

# P1 Gabarito

## FEN03-05100 – Período 2020/1

Prof.: José da Rocha Miranda Pontes

Mestrandos: Daniel Lessa Coelho e Luís Henrique Carnevale

### Trabalho

#### A. Sistema massa-mola-amortecedor

(a) **Construa** os métodos de Euler explícito (de primeira ordem) e de Crank-Nicolson (de segunda ordem);

(i) Utilizando o método de Euler explícito:

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = v^n$$
$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = -\left(\frac{c}{m}\right)v^n - \left(\frac{k}{m}\right)x^n.$$

Logo,

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t v^n$$
$$v^{n+1} = \left[1 - \Delta t \left(\frac{c}{m}\right)\right] v^n - \Delta t \left(\frac{k}{m}\right) x^n.$$

(ii) Utilizando o método de Crank-Nicolson:

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\Delta t} = \frac{v^{n+1} - v^n}{2}$$
$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = -\left(\frac{c}{m}\right) \frac{v^{n+1} - v^n}{2} - \left(\frac{k}{m}\right) \frac{x^{n+1} - x^n}{2}.$$

Logo,

$$x^{n+1} = x^n + \frac{\Delta t}{2} (v^{n+1} - v^n)$$
$$\left(1 + \Delta t \frac{c}{2m}\right) v^{n+1} = \left(1 - \Delta t \frac{c}{2m}\right) v^n - \Delta t \left(\frac{k}{2m}\right) (x^{n+1} - x^n).$$

Como ambas as equações estão acopladas, será necessária uma rotina de iterações internas com as seguintes equações,

$$x^{n+1,p+1} = x^n + \frac{\Delta t}{2} (v^{n+1,p} - v^n)$$

$$\left(1 + \Delta t \frac{c}{2m}\right) v^{n+1,p+1} = \left(1 - \Delta t \frac{c}{2m}\right) v^n - \Delta t \left(\frac{k}{2m}\right) (x^{n+1,p} - x^n),$$

para garantir que  $x^{n+1,p+1} \equiv x^{n+1,p}$  e  $v^{n+1,p+1} \equiv v^{n+1,p}$ . Para isso, definimos as seguintes normas que servem como critério de convergência:

$$L_{\infty, x} = \frac{|x^{n+1,p+1} - x^{n+1,p}|}{|x^{n+1,p+1}|}$$

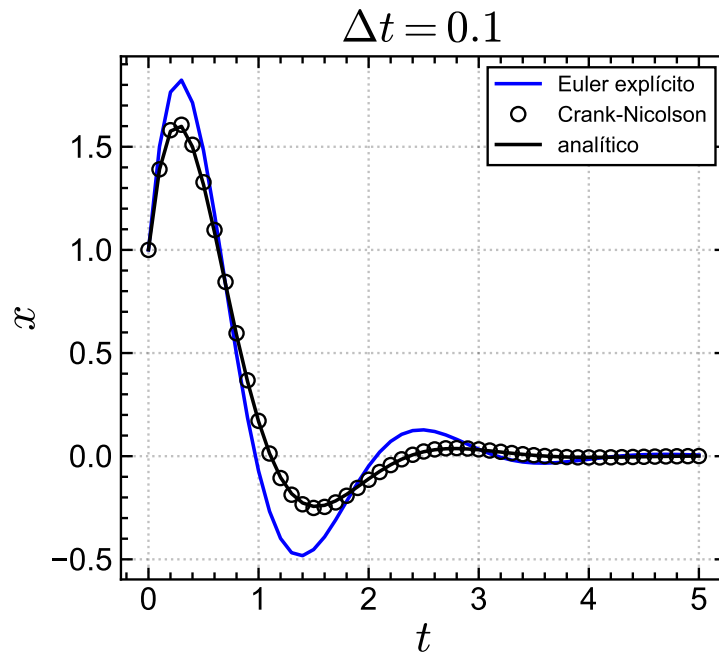
$$L_{\infty, v} = \frac{|v^{n+1,p+1} - v^{n+1,p}|}{|v^{n+1,p+1}|}$$

Quando  $L_{\infty, x} \leq \varepsilon$  e  $L_{\infty, v} \leq \varepsilon$ , as iterações param e os resultados para  $x^{n+1,p+1}$  e  $v^{n+1,p+1}$  são salvos. Assumimos  $\varepsilon = 10^{-10}$ , que é uma precisão arbitrária.

**(b) Faça** um código em *PYTHON* para implementar ambos os métodos acima, **plotando** as soluções numéricas de  $x(t)$  e  $v(t)$  em um gráfico  $x \times t$  e  $v \times t$  (considerar  $\Delta t = 10^{-1}$ );

[EM ANEXO]

**(c) Compare** qualitativamente a solução numérica com a solução analítica de  $x(t)$  através de um gráfico  $x \times t$  (considerar  $\Delta t = 10^{-1}$ );



(d) **Calcule** a norma  $L_2$  do erro entre a solução numérica e a solução analítica para  $\Delta t = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  e  $10^{-5}$ , utilizando AMBOS os métodos. **Plote** os resultados de convergência obtidos e **compare** o comportamento dos erros com as curvas de  $O(\Delta t)$  e  $O(\Delta t^2)$  em um gráfico  $\log(L_2) \times \log(\Delta t)$ .

Utilizando a seguinte norma,

$$L_1 = \frac{\sum_{i=1}^N |x - x^*|}{\sum_{i=1}^N |x^*|}$$

sendo  $x$  a solução numérica e  $x^*$  a solução analítica dada no enunciado, obtemos o seguinte gráfico:

