_{61} + X_{62} + X_{63} + X_{64} + X_{65} + X_{66} \leq 240$$

- DEMANDA:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} + X_{61} \geq 90$$
$$X_{12} + Y_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} + X_{26} \geq 120$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} + X_{63} \geq 100$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} + X_{64} \geq 100$$
$$X_{15} + X_{25} + Y_{35} + X_{45} + X_{55} + X_{65} \geq 110$$
$$X_{16} + X_{26} + X_{36} + X_{46} + X_{56} + X_{66} \geq 130$$

$$X_{ij} \geq 0$$

$$Y_i \in \{0, 1\}$$

- FUNÇÃO OBJETIVO:

$$\text{MIN } Z = 1800Y_1 + 17Y_1(X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16}) + Y_1(12X_{11} + 22X_{12} + 40X_{13} + 14X_{14} + 36X_{15} + 28X_{16}) +$$

$$\vdots$$

$$2300Y_6 + 20Y_6(X_{61} + X_{62} + X_{63} + X_{64} + X_{65} + X_{66}) + Y_6(28X_{61} + 22X_{62} + 36X_{63} + 19X_{64} + 45X_{65} + 16X_{66})$$