Розв'язання систем нелінійних рівнянь

Постановка задачі

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \end{cases}$$

$\overline{F}(\overline{x}) = \overline{0}$

$\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$

$\overline{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$

Метод простої ітерації

$\overline{x} = \overline{\Phi}(\overline{x})$

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n); \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n); \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n); \end{cases}$$

$$\overline{\Phi}(\overline{x}) = \overline{x} - C^{-1}\overline{F}(\overline{x})$$

$$detC \neq 0$$

$$\overline{x} = \overline{x} - \tau\overline{F}(\overline{x}),$$

де τ – парметр релаксації.

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{\Phi}(\overline{x}^k),\ k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \varphi_1(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k); \\ x_2^{k+1} = \varphi_2(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k); \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n^{k+1} = \varphi_n(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k); \end{cases} \quad ||\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k|| \leqslant \varepsilon$$

З теореми про стикаюче відображення випливає:

Теорема

Нехай $\overline{\Phi}(\overline{x})$ $\quad G \quad$ $\overline{x}_0 \in G$ $\quad q$

$||\overline{\Phi}'(\overline{x})|| \leqslant q, \quad 0 < q < 1$

$$||\overline{\Phi}(\overline{x}) - \overline{\Phi}(\overline{y})|| \leqslant q||\overline{x} - \overline{y}||, \forall \overline{x},\ \overline{y} \in G$$

$$\Rightarrow \overline{x}^k \to \overline{x}^*,\ k \to \infty$$

$$||\overline{x}^k - \overline{x}^*|| \leqslant \frac{q^k}{1-q}||\overline{x}^1 - \overline{x}^0||$$

<u>Матриця Якобі</u>

$$A_k = \Phi'(\overline{x}) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n} =$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

<u>Приклад</u>

Знайти розв'язок системи методом простої ітерації з точністю $\varepsilon < 0.2$.

$$\begin{cases} 2x - \sin\dfrac{x-y}{2} = 0 \\ \\ 2y - \cos\dfrac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$$

<u>Розв'язок</u>

$$\overline{x} = \overline{\Phi}(\overline{x})$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x-y}{2} \\ \\ y = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x+y}{2} \end{cases} \qquad \Phi'(x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} & \dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cos\dfrac{x-y}{2} \\ -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x+y}{2} & -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x-y}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Phi'(x) = B = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} & -\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} \\ -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x+y}{2} & -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x-y}{2} \end{pmatrix}$$

$$x^0 = y^0 = 0$$

$$B_0 = B(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$||B_0||_1 = \frac{1}{4} < 1 \quad \Rightarrow \quad$ є збіжність

Крок 1:

$$x^1 = \frac{1}{2} \sin \frac{x^0 - y^0}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{0 - 0}{2} = 0$$

$$y^1 = \frac{1}{2} \cos \frac{x^0 + y^0}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{0 + 0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$||(0; 0.5)^T - (0; 0)^T||_\infty = ||(0; 0.5)^T||_\infty = 0.5$$

Крок 2:

$$x^2 = \frac{1}{2} \sin \frac{x^1 - y^1}{2} = \frac{1}{2} \sin \frac{0 - 0.5}{2} = -0.12$$

$$y^2 = \frac{1}{2} \cos \frac{x^1 + y^1}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{0 + 0.5}{2} = 0.48$$

$$||(-0.12; 0.48)^T - (0; 0.5)^T||_\infty = ||(-0.12; -0.02)^T||_\infty = 0.12 < \varepsilon$$

$$(x^*; y^*)^T \approx (-0.12; 0.48)^T$$

Метод релаксації

$$\overline{x} = \overline{\Phi}(\overline{x})$$

$$\overline{\Phi}(\overline{x}) = \overline{x} - \tau \overline{F}(\overline{x})$$

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \tau \overline{F}(\overline{x}^k)$$

$$\tau < \frac{2}{\max\limits_{\overline{x}} ||F'(\overline{x})||}$$

$F'(\overline{x})$ – матриця Якобі

Метод Ньютона

Лініарізуючи рівняння $\overline{F}(\overline{x}) = \overline{0}$ в околі наближення до розв'язку $\overline{x}^*$, дістанемо:

$$\overline{F}(\overline{x}^k) + \overline{F}'(\overline{x}^k)(\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k) = \overline{0}$$

Позначимо $\overline{x}^k - \overline{x}^{k+1} = \overline{z}^k$, $A_k = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}^k)\right)_{i,j=1}^n$ – матриця Якобі.

Для $\overline{z}^k = \overline{x}^k - \overline{x}^{k+1}$ дістанемо СЛАР $A_k\overline{z}^k = \overline{F}(\overline{x}^k)$.

Отже, можемо запропонувати такий алгоритм методу Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь:

1) Задаємо початкове наближення $\overline{x}^0$.

Для $k = 0, 1, \dots$

2) Обчислюємо матрицю Якобі $A_k = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overline{x}^k)\right)_{i,j=1}^n$ та $\overline{F}(\overline{x}^k)$.

3) Розв'язуємо СЛАР $A_k\overline{z}^k = \overline{F}(\overline{x}^k)$.

4) Нове наближення обчислюємо за формулою $\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \overline{z}^k$.

5)Перевіряємо умову $\|\overline{z}^k\| < \varepsilon, \overline{z}^k = \overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k$. Якщо умова виконується, то припиняємо ітераційний процесс та покладемо, що $\overline{x}^* \approx \overline{x}^{k+1}$, $\overline{x}^*$ – точний корінь системи нелінійних рівнянь. Якщо умова не виконується, то k збільшуємо на одиницю та переходимо до кроку 2).

Можна запропонувати і такі перетворення, після яких дістане алгоритм наведений вище.

$$\overline{F}(\overline{x}^k) + \overline{F}'(\overline{x}^k)(\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k) = \overline{0}$$

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - A_k^{-1}\overline{F}(\overline{x}^k)$$

$$A_k = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$$

$$\overline{x}^k - \overline{x}^{k+1} = A_k^{-1}\overline{F}(\overline{x}^k)$$

$$A_k\overline{z}^k = A_k A_k^{-1}\overline{F}(\overline{x}^k)$$

$$A_k\overline{z}^k = \overline{F}(\overline{x}^k) \ \rightarrow \ z^k$$

$$||\overline{z}^k|| \leqslant \varepsilon$$

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - \overline{z}^k$$

Нехай $\delta_a = \{\overline{x} : \|\overline{x} - \overline{x}^*\| < a\}$ та при деяких $a,\ a_1,\ a_2,\ 0 < a$,

$$0 \leqslant a_1, a_2 < \infty$$

виконуються умови:

1) $\|(\overline{F}'(\overline{x}))^{-1}\| \leqslant a_1,\ x \in \delta_a$,

2) $\|\overline{F}(\overline{x}_1) - \overline{F}(\overline{x}_2) - \overline{F}'(\overline{x}_2)(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)\| \leqslant a_2\|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\|^2,\ \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \delta_a$.

Позначимо $c = a_1 a_2,\ b = \min(a, c^{-1})$.

Теорема 1. *(про збіжність методу Ньютона)*

Нехай виконуються умови 1), 2) та $\overline{x}^0 \in \delta_b$. Тоді ітераційний процес методу Ньютона для системи нелінійних рівнянь збігається та має місце оцінка точності

$$\|\overline{x}^n - \overline{x}^*\| \leqslant c^{-1}(c\|\overline{x}^0 - \overline{x}^*\|)^{2^n}$$

Теорема 2. *(про збіжність методу Ньютона)*

Якщо в області $G \subset R^n$ функції $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^2(G), |\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}| \leqslant L$, в точці $\overline{x}^0 \in G$ матриця $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{i,j=1}^n$ – невироджена, $\| \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_{i,j=1}^n\right)^{-1} \| \leqslant M$, $|f_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)| \leqslant \delta$ та виконується умова

$$h = M^2 L \delta n^2 \leqslant 1/2,$$

то система нелінійних рівнянь має розв'язок в області $\|\overline{x} - \overline{x}^0\|_1 \leqslant \frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\delta$ та має місце оцінка

$$\|\overline{x}^n - \overline{x}^*\|_1 \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h)^{2^n-1}\delta$$

Приклад

Знайти розв'язок системи методом Ньютона з точністю $\varepsilon < 0.2$.

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x-y}{2} = 0 \\ y - \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$$

Розв'язок

$$f_1(x, y) = x - \frac{1}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$f_2(x, y) = y - \frac{1}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$A = F'(x, y) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} & \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x+y}{2} & 1 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x+y}{2} \end{pmatrix}$$

Крок 1:

$x^0 = (0;0)^T$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{F^0} = \begin{pmatrix} f_1(x^0, y^0) \\ f_2(x^0, y^0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 - 0.5\sin\dfrac{x^0 - y^0}{2} \\ y^0 - 0.5\cos\dfrac{x^0 + y^0}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$A_0\overline{z}^0 = \overline{F^0}$

$$\begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$z_2^0 = -0.5$

$$z_1^0 = \frac{1}{0.75}(-0.25z_2^0) = 0.17$$

$||\overline{z}^0||_\infty = ||(0.17; -0.5)^T||_\infty = 0.5 > \varepsilon$

Крок 2:

$\overline{x}^1 = \overline{x}^0 - \overline{z}^0 = (0;0)^T - (0.17; -0.5)^T = (-0.17; 0.5)^T$

$A_1 =$

$$\begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{-0.17-0.5}{2} & \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{-0.17-0.5}{2} \\ \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{-0.17+0.5}{2} & 1 + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{-0.17+0.5}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.04 & 1.04 \end{pmatrix} \qquad \overline{F}^1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.17 - 0.5\sin\dfrac{-0.17-0.5}{2} \\ 0.5 - 0.5\cos\dfrac{-0.17+0.5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.003 \\ 0.007 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.76 & 0.24 \\ 0.04 & 1.04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.003 \\ 0.007 \end{pmatrix}$$

$$\overline{z}^1 = \begin{pmatrix} -0.006 \\ 0.007 \end{pmatrix}$$

$||\overline{z}^1||_\infty = 0.007 \leqslant \varepsilon$

$\overline{x}^2 = \overline{x}^1 - \overline{z}^1 = (-0.17; 0.5)^T - (-0.006; 0.007)^T =$

$= (-0.16; 0.49)^T$

$\overline{x}^* \approx (-0.16; 0.49)^T$

Модифікований метод Ньютона

$$\overline{F}(\overline{x}^k) + \overline{F}'(\overline{x}^0)(\overline{x}^{k+1} - \overline{x}^k) = \overline{0}$$

Метод дає змогу економити арифметичні операції за допомогою визначення оберненої матриці A_0^{-1} до матриці Якобі $A_0 = \overline{F}'(\overline{x}^0)$ і обчислення наступних наближень за явною формулою

$$\overline{x}^{k+1} = \overline{x}^k - A_0^{-1}\overline{F}(\overline{x}^k).$$

На жаль, такий метод має тільки лінійну швидкість збіжності.

Приклад

Знайти розв'язок системи модифікованиим методом Ньютона з точністю $\varepsilon < 0.2$.

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x-y}{2} = 0 \\ \\ y - \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$$

Розв'язок

Крок 1:
$\overline{x}^0 = (0; 0)^T$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1.33 & -0.33 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{F}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Розв'язок

$\overline{x}^1 = \overline{x}^0 - A_0^{-1}\overline{F}(\overline{x}^0) =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.33 & -0.33 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.17 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$||\overline{x}^1 - \overline{x}^0|| = ||(-0.17; 0.5)^T - (0; 0)^T||_\infty = 0.5 > \varepsilon$

Крок 2:

$$\overline{F}^1 = \begin{pmatrix} -0.003 \\ 0.007 \end{pmatrix}$$

<u>Розв'язок</u>

$$\overline{x}^2 = \overline{x}^1 - A_0^{-1}\overline{F}(\overline{x}^1) =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.17 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.33 & -0.33 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.003 \\ 0.007 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.17 \\ 0.49 \end{pmatrix}$$

$||\overline{x}^2 - \overline{x}^1|| = ||(-0.17; 0.49)^T - (-0.17; 0.5)^T||_\infty = = 0.01 \leqslant \varepsilon \Rightarrow \overline{x}^* \approx (-0.17; 0.49)^T$