UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
FACULDADE DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

P1 Gabarito
FEN03-05100 – Período 2020/1

Prof.: José da Rocha Miranda Pontes
Mestrandos: Daniel Lessa Coelho e Luís Henrique Carnevale

Trabalho

A. Sistema massa-mola-amortecedor

(a) Construa os métodos de Euler explícito (de primeira ordem) e de Crank-Nicolson (de segunda ordem);

(i) Utilizando o método de Euler explícito:

$$\begin{aligned}\frac{x^{n+1}-x^n}{\Delta t} &= v^n \\ \frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t} &= -\left(\frac{c}{m}\right)v^n - \left(\frac{k}{m}\right)x^n \,.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}x^{n+1} &= x^n + \Delta t\, v^n \\ v^{n+1} &= \left[1 - \Delta t\left(\frac{c}{m}\right)\right]v^n - \Delta t\left(\frac{k}{m}\right)x^n \,.\end{aligned}$$

(ii) Utilizando o método de Crank-Nicolson:

$$\begin{aligned}\frac{x^{n+1}-x^n}{\Delta t} &= \frac{v^{n+1}-v^n}{2} \\ \frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t} &= -\left(\frac{c}{m}\right)\frac{v^{n+1}-v^n}{2} - \left(\frac{k}{m}\right)\frac{x^{n+1}-x^n}{2} \,.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}x^{n+1} &= x^n + \frac{\Delta t}{2}\left(v^{n+1}-v^n\right) \\ \left(1+\Delta t\frac{c}{2m}\right)v^{n+1} &= \left(1-\Delta t\frac{c}{2m}\right)v^n - \Delta t\left(\frac{k}{2m}\right)\left(x^{n+1}-x^n\right) \,.\end{aligned}$$

Como ambas as equações estão acopladas, será necessária uma rotina de iterações internas com as seguintes equações,

$$x^{n+1,p+1} = x^n + \frac{\Delta t}{2}\left(v^{n+1,p} - v^n\right)$$
$$\left(1 + \Delta t\frac{c}{2m}\right) v^{n+1,p+1} = \left(1 - \Delta t\frac{c}{2m}\right) v^n - \Delta t\left(\frac{k}{2m}\right)\left(x^{n+1,p} - x^n\right)\ ,$$

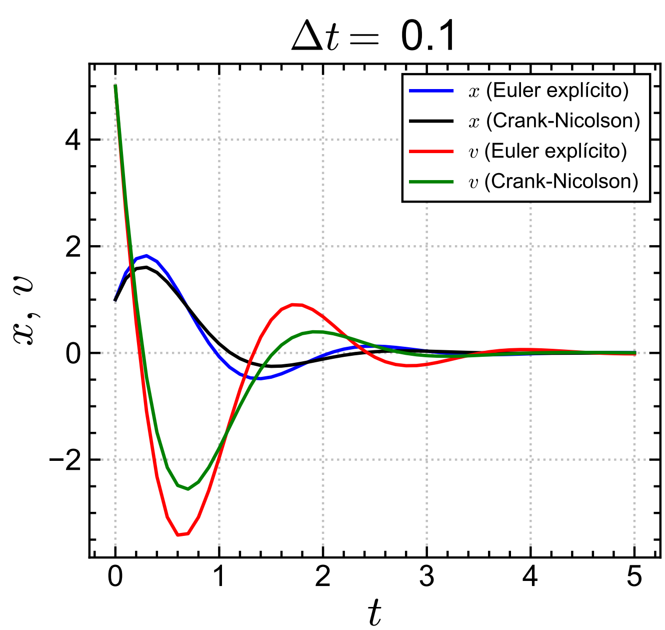
para garantir que $x^{n+1,p+1} \equiv x^{n+1,p}$ e $v^{n+1,p+1} \equiv v^{n+1,p}$. Para isso, definimos as seguintes normas que servem como critério de convergência:

$$L_\infty, x = \frac{|x^{n+1,p+1} - x^{n+1,p}|}{|x^{n+1,p+1}|}$$
$$L_\infty, v = \frac{|v^{n+1,p+1} - v^{n+1,p}|}{|v^{n+1,p+1}|}$$

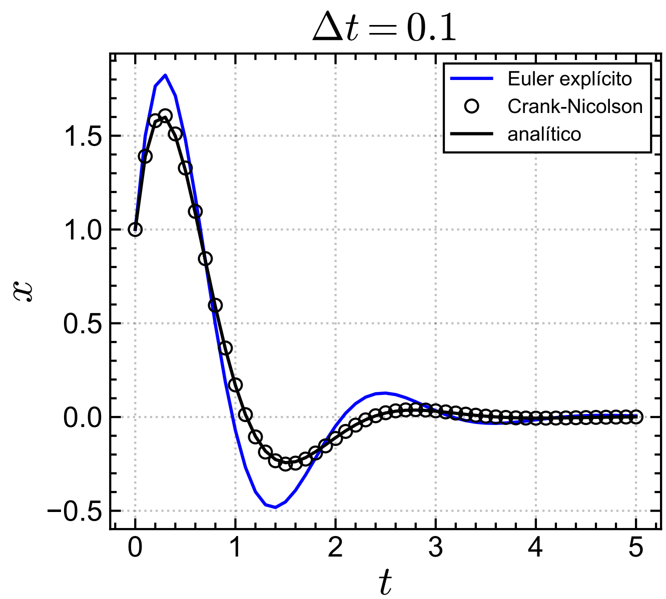
Quando $L_\infty, x \leqslant \varepsilon$ e $L_\infty, v \leqslant \varepsilon$, as iterações param e os resultados para $x^{n+1,p+1}$ e $v^{n+1,p+1}$ são salvos. Assumimos $\varepsilon = 10^{-10}$, que é uma precisão arbitrária.

(b) Faça um código em *PYTHON* para implementar ambos os métodos acima, **plotando** as soluções numéricas de $x(t)$ e $v(t)$ em um gráfico $x \times t$ e $v \times t$ (considerar $\Delta t = 10^{-1}$);

[CÓDIGO EM ANEXO]



(c) Compare qualitativamente a solução numérica com a solução analítica de $x(t)$ através de um gráfico $x \times t$ (considerar $\Delta t = 10^{-1}$);



(d) Calcule a norma L_2 do erro entre a solução numérica e a solução analítica para $\Delta t = 10^{-1}$, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4} e 10^{-5}, utilizando AMBOS os métodos. **Plote** os resultados de convergência obtidos e **compare** o comportamento dos erros com as curvas de $\mathcal{O}(\Delta t)$ e $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ em um gráfico $\log(L_2) \times \log(\Delta t)$.

Utilizando a seguinte norma,

$$L_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} |x - x^*|}{\sum_{i=1}^{N} |x^*|}$$

sendo x a solução numérica e x^* a solução analítica dada no enunciado, obtemos o seguinte gráfico: