Норми векторів та матриць

$$Ax = b, \tag{1}$$

$$n \times n, detA \neq 0,$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{b}, \tag{2}$$

$$\delta(x) = \frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|}$$

$||x||$ – норма в H

1) $||x|| > 0$, якщо $x \neq 0$; $||0|| = 0$
2) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$
3) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \qquad \forall x, y, \alpha \in H$

$$\|x\|_p = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leqslant p <\leqslant \infty;\ \|x\|_\infty = \max_{j=\overline{1,n}} |x_j|$$

$$\|A\|_p = \sup_{\|x\|_p \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$$

Зв'язок норм

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant n \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{||x||_\infty \leqslant ||x||_1 \leqslant n||x||_\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}
|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} \\
\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant (\sum\limits_{i=1}^{n} 1)^{1/2} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} = n^{1/2} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2} \Rightarrow \\
n^{-1/2}||x||_1 \leqslant ||x||_2 \\
\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant (\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|)^2 \Rightarrow ||x||_2 \leqslant ||x||_1^2
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{n^{-1/2}||x||_1 \leqslant ||x||_2 \leqslant ||x||_1^2}$$

Матрична $\|A\|_p$ та векторна $\|x\|_p$ норми називають узгодженими, якщо

$$\|Ax\|_p \leqslant \|A\|_p \|x\|_p$$

$$\|A\|_1 = \max_{k=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|, \ \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(AA^*)}, \ \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$$

$\lambda_{max}(AA^*)$ – максимальне власне число матриці AA^*

$$\|A\|_\infty = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|, \ \|x\|_\infty = \max_{j=\overline{1,n}} |x_j|$$

Розглянемо систему

$$A\overline{x} = \overline{b} \tag{3}$$

Із (1) маємо $x = A^{-1}b$

Із (2): $\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$

Тоді

$$x - \overline{x} = A^{-1}(b - \overline{b})$$

$$\|x - \overline{x}\| = \|A^{-1}(b - \overline{b})\| \leqslant \|A^{-1}\|\|b - \overline{b}\| \frac{\|A\overline{x}\|}{\|A\overline{x}\|}, \ \overline{b} = A\overline{x}$$

$$\delta(x) = \frac{\|x - \overline{x}\|}{\|x\|} \leqslant \|A^{-1}\|\|A\|\delta(b),$$

де величина $\nu(A) = cond(A) = \|A^{-1}\|\|A\|$ називається числом обумовленості, це число є мірою невизначеності розв'язку (1) у разі неточних вихідних даних.

Розглянемо модель

$$\overline{A}\overline{x} = b$$

$$C^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(B - C)C^{-1}$$

$$\overline{x} - x = (\overline{A}^{-1} - A^{-1})b = A^{-1}(A - \overline{A})\overline{A}^{-1}b = A^{-1}(A - \overline{A})\overline{x}$$

$$\|\overline{x} - x\| \leqslant \|A^{-1}\|\|A - \overline{A}\|\|\overline{x}\| \cdot \frac{\|A\|}{\|A\|}$$

$$\delta(x) = \frac{\|\overline{x} - x\|}{\|x\|} \leqslant cond(A) \frac{\|A - \overline{A}\|}{\|A\|} = cond(A)\delta(A)$$

Лема. *Якщо C – матриця розмірності $n \times n$ така, що $\|C\| < 1$, то існує матриця $(E+C)^{-1}$*, при цьому

$$\|(E+C)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|C\|}.$$

▲

$$\|(E+C)x\| = \|x+Cx\| \geqslant (1-\|C\|)\|X\|.$$

Оскільки $1-\|C\| > 0$. то $\|(E+Cx\| > 0$, якщо $x \neq 0$,

т.т. СЛАР $(E+C)x = 0$ має лише тривіальний розв'язок. Це означає, $\exists (E+C)^{-1}$.

$$1 = \|E\| = \|(E+C)(E+C)^{-1}\| = \|(E+C)^{-1} + C(E+C)^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(E+C)^{-1}\| - \|C\|\|(E+C)^{-1}\| = \|(E+C)^{-1}\|(1-\|C\|) > 0$$

▼

Теорема. *Нехай A - невироджена $n \times n$ матриця, $\overline{A} = A + \Delta A$, при цьому*

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Тоді якщо x та $\overline{x} = x + \Delta x$ є розв язками систем $Ax = b$ та $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$, $\overline{b} = b + \Delta b$, то має місце оцінка

$$\delta(x) = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{cond(A)}{1 - cond(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$$

▲ Оскільки $\|A^{-1}\Delta A\| \leqslant \|A^{-1}\|\|\Delta A\| < 1$, то на підставі Леми $\exists (E + A^{-1}\Delta A)^{-1}$ та

$$\|(E + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \leqslant \frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|}$$

$$A^{-1} \cdot \overline{A}\overline{x} = \overline{b}$$

$$A^{-1}\overline{A}\overline{x} = A^{-1}\overline{b}$$

$$A^{-1}(A+\Delta A)\overline{x} = A^{-1}(b+\Delta b)$$

$$\overline{x} = x + \Delta x$$

$$(E + A^{-1}\Delta A)x + (E + A^{-1}\Delta A)\Delta x = A^{-1}b + A^{-1}\Delta b$$

$$\Delta x = (E + A^{-1}\Delta A)^{-1}(A^{-1}b + A^{-1}\Delta b - (E + A^{-1}\Delta A)x) =$$

$$= (E + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}(\Delta b - \Delta A x)\frac{Ax}{Ax},\ Ax = b,$$

Враховуючи, що

$$\|(E + A^{-1}\Delta A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|},$$

дістанемо

$$\delta(x) = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\frac{\|A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)\|A\|$$

Звідки і дістанемо шукану нерівність.
▼

Властивості числа обумовленості

1) $cond(A) \geqslant 1$

2) $cond(AB) \leqslant cond(A)cond(B)$

3) $cond(A) \geqslant \dfrac{|\lambda_{max}(A)|}{|\lambda_{min}(A)|}$

4) $A^T = A^{-1} \Rightarrow cond(A) = 1$
Якщо $cond(A) >> 1$, то матриця називається погано обумовленою.
Приклад.

$$H_n = (\frac{1}{i+j-1})_{i,j=1}^{n}$$
$$cond(H_8) \approx 10^9$$

Знаходження оберненої матриці A^{-1} методом Гаусса з вибором головного елементу

$$A,\ detA \neq 0$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

$$X = A^{-1}$$

$$AX = E$$

$$X = \{x_i\}_{i=1}^n,\ E = \{e_i\}_{i=1}^n$$

$$Ax_i = e_i,\ i = \overline{1, n}$$

$$A = LU,$$

де U – верхня трикутна матриця на діагоналі – 1, L – нижня трикутна матриця.

$$LUx_i = e_i,\ i = \overline{1, n},$$

Позначимо

$$Ux_i = y_i,\ i = \overline{1, n}$$

Тоді

$$Ly_i = e_i,\ i = \overline{1, n}$$

$$Ux_i = y_i,\ i = \overline{1, n}$$

$$A^{-1} = X = \{x_i\}_{i=1}^n$$

$$Q(n) = 2n^3 + O(n^2)$$

Знаходження оберненої матриці A^{-1} методом квадратного кореня

$$A = S^T DS$$

$$Ax_i = e_i,\ i = \overline{1, n}$$

$$S^T DSx_i = e_i,\ i = \overline{1, n}$$

Позначимо

$$Sx_i = y_i,\ i = \overline{1, n}$$

Тоді

$$S^T Dy_i = e_i,\ i = \overline{1, n}$$

$$Sx_i = y_i,\ i = \overline{1,n}$$

$$A^{-1} = X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$$