Trabalho 1 - Programação Linear (PPGMNE)

Antonio C. da Silva Júnior

06/2021

Glossário

REQUISITOS		TÓPICOS									
A)	**Pesquisar 10 temas diferentes para modelagem clássica:**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	1) Modelagem formal matemática genérica:	**1.1**	**2.1**	**3.1**	**4.1**	**5.1**	**6.1**	**7.1**	**8.1**	**9.1**	**10.1**
	2) Modelo de uma aplicação com exemplo didático:	**1.2**	**2.2**	**3.2**	**4.2**	**5.2**	**6.2**	**7.2**	**8.2**	**9.2**	**10.2**
	a-1) Ter pelo menos 2 temas com apenas 2 variáveis:	**1.2**	**2.2**								
	a-2) 3 temas com mais de 10 variáveis:	**7.2**	**8.2**	**9.2**	**10.2**						
	b) Ter pelo menos 3 temas com, ao menos, 2 índices, na mesma variável:	**3.2**	**6.2**	**8.2**	**9.2**	**10.2**					
B)	**Resolver dois exemplos com apenas 2 variáveis de solução baseado no método gráfico:**	**1.2.1**	**2.2.1**								
	1) Discussão sobre alterações nas restrições:	**1.3**									
C-1)	**Resolver, pelo SIMPLEX, dois exemplos de Minimização:**	**3.2.1**	**4.2.1**								
C-2)	**Resolver, pelo SIMPLEX, dois exemplos de Maximização:**	**5.2.1**	**6.2.1**								
D)	**Criar o modelo DUAL dos 4 exemplos do Item C:**	**3.3**	**4.3**	**5.3**	**6.3**						
E)	**Resolver os 4 problemas do item C pelo DUAL SIMPLEX:**	**3.2.2**	**4.2.2**	**5.3.1**	**6.3.1**						
F)	**Selecionar dois exemplos para aplicar o SIMPLEX REVISADO:**	**1.2.2**	**2.2.2**								
G)	**Resolver os 3 exemplos com mais de 10 variáveis utilizando um software:**	**7.2.1**	**8.2.1**	**9.2.1**	**10.2.1**						
H)	**Discussão sobre GAP:**	**11**									
I)	**Resolução e discussão sobre o modelo com mais de 20 variáveis:**	**10.2**									

1 Problema do Mix de Produção

1.1 Modelo genérico

Conjuntos

I: $\{1, \ldots, m\}$,

J: $\{1, \ldots, n\}$.

Parâmetros

a_{ij}: Quantidade de horas necessárias para a realização da atividade $i \in I$ na fabricação do produto $j \in J$,

b_i: Quantidade de horas disponíveis para realização da atividade $i \in I$,

c_j: Lucro líquido por unidade do produto $j \in J$ produzido.

Variáveis de decisão

x_j: Quantidade a ser fabricada por semana do produto $j \in J$.

Formulação matemática

$$\max z = \sum_{j \in J} c_j x_j.$$

sujeito a

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i, \forall\ i \in I,$$

$$x_j \geq 0, \quad \forall j \in J.$$

1.2 Aplicação didática

[Belfiore, P. e Fávero, L.P. 2013] A empresa Venix de brinquedos está revendo seu planejamento de produção de carrinhos e triciclos. O lucro líquido por unidade de carrinho e triciclo produzido é de $\text{R\$ } 12,00$ e $\text{R\$ } 60,00$, respectivamente. As matérias-primas e os insumos necessários para a fabricação de cada um dos produtos são terceirizados, cabendo à empresa os processos de usinagem, pintura e montagem. O processo de usinagem requer 15 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 30 minutos por unidade de triciclo produzida. O processo de pintura requer 6 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 45 minutos por unidade de triciclo produzida. Já o processo de montagem necessita de 6 minutos e 24 minutos para uma unidade de carrinho e de triciclo produzida, respectivamente. O tempo disponível por semana é de 36, 22 e 15 horas para os processos de usinagem, pintura e montagem, respectivamente. A empresa quer determinar quanto produzir de cada produto por semana, respeitando as limitações de recursos, de forma a maximizar o lucro líquido semanal. Formular o problema de programação linear que maximiza o lucro líquido da empresa Venix.

1.2.1 Resolução pelo método gráfico

Código para gerar a visualização

In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pylab as plt
from matplotlib.pylab import rcParams
rcParams['figure.figsize'] = 15, 8
```

In [2]:

```
# Funções auxiliares:

# Passa como parâmetro um valor (z) e o gradiente da função objetivo
# Retorna as coordenadas de origem e destino de uma curva de nível
def get_coords_curva_nivel(z, gradiente):
    x = 0.0
    y = z/gradiente[1]
    x0 = z/gradiente[0]
    y0 = 0.0
    return x, y, x0, y0

# Passa as coordenadas de origem e destino de uma reta
# Retorna os coeficientes angular e linear:
def get_coefs_reta(x_fim, y_fim, x_ini=0, y_ini=0):
    y_aux = y_fim - y_ini
    x_aux = x_fim - x_ini
    a = y_aux/x_aux
    b = y_fim - a*x_fim
    return a, b


# Plota o gráfico exibindo a região factível, o gradiente e as curvas de nível:
def plotar(A, b, c, sense, max_x=150, max_y=40, z_max=5000, z_step=204, xlabel=None, ylabel=None):
    grad = (c[0], c[1])

    colors=['#1f77b4', '#ff7f0e', '#2ca02c', '#d62728', '#9467bd', '#8c564b', '#e377c2', '#7f7f7f',
            '#bcbd22', '#17becf']

    # Vetor de valores para a variável x1:
    x1 = np.linspace(0, max_x, 2000)

    # Restrições transformadas em igualdade:
    lst_constr = []
    for i in range(len(A)):
        y = (b[i] - A[i][0]*x1) / A[i][1]
        lst_constr.append(y)

    # Variável auxiliar para o gráfico
    dict_lim={
        '<=': 1000,
        '=': 0,
        '>=': 0}

    # Plota as restrições:
    dict_sense={
        '<=': r'\leq',
        '=': r'\eq',
        '>=': r'\geq'}
    for i in range(len(A)):
        lbl_constr = str(A[i][0]) + 'x_1 + ' + str(A[i][1]) + 'x_2 ' + dict_sense[sense[i]] + ' '+ str(b[i])
        plt.plot(x1, lst_constr[i], label=r'$' + lbl_constr + '$', color=colors[i]) # reta
        y_inf = x1*0 + dict_lim[sense[i]]
        plt.fill_between(x1, lst_constr[i], y_inf, facecolor=colors[i], alpha=0.2) # região infactível

    # Plota o vetor gradiente:
    a,b = get_coefs_reta(grad[0], grad[1])
    y_grad = a*x1 + b
    plt.plot(x1, y_grad, color='red', label='gradiente', linestyle='--')

    # Plota as curvas de nível:
    for z in range(1, z_max, z_step):
        x, y, x0, y0 = get_coords_curva_nivel(z, grad)
        a,b = get_coefs_reta(x0, y0, x, y)
        y_level = a*x1 + b
        plt.plot(x1, y_level, color='black', linestyle='--', alpha=0.5)

    # Limita os eixos:
    plt.xlim((0, max_x))
    plt.ylim((0, max_y))

    if xlabel is None:
        plt.xlabel(r'$x_1$')

    if ylabel is None:
        plt.ylabel(r'$x_2$')
    plt.grid()
```

In [3]:

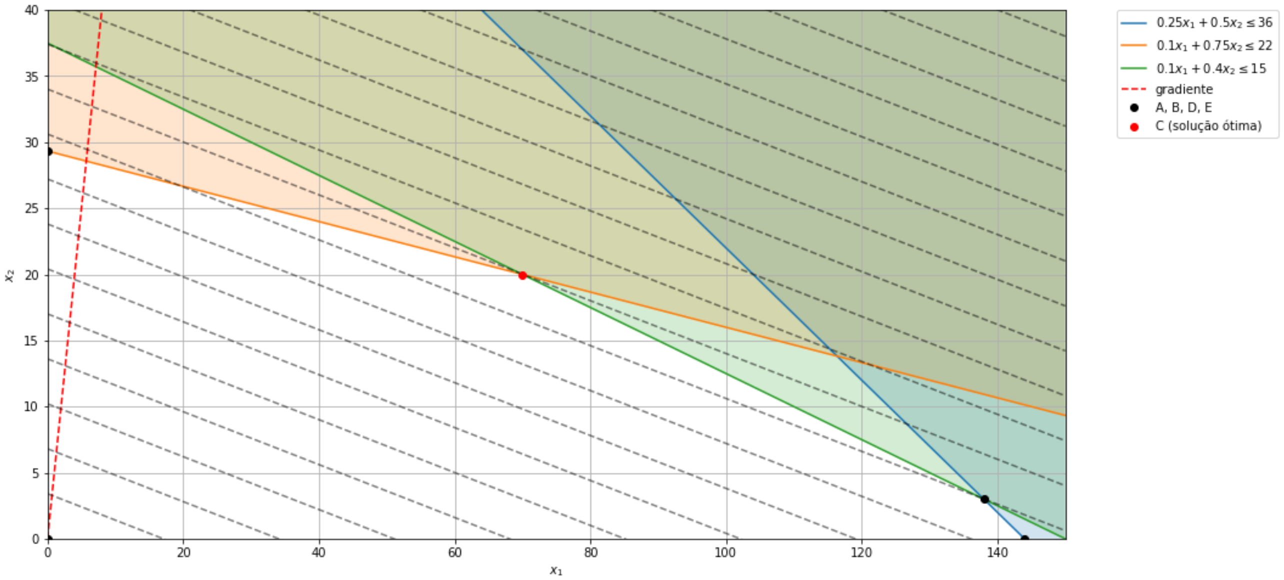
```
# Dados de entrada do problema original:

A = [[0.25, 0.5],
```

```
     [0.1, 0.75],
     [0.1, 0.4]]

b = [36, 22, 15]

c = [12, 60]

sense = ['<=', '<=', '<=']
```

In [4]:

```
# Plota o gráfico com os vértices:
plotar(A, b, c, sense)
plt.plot(0,0,'ro', color="black", label="A, B, D, E")
plt.plot(70,20,'ro', color="red", label="C (solução ótima)")
plt.plot(0,29.33,'ro', color="black")
plt.plot(138,3,'ro', color="black")
plt.plot(144,0,'ro', color="black")
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc=2, borderaxespad=0.)
```

Out[4]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f7f484b9940>



Cálculos

Gradiente

$\nabla z = (12; 60)$

Vértices

A:

$x_1 = 0, x_2 = 0$

B:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 0,1x_1 + 0,75x_2 = 22 \end{cases}$$

$x_1 = 0, x_2 = 29,33$

C:

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,75x_2 = 22 \\ 0,1x_1 + 0,4x_2 = 15 \end{cases}$$

$x_1 = 70, x_2 = 20$

D:

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,4x_2 = 15 \\ 0,25x_1 + 0,5x_2 = 36 \end{cases}$$

$x_1 = 138, x_2 = 3$

E:

$$\begin{cases} 0,25x_1 + 0,5x_2 = 36 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 144, x_2 = 0$

Soluções por vértice:

$z_a = 0$

$z_b = 1759,8$

$z_c = 2040$

$z_d = 1836$

$z_e = 1728$

Solução ótima:

$x_1 = 70, x_2 = 20$

$z^* = \text{R\$ } 2040,00$

1.2.2 Resolução pelo Simplex Revisado

Forma padrão

Variáveis de decisão

x_1: Quantidade de carrinhos a ser fabricada por semana,

x_2: Quantidade de triciclos a ser fabricada por semana.

Formulação matemática

$\max z = 12x_1 + 60x_2.$

sujeito a

$0,25x_1 + 0,5x_2 + x_5 = 36,$

$0,1x_1 + 0,75x_2 + x_4 = 22,$

$0,1x_1 + 0,4x_2 + x_5 = 15,$

$x_1, \ldots, x_5 \geq 0.$

x1	x2	x3	x4	x5	z
-12	-60	0	0	0	0
0,25	0,5	1	0	0	36
0,1	0,75	0	1	0	22
0,1	0,4	0	0	1	15

Iteração 1

	Base	cB
	x3	0
Sai	x4	0
	x5	0

x2	Bloqueio
0,5	72
0,75	29,3333333
0,4	37,5

B^-1			x2'	b
1	0	0	0,5	36
0	1	0	0,75	22
0	0	1	0,4	15

y			
y	0	0	0

	Nbase	Nj'	-cj	-cj'
	x1	0	12	-12
Entra	x2	0	60	-60

	B^-1'			x2'	b'
0,5	1	-0,6666667	0	0	21,3333333
0,75	0	1,33333333	0	1	29,3333333
0,4	0	-0,5333333	1	0	3,26666667

Iteração 2

	Base	cB
	x3	0
	x2	60
Sai	x5	0

x1	Bloqueio
0,25	116,363636
0,1	220
0,1	70

B^-1			x1'	b
1	-0,6666667	0	0,18333333	21,3333333
0	1,33333333	0	0,13333333	29,3333333
0	-0,5333333	1	0,04666667	3,26666667

y			
y	0	80	0

	Nbase	Nj'	-cj	-cj'
Entra	x1	8	12	-4
	x4	80	0	80

	B^-1'			x1'	b'
0,18333333	1	1,42857143	-3,9285714	0	8,5
0,13333333	0	2,85714286	-2,8571429	0	20
0,04666667	0	-11,428571	21,4285714	1	70

Iteração 3

Base	cB	b
x3	0	8,5
x2	60	20
x1	12	70

B^-1		
1	1,42857143	-3,9285714
0	2,85714286	-2,8571429
0	-11,428571	21,4285714

y			
y	0	34,2857143	85,7142857

Nbase	Nj'	-cj	-cj'
x4	34,2857143	0	34,2857143
x5	85,7142857	0	85,7142857

Não há mais variáveis para entrar na base.
Portanto, fim do Simplex.

z*	2040
x1	70
x2	20

1.3 Discussão

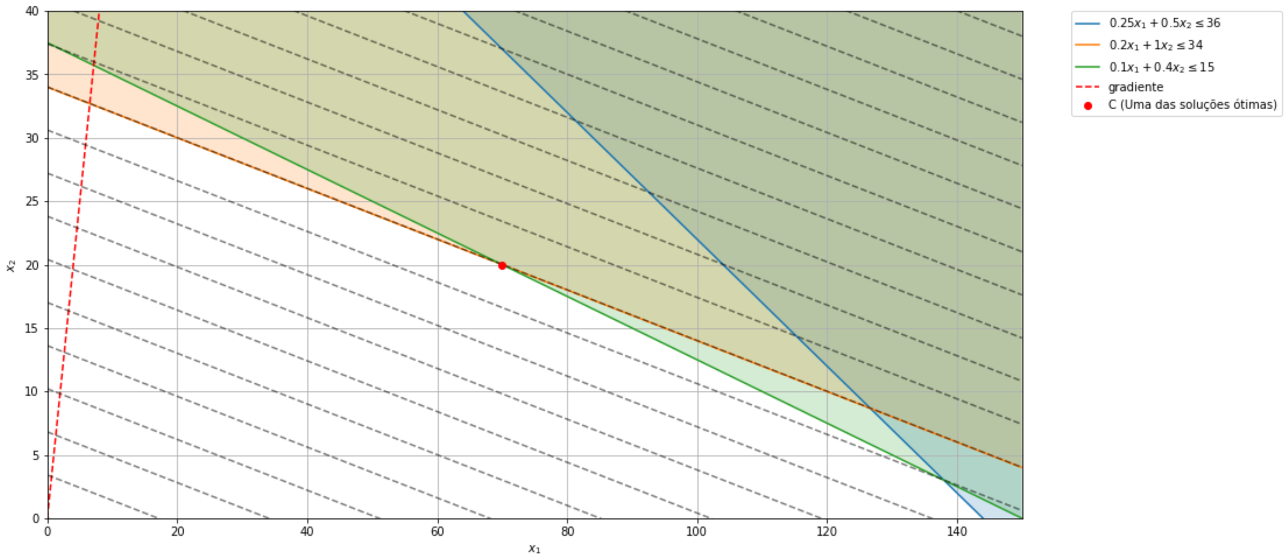
Através da resolução pelo método gráfico e analítico constatou-se que a aplicação didática, apresentada no item 1.2, é um problema de **maximização com solução única**. A constatação se deve ao fato da curva de nível que intercepta o vértice C não é paralela a nenhuma das restrições que limitam a região factível. Aproveitando o raciocínio, para transformar o problema original em um problema de **maximização com múltiplas soluções**, basta alterar uma das retrições que formam o vértice C, de modo que fique paralela à curva de nível que intercepta o vértice C. Por exemplo:

- Dado o vetor gradiente $\nabla z = (12; 60)$, encontra-se a reta $x_2 = 5x_1$
- Dada a reta $x_2 = 5x_1$, encontra-se a reta ortogonal $x_2 = -0,2x_1$
- Dada a reta ortogonal $x_2 = -0,2x_1$, encontra-se a reta ortogonal que intercepta o vértice C: $x_2 = -0,2x_1 + 34$

Logo, ao substituir a restrição $0,1x_1 + 0,75x_2 \leq 22$ por $0,2x_1 + x_2 \leq 34$, o problema passa a ter múltiplas soluções, conforme observa-se no gráfico abaixo:

In [5]:
```
A = [[0.25, 0.5],
     [0.2, 1],
     [0.1, 0.4]]

b = [36, 34, 15]

plotar(A, b, c, sense)
plt.plot(70,20,'ro', color="red", label="C (Uma das soluções ótimas)")
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc=2, borderaxespad=0.)
```

Out[5]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7f7f2003f220>

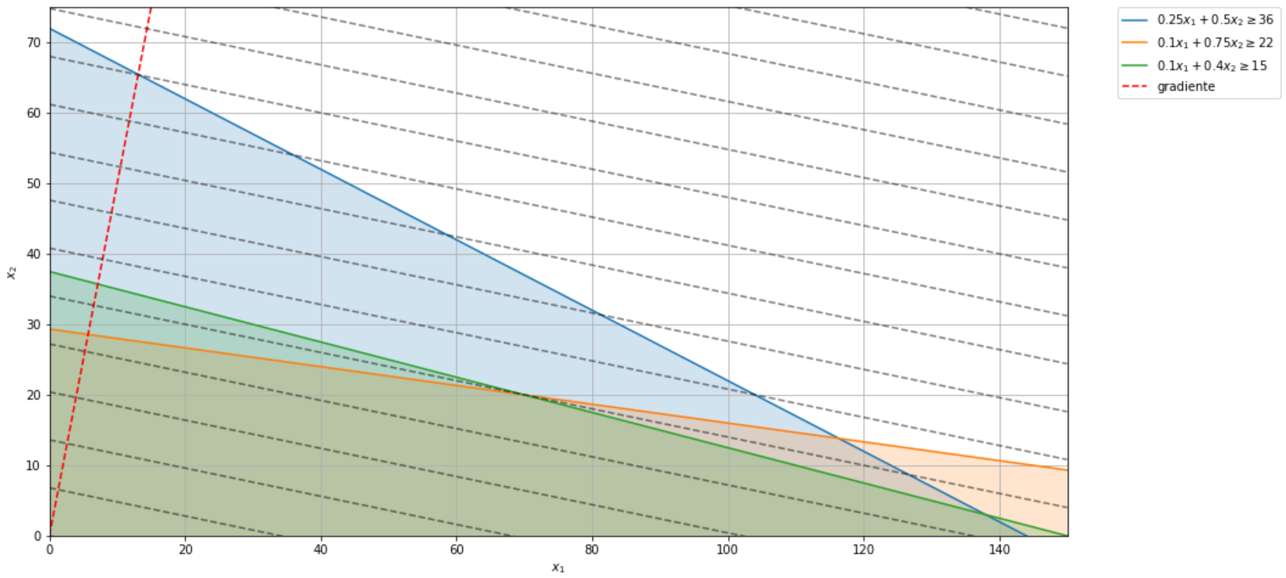


Para transformar o problema original em um problema com **solução infinita**, basta alterar as inequações das restrições para $\geq$, mantendo o objetivo de maximização. Deste modo, a região factível torna-se infinita no sentido do crescimento do gradiente, como pode-se observar:

In [6]:
```
A = [[0.25, 0.5],
     [0.1, 0.75],
     [0.1, 0.4]]

b = [36, 22, 15]
```

```
c = [12, 60]

sense = ['>=', '>=', '>=']

plotar(A, b, c, sense, max_y=75, z_max=10000, z_step=408)
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc=2, borderaxespad=0.)
```

Out[6]: `<matplotlib.legend.Legend at 0x7f7f614a6610>`

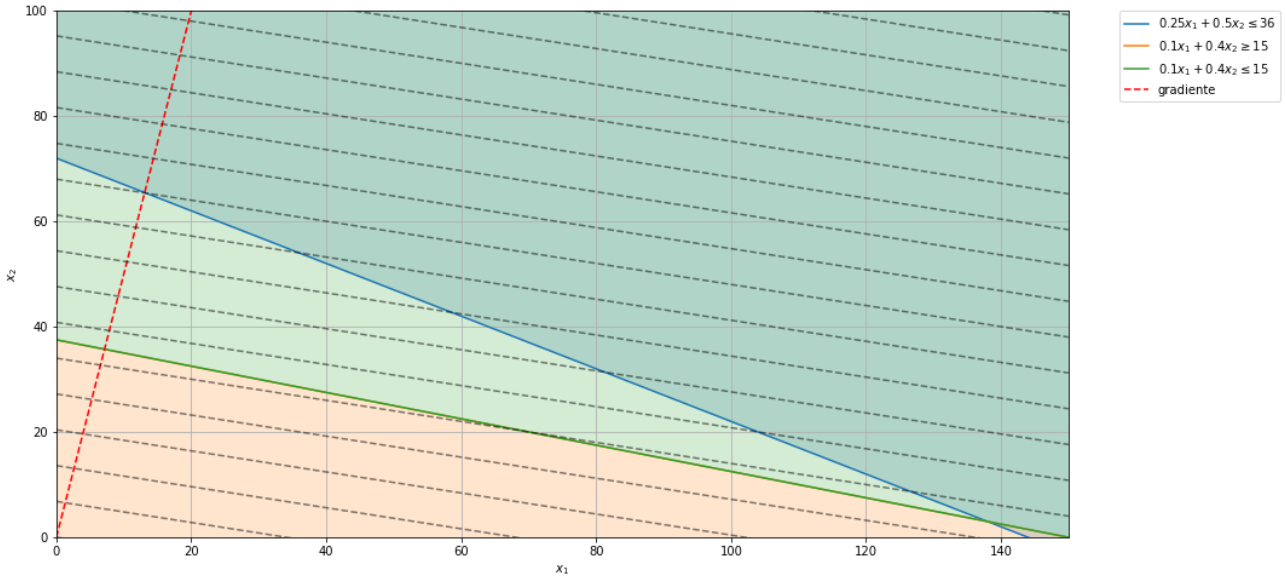


Para transformar o problema original em uma problema com **solução infactível**, basta alterar a restrição $0,1x_1 + 0,75x_2 \leq 22$ para $0,1x_1 + 0,4x_2 \geq 15$. Deste modo, como pode-se observar no gráfico abaixo, todas as regiões tornam-se restritas.

In [7]:

```
A = [[0.25, 0.5],
     [0.1, 0.4],
     [0.1, 0.4]]

b = [36, 15, 15]

c = [12, 60]

sense = ['<=', '>=', '<=']

plotar(A, b, c, sense, max_y=100, z_max=10000, z_step=408)
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc=2, borderaxespad=0.)
```

Out[7]: `<matplotlib.legend.Legend at 0x7f7f4115ef70>`



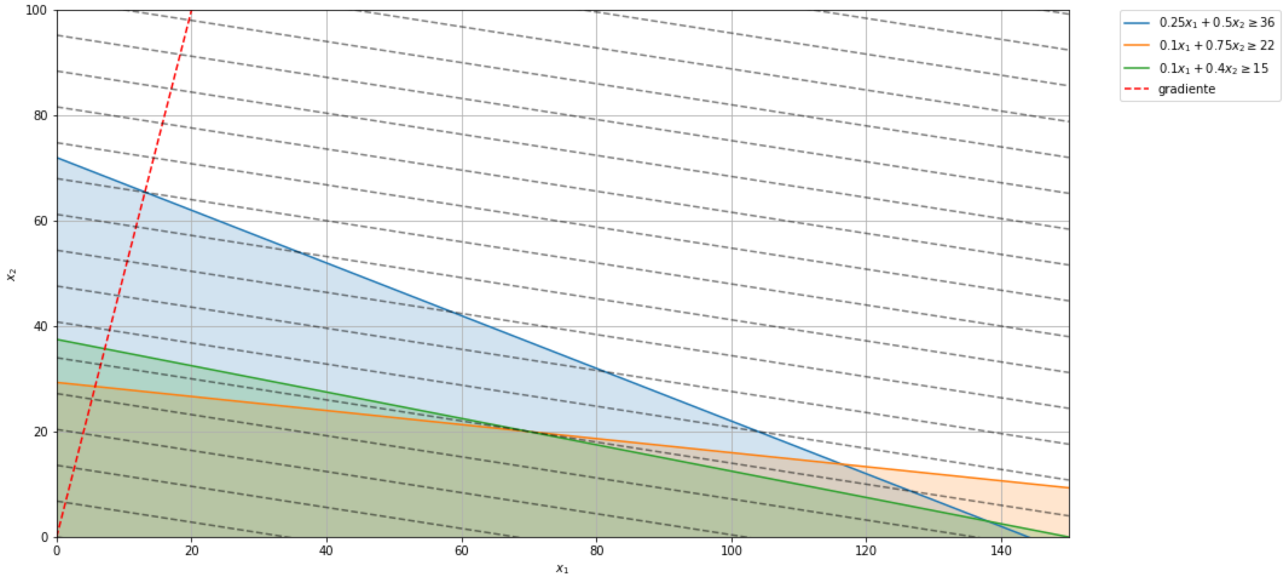
Ao inverter o sentido das inequações das restrições do problema original, considerando o objetivo de minimização, obtém-se um problema **minimização com solução única**, dado que nenhuma das restrições são paralelas às curvas de nível.

In [8]:

```
A = [[0.25, 0.5],
     [0.1, 0.75],
     [0.1, 0.4]]

b = [36, 22, 15]

c = [12, 60]
```

```
sense = ['>=', '>=', '>=']

plotar(A, b, c, sense, max_y=100, z_max=10000, z_step=408)
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc=2, borderaxespad=0.)
```

Out[8]: `<matplotlib.legend.Legend at 0x7f7f4117c760>`



Para transformar o problema anterior em um problema de **minimização com múltiplas soluções**, basta alterar uma das restrições que delimitam a região viável para que fique paralela com a curva de nível. Exemplo:

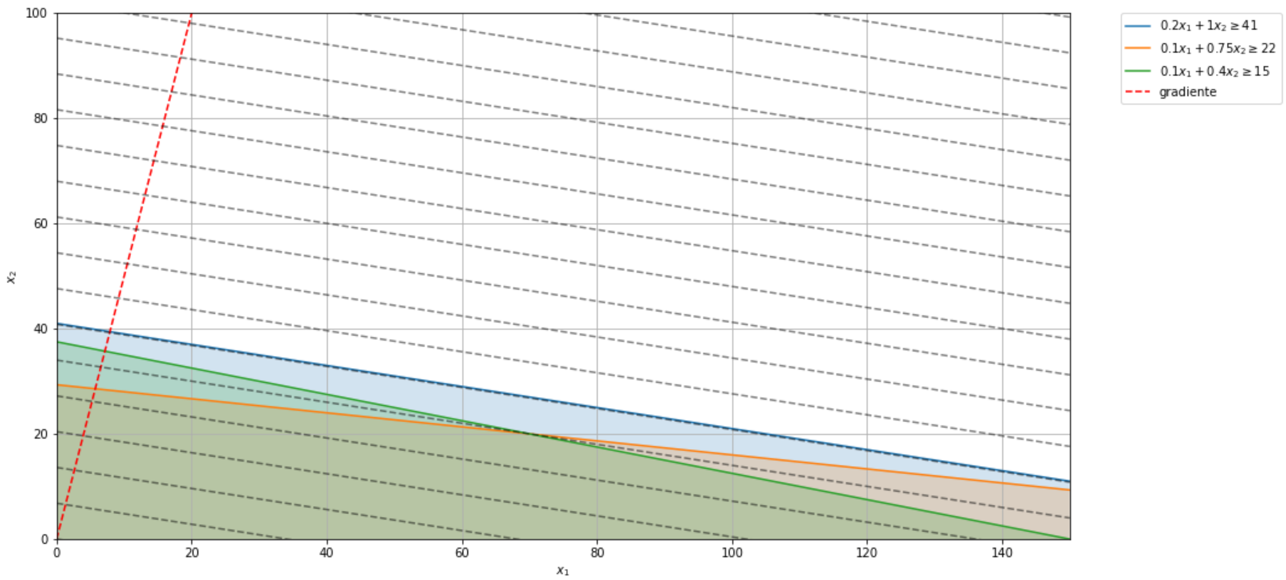
- Dado o vetor gradiente $\nabla z = (12; 60)$, encontra-se a reta $x_2 = 5x_1$
- Dada a reta $x_2 = 5x_1$, encontra-se a reta ortogonal $x_2 = -0,2x_1$
- Dada a reta ortogonal $x_2 = -0,2x_1$, encontra-se uma reta ortogonal que delimita a região viável C: $x_2 = -0,2x_1 + 41$

Logo, ao substituir a restrição $0,25x_1 + 0,5x_2 \geq 36$ por $0,2x_1 + x_2 \geq 41$, o problema passa a ter múltiplas soluções, conforme observa-se no gráfico abaixo:

In [9]:

```
A = [[0.2, 1],
     [0.1, 0.75],
     [0.1, 0.4]]

b = [41, 22, 15]

c = [12, 60]

sense = ['>=', '>=', '>=']

plotar(A, b, c, sense, max_y=100, z_max=10000, z_step=408)
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc=2, borderaxespad=0.)
```

Out[9]: `<matplotlib.legend.Legend at 0x7f7f41256fd0>`



2 Problema da Mistura

2.1 Modelo genérico

Conjuntos

I: $\{1, \ldots, m\}$,

J: $\{1, \ldots, n\}$.

Parâmetros

a_{ij}: $\text{Proporção do nutriente } i \in I \text{ no ingrediente } j \in J,$

b_i: $\text{Proporção mínima necessária do nutriente } i \in I \text{ para a composição da mistura},$

c_j: $\text{Custo por kg do ingrediente } j \in J.$

Variáveis de decisão

x_j: $\text{Quantidade do ingrediente } j \in J \text{ que deve ser utilizada em uma unidade da mistura.}$

Formulação matemática

$$\min\ z = \sum_{j \in J} c_j x_j.$$

sujeito a

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i, \forall\ i \in I,$$

$$\sum_{j \in J} x_j = 1,$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in J.$$

2.2 Aplicação didática

[Adaptado de Arenales, M. et al., 2007]: Uma agroindústria deve produzir um tipo de ração para determinado animal. Essa ração é produzida pela mistura de farinhas de dois ingredientes básicos: osso e soja. Cada um desses dois ingredientes contém diferentes quantidades de dois nutrientes necessários a uma dieta nutricional balanceada: proteína e cálcio. O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 1kg de ração. Cada ingrediente é adquirido no mercado com um certo custo unitário ($\text{R\$}$/kg). Os dados do problema são apresentados na tabela abaixo. Por exemplo, a farinha de osso é constituída de 20\% de proteína e 60\% de cálcio; a ração deve ser composta de pelo menos 30\% de proteína e 50\% de cálcio; 1kg da farinha de osso custa $\text{R\$}$ 0,56 (os ingredientes podem ser constituídos por outros elementos, mas que não são importantes para o problema em questão). Deve-se determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça às restrições nutricionais com o mínimo custo.

Nutrientes	Osso	Peixe	Proporção
Proteína	0,2	0,4	0,3
Cálcio	0,6	0,4	0,5
Custos ($\text{R\$}$/kg)	0,56	0,46	

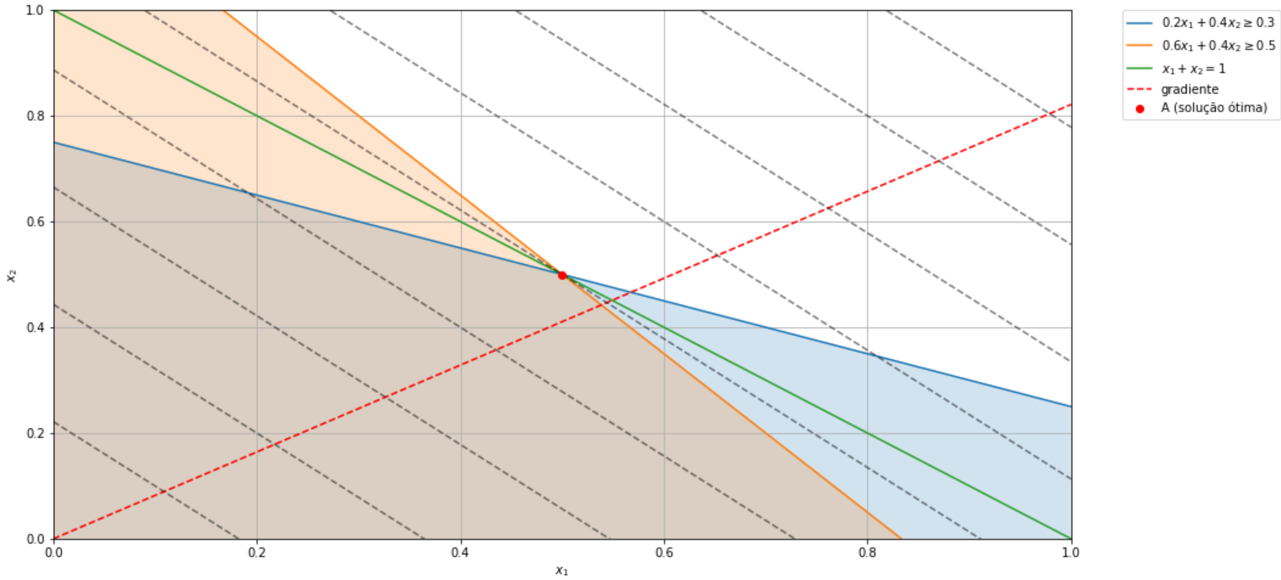
2.2.1 Resolução pelo método gráfico

Código para gerar a visualização

In [10]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pylab as plt
from matplotlib.pylab import rcParams
rcParams['figure.figsize'] = 15, 8
```

In [11]:
```
# Limites dos eixos:
max_x = 1
max_y = 1

# Vetor de valores para a variável x1:
x1 = np.linspace(0, max_x, 500)

# Restrições transformadas em igualdade com x2 isolado:
# Restrição 1:
x2_1 = (0.3 - 0.2*x1) / 0.4

# Restrição 2:
x2_2 = (0.5 - 0.6*x1) / 0.4
```

```python
# Restrição 3:
x2_3 = 1 - x1

# Variável auxiliar para o gráfico:
y_inf = x1*0 + 1000

# Plota as retas das restrições:
plt.plot(x1, x2_1, label=r'$0.2x_1 + 0.4x_2 \geq 0.3$')
plt.plot(x1, x2_2, label=r'$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 0.5$')
plt.plot(x1, x2_3, label=r'$x_1 + x_2 = 1$')

# Preenche a região infactível:
plt.fill_between(x1, x2_1, facecolor='#1f77b4', alpha=0.2)
plt.fill_between(x1, x2_2, facecolor='#ff7f0e', alpha=0.2)

# Plota o vetor gradiente:
gradiente = (0.56, 0.46)

a,b = get_coefs_reta(gradiente[0], gradiente[1])
y_grad = a*x1 + b
plt.plot(x1, y_grad, color='red', label='gradiente', linestyle='--')


# Plota as curvas de nível:
for z in np.arange(0.102, 2, 0.102):
    x, y, x0, y0 = get_coords_curva_nivel(z, gradiente)
    a,b = get_coefs_reta(x0, y0, x, y)
    y_level = a*x1 + b
    plt.plot(x1, y_level, color='black', linestyle='--', alpha=0.5)

# Limita os eixos:
plt.xlim((0, max_x))
plt.ylim((0, max_y))
plt.xlabel(r'$x_1$')
plt.ylabel(r'$x_2$')

# Plota o vértice que maximiza z:
plt.plot(0.5,0.5,'ro', color="red", label="A (solução ótima)")

plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc=2, borderaxespad=0.)
plt.grid()
```



Cálculos

Gradiente

$\nabla z = (0,56; 0,46)$

Vértice

A:

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,4x_2 = 0,3 \\ 0,6x_1 + 0,4x_2 = 0,5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

$x_1 = 0.5, x_2 = 0.5$

Solução ótima:

$x_1 = 0,5, x_2 = 0,5$

$z^* = \text{R\$ } 0.51$

2.2.2 Resolução pelo Simplex Revisado

Forma padrão

Variáveis de decisão

x_1: quantidade em kg de farinha de osso que deve ser utilizada em 1kg de ração,

x_2: quantidade em kg de farinha de peixe que deve ser utilizada em 1kg de ração.

Formulação matemática

$\max \ -z = -0,56x_1 - 0,46x_2.$

sujeito a

$0,2x_1 + 0,4x_2 - x_3 = 0,3,$

$0,6x_1 + 0,4x_2 + x_4 = 0,5,$

$x_1 + x_2 = 1,$

$x_1, \ldots, x_4 \geq 0.$

Quadro Simplex inicial

x1	x2	x3	x4	z
0,56	0,46	0	0	0
0,2	0,4	-1	0	0,3
0,6	0,4	0	-1	0,5
1	1	0	0	1

Forma padrão com variáveis artificiais

Formulação matemática

$\max \ -w = -x_5 - x_6 - x_7$

$\max \ -z = -0,56x_1 - 0,46x_2$

sujeito a:

$0,2x_1 + 0,4x_2 - x_3 + x_5 = 0,3$

$0,6x_1 + 0,4x_2 + x_4 + x_6 = 0,5$

$x_1 + x_2 + x_7 = 1$

$x_1, \ldots, x_7 \geq 0$

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	w/z
0	0	0	0	1	1	1	0
0,56	0,46	0	0	0	0	0	0
0,2	0,4	-1	0	1	0	0	0,3
0,6	0,4	0	-1	0	1	0	0,5
1	1	0	0	0	0	1	1

Iteração 1
Fase 1

	Base	cB
	x5	-1
Sai	x6	-1
	x7	-1

x1	Bloqueio
0,2	1,5
0,6	0,83333333
1	1

B^-1			x1'	b
1	0	0	0,2	0,3
0	1	0	0,6	0,5
0	0	1	1	1

y			
	-1	-1	-1

	Nbase	Nj'	-cj	-cj'
Entra	x1	-1,8	0	-1,8
	x2	-1,8	0	-1,8
	x3	1	0	1
	x4	1	0	1

	B^-1'			x1'	b'
0,2	1	-0,3333333	0	0	0,13333333
0,6	0	1,66666667	0	1	0,83333333
1	0	-1,6666667	1	0	0,16666667

Iteração 2
Fase 1

	Base	cB
	x5	-1
	x1	0
Sai	x7	-1

x4	Bloqueio
0	0,4
-1	-0,5
0	0,1

B^-1			x4'	b
1	-0,3333333	0	0,33333333	0,13333333
0	1,66666667	0	-1,6666667	0,83333333
0	-1,6666667	1	1,66666667	0,16666667

y			
	-1	2	-1

	Nbase	Nj'	-cj	-cj'
	x2	-0,6	0	-0,6
	x3	1	0	1
Entra	x4	-2	0	-2

	B^-1'			x4'	b'
0,33333333	1	0	-0,2	0	0,1
-1,6666667	0	0	1	0	1
1,66666667	0	-1	0,6	1	0,1

Iteração 3
Fase 1

	Base	cB
Sai	x5	-1
	x1	0
	x4	0

x2	Bloqueio
0,4	0,5
0,4	1
1	0,5

B^-1			x2'	b
1	0	-0,2	0,2	0,1
0	0	1	1	1
0	-1	0,6	0,2	0,1

y			
	-1	0	0,2

	Nbase	Nj'	-cj	-cj'
Entra	x2	-0,2	0	-0,2
	x3	1	0	1

	B^-1'			x4'	b'
0,2	5	0	-1	1	0,5
1	-5	0	2	0	0,5
0,2	-1	-1	0,8	0	0

Todas as variáveis artificiais saíram da base.
Portanto, fim da fase 1.

x1	x2	x3	x4	z
0,56	0,46	0	0	0
0,2	0,4	-1	0	0,3
0,6	0,4	0	-1	0,5
1	1	0	0	1

Iteração 1
Fase 2

	Base	cB
	x2	-0,46
	x1	-0,56
Sai	x4	0

x3	Bloqueio
-1	-0,1
0	0,1
0	0

B^-1			x3'	b
5	0	-1	-5	0,5
-5	0	2	5	0,5
-1	-1	0,8	1	0

y			
	0,5	0	-0,66

	Nbase	Nj'	-cj	-cj'
Entra	x3	-0,5	0	-0,5

	B^-1'			x3'	b'
-5	0	-5	3	0	0,5
5	0	5	-2	0	0,5
1	-1	-1	0,8	1	0

Iteração 2
Fase 2

Base	cB	b
x2	-0,46	0,5
x1	-0,56	0,5
x3	0	0

B^-1		
0	-5	3
0	5	-2
-1	-1	0,8

y			
	0	-0,5	-0,26

Nbase	Nj'	-cj	-cj'
x4	0,5	0	0,5

Não há mais variáveis para entrar na base.
Portanto, fim do Simplex.

z*	0,51
x1	0,5
x2	0,5

3 Problema do Transporte

3.1 Modelo genérico

Conjuntos

I: $\{1, 2, \ldots, m\}$,

J: $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Parâmetros

c_{ij}: Custo unitário de transporte do fornecedor $i \in I$ para o consumidor $j \in J$,

a_i: Capacidade de abastecimento do fornecedor $i \in I$,

b_j: Demanda do consumidor $j \in J$.

Variáveis de decisão

x_{ij}: Quantidades transportadas do fornecedor $i \in I$ para o consumidor $j \in J$.

Formulação matemática

$\min z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}.$

sujeito a

$\sum_{j \in I} x_{ij} \leq a_i, \forall\ i \in I,$

$\sum_{i \in J} x_{ij} \geq b_j, \forall\ j \in J,$

$x_{ij} \geq 0 \ \ \forall i \in I, j \in J.$

3.2 Aplicação didática

[Belfiore, P. e Fávero, L.P. 2013] A Karpet Ltda é uma empresa fabricante de autopeças, cujas sedes estão localizadas em Osasco e São Sebastião. Seus clientes encontram-se em São Paulo e Rio de Janeiro. Os custos unitários de transporte de cada origem para cada destino, assim como a capacidade de cada fornecedor e a demanda de cada cliente, encontram-se na tabela abaixo. O objetivo é atender a demanda de cada consumidor final, respeitando as capacidades de fornecimento, de forma a minimizar o custo total de transporte. Modelar o problema de transporte.

Origem	São Paulo	Rio de Janeiro	Capacidade
Osasco	12	24	**190**
São Sebastião	21	14	**110**
Demanda	**120**	**160**	

3.2.1 Resolução pelo Simplex

Forma padrão

Variáveis de decisão

x_1: quantidade transportada do fornecedor 1 para o consimidor 1,

x_2: quantidade transportada do fornecedor 1 para o consimidor 2,

x_3: quantidade transportada do fornecedor 2 para o consimidor 1,

x_4: quantidade transportada do fornecedor 2 para o consimidor 2.

Formulação matemática

$\max\ -z = -12x_1 - 24x_2 - 21x_3 - 14x_4.$

sujeito a

$x_1 + x_2 + x_5 = 190,$

$x_3 + x_4 + x_6 = 110,$

$x_1 + x_3 - x_7 = 120,$

$x_2 + x_4 - x_8 = 160,$

$x_1, \ldots, x_8 \geq 0.$

Quadro simplex inicial

Quadro inicial

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
12	24	21	14	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	190
0	0	1	1	0	1	0	0	110
1	0	1	0	0	0	-1	0	120
0	1	0	1	0	0	0	-1	160

Forma padrão com variáveis artificiais

Formulação matemática

$$\max\ -w = -x_9 - x_{10},$$

$$\max\ -z = -12x_1 - 24x_2 - 21x_3 - 14x_4.$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 + x_5 = 190,$$

$$x_3 + x_4 + x_6 = 110,$$

$$x_1 + x_3 - x_7 + x_9 = 120,$$

$$x_2 + x_4 - x_8 + x_{10} = 160,$$

$$x_1, \ldots, x_{10} \geq 0.$$

Fase 1

Fase 1

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
12	24	21	14	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	190
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	110
1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	120
0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	160

Lw' = Lw - L3

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z
-1	0	-1	0	0	0	1	0	0	1	-120
12	24	21	14	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	190
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	110
1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	120
0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	160

Lw' = Lw - L4

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z
-1	-1	-1	-1	0	0	1	1	0	0	-280
12	24	21	14	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	190
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	110
1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	120
0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	160

Solução básica:

xB = (x5, x6, x9, x10)

			Entra		Sai							
x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z		
-1	-1	-1	-1	0	0	1	1	0	0	-280		
12	24	21	14	0	0	0	0	0	0	0	**Bloqueio**	**Sai da base**
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	190	9999	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	110	110	1
1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	120	9999	0
0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	160	160	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z
-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1	0	0	-170
14	12	24	7	0	0	-14	0	0	0	0	-1540
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	190
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	110
0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	120
1	0	1	-1	0	0	-1	0	-1	0	1	50

Solução básica:
xB = (x5, x4, x9, x10)

	Entra								Sai			
x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z		
-1	-1	0	0	0	1	1	1	0	0	-170		
12	24	7	0	0	-14	0	0	0	0	-1540	**Bloqueio**	**Sai da base**
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	190	190	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	110	9999	0
1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	120	9999	0
0	1	-1	0	0	-1	0	-1	0	1	50	50	1

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z
-1	-1	0	-1	0	0	0	1	0	0	1	-120
24	12	0	31	0	0	10	0	24	0	-24	-2740
1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	-1	140
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	110
0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	120
1	0	1	-1	0	0	-1	0	-1	0	1	50

Solução básica:
xB = (x5, x4, x9, x2)

		Entra	Sai									
x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z		
-1	0	-1	0	0	0	1	0	0	1	-120		
12	0	31	0	0	10	0	24	0	-24	-2740	**Bloqueio**	**Sai da base**
1	0	1	0	1	1	0	1	0	-1	140	140	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	110	110	1
1	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	120	120	0
0	1	-1	0	0	-1	0	-1	0	1	50	9999	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z
-1	-1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	-10
31	12	0	0	-31	0	-21	0	24	0	-24	-6150
1	1	0	0	-1	1	0	0	1	0	-1	30
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	110
1	1	0	0	-1	0	-1	-1	0	1	0	10
-1	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	160

Solução básica:
xB = (x5, x3, x9, x2)

Entra								Sai				
x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z		
-1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	-10		
12	0	0	-31	0	-21	0	24	0	-24	-6150	**Bloqueio**	**Sai da base**
1	0	0	-1	1	0	0	1	0	-1	30	30	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	110	9999	0
1	0	0	-1	0	-1	-1	0	1	0	10	10	1
0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	160	9999	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
12	0	0	0	-19	0	-9	12	24	-12	-24	-6270
1	0	0	0	0	1	1	1	1	-1	-1	20
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	110
1	1	0	0	-1	0	-1	-1	0	1	0	10
0	0	1	0	1	0	0	0	-1	0	1	160

Solução básica:
xB = (x5, x3, x1, x2)

Fase 2

Fase 2 — Sai: x3, Entra: x4

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
0	0	0	-19	0	-9	12	24	-6270
0	0	0	0	1	1	1	1	20
0	0	1	1	0	1	0	0	110
1	0	0	-1	0	-1	-1	0	10
0	1	0	1	0	0	0	-1	160

Bloqueio	Sai da base
9999	0
110	1
9999	0
160	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
-19	0	0	19	0	0	10	12	24	-4180
0	0	0	0	0	1	1	1	1	20
1	0	0	1	1	0	1	0	0	110
-1	1	0	1	0	0	0	-1	0	120
1	0	1	-1	0	0	-1	0	-1	50

Solução básica:
xB = (x5, x4, x1, x2)

Solução ótima

$x_1 = 120$

$x_2 = 50$

$x_3 = 0$

$x_4 = 110$

$z^* = 4180$

3.2.2 Resolução pelo Dual Simplex

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z	
12	24	21	14	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	1	0	0	0	190	
0	0	1	1	0	1	0	0	110	
1	0	1	0	0	0	-1	0	120	*(-1)
0	1	0	1	0	0	0	-1	160	*(-1)

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
12	24	21	14	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	190
0	0	1	1	0	1	0	0	110
-1	0	-1	0	0	0	1	0	-120
0	-1	0	-1	0	0	0	1	-160

Entra: x4, Sai: x8

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
	12	24	21	14	0	0	0	0	0
	1	1	0	0	1	0	0	0	190
	0	0	1	1	0	1	0	0	110
	-1	0	-1	0	0	0	1	0	-120
	0	-1	0	-1	0	0	0	1	-160
Bloqueio:	#DIV/0!	-24	#DIV/0!	-14					

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
14	12	10	21	0	0	0	0	14	-2240
0	1	1	0	0	1	0	0	0	190
1	0	-1	1	0	0	1	0	1	-50
0	-1	0	-1	0	0	0	1	0	-120
-1	0	1	0	1	0	0	0	-1	160

Entra: x1, Sai: x7

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
	12	10	21	0	0	0	0	14	-2240
	1	1	0	0	1	0	0	0	190
	0	-1	1	0	0	1	0	1	-50
	-1	0	-1	0	0	0	1	0	-120
	0	1	0	1	0	0	0	-1	160
Bloqueio:	-12	#DIV/0!	-21					#DIV/0!	

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
12	0	10	9	0	0	0	12	14	-3680
1	0	1	-1	0	1	0	1	0	70
0	0	-1	1	0	0	1	0	1	-50
-1	1	0	1	0	0	0	-1	0	120
0	0	1	0	1	0	0	0	-1	160

		Entra				Sai			
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
	0	10	9	0	0	0	12	14	-3680
	0	1	-1	0	1	0	1	0	70
	0	-1	1	0	0	1	0	1	-50
	1	0	1	0	0	0	-1	0	120
	0	1	0	1	0	0	0	-1	160
Bloqueio:		-10	9				#DIV/0!	14	

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
10	0	0	19	0	0	10	12	24	-4180
1	0	0	0	0	1	1	1	1	20
-1	0	1	-1	0	0	-1	0	-1	50
0	1	0	1	0	0	0	-1	0	120
1	0	0	1	1	0	1	0	0	110

z*:	4180
x1:	120
x2:	50
x3:	0
x4:	110

3.3 Modelo Dual

Conjuntos

I: $\{1, 2, \ldots, m\}$,

J: $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Parâmetros

c_{ij}: Custo unitário de transporte do fornecedor $i \in I$ para o consumidor $j \in J$,

a_i: Capacidade de abastecimento do fornecedor $i \in I$,

b_j: Demanda do consumidor $j \in J$.

Variáveis de decisão

u_i: Variável dual associada à restrição de oferta $i \in I$,

v_j: Variável dual associada à restrição de demanda $j \in J$.

Formulação matemática

$\max w = \sum_{i \in M} a_i u_i + \sum_{j \in N} b_j v_j.$

sujeito a

$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad \forall i \in I, j \in J.$

$u_i \leq 0 \quad \forall i \in I,$

$v_j \geq 0 \quad \forall j \in J.$

3.3.1 Resolução através do Gurobi e Pyomo

Definição dos dados de entrada

In [12]:
```
c = [[12,24],
     [21,14]]

a = [190, 110]

b = [120, 160]
```

Declaração do modelo computacional

In [13]:
```
import pyomo.environ as pyo

modelo = pyo.ConcreteModel()

# Conjuntos:
modelo.I = pyo.RangeSet(len(a))
modelo.J = pyo.RangeSet(len(b))

# Parâmetros:
modelo.c = pyo.Param(modelo.I, modelo.J, initialize=lambda modelo, i, j: c[i-1][j-1])
modelo.a = pyo.Param(modelo.I, initialize=lambda modelo, i: a[i-1])
modelo.b = pyo.Param(modelo.J, initialize=lambda modelo, j: b[j-1])

# Variáveis de decisão:
modelo.u = pyo.Var(modelo.I, within=pyo.NegativeReals)
modelo.v = pyo.Var(modelo.I, within=pyo.NonNegativeReals)

# Função objetivo:
def f_obj(modelo):
    return sum(modelo.a[i] * modelo.u[i] for i in modelo.I) + sum(modelo.b[j] * modelo.v[j] for j in modelo.J)
modelo.obj = pyo.Objective(rule=f_obj, sense=pyo.maximize)

# Restrições:

def f_restr1(modelo, i, j):
    return modelo.u[i] + modelo.v[j] <= modelo.c[i,j]
modelo.restr_1 = pyo.Constraint(modelo.I, modelo.J, rule=f_restr1)
```

Solução

In [14]:
```
result = pyo.SolverFactory('gurobi', solver_io="python").solve(modelo)
print(result)
```

```
--------------------------------------------
Warning: your license will expire in 6 days
--------------------------------------------

Academic license - for non-commercial use only - expires 2021-06-07
Using license file /Users/acsjunior/gurobi.lic

Problem:
- Name: unknown
  Lower bound: 4180.0
  Upper bound: 4180.0
  Number of objectives: 1
  Number of constraints: 4
  Number of variables: 4
  Number of binary variables: 0
  Number of integer variables: 0
  Number of continuous variables: 4
  Number of nonzeros: 8
  Sense: -1
  Number of solutions: 1
Solver:
- Name: Gurobi 9.11
  Status: ok
  Wallclock time: 0.006934165954589844
  Termination condition: optimal
  Termination message: Model was solved to optimality (subject to tolerances), and an optimal solution is available.
Solution:
- number of solutions: 0
  number of solutions displayed: 0
```

In [15]:
```
for i in modelo.I:
    print("u"+str(i)+":", modelo.u[i]())
```

```
u1: 0.0
u2: -10.0
```

In [16]:
```
for j in modelo.J:
    print("v"+str(j)+":", modelo.v[j]())
```

```
v1: 12.0
v2: 24.0
```

In [17]:
```
print("Função objetivo:", round(modelo.obj(),2))
```

```
Função objetivo: 4180.0
```

4 Problema da Dieta

4.1 Modelo genérico

Conjunto:

I: $\{1, 2, \ldots, m\}$,

J: $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Parâmetros

a_{ij}: Quantidade do nutriente $j \in J$ presente no alimento $i \in I$,

b_j: Necessidade diária do nutriente $j \in J$.

c_i: Preço (R\$) do alimento $i \in I$,

Variáveis de decisão

$x_i =$ Quantidade do alimento $i \in I$ a ser consumido diariamente.

Formulação matemática

$$\min z = \sum_{j \in J} c_i x_i.$$

sujeito a

$$\sum_{i \in I} a_{ij} x_i \geq b_j \quad \forall j \in J,$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in I.$$

4.2 Aplicação didática

[Belfiore, P. e Fávero, L.P. 2013] A anemia é uma doença decorrente de baixos níveis de hemoglobina no sangue, proteína esta responsável pelo transporte de oxigênio. Para sua prevenção, deve-se adotar uma dieta rica em ferro, vitamina A e ácido fólico. Esses nutrientes podem ser encontrados em diversos alimentos. A Tabela abaixo apresenta as necessidades diárias de cada nutriente, a respectiva quantidade em cada um dos alimentos e o preço por alimento. A fim de prevenir que seus pacientes apresentem esse tipo de anemia, o Hospital Metrópole está estudando uma nova dieta. O objetivo é selecionar os ingredientes, com o menor custo possível, que farão parte das duas principais refeições diárias (almoço e jantar), de forma que 100% das necessidades diárias de cada um desses nutrientes sejam atendidas nas duas refeições.

	Ferro (mg)	**Vitamina A (UI)**	**Ácido fólico (mg)**	**Preço (R$)**
Agrião	2	47250	1	**1,6**
Feijão	71	0	0,56	**5**
Ovo	9	32150	0,5	**3**
Carne	15	0	0,6	**7,5**
Necessidades diárias	**80**	**45000**	**4**	

4.2.1 Resolução pelo Simplex

Forma padrão

Variáveis de decisão

x_i: quantidade (kg) do alimento i a ser consumido diariamente , $i = 1, \ldots, 4$.

Formulação matemática

$$\max \ -z = -1,6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 7,5x_4.$$

sujeito a

$$2x_1 + 71x_2 + 9x_3 + 15x_4 - x_5 = 80,$$

$$47250x_1 + 32150x_3 - x_6 = 45000,$$

$$x_1 + 0,56x_2 + 0,5x_3 + 0,6x_4 - x_7 = 4,$$

$$x_1, \ldots, x_7 \geq 0.$$

Quadro simplex inicial

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z
1,6	5	3	7,5	0	0	0	0
2	71	9	15	-1	0	0	80
47250	0	32150	0	0	-1	0	45000
1	0,56	0,5	0,6	0	0	-1	4

Forma padrão com variáveis artificiais

Formulação matemática

$$\max \; -w = -x_8 - x_9 - x_{10},$$

$$\max \; -z = -1,6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 7,5x_4.$$

sujeito a

$$2x_1 + 71x_2 + 9x_3 + 15x_4 - x_5 + x_8 = 80,$$

$$47250x_1 + 32150x_3 - x_6 + x_9 = 45000,$$

$$x_1 + 0,56x_2 + 0,5x_3 + 0,6x_4 - x_7 + x_{10} = 4,$$

$$x_1, \ldots, x_{10} \geq 0.$$

Fase 1

Fase 1

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z	
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	Lw' - Lw - L1
1,6	5	3	7,5	0	0	0	0	0	0	0	
2	71	9	15	-1	0	0	1	0	0	80	
47250	0	32150	0	0	-1	0	0	1	0	45000	
1	0,56	0,5	0,6	0	0	-1	0	0	1	4	

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z	
-2	-71	-9	-15	1	0	0	0	1	1	-80	Lw' = Lw - L2
1,6	5	3	7,5	0	0	0	0	0	0	0	
2	71	9	15	-1	0	0	1	0	0	80	
47250	0	32150	0	0	-1	0	0	1	0	45000	
1	0,56	0,5	0,6	0	0	-1	0	0	1	4	

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z	
-47252	-71	-32159	-15	1	1	0	0	0	1	-45080	Lw = Lw - L3
1,6	5	3	7,5	0	0	0	0	0	0	0	
2	71	9	15	-1	0	0	1	0	0	80	
47250	0	32150	0	0	-1	0	0	1	0	45000	
1	0,56	0,5	0,6	0	0	-1	0	0	1	4	

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z
-47253	-71,56	-32159,5	-15,6	1	1	1	0	0	0	-45084
1,6	5	3	7,5	0	0	0	0	0	0	0
2	71	9	15	-1	0	0	1	0	0	80
47250	0	32150	0	0	-1	0	0	1	0	45000
1	0,56	0,5	0,6	0	0	-1	0	0	1	4

Solução básica:
xB = (x8, x9, x10)

Entra (x1) — Sai (x9)

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z		
-47253	-71,56	-32159,5	-15,6	1	1	1	0	0	0	-45084		
1,6	5	3	7,5	0	0	0	0	0	0	0	**Bloqueio**	**Sai da base**
2	71	9	15	-1	0	0	1	0	0	80	40	0
47250	0	32150	0	0	-1	0	0	1	0	45000	0,95238095	1
1	0,56	0,5	0,6	0	0	-1	0	0	1	4	4	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z
-47253	0	-71,56	-7,4587302	-15,6	1	-6,349E-05	1	0	1,00006349	0	-81,142857
1,6	0	5	1,91132275	7,5	0	3,3862E-05	0	0	-3,386E-05	0	-1,5238095
2	0	71	7,63915344	15	-1	4,2328E-05	0	1	-4,233E-05	0	78,0952381
47250	1	0	0,68042328	0	0	-2,116E-05	0	0	2,1164E-05	0	0,95238095
1	0	0,56	-0,1804233	0,6	0	2,1164E-05	-1	0	-2,116E-05	1	3,04761905

Solução básica:
xB = (x8, x1, x10)

Entra (x2) — Sai (x8)

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z		
0	-71,56	-7,4587302	-15,6	1	-6,349E-05	1	0	1,00006349	0	-81,142857		
0	5	1,91132275	7,5	0	3,3862E-05	0	0	-3,386E-05	0	-1,5238095	**Bloqueio**	**Sai da base**
0	71	7,63915344	15	-1	4,2328E-05	0	1	-4,233E-05	0	78,0952381	1,09993293	1
1	0	0,68042328	0	0	-2,116E-05	0	0	2,1164E-05	0	0,95238095	9999	0
0	0,56	-0,1804233	0,6	0	2,1164E-05	-1	0	-2,116E-05	1	3,04761905	5,44217687	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z
-71,56	0	0	0,24067576	-0,4816901	-0,0078873	-2,083E-05	1	1,00788732	1,00002083	0	-2,4316566
5	0	0	1,3733542	6,44366197	0,07042254	3,0882E-05	0	-0,0704225	-3,088E-05	0	-7,0234742
71	0	1	0,10759371	0,21126761	-0,0140845	5,9617E-07	0	0,01408451	-5,962E-07	0	1,09993293
0	1	0	0,68042328	0	0	-2,116E-05	0	0	2,1164E-05	0	0,95238095
0,56	0	0	-0,2406758	0,48169014	0,00788732	2,083E-05	-1	-0,0078873	-2,083E-05	1	2,43165661

Solução básica:
xB = (x2, x1, x10)

Entra (x4) — Sai (x10)

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z		
0	0	0,24067576	-0,4816901	-0,0078873	-2,083E-05	1	1,00788732	1,00002083	0	-2,4316566		
0	0	1,3733542	6,44366197	0,07042254	3,0882E-05	0	-0,0704225	-3,088E-05	0	-7,0234742	**Bloqueio**	**Sai da base**
0	1	0,10759371	0,21126761	-0,0140845	5,9617E-07	0	0,01408451	-5,962E-07	0	1,09993293	5,20634921	0
1	0	0,68042328	0	0	-2,116E-05	0	0	2,1164E-05	0	0,95238095	9999	0
0	0	-0,2406758	0,48169014	0,00788732	2,083E-05	-1	-0,0078873	-2,083E-05	1	2,43165661	5,048176	1

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/z
-0,4816901	0	0	-5,996E-13	0	-1,388E-16	-3,535E-17	2,3315E-15	1	1	1	-5,185E-12
6,44366197	0	0	4,59292026	0	-0,0350877	-0,0002478	13,377193	0,03508772	0,00024777	-13,377193	-39,552214
0,21126761	0	1	0,21315325	0	-0,0175439	-8,54E-06	0,43859649	0,01754386	8,5399E-06	-0,4385965	0,03341688
0	1	0	0,68042328	0	0	-2,116E-05	0	0	2,1164E-05	0	0,95238095
0,48169014	0	0	-0,4996485	1	0,01637427	4,3244E-05	-2,0760234	-0,0163743	-4,324E-05	2,07602339	5,048176

Solução básica:
xB = (x2, x1, x4)

Fase 2

Fase 2 — Sai (x4) — Entra (x5)

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z	Bloqueio	Sai da base
0	0	4,59292026	0	-0,0350877	-0,0002478	13,377193	-39,552214		
0	1	0,21315325	0	-0,0175439	-8,54E-06	0,43859649	0,03341688	9999	0
1	0	0,68042328	0	0	-2,116E-05	0	0,95238095	9999	0
0	0	-0,4996485	1	0,01637427	4,3244E-05	-2,0760234	5,048176	308,29932	1

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z
-0,0350877	0	0	3,5222449	2,14285714	0	-0,0001551	8,92857143	-28,734694
-0,0175439	0	1	-0,3221844	1,07142857	0	3,7793E-05	-1,7857143	5,44217687
0	1	0	0,68042328	0	0	-2,116E-05	0	0,95238095
0,01637427	0	0	-30,514248	61,0714286	1	0,00264097	-126,78571	308,29932

Solução básica:
xB = (x2, x1, x5)

Sai (x5) — Entra (x6)

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z	Bloqueio	Sai da base
0	0	3,5222449	2,14285714	0	-0,0001551	8,92857143	-28,734694		
0	1	-0,3221844	1,07142857	0	3,7793E-05	-1,7857143	5,44217687	144000	0
1	0	0,68042328	0	0	-2,116E-05	0	0,95238095	9999	1
0	0	-30,514248	61,0714286	1	0,00264097	-126,78571	308,29932	116737,264	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z
-0,0001551	0	0	1,730166	5,72953635	0,05872925	0	1,4825415	-10,628506
3,7793E-05	0	1	0,11448197	0,1974814	-0,0143102	0	0,02862049	1,03033772
-2,116E-05	1	0	0,4358901	0,48941042	0,00801374	0	-1,0160275	3,42301088
0,00264097	0	0	-11554,193	23124,6422	378,649113	1	-48007,298	116737,264

Solução básica:
xB = (x2, x1, x6)

Solução ótima

$x_1 = 3,42301088$

$x_2 = 1,03033772$

$x_3 = 0$

$x_4 = 0$

$z^* = 10,628506$

4.2.2 Resolução pelo Dual Simplex

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z	
1,6	5	3	7,5	0	0	0	0	
2	71	9	15	-1	0	0	80	*(-1)
47250	0	32150	0	0	-1	0	45000	*(-1)
1	0,56	0,5	0,6	0	0	-1	4	*(-1)

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z
1,6	5	3	7,5	0	0	0	0
-2	-71	-9	-15	1	0	0	-80
-47250	0	-32150	0	0	1	0	-45000
-1	-0,56	-0,5	-0,6	0	0	1	-4

	Entra					Sai		
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z
	1,6	5	3	7,5	0	0	0	0
	-2	-71	-9	-15	1	0	0	-80
	-47250	0	-32150	0	0	1	0	-45000
	-1	-0,56	-0,5	-0,6	0	0	1	-4
Bloqueio:	-3,39E-05	#DIV/0!	-9,33E-05	#DIV/0!				

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z
1,6	0	5	1,911323	7,5	0	3,39E-05	0	-1,52381
-2	0	-71	-7,639153	-15	1	-4,23E-05	0	-78,09524
-47250	1	0	0,680423	0	0	-2,12E-05	0	0,952381
-1	0	-0,56	0,180423	-0,6	0	-2,12E-05	1	-3,047619

		Entra				Sai		
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z
	0	5	1,911323	7,5	0	3,39E-05	0	-1,52381
	0	-71	-7,639153	-15	1	-4,23E-05	0	-78,09524
	1	0	0,680423	0	0	-2,12E-05	0	0,952381
	0	-0,56	0,180423	-0,6	0	-2,12E-05	1	-3,047619
Bloqueio:		-0,070423	-0,250201	-0,5		-0,8		

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z
5	0	0	1,373354	6,443662	0,070423	3,09E-05	0	-7,023474
-71	0	1	0,107594	0,211268	-0,014085	5,96E-07	0	1,099933
0	1	0	0,680423	0	0	-2,12E-05	0	0,952381
-0,56	0	0	0,240676	-0,48169	-0,007887	-2,08E-05	1	-2,431657

						Entra	Sai	
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z
	0	0	1,373354	6,443662	0,070423	3,09E-05	0	-7,023474
	0	1	0,107594	0,211268	-0,014085	5,96E-07	0	1,099933
	1	0	0,680423	0	0	-2,12E-05	0	0,952381
	0	0	0,240676	-0,48169	-0,007887	-2,08E-05	1	-2,431657
Bloqueio:			5,706242	-13,37719	-8,928571	-1,482541		

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	z
3,0882E-05	0	0	1,730166	5,729536	0,058729	0	1,482541	-10,62851
5,9617E-07	0	1	0,114482	0,197481	-0,01431	0	0,02862	1,030338
-2,116E-05	1	0	0,43589	0,48941	0,008014	0	-1,016027	3,423011
-2,083E-05	0	0	-11554,19	23124,64	378,6491	1	-48007,3	116737,3

z*: 10,62851
x1: 3,423011
x2: 1,030338
x3: 0
x4: 0

4.3 Modelo Dual

Conjunto:

I: $\{1, 2, \ldots, m\}$,

J: $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Parâmetros

a_{ij}: Quantidade do nutriente $j \in J$ presente no alimento $i \in I$,

b_j: Necessidade diária do nutriente $j \in J$.

c_i: Preço (R$) do alimento $i \in I$,

Variáveis de decisão

$u_j =$ Variável dual associada ao nutriente $j \in J$.

Formulação matemática

$$\max w = \sum_{j \in J} b_j u_j.$$

sujeito a

$$\sum_{j \in J} a_{ij} u_j \leq c_i \quad \forall i \in I,$$

$$u_j \geq 0 \quad \forall j \in J.$$

4.3.1 Resolução através do Gurobi e Pyomo

Definição dos dados de entrada

In [18]:

```
a = [[2, 47250, 1],
     [71, 0, 0.56],
     [9, 32150, 0.5],
     [15, 0, 0.5]]

b = [80, 45000, 4]

c = [1.6, 5, 3, 7.5]
```

Declaração do modelo computacional

In [19]:

```
import pyomo.environ as pyo

modelo = pyo.ConcreteModel()

# Conjunto:
modelo.I = pyo.RangeSet(len(c))
modelo.J = pyo.RangeSet(len(b))

# Parâmetros:
modelo.a = pyo.Param(modelo.I, modelo.J, initialize=lambda modelo, i, j: a[i-1][j-1])
modelo.b = pyo.Param(modelo.J, initialize=lambda modelo, j: b[j-1])
modelo.c = pyo.Param(modelo.I, initialize=lambda modelo, i: c[i-1])


# Variáveis de decisão:
modelo.u = pyo.Var(modelo.J, within=pyo.NonNegativeReals)


# Função objetivo:
def f_obj(modelo):
    return sum(modelo.b[j] * modelo.u[j] for j in modelo.J)
modelo.obj = pyo.Objective(rule=f_obj, sense=pyo.maximize)

# Restrições:

def f_restr1(modelo, i):
    return sum(modelo.a[i,j] * modelo.u[j] for j in modelo.J) <= modelo.c[i]
modelo.restr_1 = pyo.Constraint(modelo.I, rule=f_restr1)
```

Solução

In [20]:

```
result = pyo.SolverFactory('gurobi', solver_io="python").solve(modelo)
print(result)
```

```
Problem:
```

```
- Name: unknown
  Lower bound: 10.628506010303376
  Upper bound: 10.628506010303376
  Number of objectives: 1
  Number of constraints: 4
  Number of variables: 3
  Number of binary variables: 0
  Number of integer variables: 0
  Number of continuous variables: 3
  Number of nonzeros: 10
  Sense: -1
  Number of solutions: 1
Solver:
- Name: Gurobi 9.11
  Status: ok
  Wallclock time: 0.010972023010253906
  Termination condition: optimal
  Termination message: Model was solved to optimality (subject to tolerances), and an optimal solution is available.
Solution:
- number of solutions: 0
  number of solutions displayed: 0
```

In [21]:
```
for j in modelo.J:
    print("u"+str(j)+":", modelo.u[j]())
```

```
u1: 0.05872925014310246
u2: 0.0
u3: 1.4825414997137947
```

In [22]:
```
print("Função objetivo:", round(modelo.obj(),2))
```

```
Função objetivo: 10.63
```

---

5 Problema da Mochila

5.1 Modelo genérico

Conjunto:

$J: \{1, \ldots, n\}$.

Parâmetros

c_j: Utilidade do objeto $j \in J$,

p_j: Peso (g) do objeto $j \in J$,

$c_{\max}$: Capacidade máxima da mochila (g).

Variáveis de decisão

x_j: Número de objetos do tipo $j \in J$ colocados na mochila.

Formulação matemática

$$\max z = \sum_{j \in J} c_j x_j.$$

sujeito a

$$\sum_{j \in J} p_j x_j \leq c_{\max},$$

$$x_j \geq 1 \quad \forall j \in \{1, 2\},$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j \in J.$$

5.2 Aplicação didática

[Belfiore, P. e Fávero, L.P. 2013] Um alpinista deseja escolher quais objetos carregar na mochila (programação binária) a fim de maximizar a sua utilidade. Para cada possível objeto, o alpinista atribui uma nota em função de sua utilidade, conforme mostra a tabela abaixo. O peso de cada objeto também está ilustrado na mesma tabela. O peso máximo que o alpinista pode carregar é de 5 kg e o alpinista deve levar ao menos 1 garrafa de oxigênio e 1 garrafa d'água. Modele o problema da mochila.

Objeto	Utilidade	Peso (g)
Garrafas de oxigênio	10	1500
Água	9	800

Objeto	Utilidade	Peso (g)
Máquina fotográfica	6	400
Protetor solar	5	200
Celular	2	100

5.2.1 Resolução pelo Simplex

Forma padrão

Variáveis de decisão

x_j: número de objetos do tipo j colocados na mochila, $j = 1, \ldots, 5$.

Formulação matemática

$\max z = 10x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 2x_5.$

sujeito a

$1500x_1 + 800x_2 + 400x_3 + 200x_4 + 100x_5 + x_6 = 5000,$

$x_1 - x_7 = 1,$

$x_2 - x_8 = 1,$

$x_1, \ldots, x_8 \geq 0.$

Quadro simplex inicial

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
-10	-9	-6	-5	-2	0	0	0	0
1500	800	400	200	100	1	0	0	5000
1	0	0	0	0	0	-1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	-1	1

Forma padrão com variáveis artificiais

Formulação matemática

$\max z = 10x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 2x_5.$

sujeito a

$1500x_1 + 800x_2 + 400x_3 + 200x_4 + 100x_5 + x_6 = 5000,$

$x_1 - x_7 + x_9 = 1,$

$x2 - x8 + x_{10} = 1,$

$x_1, \ldots, x_{10} \geq 0.$

Fase 1

Fase 1

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/x	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	Lw' = Lw - L2
-10	-9	-6	-5	-2	0	0	0	0	0	0	
1500	800	400	200	100	1	0	0	0	0	5000	
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/x	
-1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	Lw' = Lw = L3
-10	-9	-6	-5	-2	0	0	0	0	0	0	
1500	800	400	200	100	1	0	0	0	0	5000	
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/x
-1	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	-2
-10	-9	-6	-5	-2	0	0	0	0	0	0
1500	800	400	200	100	1	0	0	0	0	5000
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1

Solução básica:
xB = (x6, x9, x10)

	Entra								Sai			
x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/x		
-1	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	-2		
-10	-9	-6	-5	-2	0	0	0	0	0	0	**Bloqueio**	**Sai da base**
1500	800	400	200	100	1	0	0	0	0	5000	6,25	0
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	9999	0
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	1	1

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/x
-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1
-9	-10	0	-6	-5	-2	0	0	-9	0	9	9
800	1500	0	400	200	100	1	0	800	0	-800	4200
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1

Solução básica:
xB = (x6, x9, x2)

Entra								Sai				
x1	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**x9**	**x10**	**w/x**		
-1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1		
-10	0	-6	-5	-2	0	0	-9	0	9	9	**Bloqueio**	**Sai da base**
1500	0	400	200	100	1	0	800	0	-800	4200	2,8	0
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1	9999	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	w/x
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
-10	0	0	-6	-5	-2	0	-10	-9	10	9	19
1500	0	0	400	200	100	1	1500	800	-1500	-800	2700
1	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1	1

Solução básica:
xB = (x6, x1, x2)

Fase 2

Fase 2					Sai	Entra				
x1	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**z**		
0	0	-6	-5	-2	0	-10	-9	19	**Bloqueio**	**Sai da base**
0	0	400	200	100	1	1500	800	2700	1,8	1
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	9999	0
0	1	0	0	0	0	0	-1	1	9999	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
-10	0	0	-3,3333333	-3,6666667	-1,3333333	0,00666667	0	-3,6666667	37
1500	0	0	0,26666667	0,13333333	0,06666667	0,00066667	1	0,53333333	1,8
-1	1	0	0,26666667	0,13333333	0,06666667	0,00066667	0	0,53333333	2,8
0	0	1	0	0	0	0	0	-1	1

Solução básica:
xB = (x7, x1, x2)

						Sai	Entra			
x1	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**z**		
0	0	-3,3333333	-3,6666667	-1,3333333	0,00666667	0	-3,6666667	37	**Bloqueio**	**Sai da base**
0	0	0,26666667	0,13333333	0,06666667	0,00066667	1	0,53333333	1,8	3,375	1
1	0	0,26666667	0,13333333	0,06666667	0,00066667	0	0,53333333	2,8	5,25	0
0	1	0	0	0	0	0	-1	1	9999	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
-3,6666667	0	0	-1,5	-2,75	-0,875	0,01125	6,875	0	49,375
0,53333333	0	0	0,5	0,25	0,125	0,00125	1,875	1	3,375
0,53333333	1	0	0	0	0	0	-1	0	1
-1	0	1	0,5	0,25	0,125	0,00125	1,875	0	4,375

Solução básica:
xB = (x8, x1, x2)

			Entra				Sai			
x1	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**	**x8**	**z**		
0	0	-1,5	-2,75	-0,875	0,01125	6,875	0	49,375	**Bloqueio**	**Sai da base**
0	0	0,5	0,25	0,125	0,00125	1,875	1	3,375	13,5	1
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	9999	0
0	1	0,5	0,25	0,125	0,00125	1,875	0	4,375	17,5	0

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	z
-2,75	0	0	4	0	0,5	0,025	27,5	11	86,5
0,25	0	0	2	1	0,5	0,005	7,5	4	13,5
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	1
0,25	0	1	0	0	0	0	0	-1	1

Solução básica:
xB = (x4, x1, x2)

Solução ótima (relaxada)

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$x_3 = 0$

$x_4 = 13,5$

$x_5 = 0$

$z^* = 86,5$

5.3 Modelo Dual

Conjunto:

$I: \{1, \ldots, m\}$,

Parâmetros

c_i: Utilidade do objeto $j \in I$,

p_i: Peso (g) do objeto $i \in I$,

$c_{\max}$: Capacidade máxima da mochila (g),

g_i: Parâmetro auxiliar para a variável v, $\forall i \in I$,

a_i: Parâmetro auxiliar para a variável y, $\forall i \in I$.

Variáveis de decisão

u: Variável dual associada à restrição de capacidade máxima da mochila,

v: Variável dual associada à restrição de quantidade mínima garrafas de oxigênio,

y: Variável dual associada à restrição de quantidade mínima garrafas d'água.

Formulação matemática

$\min\ w = c_{\max} u + v + y.$

sujeito a

$p_i u + g_i v + a_i y \geq c_i, \quad \forall i \in I,$

$u \geq 0,$

$v, y \leq 0.$

5.3.1 Resolução através do Dual Simplex

u	v'	y'	f1	f2	f3	f4	f5	w	
5000	-1	-1	0	0	0	0	0	0	
1500	-1	0	-1	0	0	0	0	10	*(-1)
800	0	-1	0	-1	0	0	0	9	*(-1)
400	0	0	0	0	-1	0	0	6	*(-1)
200	0	0	0	0	0	-1	0	5	*(-1)
100	0	0	0	0	0	0	-1	2	*(-1)

		Entra		Sai					
	u	v'	y'	f1	f2	f3	f4	f5	w
	5000	-1	-1	0	0	0	0	0	0
	-1500	1	0	1	0	0	0	0	-10
	-800	0	1	0	1	0	0	0	-9
	-400	0	0	0	0	1	0	0	-6
	-200	0	0	0	0	0	1	0	-5
	-100	0	0	0	0	0	0	1	-2
Bloqueio:	-3,3333333	-1	#DIV/0!						

	u	v'	y'	f1	f2	f3	f4	f5	w
-1	3500	0	-1	1	0	0	0	0	-10
1	-1500	1	0	1	0	0	0	0	-10
0	-800	0	1	0	1	0	0	0	-9
0	-400	0	0	0	0	1	0	0	-6
0	-200	0	0	0	0	0	1	0	-5
0	-100	0	0	0	0	0	0	1	-2

			Entra		Sai				
	u	v'	y'	f1	f2	f3	f4	f5	w
	3500	0	-1	1	0	0	0	0	-10
	-1500	1	0	1	0	0	0	0	-10
	-800	0	1	0	1	0	0	0	-9
	-400	0	0	0	0	1	0	0	-6
	-200	0	0	0	0	0	1	0	-5
	-100	0	0	0	0	0	0	1	-2
Bloqueio:	-4,375		-1	#DIV/0!					1,11111111

	u	v'	y'	f1	f2	f3	f4	f5	w
-1	2700	0	0	1	1	0	0	0	-19
0	-1500	1	0	1	0	0	0	0	-10
1	-800	0	1	0	1	0	0	0	-9
0	-400	0	0	0	0	1	0	0	-6
0	-200	0	0	0	0	0	1	0	-5
0	-100	0	0	0	0	0	0	1	-2

	Entra					Sai			
	u	v'	y'	f1	f2	f3	f4	f5	w
	2700	0	0	1	1	0	0	0	-19
	-1500	1	0	1	0	0	0	0	-10
	-800	0	1	0	1	0	0	0	-9
	-400	0	0	0	0	1	0	0	-6
	-200	0	0	0	0	0	1	0	-5
	-100	0	0	0	0	0	0	1	-2
Bloqueio:	-6,75			#DIV/0!	#DIV/0!				

	u	v'	y'	f1	f2	f3	f4	f5	w
2700	0	0	0	1	1	6,75	0	0	-59,5
-1500	0	1	0	1	0	-3,75	0	0	12,5
-800	0	0	1	0	1	-2	0	0	3
-400	1	0	0	0	0	-0,0025	0	0	0,015
-200	0	0	0	0	0	-0,5	1	0	-2
-100	0	0	0	0	0	-0,25	0	1	-0,5

						Entra	Sai		
	u	v'	y'	f1	f2	f3	f4	f5	w
	0	0	0	1	1	6,75	0	0	-59,5
	0	1	0	1	0	-3,75	0	0	12,5
	0	0	1	0	1	-2	0	0	3
	1	0	0	0	0	-0,0025	0	0	0,015
	0	0	0	0	0	-0,5	1	0	-2
	0	0	0	0	0	-0,25	0	1	-0,5
Bloqueio:				#DIV/0!	#DIV/0!	-13,5			

	u	v'	y'	f1	f2	f3	f4	f5	w
6,75	0	0	0	1	1	0	13,5	0	-86,5
-3,75	0	1	0	1	0	0	-7,5	0	27,5
-2	0	0	1	0	1	0	-4	0	11
-0,0025	1	0	0	0	0	0	-0,005	0	0,025
-0,5	0	0	0	0	0	1	-2	0	4
-0,25	0	0	0	0	0	0	-0,5	1	0,5

w*:	86,5	**w*:**	86,5
u:	0,025	**u:**	0,025
v':	27,5	**v:**	-27,5
y':	11	**y:**	-11

---

6 Problema do Fluxo Máximo

6.1 Modelo genérico

Conjuntos

I: Conjunto de nós da rede, $I = \{1, 2, \ldots, m\}$,

K: Conjunto de nós de origem, $K = \{1, 2, \ldots, p\}$,

J: Conjunto de nós de destino, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Parâmetros

O: Nó de origem da rede,

T: Nó de destino da rede,

u_{ij}: Limite máximo para o fluxo no arco (i, j), $\forall i \in I, j \in J$.

Variáveis de decisão

x_{ij}: Fluxo no arco (i, j), $\forall i \in I$ e $j \in J$.

Formulação matemática

$$\max z = \sum_{k \in K} x_{k\mathrm{T}}.$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in K} x_{k\mathrm{T}} - \sum_{j \in J} x_{\mathrm{O}j} = 0,$$

$$\sum_{k \in K} x_{ki} - \sum_{j \in J} x_{ij} = 0, \quad \forall i \in I, i \neq O, T,$$

$$x_{ij} \leq u_{ij}, \quad \forall i \in I, j \in J,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in J.$$

6.2 Aplicação didática

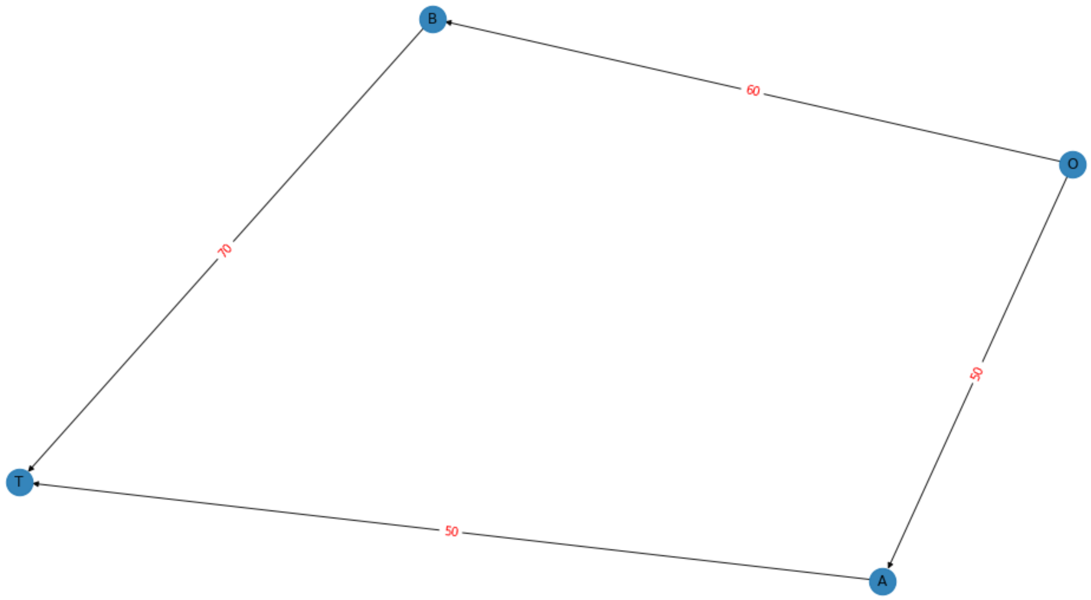
[Belfiore, P. e Fávero, L.P. 2013] A empresa Petroduto transporta óleo, gás natural, biocombustíveis renováveis, dentre outros produtos, por meio de uma malha sólida de dutos de 1.000 quilômetros. A empresa busca determinar o fluxo máximo de óleo (em m^3/s) que pode ser transportado na rede da figura abaixo, que tem como nó de origem (O) a estação de Minas e como nó de destino (T) um consumidor final localizado em São Paulo. Os valores nos arcos representam as capacidades máximas em cada arco (em m^3/s).

6.2.1 Resolução pelo Simplex

Código para gerar a grafo

In [23]:

```python
import networkx as nx
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pylab as plt
from matplotlib.pylab import rcParams
rcParams['figure.figsize'] = 15, 8

G = nx.DiGraph()
edges = [("O" ,"A"),("O" ,"B"),("A" ,"T"), ("B" ,"T")]
edge_labels={edges[0]: '50', edges[1]: '60', edges[2]: '50', edges[3]: '70'}
G.add_edges_from(edges)
pos = nx.spring_layout(G)
nx.draw(G, pos, width=1, linewidths=1, node_size=500, alpha=0.9, labels={node:node for node in G.nodes()})
nx.draw_networkx_edge_labels(G,pos,edge_labels=edge_labels,font_color='red')
plt.show()
```



Forma padrão

Variáveis de decisão

x_{ij} = fluxo no arco (i, j), $\forall i \in I, j \in J$.

Formulação matemática

$$\max z = x_{AT} + x_{BT}.$$

sujeito a

$$x_{AT} + x_{BT} - x_{OA} - x_{OB} = 0,$$

$$x_{OA} - x_{AT} = 0,$$

$$x_{OB} - x_{BT} = 0,$$

$$x_{OA} + x_5 = 50,$$

$$x_{OB} + x_6 = 60,$$

$$x_{AT} + x_7 = 50,$$

$$x_{BT} + x_8 = 70,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in I, j \in J.$$

x_OA	x_OB	x_AT	x_BT	x5	x6	x7	x8	z
0	0	-1	-1	0	0	0	0	0
-1	-1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	-1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	-1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	50
0	1	0	0	0	1	0	0	60
0	0	1	0	0	0	1	0	50
0	0	0	1	0	0	0	1	70

x_OA	x_OB	x_AT	x_BT	x5	x6	x7	x8	z
0	0	-1	-1	0	0	0	0	0
1	1	-1	-1	0	0	0	0	0
-1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	50
0	1	0	0	0	1	0	0	60
0	0	1	0	0	0	1	0	50
0	0	0	1	0	0	0	1	70

Solução básica:
xB = x5, x6, x7, x8

		Entra						
x_OA	x_OB	x_AT	x_BT	x5	x6	x7	x8	z
0	0	-1	-1	0	0	0	0	0
1	1	-1	-1	0	0	0	0	0
-1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	50
0	1	0	0	0	1	0	0	60
0	0	1	0	0	0	1	0	50
0	0	0	1	0	0	0	1	70

	x_OA	x_OB	x_AT	x_BT	x5	x6	x7	x8	z
-1	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
-1	0	1	0	-1	0	0	0	0	0
1	-1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	50
0	0	1	0	0	0	1	0	0	60
1	1	0	0	0	0	0	1	0	50
0	0	0	0	1	0	0	0	1	70

Solução básica:
xB = x_AT, x9, x5, x6, x7, x8

Entra						Sai		
x_OA	x_OB	x_AT	x_BT	x5	x6	x7	x8	z
-1	0	0	-1	0	0	0	0	0
0	1	0	-1	0	0	0	0	0
-1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	50
0	1	0	0	0	1	0	0	60
1	0	0	0	0	0	1	0	50
0	0	0	1	0	0	0	1	70

	x_OA	x_OB	x_AT	x_BT	x5	x6	x7	x8	w/z
-1	0	0	0	-1	0	0	1	0	50
0	0	1	0	-1	0	0	0	0	0
-1	0	0	1	0	0	0	1	0	50
0	0	-1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	-1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	60
1	1	0	0	0	0	0	1	0	50
0	0	0	0	1	0	0	0	1	70

Solução básica:
xB = x_AT, x9, x5, x6, x_OA, x8

			Entra					
x_OA	x_OB	x_AT	x_BT	x5	x6	x7	x8	w/z
0	0	0	-1	0	0	1	0	50
0	1	0	-1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	50
0	-1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	-1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	60
1	0	0	0	0	0	1	0	50
0	0	0	1	0	0	0	1	70

	x_OA	x_OB	x_AT	x_BT	x5	x6	x7	x8	w/z
-1	0	-1	0	0	0	0	1	0	50
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	50
1	0	-1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	60
0	1	0	0	0	0	0	1	0	50
1	0	1	0	0	0	0	0	1	70

Solução básica:
xB = x_AT, x_BT, x5, x6, x_OA, x8

	Entra				Sai			
x_OA	x_OB	x_AT	x_BT	x5	x6	x7	x8	w/z
0	-1	0	0	0	0	1	0	50
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	50
0	-1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	-1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	60
1	0	0	0	0	0	1	0	50
0	1	0	0	0	0	0	1	70

	x_OA	x_OB	x_AT	x_BT	x5	x6	x7	x8	w/z
-1	0	0	0	0	0	1	1	0	110
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	50
-1	0	0	0	1	0	1	0	0	60
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	60
0	1	0	0	0	0	0	1	0	50
1	0	0	0	0	0	-1	0	1	10

Solução básica:
xB = x_AT, x_BT, x5, x_OB, x_OA, x8

$z^* = 110$

$x_{OA} = 50$

$x_{OB} = 60$

$x_{AT} = 50$

$x_{BT} = 60$

6.3 Modelo Dual

Variáveis de decisão

u_1, u_2, u_3: Variáveis de decisão associadas às restrições de igualdade,

v_1, v_2, v_3, v_4: Variáveis de decisão associadas às restrições de fluxo máximo.

Formulação matemática

$\min w = 50v_1 + 60v_2 + 50v_3 + 70v_4.$

sujeito a

$-u_1 + u_2 + v_1 \geq 0,$

$-u_1 + u_3 + v_2 \geq 0,$

$u_1 - u_2 + v_3 \geq 1,$

$u_1 - u_3 + v_4 \geq 1,$

u_1, u_2, u_3 irrestritas de sinal,

$v1, v2, v3 \geq 0.$

6.3.2 Resolução através do Solver/Excel

	irres	irres	irres	>=0	>=0	>=0	>=0			
Min	**u1**	**u2**	**u3**	**v1**	**v2**	**v3**	**v4**			
	1	0	0	1	1	0	0			
w	0	0	0	50	60	50	70	110		
	-1	1		1				0	>=	0
	-1		1		1			0	>=	0
	1	-1				1		1	>=	1
	1		-1				1	1	>=	1

---

7 Problema da Designação

7.1 Modelo genérico

Conjunto

M: $\{1, 2 \ldots, m\}$.

Parâmetros

c_{ij}: Custo de designar uma tarefa i a uma máquina j, $\forall i, j \in M$.

Variáveis de decisão

$$x_{ij}: \begin{cases} 1, & \text{se a tarefa } i \text{ é designada à máquina } j, \quad \forall i, j \in M \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Formulação matemática

$$\min z = \sum_{i \in M} \sum_{j \in M} c_{ij} x_{ij}.$$

sujeito a

$$\sum_{j \in M} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in M,$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in M,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in M.$$

7.2 Aplicação didática

[Belfiore, P. e Fávero, L.P. 2013] Uma indústria do setor de autopeças possui quatro máquinas (M1, M2, M3 e M4) e quatro atividades que devem ser completadas no processo de fabricação de bancos (acabamento, montagem, pintura e soldagem). Cada atividade pode ser designada a apenas uma máquina, e cada máquina pode processar apenas uma atividade. O tempo de processamento de cada atividade em cada máquina está ilustrado na tabela abaixo. Formule o problema de designação que tem como objetivo minimizar o tempo total de processamento.

Atividade	M1	M2	M3	M4
Acabamento	8	10	12	13
Montagem	15	13	12	10
Pintura	8	12	10	9
Soldagem	15	11	10	8

7.2.1 Resolução através do Gurobi e Pyomo

Definição dos dados de entrada

In [24]:
```
cij = [[8,10,12,13],
      [15,13,12,10],
      [8,12,10,9],
      [15,11,10,8]]

atividades = {0: 'ACABAMENTO', 1: 'MONTAGEM', 2: 'PINTURA', 3: 'SOLDAGEM'}
maquinas = {0: 'M1', 1: 'M2', 2: 'M3', 3: 'M4'}
```

Declaração do modelo computacional

In [25]:
```
# Declaração do modelo:

import pyomo.environ as pyo

modelo = pyo.ConcreteModel()

# Conjunto:
modelo.M = range(len(cij))

# Parâmetros:
modelo.c = pyo.Param(modelo.M, modelo.M, initialize=lambda modelo, i, j: cij[i][j])

# Variáveis de decisão:
modelo.x = pyo.Var(modelo.M, modelo.M, within=pyo.Binary)

# Função objetivo:
def f_obj(modelo):
    return sum(modelo.c[i,j] * modelo.x[i,j] for i in modelo.M for j in modelo.M)
modelo.obj = pyo.Objective(rule=f_obj, sense=pyo.minimize)

# Restrições:

# Cada tarefa i pode ser designada a apenas uma máquina j
modelo.restr_designacao = pyo.ConstraintList()
for i in modelo.M:
    modelo.restr_designacao.add(sum(modelo.x[i,j] for j in modelo.M) == 1.0)

# Cada máquina j pode processar apenas uma tarefa i
modelo.restr_processamento = pyo.ConstraintList()
for j in modelo.M:
    modelo.restr_processamento.add(sum(modelo.x[i,j] for i in modelo.M) == 1.0)
```

Solução

In [26]:
```
result = pyo.SolverFactory('gurobi', solver_io="python").solve(modelo)
print(result)
```

```
Problem:
- Name: unknown
  Lower bound: 38.0
  Upper bound: 38.0
  Number of objectives: 1
  Number of constraints: 8
  Number of variables: 16
  Number of binary variables: 16
  Number of integer variables: 16
  Number of continuous variables: -16
  Number of nonzeros: 32
  Sense: 1
  Number of solutions: 2
Solver:
- Name: Gurobi 9.11
  Status: ok
  Wallclock time: 0.015218019485473633
  Termination condition: optimal
  Termination message: Model was solved to optimality (subject to tolerances), and an optimal solution is available.
Solution:
- number of solutions: 0
  number of solutions displayed: 0
```

In [27]:
```
l = list(modelo.x.keys())
for i in l:
    if modelo.x[i]() != 0:
        print('Atividade', atividades[i[0]], 'designada para a máquina', maquinas[i[1]])
```

```
Atividade ACABAMENTO designada para a máquina M2
Atividade MONTAGEM designada para a máquina M3
Atividade PINTURA designada para a máquina M1
Atividade SOLDAGEM designada para a máquina M4
```

In [28]:
```
print("Função objetivo:", modelo.obj())
```

```
Função objetivo: 38.0
```

---

8 Problema do Caixeiro Viajante

8.1 Modelo genérico (MTZ)

Conjuntos:

$N: \{1, 2 \ldots, n\}$,

$U: \{2, 3, \ldots n\}$.

Parâmetros do modelo

d_{ij}: Distância entre a origem i e o destino j, $\forall i, j \in N$.

Variáveis de decisão

$$x_{ij}: \begin{cases} 1, & \text{se a rota inclui o arco (i,j)} \quad \forall i, j \in N \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Variáveis auxiliares MTZ

u_i: Variáveis auxiliares de Miller-Tucker-Zemlin, $\forall i \in N$.

Formulação matemática

$$\min z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N, j \neq i} d_{ij} x_{ij}.$$

sujeito a

$$\sum_{i \in N, i \neq j} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N,$$

$$\sum_{j \in N, j \neq i} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N,$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, \quad i, j \in U, i \neq j,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in N, j \neq i,$$

$$u_i \in \mathbb{R}^+.$$

8.2 Aplicação Didática

[Adaptado de Woche, C., 2020] A empresa Puro Sabor realiza diariamente a entrega de marmitas congeladas na cidade Curitiba. A empresa, localizada no bairro da Cidade Industrial de Curitiba e com clientes distribuídos em 20 bairros da cidade, deseja encontrar a rota mais curta que visita cada um dos bairros e retorna à origem. Formule o modelo do Caixeiro Viajante com as restrições de Miller-Tucker-Zemlin.

Bairro	Longitude	Latitude	Observação
Bacacherí	-49,2474748	-25,4018619	
Bairro Alto	-49,2268303	-25,4123155	
Batel	-49,297017	-25,4413611	
Boqueirão	-49,2529249	-25,5054148	
Cajuru	-49,2268961	-25,4613033	
Capão da Imbuia	-49,2260358	-25,4367121	
Centro	-49,2796458	-25,4321587	
Cidade Industrial	-49,3723223	-25,4573673	Início/Término da rota (base)
Fazendinha	-49,3331065	-25,480968	
Hauer	-49,2609939	-25,4774216	
Jardim das Américas	-49,2377161	-25,4579512	
Mossunguê	-49,3420312	-25,4423293	
Novo Mundo	-49,3131946	-25,487748	
Pilarzinho	-49,3250216	-25,4018454	
Pinheirinho	-49,3104457	-25,5238141	
Portão	-49,3097647	-25,4720522	
Santa Cândida	-49,2470586	-25,3668842	
São Braz	-49,371206	-25,4119441	
Sítio Cercado	-49,2875541	-25,5440411	
Tatuquara	-49,33638	-25,5606956	

Bairro	Longitude	Latitude	Observação
Uberaba	-49,2330507	-25,4900129	

8.2.1 Resolução através do Gurobi e Pyomo

Leitura dos dados de entrada

In [29]:

```
import os
import pandas as pd

BASE_DIR = os.path.abspath(".")
DATA_DIR = os.path.join(BASE_DIR, 'data')
PRF_FILE = 'bairros_curitiba.csv'

df = pd.read_csv(os.path.join(DATA_DIR, PRF_FILE),  sep=';', decimal=',')[['Bairro', 'Longitude', 'Latitude']]
df.head()
```

Out[29]:

	Bairro	Longitude	Latitude
0	Bacacherí	-49.247475	-25.401862
1	Bairro Alto	-49.226830	-25.412315
2	Batel	-49.297017	-25.441361
3	Boqueirão	-49.252925	-25.505415
4	Cajuru	-49.226896	-25.461303

In [30]:

```
df.shape
```

Out[30]: (21, 3)

Construção da matriz de distâncias

In [31]:

```
import numpy as np
from haversine import haversine_vector, Unit

dij = df[['Latitude', 'Longitude']]
dij = [tuple(x) for x in dij.to_numpy()]
dij = haversine_vector(dij, dij, Unit.KILOMETERS, comb=True)

n = len(dij)
```

Declaração do modelo computacional

In [32]:

```
# Declaração do modelo:

import pyomo.environ as pyo

modelo = pyo.ConcreteModel()

# Conjuntos:
modelo.N = pyo.RangeSet(n)
modelo.U = pyo.RangeSet(2,n)

# Parâmetros:
modelo.d = pyo.Param(modelo.N, modelo.N,initialize=lambda modelo, i, j: dij[i-1][j-1])

# Variáveis de decisão:
modelo.x = pyo.Var(modelo.N, modelo.N, within=pyo.Binary)

# Variáveis auxiliares MTZ:
modelo.u = pyo.Var(modelo.N, within=pyo.NonNegativeIntegers,bounds=(0,n-1))

# Função objetivo:
def f_obj(modelo):
    return sum(modelo.x[i,j] * modelo.d[i,j] for i in modelo.N for j in modelo.N)
modelo.obj = pyo.Objective(rule=f_obj, sense=pyo.minimize)

# Restrições:

def f_restr1(modelo, N):
    return sum(modelo.x[i,N] for i in modelo.N if i != N ) == 1
modelo.restr1 = pyo.Constraint(modelo.N, rule=f_restr1)

def f_restr2(modelo, N):
    return sum(modelo.x[N,j] for j in modelo.N if j != N) == 1
modelo.restr2 = pyo.Constraint(modelo.N, rule=f_restr2)

def f_restr3(modelo, i, j):
    if i!=j:
        return modelo.u[i] - modelo.u[j] + modelo.x[i,j] * n <= n-1
    else:
        return modelo.u[i] - modelo.u[i] == 0
modelo.restr3 = pyo.Constraint(modelo.U, modelo.N, rule=f_restr3)
```

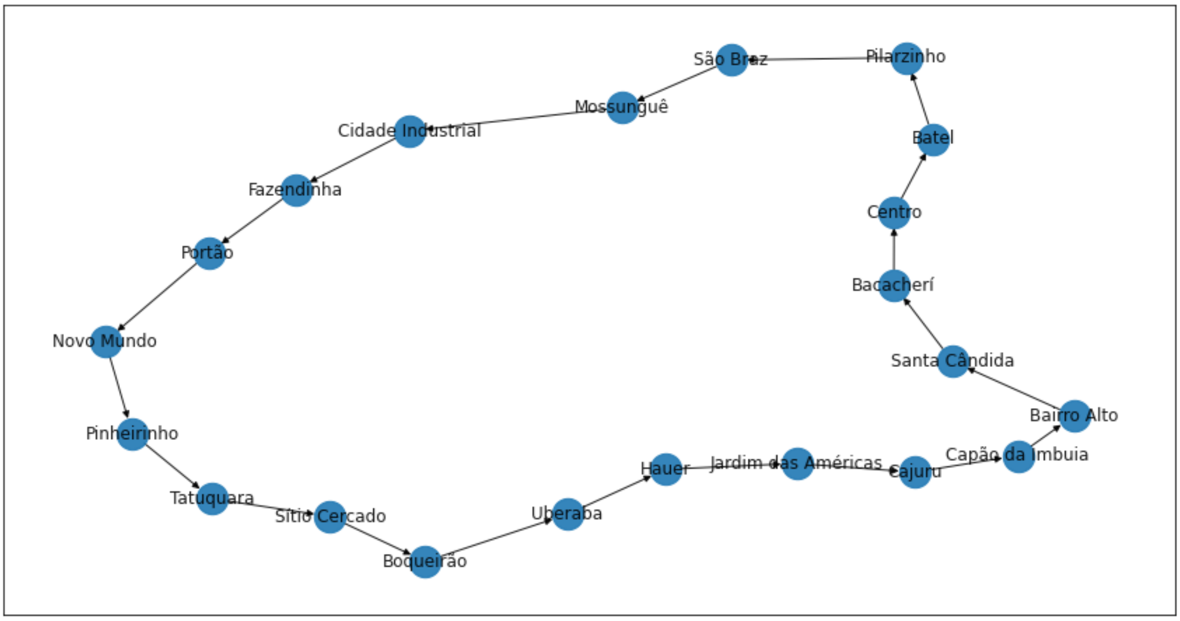
Resultados

In [33]:
```
result = pyo.SolverFactory('gurobi', solver_io="python").solve(modelo)
print(result)
```

```
Problem:
- Name: unknown
  Lower bound: 78.19744675610717
  Upper bound: 78.19744675610717
  Number of objectives: 1
  Number of constraints: 462
  Number of variables: 462
  Number of binary variables: 441
  Number of integer variables: 462
  Number of continuous variables: -441
  Number of nonzeros: 2040
  Sense: 1
  Number of solutions: 7
Solver:
- Name: Gurobi 9.11
  Status: ok
  Wallclock time: 0.15722393989562988
  Termination condition: optimal
  Termination message: Model was solved to optimality (subject to tolerances), and an optimal solution is available.
Solution:
- number of solutions: 0
  number of solutions displayed: 0
```

Visualização gráfica dos resultados

In [35]:
```
import matplotlib.pylab as plt
from matplotlib.pylab import rcParams
rcParams['figure.figsize'] = 15, 8
import networkx as nx

edges = []
l = list(modelo.x.keys())
for i in l:
    if modelo.x[i]() == 1.0:
        edges.append(i)

G = nx.DiGraph()
G.add_edges_from(edges)

pos = nx.spring_layout(G)
nx.draw_networkx(G, pos, width=1, linewidths=1, node_size=500, alpha=0.9, labels={node: df['Bairro'][node-1] for node
```



In [36]:
```
print("Função objetivo:", round(modelo.obj(),2))
```

```
Função objetivo: 78.2
```

---

9 Problema de Localização de Instalações Capacitadas

9.1 Modelo genérico

Conjuntos:

I: $\{1, 2 \ldots, m\}$,

J: $\{1, 2 \ldots, n\}$.

Parâmetros do modelo

d_{ij}: Distância do cliente i até a instalação j, $\forall i \in I, j \in J$,

c_i: Demanda na localização $i \in I$,

k_j: Capacidade da instalação na localização $j \in J$,

s_j: Custo para construir a instalação na localização $j \in J$,

B: Orçamento disponível para construção das instalações.

Variáveis de decisão

$$x_{ij}: \begin{cases} 1, & \text{se a demanda na localização } i \text{ é atendida pela instalação da localização } j, \quad \forall i \in I, j \in J \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$y_j: \begin{cases} 1, & \text{se a instalação } j \in J \text{ foi construída} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Formulação matemática

$$\min z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_i d_{ij} x_{ij}.$$

sujeito a

$$\sum_{j \in J} s_j y_j \leq B,$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in I,$$

$$\sum_{i \in I} c_i x_{ij} \leq k_j y_j, \quad \forall j \in J,$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, j \in J.$$

9.2 Aplicação Didática

[Adaptado de Loch, G., 2020] A prefeitura de Curitiba deseja replanejar sua rede escolas de ensino básico para melhor atender o novo padrão de demanda por bairro. Considerando o orçamento de $\text{R\$ } 12.000.000,00$, a primeira etapa do projeto consiste em um estudo para identificar o número e a localização ótima das escolas nos seus 21 bairros. Em um levantamento preliminar foram identificadas a demanda, o custo para construir a escola e a capacidade da escola, caso seja aberta, em cada um dos bairros, conforme a tabela abaixo. Formule um modelo matemático para minimizar a distância dos alunos até as escola.

Bairro	Longitude	Latitude	Demanda	Capacidade	Custo
Bacacherí	-49,2474748	-25,4018619	500	2298	1838400
Bairro Alto	-49,2268303	-25,4123155	904	2877	3740100
Batel	-49,297017	-25,4413611	685	1669	1669000
Boqueirão	-49,2529249	-25,5054148	968	2674	4011000
Cajuru	-49,2268961	-25,4613033	143	2722	2449800
Capão da Imbuia	-49,2260358	-25,4367121	418	2384	2860800
Centro	-49,2796458	-25,4321587	667	2088	2296800
Cidade Industrial	-49,3723223	-25,4573673	903	1123	1347600
Fazendinha	-49,3331065	-25,480968	815	1902	1902000
Hauer	-49,2609939	-25,4774216	606	2947	4125800
Jardim das Américas	-49,2377161	-25,4579512	259	1855	1669500
Mossunguê	-49,3420312	-25,4423293	309	2168	3035200
Novo Mundo	-49,3131946	-25,487748	403	2115	2749500
Pilarzinho	-49,3250216	-25,4018454	168	2126	3401600
Pinheirinho	-49,3104457	-25,5238141	815	2625	3412500
Portão	-49,3097647	-25,4720522	960	2170	1736000
Santa Cândida	-49,2470586	-25,3668842	755	1424	2278400
São Braz	-49,371206	-25,4119441	431	2148	2362800
Sítio Cercado	-49,2875541	-25,5440411	331	2115	232650

Bairro	Longitude	Latitude	Demanda	Capacidade	Custo
Tatuquara	-49,33638	-25,5606956	460	1746	1746000
Uberaba	-49,2330507	-25,4900129	728	1619	1295200

9.2.1 Resolução através do Gurobi e Pyomo

Leitura dos dados de entrada

In [37]:

```
import os
import pandas as pd

BASE_DIR = os.path.abspath(".")
DATA_DIR = os.path.join(BASE_DIR, 'data')
PRF_FILE = 'bairros_curitiba.csv'

df = pd.read_csv(os.path.join(DATA_DIR, PRF_FILE),  sep=';', decimal=',')
df.head()
```

Out[37]:

	Bairro	Longitude	Latitude	Demanda	Capacidade	Custo
0	Bacacherí	-49.247475	-25.401862	500	2298	1838400
1	Bairro Alto	-49.226830	-25.412315	904	2877	3740100
2	Batel	-49.297017	-25.441361	685	1669	1669000
3	Boqueirão	-49.252925	-25.505415	968	2674	4011000
4	Cajuru	-49.226896	-25.461303	143	2722	2449800

In [38]:

```
df.describe()
```

Out[38]:

	Longitude	Latitude	Demanda	Capacidade	Custo
count	21.000000	21.000000	21.000000	21.000000	2.100000e+01
mean	-49.287461	-25.460295	582.285714	2133.095238	2.388602e+06
std	0.048269	0.048939	263.263963	473.088354	9.921696e+05
min	-49.372322	-25.560696	143.000000	1123.000000	2.326500e+05
25%	-49.325022	-25.487748	403.000000	1855.000000	1.736000e+06
50%	-49.287554	-25.457951	606.000000	2126.000000	2.296800e+06
75%	-49.247059	-25.432159	815.000000	2384.000000	3.035200e+06
max	-49.226036	-25.366884	968.000000	2947.000000	4.125800e+06

Construção da matriz de distâncias e definição do orçamento disponível

In [39]:

```
import numpy as np
from haversine import haversine_vector, Unit

dij = df[['Latitude', 'Longitude']]
dij = [tuple(x) for x in dij.to_numpy()]
dij = haversine_vector(dij, dij, Unit.KILOMETERS, comb=True)

n = len(dij)

B = 12000000
```

Declaração do modelo computacional

In [41]:

```
import pyomo.environ as pyo

modelo = pyo.ConcreteModel()

# Conjuntos:
modelo.I = pyo.RangeSet(n)
modelo.J = pyo.RangeSet(n)

# Parâmetros:
modelo.d = pyo.Param(modelo.I, modelo.J, initialize=lambda modelo, i, j: dij[i-1][j-1])
modelo.c = pyo.Param(modelo.I, initialize=lambda modelo, i: df['Demanda'][i-1])
modelo.k = pyo.Param(modelo.J, initialize=lambda modelo, j: df['Capacidade'][j-1])
modelo.s = pyo.Param(modelo.J, initialize=lambda modelo, j: df['Custo'][j-1])

# Variáveis de decisão:
modelo.x = pyo.Var(modelo.I, modelo.J, within=pyo.Binary)
modelo.y = pyo.Var(modelo.I, within=pyo.Binary)

# Função objetivo:
def f_obj(modelo):
    return sum(modelo.c[i] * modelo.x[i,j] * modelo.d[i,j] for i in modelo.I for j in modelo.J)
modelo.obj = pyo.Objective(rule=f_obj, sense=pyo.minimize)
```

```
# Restrições:
modelo.restr_1 = pyo.Constraint(expr=sum(modelo.s[j] * modelo.y[j] for j in modelo.J) <= B)


modelo.restr_2 = pyo.ConstraintList()
for i in modelo.I:
    modelo.restr_2.add(sum(modelo.x[i,j] for j in modelo.J) == 1.0)

def f_restr3(modelo,j):
    return sum(modelo.c[i] * modelo.x[i,j] for i in modelo.I)<= modelo.k[j] * modelo.y[j]
modelo.restr_3 = pyo.Constraint(modelo.J, rule=f_restr3)
```

Solução

In [42]:

```
result = pyo.SolverFactory('gurobi', solver_io="python").solve(modelo)
print(result)
```

```
Problem:
- Name: unknown
  Lower bound: 26437.589005757978
  Upper bound: 26437.589005757978
  Number of objectives: 1
  Number of constraints: 43
  Number of variables: 462
  Number of binary variables: 462
  Number of integer variables: 462
  Number of continuous variables: -462
  Number of nonzeros: 924
  Sense: 1
  Number of solutions: 8
Solver:
- Name: Gurobi 9.11
  Status: ok
  Wallclock time: 0.041159868240356445
  Termination condition: optimal
  Termination message: Model was solved to optimality (subject to tolerances), and an optimal solution is available.
Solution:
- number of solutions: 0
  number of solutions displayed: 0
```

In [43]:

```
print("Bairros onde deverão ser construídas as escolas:")

list_y = list(modelo.y.keys())
[df['Bairro'][j-1] for j in list_y if modelo.y[j]() == 1]
```

```
Bairros onde deverão ser construídas as escolas:
```

Out[43]:

```
['Bacacherí',
 'Batel',
 'Cidade Industrial',
 'Fazendinha',
 'Jardim das Américas',
 'Portão',
 'Sítio Cercado',
 'Uberaba']
```

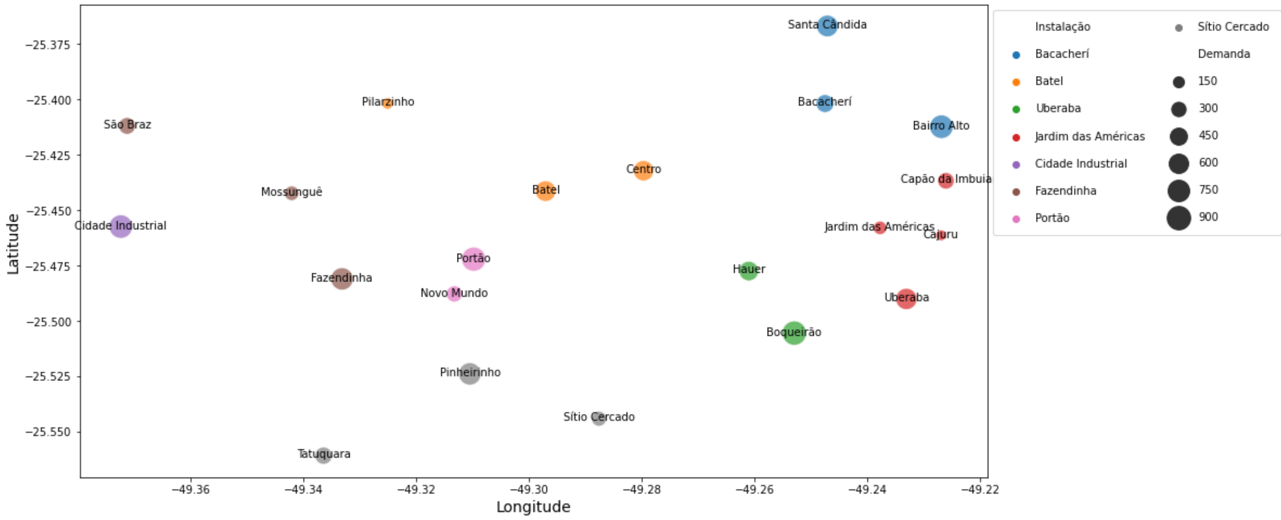
Visualização gráfica dos resultados

In [44]:

```
import pandas as pd
import matplotlib.pylab as plt
from matplotlib.pylab import rcParams
rcParams['figure.figsize'] = 15, 8
import seaborn as sns

list_x = list(modelo.x.keys())
alocacoes = [i for i in list_x if modelo.x[i]() == 1]
alocacoes.sort(key=lambda x:x[0])

df['Construir'] = [int(modelo.y[i]()) for i in list_y]
df['Instalação'] = [df['Bairro'][alocacao[1]-1] for alocacao in alocacoes]

b = sns.scatterplot(data=df, x="Longitude", y="Latitude", hue="Instalação", alpha=.7, size='Demanda',
                    sizes=(100,500), palette="tab10")

b.set_xlabel('Longitude', fontsize=14)
b.set_ylabel('Latitude', fontsize=14)

for index, row in df.iterrows():
    b.text(row['Longitude'], row['Latitude']-0.001, df['Bairro'][index], horizontalalignment='center')

plt.legend(bbox_to_anchor=(1, 1), loc=2, ncol=2, title_fontsize=14, labelspacing=1.5, borderpad=1.1)
```

Out[44]:

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x7fa999ddab20>
```



In [45]:
```
print("Função objetivo:", round(modelo.obj(),2))
```

```
Função objetivo: 26437.59
```

---

10 Problema das P-Medianas

10.1 Modelo genérico

Conjuntos

I: $\{1, 2 \ldots, m\}$,

J: $\{1, 2 \ldots, n\}$.

Parâmetros do modelo

h_i: Demanda no ponto $i \in I$,

d_{ij}: Distância entre o ponto de demanda $i \in I$ e a instalação do ponto $j \in J$,

$d_i^{\max}$: Distância máxima que um ponto de demanda $i \in I$ pode estar da instalação do ponto $j \in J$ ao qual foi alocado,

P: Número de instalações a serem construídas.

Variáveis de decisão

$$x_{ij}: \begin{cases} 1, & \text{se o ponto de demanda } i \in M \text{ é associado à instalação no ponto } j \in J \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$y_j: \begin{cases} 1, & \text{se a instalação é construída no ponto } j \in J \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Formulação matemática

$$\min z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} x_{ij}.$$

sujeito a

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I,$$

$$\sum_{j \in J} y_j = P,$$

$$x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in I, j \in J,$$

$$d_{ij} x_{ij} \leq d_i^{\max} \quad \forall i \in I, j \in J,$$

$$y_j, x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J.$$

10.2 Aplicação real

A Polícia Rodoviária Federal (PRF) é uma instituição criada em 1928 responsável por manter a segurança viária e prevenir o crime nas estradas e rodovias federais brasileiras. A PRF está presente em todos os estados brasileiros por meio de Superintendências Regionais (SPRF) divididas em delegacias que são responsáveis pela coordenação das unidades operacionais (UOP) localizadas nas estradas e rodovias. As UOPs são responsáveis por registrar os acidentes em seu entorno e designar um viatura até o local do acidente quando este ocorrer com vítimas, o que evidencia que a distância entre as UOPs e os locais dos acidentes interfere diretamente na necessidade de recursos públicos para compra de combustível, manutenção e compra de veículos, contratação de policiais, além de impactar no tempo de resposta, que é o tempo decorrido entre o recebimento de uma chamada e a chegada da viatura no local do acidente.

Com base nos acidentes registrados pela SPRF do Paraná nos últimos 4 anos, este estudo tem como objetivo propor a quantidade e a localização das UOPs no estado do Paraná, de modo a minimizar as distâncias entre as UOPs e os locais dos acidentes e, consequentemente, minimizar o uso de recursos públicos e o tempo de resposta nos chamados.

Este estudo está sendo conduzido por mim, sob a orientação do Prof. Gustavo Loch, e apresento aqui uma prévia que, para fins didáticos, considera arbitráriamente a construção de 45 UOPs.

10.2.1 Resolução através do Gurobi e Pyomo

Leitura dos dados de entrada

In [46]:
```
import os
import pandas as pd

BASE_DIR = os.path.abspath(".")
DATA_DIR = os.path.join(BASE_DIR, 'data')
PRF_FILE = 'acidentes_pr.csv'

df = pd.read_csv(os.path.join(DATA_DIR, PRF_FILE))
df.head()
```

Out[46]:

	municipio_id	municipio	latitude	longitude	acidentes	acidentes_mes	d_max
0	ADRIANOPOLIS 01	ADRIANOPOLIS	-24.8	-49.1	1	0.043269	160
1	ADRIANOPOLIS 02	ADRIANOPOLIS	-24.8	-49.0	3	0.097094	160
2	ALTO PARAISO 01	ALTO PARAISO	-23.4	-53.8	1	0.034144	160
3	ALTO PARANA 01	ALTO PARANA	-23.2	-52.3	17	0.401281	160
4	ALTO PARANA 02	ALTO PARANA	-23.1	-52.3	61	1.249060	80

In [47]:
```
df.describe()
```

Out[47]:

	latitude	longitude	acidentes	acidentes_mes	d_max
count	423.000000	423.000000	423.000000	423.000000	423.000000
mean	-24.895035	-51.472813	75.881797	1.569465	124.669031
std	0.935072	1.622178	153.476646	3.132772	50.204644
min	-26.600000	-54.600000	1.000000	0.021458	5.000000
25%	-25.600000	-52.800000	10.000000	0.229839	80.000000
50%	-25.200000	-51.300000	29.000000	0.639682	160.000000
75%	-24.200000	-50.200000	69.000000	1.428731	160.000000
max	-22.800000	-48.500000	1637.000000	33.429906	160.000000

Construção da matriz de distâncias e definição do parâmetro P

In [48]:
```
import numpy as np
from haversine import haversine_vector, Unit

dij = df[['latitude', 'longitude']]
dij = [tuple(x) for x in dij.to_numpy()]
dij = haversine_vector(dij, dij, Unit.KILOMETERS, comb=True)

P = 45
```

Declaração do modelo computacional

In [49]:
```
import pyomo.environ as pyo

modelo = pyo.ConcreteModel()

# Conjuntos:
modelo.M = range(len(dij))
modelo.N = range(len(dij))

# Parâmetros:
modelo.d = pyo.Param(modelo.M, modelo.N, initialize=lambda modelo, i, j: dij[i][j])
modelo.h = pyo.Param(modelo.M, initialize=lambda modelo, i: df['acidentes'][i])
modelo.Dmax = pyo.Param(modelo.M, initialize=lambda modelo, i: df['d_max'][i], mutable=True)
```

```
# Variáveis de decisão:
modelo.y = pyo.Var(modelo.N, within=pyo.Binary)
modelo.x = pyo.Var(modelo.M, modelo.N, within=pyo.Binary)

# Função objetivo:
def f_obj(modelo):
    return sum(modelo.h[i] * modelo.x[i,j] * modelo.d[i,j] for i in modelo.M for j in modelo.N)
modelo.obj = pyo.Objective(rule=f_obj, sense=pyo.minimize)

# Restrições:

modelo.restr_1 = pyo.ConstraintList()
for i in modelo.M:
    modelo.restr_1.add(sum(modelo.x[i,j] for j in modelo.N) == 1.0)

modelo.restr_2 = pyo.Constraint(expr=sum(modelo.y[j] for j in modelo.N) == P)

modelo.restr_3 = pyo.ConstraintList()
for i in modelo.M:
    for j in modelo.N:
        modelo.restr_3.add(modelo.x[i,j] <= modelo.y[j])

modelo.restr_4 = pyo.ConstraintList()
for i in modelo.M:
    for j in modelo.N:
        modelo.restr_4.add(modelo.d[i,j] * modelo.x[i,j] <= modelo.Dmax[i])
```

Solução

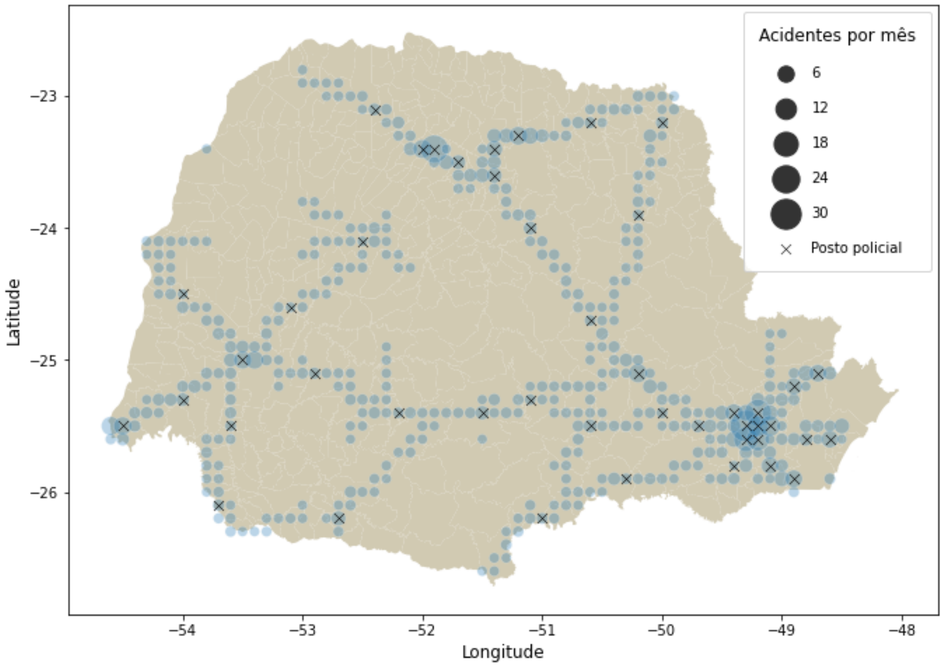
In [50]:
```
result = pyo.SolverFactory('gurobi', solver_io="python").solve(modelo)
print(result)
```

```
Problem:
- Name: unknown
  Lower bound: 297093.7552793517
  Upper bound: 297093.7552793517
  Number of objectives: 1
  Number of constraints: 358282
  Number of variables: 179352
  Number of binary variables: 179352
  Number of integer variables: 179352
  Number of continuous variables: -179352
  Number of nonzeros: 715716
  Sense: 1
  Number of solutions: 4
Solver:
- Name: Gurobi 9.11
  Status: ok
  Wallclock time: 1.23319411277771
  Termination condition: optimal
  Termination message: Model was solved to optimality (subject to tolerances), and an optimal solution is available.
Solution:
- number of solutions: 0
  number of solutions displayed: 0
```

Visualização gráfica dos resultados

In [51]:
```
tuplas_alocacoes = [x for x in list(modelo.x.keys()) if modelo.x[x]() == 1]
tuplas_alocacoes.sort(key=lambda x:x[0])
df['y'] = [modelo.y[j]() for j in list(modelo.y.keys())]
df['idx_origem'] = [tupla[0] for tupla in tuplas_alocacoes]
df['idx_mediana'] = [tupla[1] for tupla in tuplas_alocacoes]
df['nome_mediana'] = [df['municipio_id'][idx] for idx in df['idx_mediana']]

df_medians = df[df['y'] == 1].copy()
```

In [52]:
```
import geopandas as gpd
import matplotlib.pylab as plt
from matplotlib.pylab import rcParams
import seaborn as sns

MAP_DIR = os.path.join(BASE_DIR, 'ibge')
SHAPE_FILE = 'PR_Municipios_2019.shp'
df_shape = gpd.read_file(os.path.join(MAP_DIR, SHAPE_FILE))

fig, ax = plt.subplots(figsize=(15,8))
df_shape.plot(ax = ax, color = '#d1cab2')

b = sns.scatterplot(data=df, x='longitude', y='latitude', size='acidentes_mes', sizes=(50,500), alpha=0.3)
sns.scatterplot(data=df_medians, x='longitude', y='latitude', s=50, marker="x", color="black",
                label='Posto policial')

b.set_xlabel('Longitude',fontsize=12)
b.set_ylabel('Latitude',fontsize=12)

plt.legend(title='Acidentes por mês', title_fontsize=12, labelspacing=1.5, borderpad=1.1)

plt.show()
```



11 - Discussão sobre GAP e solução factível inicial

Seja P o modelo primal de um determinado problema:

$\max z = f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^t\mathbf{x}$

sujeito a

$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$

$\mathbf{x} \geq 0$

E D o seu respectivo modelo dual:

$\min w = g(\mathbf{u}) = \mathbf{b}^t\mathbf{u}$

sujeito a

$\mathbf{A}^t\mathbf{u} \geq \mathbf{c}$

$\mathbf{u} \geq 0$

Considerando $\mathbf{x}$ uma solução factível de P e $\mathbf{u}$ uma solução factível de D, $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{u})$. Esta afirmação é fundamentada no Teorema Fraco da Dualidade.

Considerado agora $\mathbf{x}^*$ uma solução factível de P e $\mathbf{u}^*$ uma solução factível de D, se $f(\mathbf{x}^*) = g(\mathbf{u}^*)$, então $\mathbf{x}^*$ é a solução ótima de P e $\mathbf{u}^*$ é a solução ótima de D, afirmação fundamentada no Teorema Forte da Dualidade, que garante que se P possui uma solução ótima, D também possui.

A diferença percentual entre $f(\mathbf{x})$ e $g(\mathbf{u})$, dado que $\mathbf{x}$ uma solução factível de P e $\mathbf{u}$ uma solução factível de D, é conhecida como GAP, que em outras palavras, é uma estimativa do quão longe a solução factível atual está da solução ótima. Quando o GAP e igual a 0, significa que foi encontrada a solução ótima tanto do modelo primal quanto do dual.

O Teorema da Folga Complementar permite através da resolução de um dos problemas (primal ou dual), obter a resolução do outro, tornando possível escolher o problema menos complexo para aplicar o método de resolução e com isto economizar tempo computacional.

São comuns casos onde o SIMPLEX realiza uma série de iterações até chegar na região factível do problema. Dependendo do tamanho do problema e das particularidades de sua aplicação, estas iterações podem representar um custo computacional expressivo. Existem métodos para se obter uma solução factível inicial, que podem ser usados com a intenção de eliminar estas iterações fora da região factível. Entretanto, a aplicação destes métodos deve ser analisada quanto ao custo computacional. No problema do transporte, por exemplo, é comum utilizar métodos como o do Canto Noroeste, Custo Mínimo e Vogel para se obter uma solução factível inicial. Geralmente o primeiro método, com o menor custo computacional, encontra uma solução factível inicial mais longe da solução ótima do que o último, que possui maior custo computacional, ficando por conta do pesquisador avaliar por todos os ângulos o cenário e decidir quando utilizar cada um dos métodos.

Em resumo, a vantagem de se utilizar um método para obter uma solução factível inicial melhor é a redução de iterações até a solução ótima e a desvantagem é a possibilidade do custo computacional deste método não compensar.

12 - Referências

ARENALES, M. et al. Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia. Elsevier Brasil, 2007.

BELFIORE, P.; FÁVERO, L. P. Pesquisa Operacional para Cursos de Engenharia. Elsevier Brasil, 2013.

LOCH, G. V. Problema das p-Medianas utilizando C# e Gurobi. 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=dk0LHa_UVKc&list=PLTv9E12xrX8Om5Brh3PDXA_XN7amnS8Lc. Acesso em: 25 de mai. 2021.

WOCHE, C. Modelagem e Resolução do Problema do Caixeiro Viajante com Python e Pyomo. 2020. Disponível em: http://www.opl.ufc.br/pt/post/tsp/. Acesso em: 27 de mai. 2021.