

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

---

### Función Característica y Función Generadora de Momentos

---

#### Integrantes:

Cariño Díaz David  
Márquez Sánchez Moisés  
Martínez Romualdo Valeria  
Mondragón Miranda Néstor Yair  
Reyes Cruz Alejandro  
Torres Bustamante Dulce Jhoana

23 de junio de 2024

Variable Aleatoria	Función generadora $M_X(t)$	Función característica $\phi_X(t)$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{E}[X^2]$
Uniforme Discreta	$\sum_{i=1}^n e^{tx_i}$	$\hat{\theta} = \psi$	$\frac{x_n + x_1}{2}$	2
Bernoulli	$1 + p(e^t - 1)$	$1 - p + pe^{it}$	$p$	$p$
Binomial	$(1 - p + pe^t)^n$	$(1 - p + pe^{iu})^n$	$np$	$(np)^2 + np(1 - p)$
Binomial Negativa	$p^r (e^{-t} - (1 - p))^{-r}$	$p^r (e^{-it} - (1 - p))^{-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Hipergeométrica	No hay forma cerrada	$\hat{\theta} = \psi$	$\frac{nm}{N}$	2
Geométrica	$\left(\frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}\right)$	$\left(\frac{pe^{it}}{1 - (1-p)e^{it}}\right)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$
Poisson	$e^{-\lambda(1-e^t)}$	$\hat{\theta} = \psi$	$\lambda$	2
Uniforme Continua	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$	$\frac{e^{bit} - e^{ait}}{ti(b-a)}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}$
Exponencial	$\frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$	$\frac{1}{\lambda}$	2
Normal	$\exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$	$\exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$	1	2

## Uniforme Discreta

Sea  $X$  una variable aleatoria discreta que puede tomar  $n$  valores diferentes  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Si la misma probabilidad de cada valor es igual, entonces  $X$  se dice que sigue una distribución uniforme discreta. Esto se puede expresar matemáticamente como:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n$$

Para una variable aleatoria  $X$  con distribución uniforme discreta sobre  $\{a, a+1, \dots, b\}$ , la función característica se calcula de la siguiente manera:

Notemos que si  $X$  es uniformemente distribuida en  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , donde  $X_i$  son los valores posibles y todos son igualmente probables, entonces la función característica está dada por:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=1}^n P(X = x_k) e^{itx_k}$$

Dado que  $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$  para todos  $k$ , esto se puede simplificar a:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{itx_k}$$

### Función generadora de momentos

La función generadora de momentos  $M_X(t)$  de una variable aleatoria  $X$  está dada por:

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

Para la distribución uniforme discreta:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{i=1}^n e^{tx_i} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n e^{tx_i} \cdot \frac{1}{n}$$

Por lo tanto:

$$M_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{tx_i}$$

Conociendo la v.a. sabemos que su esperanza y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{X_n + x_1}{2} \quad y, \quad \text{Var}(X) = \frac{(x_n - x_1 + 1)^2 - 1}{12}$$

De aquí podemos obtener el valor de  $\mathbb{E}[X^2]$ , puesto que  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ . Entonces:

$$\mathbb{E}[X^2] = \text{Var}(X) + \mathbb{E}[X]^2 = \frac{(x_n - x_1 + 1)^2 - 1}{12} + \left(\frac{X_n + x_1}{2}\right)^2$$

*Por lo tanto Primer Momento (Esperanza) Para encontrar la esperanza*

$\mathbb{E}[X]$ , derivamos  $M_X(t)$  respecto a  $t$  y luego evaluamos en  $t = 0$ .

$$M_{X'}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i e^{tx_i}$$

Evaluamos en  $t = 0$ :

$$M_{X'}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Por lo tanto:

$$E[X] = M_{X'}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Esto muestra que la derivada de la FGM en  $t = 0$  nos da directamente la esperanza de  $X$

**Segundo Momento (Esperanza  $X^2$ )**

Para obtener el segundo momento  $E[X^2]$ , derivamos  $M_X(t)$  dos veces respecto a  $t$  y luego evaluamos en  $t = 0$ :

$$M_{X''}(t) = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{tx_i} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 e^{tx_i}$$

Evaluamos en  $t = 0$ :

$$M_{X''}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Entonces:

$$E[X^2] = M_{X''}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Esto muestra que la segunda derivada de la FGM en  $t = 0$  nos da directamente el segundo momento de  $X$ .

**Varianza**

Una vez que tenemos  $E[X]$  y  $E[X^2]$ , podemos calcular la varianza  $\text{Var}(X)$ :

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

## Bernoulli

Una variable aleatoria discreta  $X$  sigue una distribución Bernoulli con parámetro  $p$  (donde  $0 \leq p \leq 1$ ) si toma el valor 1 con probabilidad  $p$  y el valor 0 con probabilidad  $1 - p$ . Matemáticamente:

$$\begin{aligned}P(X = 1) &= p \\P(X = 0) &= 1 - p\end{aligned}$$

### Función característica

La función característica de una variable aleatoria  $X$  es definida como:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Para una variable aleatoria Bernoulli, la función característica se calcula sumando las contribuciones de cada valor posible de  $X$  ponderadas por sus probabilidades:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{it \cdot 0}(1 - p) + e^{it \cdot 1}p \\ \varphi_X(t) &= 1 \cdot (1 - p) + e^{it} \cdot p\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\varphi_X(t) = 1 - p + pe^{it}$$

### Función generadora de momentos

La función generadora de momentos de una variable aleatoria  $X$  se define como:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Para una variable aleatoria Bernoulli:

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{t \cdot 0}(1 - p) + e^{t \cdot 1}p \\ M_X(t) &= 1 \cdot (1 - p) + e^t \cdot p\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$M_X(t) = 1 - p + pe^t$$

### Primer momento (Esperanza)

Para calcular el primer momento de una variable aleatoria Bernoulli, usamos la FGM derivándola con respecto a  $t$  y posteriormente evaluando  $t = 0$

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt} (1 - p + pe^t) = pe^t$$

Evaluamos la derivada en  $t = 0$ :

$$M'_X(0) = p \cdot e^0 = p \cdot 1 = p$$

Por lo tanto, el primer momento (esperanza) de la variable aleatoria Bernoulli  $X$  es:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = p$$

## Segundo Momento

Para calcular el segundo momento de la variable aleatoria Bernoulli, obtenemos la segunda derivada de la FGM

$$M_X''(t) = \frac{d}{dt} (pe^t) = pe^t$$

Evaluamos la segunda derivada en  $t = 0$ :

$$M_X''(0) = p \cdot e^0 = p \cdot 1 = p$$

Por lo tanto, el segundo momento de la variable aleatoria Bernoulli  $X$  es:

$$\mathbb{E}[X^2] = M_X''(0) = p$$

## Varianza

La varianza de una variable aleatoria  $X$  se define como  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$   
Para una variable aleatoria bernoulli:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= p - p^2 \\ \text{Var}(X) &= p(1 - p)\end{aligned}$$

## Binomial Negativa

$$X \sim BN(p, r) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} & \text{si} \\ x \in \{r, r+1, \dots\} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Sabemos lo siguiente de esta distribución

$$\mathbb{E}[X] = \frac{r}{p}$$

Y

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{r(1-p)}{p}$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{r(1-p)}{p^2} + \frac{r^2}{p^2} = \frac{r}{p^2} [1 - p + r]$$

## Función generadora de momentos

### Primer momento

$$\text{Si } X \sim BN(p, r) \Rightarrow M_X(t) = p^r (e^{-t} - (1-p))^{-r}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}M_X^{(1)} &= -r \cdot p^r (e^{-t} - (1-p))^{-r-1} \times (-e^{-t}) \\ &= r \cdot p^r (e^{-t} - (1-p))^{-(r+1)} (e^{-t})\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$M_X^{(1)}(0) = r \cdot p^r (1 + p - 1)^{-(r+1)} = \frac{r \cdot p^r}{p^{r+1}} = \frac{r}{p} = \mathbb{E}[X]$$

$$\therefore M_X^{(1)}(0) = \mathbb{E}[X]$$

## Segundo momento

Ahora probaremos que la segunda derivada de la función generadora de momentos evaluada en 0, es igual al segundo momento de la variable aleatoria.

$$\begin{aligned}
 M_X^{(1)}(t) &= r \cdot p^r (e^{-t} + p - 1) \cdot e^{-t} \\
 &\Rightarrow \\
 M_X^{(2)} &= r \cdot p^r [(-r - 1)(e^{-1} + p - 1)(-1)e^{-t}e^{-t} + (e^{-t} + p - 1)^{-r-1}(-1)e^{-t}] \\
 &= r \cdot p^r e^{-t} \left[ \frac{(r + 1)e^{-t}}{(e^{-t} + p - 1)^{r+2}} - \frac{1}{(e^{-t} + p - 1)^{r+1}} \right] \\
 &\Rightarrow \\
 M_X^{(2)}(0) &= r \cdot p^r \left[ \frac{r + 1}{p^{r+2}} - \frac{1}{p^{r+1}} \right] = \frac{r}{p^2} (r + 1 - p) = \mathbb{E}[X^2] \\
 \therefore M_X^{(2)}(0) &= \mathbb{E}[x^2]
 \end{aligned}$$

Ahora usaremos una propiedad parecida, pero de la función característica. Es este caso, como  $X \sim BN(r, p)$ , entonces sabemos que su función característica tiene la siguiente forma:

$$\phi_X(t) = p^r (e^{-it} - (1 - p))^{-r}$$

Ahora buscamos mostrar que  $\phi_X^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}[X^n]$ , en particular para los dos primeros momentos, es decir, buscamos mostrar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \phi_X^{(1)}(0) &= i^2 \mathbb{E}[X] = \frac{i \cdot r}{p} \\
 &\quad \text{Y} \\
 \phi_X^{(2)}(0) &= i \mathbb{E}[X^2] = \frac{i^2 \cdot r}{p^2} [r + 1 - p]
 \end{aligned}$$

Comenzamos derivando la función característica de esta distribución

$$\begin{aligned}
 \phi_X^{(1)}(t) &= p^r (-r)(e^{-it} + p - 1)^{-r-1} \cdot (-i)e^{-it} \\
 &= p^r \cdot i \cdot r \cdot e^{-it} (e^{-it} + p - 1)^{-r-1} \\
 &\Rightarrow \\
 \phi_X^{(1)}(0) &= p^r \cdot i \cdot r (1 + p - 1)^{-r-1} = \frac{i \cdot p^r \cdot r}{p^{r+1}} = \frac{i \cdot r}{p} = i \cdot \mathbb{E}[X] \\
 \therefore \phi_X^{(0)}(0) &= i \cdot \mathbb{E}[X]
 \end{aligned}$$

Ahora derivamos nuevamente para mostrar que la segunda derivada de la función característica evaluada en  $t = 0$  es igual al segundo momento multiplicado por el cuadrado de el número imaginario  $i = \sqrt{-1}$

$$\begin{aligned}
 \phi_X^{(2)}(t) &= \frac{d}{dt} \left( p^r \cdot i \cdot r \cdot e^{-it} (e^{-it} + p - 1)^{-r-1} \right) \\
 &= p^r \cdot i \cdot r \cdot \frac{d}{dt} \left( e^{-it} (e^{-it} + p - 1)^{-r-1} \right) \\
 &= p^r \cdot i \cdot r \cdot \left[ (-r - 1)(e^{-it} + p - 1)^{-r-2}(-i)e^{-it}e^{-it} + (e^{-it} + p - 1)^{-r-1}(-i)e^{-it} \right] \\
 &= p^r \cdot i^2 \cdot r \cdot e^{-it} \left[ (r + 1)(e^{-it} + p - 1)^{-r-2}e^{-it} - (e^{-it} + p - 1)^{-r-1} \right] \\
 &= p^r i^2 r \cdot e^{-it} \left[ \frac{r + 1}{(e^{-it} + p - 1)^{r+2}} - \frac{1}{(e^{-it} + p - 1)^{r+1}} \right] \\
 &\Rightarrow \\
 \phi_X^{(2)}(0) &= i^2 p^r r \left[ \frac{r + 1}{p^{r+2}} - \frac{1}{p^{r+1}} \right] = i^2 r \left[ \frac{r + 1}{p^2} - \frac{p}{p^2} \right] = \frac{i^2 \cdot r}{p^2} [r + 1 - p] = i^2 \cdot \mathbb{E}[X^2] \\
 \therefore \phi_X^{(2)}(0) &= i^2 \mathbb{E}[X^2]
 \end{aligned}$$

## Uniforme Continúa

Sean  $a, b$  dos números reales tales que  $a < b$ , y  $X$  una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces la función de densidad de esta variable aleatoria tiene la siguiente forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

## Función generadora de momentos

Entonces podemos calcular su función generadora de momentos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot e^{tx} dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot e^{tx} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left( \frac{e^{tx}}{t} \Big|_a^b \right) \\ &= \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} \end{aligned}$$

Como puede verse, la función generadora de momentos  $M_X(t)$  tiene a  $t$  en el cociente, por lo que no está definida sobre  $t = 0$ , y dado que el soporte de la derivada de una función es subconjunto del soporte de la función original, sabemos que  $M_X^{(n)}(t)$  tampoco está definida sobre  $t = 0$  para cualquier  $n$  entero positivo.

## Función característica

Análogamente la función característica de esta distribución es la siguiente:

$$\Phi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

La cual, igual que la generadora de momentos, no está definida sobre  $t = 0$ , ni ninguna de sus derivadas.

Aunque es fácil encontrar una función para calcular el  $n$ -ésimo momento de esta variable aleatoria.

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_a^b \frac{1}{b-a} \cdot x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}$$

Aunque la función generadora de momentos no está definida en  $t = 0$ , nos fijamos en como se comporta cuando  $t \rightarrow 0$

Primero nos fijamos en las primeras dos derivadas de  $M_X(t)$ , es decir, calculamos  $M_X^{(1)}(t)$  y  $M_X^{(2)}(t)$

$$\begin{aligned} M_X^{(1)}(t) &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \right] = \frac{e^{tb}(tb-1) + e^{ta}(1-ta)}{t^2(b-a)} \\ &\quad \text{Y} \\ M_X^{(2)}(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \left[ \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} \right] = \frac{e^{at}(a^2t^2 + 2) - e^{tb}(b^2t^2 - 2bt + 2)}{t^3(b-a)} \end{aligned}$$

Ambas funciones no están definidas en el  $t = 0$ , y al tratar de evaluarlas en este, se obtiene una indeterminación de la forma  $\frac{0}{0}$ , por lo que podemos usar la regla de L'Hôpital (dos y tres veces respectivamente) para calcular el límite de la función cuando  $t$  tiende a 0, es decir:

### Primer momento

Veremos a la función generadora de momentos como un cociente de funciones, y dado que ambas valen 0 al evaluarlas en  $t = 0$ , podemos calcular el límite de la función como el cociente de las derivadas de las funciones. Es decir:

$$M_X^{(1)}(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} M_X^{(1)}(t) = \frac{\frac{d^2}{dt^2}[f(t)] \Big|_0}{\frac{d^2}{dt^2}[g(t)] \Big|_0} = \frac{e^{at}[-ta^3 - a^2] + e^{bt}[tb^3 + b^2] \Big|_0}{2(b-a)} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} = \mathbb{E}[X]$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} M_X^{(1)}(t) = \mathbb{E}[X]$$

### Segundo momento

Y análogamente aplicamos esto para calcular el segundo momento de una variable aleatoria con esta distribución de la siguiente forma:

$$\lim_{t \rightarrow 0} M_X^{(2)}(t) = \frac{\frac{d^3}{dt^3}[f(t)] \Big|_0}{\frac{d^3}{dt^3}[g(t)] \Big|_0} = \frac{a^3 e^{at}(a^2 t^2 + 4at + 2) - b^3 e^{bt}(b^2 t^2 + 4bt + 2) \Big|_0}{3 \cdot 2(b-a)} = \frac{a^3 - b^3}{3(b-a)} = \frac{(a^2 + b^2 + ab)(b-a)}{3(b-a)}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + ab}{3} = \mathbb{E}[X^2]$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} M_X^{(2)}(t) = \mathbb{E}[X^2]$$

## Binomial

Dada una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución binomial con parámetros  $n$  (número de ensayos) y  $p$  (probabilidad de éxito en cada ensayo), denotada como  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ , sabemos que:

- La esperanza (media)  $\mathbb{E}[X] = np$ .
- La función generadora de momentos (MGF) de  $X$  está dada por  $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$ .

Queremos demostrar que la esperanza es igual al primer momento derivado de la MGF.

### Función Generadora de Momentos (MGF)

La MGF de  $X$  es:

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n.$$

### Primer Momento

El primer momento es la derivada de la MGF evaluada en  $t = 0$ . Derivamos  $M_X(t)$  con respecto a  $t$ :

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt} ((1 - p + pe^t)^n).$$

Usamos la regla de la cadena para derivar:

$$M_X'(t) = n(1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot pe^t.$$



## Evaluando en $t = 0$

Evaluamos la derivada en  $t = 0$ :

$$M'_X(0) = n(1 - p + pe^0)^{n-1} \cdot pe^0 = n(1 - p + p)^{n-1} \cdot p = n \cdot p.$$

Por lo tanto, el primer momento (la derivada de la MGF en  $t = 0$ ) es igual a la esperanza (media) de la distribución binomial:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = np.$$

## El Segundo Momento es Igual a la Segunda Derivada de la MGF Evaluada en 0

Dada una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución binomial con parámetros  $n$  (número de ensayos) y  $p$  (probabilidad de éxito en cada ensayo), denotada como  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ , sabemos que:

- La varianza  $\text{Var}(X) = np(1 - p)$ .
- La esperanza  $\mathbb{E}[X] = np$ .
- La función generadora de momentos (MGF) de  $X$  está dada por  $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$ .

## Relación Entre la Varianza, la Esperanza y el Segundo Momento

La varianza de  $X$  puede ser expresada en términos de la esperanza y el segundo momento:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Despejando el segundo momento  $\mathbb{E}[X^2]$ :

$$\mathbb{E}[X^2] = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}[X])^2.$$

Sustituyendo la varianza y la esperanza:

$$\mathbb{E}[X^2] = np(1 - p) + (np)^2 = np(1 - p) + n^2p^2.$$

## Segunda Derivada de la MGF

La MGF de  $X$  es:

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n.$$

Primera derivada:

$$M'_X(t) = n(1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot pe^t.$$

Segunda derivada:

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt} \left( n(1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot pe^t \right).$$

Aplicamos la regla del producto:

$$M''_X(t) = n \left[ \frac{d}{dt} (1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot pe^t + (1 - p + pe^t)^{n-1} \cdot \frac{d}{dt} (pe^t) \right].$$

Derivando cada término:

$$\frac{d}{dt} (1 - p + pe^t)^{n-1} = (n-1)(1 - p + pe^t)^{n-2} \cdot pe^t,$$

$$\frac{d}{dt} (pe^t) = pe^t.$$

Sustituyendo:

$$M_X''(t) = n \left[ (n-1)(1-p+pe^t)^{n-2} \cdot pe^t \cdot pe^t + (1-p+pe^t)^{n-1} \cdot pe^t \right].$$

Evaluable en  $t = 0$ :

$$M_X''(0) = n \left[ (n-1)(1-p+p)^{n-2} \cdot p^2 + (1-p+p)^{n-1} \cdot p \right] = n(n-1)p^2 + np.$$

Por lo tanto, la segunda derivada de la MGF evaluada en  $t = 0$  es igual al segundo momento de la variable aleatoria  $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ :

$$M_X''(0) = \mathbb{E}[X^2].$$

## Función característica:

$$\phi(u) = \sum_{k=0}^n e^{iuk} P(X=k) = \sum_{k=0}^n e^{iuk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

## Hipergeométrica

Una variable aleatoria discreta  $X$  tiene una distribución hipergeométrica denotada como  $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$ , donde  $M$  es el tamaño de población,  $n$  es el tamaño de la muestra extraída,  $K$  es el número de elementos en la población original que pertenecen a la categoría deseada y  $x$  es el número de elementos en la muestra que pertenecen a dicha categoría. Su función de densidad de probabilidad (PDF) está dada por:

$$f_X(x; M, K, n) = \begin{cases} \frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} & \text{for } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

### Función Característica

La función característica de la distribución hipergeométrica  $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$  no tiene una forma cerrada simple como algunas otras distribuciones, pero se puede expresar usando sumas y combinaciones:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{x=0}^n e^{itx} \cdot \mathbb{P}(X=x),$$

donde  $\mathbb{P}(X=x)$  es la función de masa de probabilidad de la distribución hipergeométrica:

$$\mathbb{P}(X=x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}.$$

### Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de la distribución hipergeométrica  $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$  se obtiene expresando la FGM como una suma ponderada de  $e^{tx}$  por las probabilidades correspondientes:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^n e^{tx} \cdot \frac{\binom{K}{x} \binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}.$$

### Primer Momento

El primer momento (esperanza) de una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución hipergeométrica  $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$  es:

$$\mathbb{E}[X] = n \frac{K}{M}$$

## Segundo Momento

El segundo momento de una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución hipergeométrica  $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$  es:

$$\mathbb{E}[X^2] = n \frac{K}{M} \left(1 - \frac{K}{M}\right) \frac{M-n}{M-1} + \left(n \frac{K}{M}\right)^2$$

## Varianza

Para una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución hipergeométrica  $X \sim \text{HGeom}(M, K, n)$ , la varianza se calcula utilizando el primer y segundo momento de la siguiente manera:

El primer momento es:

$$\mathbb{E}[X] = n \frac{K}{M}$$

El segundo momento es:

$$\mathbb{E}[X^2] = n \frac{K}{M} \left(1 - \frac{K}{M}\right) \frac{M-n}{M-1} + \left(n \frac{K}{M}\right)^2$$

Por lo tanto, la varianza es:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Sustituyendo los valores:

$$\text{Var}(X) = \left[ n \frac{K}{M} \left(1 - \frac{K}{M}\right) \frac{M-n}{M-1} + \left(n \frac{K}{M}\right)^2 \right] - \left(n \frac{K}{M}\right)^2$$

Simplificando la expresión, obtenemos:

$$\text{Var}(X) = n \frac{K}{M} \left(1 - \frac{K}{M}\right) \frac{M-n}{M-1}$$

## Poisson

La función de densidad de probabilidad (PDF) de una distribución de Poisson describe la probabilidad de que un número determinado de eventos ocurra en un intervalo de tiempo fijo. La función de densidad de probabilidad (PDF) de una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda > 0$  es:

$$f_X(x) = f_X(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{for } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

## Función Característica

La función característica  $\varphi_X(t)$  de una variable aleatoria  $X$  que sigue una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda$  es:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

## Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de una distribución Poisson con parámetro  $\lambda$  está dada por:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

donde  $X$  es una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro  $\lambda$ .

### Primer Momento

El primer momento (esperanza) de una distribución Poisson con parámetro  $\lambda$  es:

$$E[X] = \lambda$$

### Segundo Momento

El segundo momento de una distribución Poisson con parámetro  $\lambda$  es:

$$E[X^2] = \lambda + \lambda^2$$

### Varianza

Para una distribución Poisson con parámetro  $\lambda$  la varianza se calcula utilizando el primer y segundo momento de la siguiente manera:

- El primer momento es  $E[X] = \lambda$ .
- El segundo momento es  $E[X^2] = \lambda + \lambda^2$ .

La varianza se calcula como:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda$$

Por lo tanto, la varianza de una distribución Poisson con parámetro  $\lambda$  es  $\lambda$ .

## Geométrica

Sea la v.a.  $X \sim \text{Geo}(p)$  con la siguiente función de masa de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{si } k = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función generadora de momentos de la v.a  $X$  correspondiente se define como:

$$M_X(t) = \left( \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \right)$$

Y su función característica es:

$$\phi_X(t) = \phi_X^{(1)}(t) =$$

Ahora, conociendo la v.a. sabemos que su esperanza y varianza son:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \quad y, \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

De aquí podemos obtener el valor de  $\mathbb{E}[X^2]$ , puesto que  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \text{Var}(X) + \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1-p}{p^2} + \left(\frac{1}{p}\right)^2 \\ &= \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{1-p+1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Ahora lo comprobaremos con la función generadora para ellos debe cumplirse que  $M_X^{(1)}(0) = \mathbb{E}[X]$ . Entonces

$$\begin{aligned} M_X^{(1)}(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \right) = p \left( \frac{\frac{d}{dt} e^t (1 - (1-p)e^t) - e^t \frac{d}{dt} [1 - (1-p)e^t]}{(1 - (1-p)e^t)^2} \right) \\ &= p \left( \frac{e^t (1 - (1-p)e^t) + e^{2t} (1-p)}{(1 - (1-p)e^t)^2} \right) = p \left( \frac{e^t - (1-p)e^{2t} + e^{2t} (1-p)}{(1 - (1-p)e^t)^2} \right) \\ &\Rightarrow \\ M_X^{(1)}(t) &= \frac{pe^t}{(1 - (1-p)e^t)^2} \end{aligned}$$

De aquí que:

$$M_X^{(1)}(0) = \frac{pe^0}{(1 - (1-p)e^0)^2} = \frac{p}{(1 - (1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Por lo tanto

$$M_X^{(1)}(0) = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$$

De la misma manera, procedemos para el segundo momento, entonces:

$$\begin{aligned} M_X^{(2)}(t) &= p \frac{d}{dt} \frac{e^t}{(1 - (1-p)e^t)^2} = p \left( \frac{\frac{d}{dt} e^t (1 - (1-p)e^t)^2 - e^t \frac{d}{dt} [1 - (1-p)e^t]^2}{(1 - (1-p)e^t)^4} \right) \\ &= p \left( \frac{e^t \cdot (1 - (1-p)e^t)^2 - 2(1 - (1-p)e^t) \cdot \frac{d}{dt} [1 - (1-p)e^t] \cdot e^t}{(1 - (1-p)e^t)^4} \right) \\ &= p \left( \frac{e^t \cdot (1 - (1-p)e^t)^2 + 2(1-p)(1 - (1-p)e^t) \cdot e^{2t}}{(1 - (1-p)e^t)^4} \right) \\ &= p \left( \frac{e^t \cdot (1 - (1-p)e^t) + 2(1-p) \cdot e^{2t}}{(1 - (1-p)e^t)^3} \right) = p \left( \frac{e^t - (1-p)e^{2t} + 2e^{2t}(1-p)}{(1 - (1-p)e^t)^3} \right) \\ &\Rightarrow \\ M_X^{(2)}(t) &= p \left( \frac{e^t + e^t(1-p)}{(1 - (1-p)e^t)^3} \right) = \frac{p(e^t(2-p))}{(1 - (1-p)e^t)^3} \end{aligned}$$

De aquí que:

$$M_X^{(2)}(0) = \frac{p(e^0(2-p))}{(1 - (1-p)e^0)^3} = \frac{2p - p^2}{p^3} = \frac{2-p}{p^2} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p}$$

Por lo tanto

$$M_X^{(2)}(0) = \mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{p} - \frac{1}{p}$$

Analogamente, se cumple para la función característica. De aquí que a través de la función característica y generadora de momentos se pueda obtener la Esperanza, y por consecuencia de  $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ , también la varianza de esta v.a.

## Exponencial

Una variable aleatoria continua  $X$  se dice que sigue una distribución exponencial con parámetro  $\lambda$  (donde  $\lambda > 0$ ), denotada como  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , si su función de densidad de probabilidad (PDF) está dada por:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

## Función Característica

La función característica de una variable aleatoria  $X$  es definida como:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Para una variable aleatoria exponencial  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\varphi_X(t) = \lambda \int_0^\infty e^{(it-\lambda)x} dx$$

$$\varphi_X(t) = \lambda \left[ \frac{e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda} \right]_0^\infty$$

$$\varphi_X(t) = \lambda \left( 0 - \frac{1}{it-\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

## Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de una variable aleatoria  $X$  se define como:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Para una variable aleatoria exponencial  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ :

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Combinamos los exponentes en la integral:

$$M_X(t) = \lambda \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} dx$$

Evaluamos la integral:

$$M_X(t) = \lambda \left[ \frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda} \right]_0^\infty$$

Para que la integral converja, requerimos que  $\lambda - t > 0$ . Evaluando en los límites:

$$M_X(t) = \lambda \left( 0 - \frac{1}{t-\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

## Primer Momento (Esperanza)

Para calcular el primer momento de una variable aleatoria Exponencial, usamos la FGM derivandola con respecto a  $t$  y posteriormente evaluando  $t = 0$ .

Derivamos la MGF con respecto a  $t$ :

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda}{\lambda - t} \right) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}$$

Evaluamos la derivada en  $t = 0$ :

$$M'_X(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

Por lo tanto, el primer momento (esperanza) de la variable aleatoria exponencial  $X$  es:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = \frac{1}{\lambda}$$

## Segundo Momento

Para el segundo momento calculamos la segunda derivada de la FGM con respecto a  $t$  y posteriormente evaluando  $t = 0$ .

$$M_X''(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \right) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

Evaluamos la segunda derivada en  $t = 0$ :

$$M_X''(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda - 0)^3} = \frac{2\lambda}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Por lo tanto, el segundo momento de la variable aleatoria exponencial  $X$  es:

$$\mathbb{E}[X^2] = M_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

La varianza de una variable aleatoria  $X$  se define como:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Sustituyendo los valores:

$$\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

## Normal

Una variable aleatoria continua  $X$  se distribuye Normal con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , denotada como  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , si su función de densidad de probabilidad (PDF) está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left( -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

## Función Característica

La función característica de una variable aleatoria  $X$  es definida como:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Para una variable aleatoria normal  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \exp \left( i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)$$

## Función Generadora de Momentos

La función generadora de momentos de una variable aleatoria  $X$  se define como:

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

Para una variable aleatoria normal  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , :

$$M_X(t) = \exp \left( \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right)$$

### (Primer Momento (Esperanza))

Para calcular el primer momento de una variable aleatoria Normal, usamos la FGM derivandola con respecto a  $t$  y posteriormente evaluando  $t = 0$ .

Derivamos la MGF con respecto a  $t$ :

$$M'_X(t) = \frac{d}{dt} \left( \exp \left( \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right) \right)$$

Usando la regla de la cadena:

$$M'_X(t) = \exp \left( \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right) (\mu + \sigma^2 t)$$

Evaluamos la derivada en  $t = 0$ :

$$M'_X(0) = \exp \left( \mu \cdot 0 + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot 0^2 \right) (\mu + \sigma^2 \cdot 0) = \exp(0) \cdot \mu = 1 \cdot \mu = \mu$$

Por lo tanto, el primer momento (esperanza) de la variable aleatoria normal  $X$  es:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(0) = \mu$$

### Segundo Momento

Para el segundo momento calculamos la segunda derivada de la FGM con respecto a  $t$  y posteriormente evaluando  $t = 0$ .

$$M''_X(t) = \frac{d}{dt} \left( \exp \left( \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right) (\mu + \sigma^2 t) \right)$$

Aplicamos la regla del producto:

$$M''_X(t) = \exp \left( \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 \right) (\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2)$$

Evaluamos la segunda derivada en  $t = 0$ :

$$M''_X(0) = \exp \left( \mu \cdot 0 + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot 0^2 \right) (\sigma^2 + \mu^2) = 1 \cdot (\sigma^2 + \mu^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Por lo tanto, el segundo momento de la variable aleatoria normal  $X$  es:

$$\mathbb{E}[X^2] = M''_X(0) = \sigma^2 + \mu^2$$

### Varianza

La varianza de una variable aleatoria  $X$  se define como:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Sustituyendo los valores:

$$\text{Var}(X) = (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \sigma^2$$