Ітераційні методи

Метод простої ітерації

$$Ax = b \tag{1}$$

$$x = Bx + c \tag{2}$$

$$x^{n+1} = Bx^n + c \tag{3}$$

Будь-яка система
$$x = x - D(Ax - b) \tag{4}$$
має вигляд (2) та за умови $detD \neq 0$ еквівалентна системі (1).
Система (2), що еквівалентна (1) має вигляд (4) з матрицею

$$D = (E - B)A^{-1}.$$

Теоерма. *Якщо*
$$\|B\| \leqslant q < 1$$
, то система (2) має єдиний розв'язок, а ітераційний процес (3) збігається до розв'язку із швидкістю збіжності із знаменником q.

▲
Для будь-якого розв'язку (2) маємо

$$\|x\| \leqslant \|B\|\|x\| + \|c\|$$

Тому
$$\|x\|(1 - \|B\|) \leqslant \|c\|$$

чи

$$\|x\| \leqslant (1 - \|B\|)^{-1}\|c\|$$

Отже існує розв'язок однорідної системи $x = Bx$, відповідно і системи (2).
Нехай x^* – точний розв'язок системи (2).
Позначимо
$$r^n = x^n - x^*,$$

одержимо:

$$x^{n+1} = r^{n+1} + x^*,\ x^n = r^n + x^*$$

та підставимо в (3)

$$r^{n+1} + x^* = B(r^n + x^*) + c,$$

$$r^{n+1} + x^* = Br^n + Bx^* + c,$$

враховуючи, що

$$x^* = Bx^* + c$$

,

дістанемо

$$r^{n+1} = Br^n$$

чи

$$r^n = B^n r^0$$

Звідси випливає, що

$$\|r^n\| \leqslant \|B\|^n \|r^0\| \to 0$$

▼

$$s_n = \sup_{x^0 \neq x^*} \frac{\|r^n\|}{\|r^0\|} = \sup_{r^0 \neq 0} \frac{\|B^n r^0\|}{\|r^0\|} = \|B^n\|$$

$$s_n \leqslant \varepsilon$$

$$\|B\|^n \leqslant \varepsilon$$

$$n \geqslant n_0(\varepsilon) = \left[\frac{ln(\varepsilon^{-1})}{ln(\|B\|^{-1})}\right] + 1$$

Теорема про необхідні та достатні умови збіжності методу простої ітерації.

Нехай система

$$x = Bx + c$$

(2) має единий розв'язок. Ітераційний процес

$$x^{n+1} = Bx^n + c$$

збігається до розв'язку системи (2) при будь-якому початковому наближенні тоді і тільки тоді, коли всі власні значення матриці B за модулем менше одиниці.

$$B = (a_{ij})_{i,j=1}^n$$

$$\forall x^0 \quad \lim_{k\to\infty} ||x^k_я - x^*|| = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\lambda| < 1$$

Метод Якобі

$Ax = b \qquad a_{ii} \neq 0$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdot + a_{ii}x_i + \cdot + a_{in}x_n = b_n,\ i = \overline{1,n}$$

$x_i = -\sum\limits_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum\limits_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = \overline{1,n}$

Початкове наближення: $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$

Ітераційний процес: $x_i^{k+1} = -\sum\limits_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum\limits_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}$

Достатня умова збіжності:

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i : i = \overline{1,n}$$

Якщо виконується нерівність:

$$q|a_{ii}| \geqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,\ i = \overline{1,n},\ q < 1,$$

то має місце оцінка

$$\|x^k - x^*\| \leqslant \frac{q^k}{1-q} \|x^0 - x^1\|$$

Умова припинення: $||x^n - x^{n-1}|| \leqslant \varepsilon$

чи

$$\frac{q^k}{1-q} < \varepsilon$$

Вибір останньої умови пояснюється тим, що в разі її виконання для $x = 0$ маємо оцінку

$$\delta(x) \leqslant \frac{\|x^k - x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{q^k}{1-q} < \varepsilon$$

Необхідні і достатні умови збіжності

$$A = A_1 + D + A_2$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},\ A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$$

$$Dx^{k+1} = -A_1x^k - A_2x^k + b$$

$$x^{k+1} = -D^{-1}A_1x^k - D^{-1}A_2x^k + D^{-1}b$$

$$x^{k+1} = -D^{-1}(A_1 + A_2)x^k + D^{-1}b$$

МПІ: $x^{k+1} = Bx^k + c$

$$det(B - \lambda E) = 0$$

$$B = -D^{-1}(A_1 + A_2)$$

$$det(-D^{-1}(A_1 + A_2) - \lambda E) = 0$$

$$det(-(A_1 + A_2) - \lambda D) = 0$$

$$det(A_1 + A_2 + \lambda D) = 0$$

Теорема про необхідні та достатні умови збіжності методу Якобі.
$\forall x^0 \quad \lim\limits_{k\to\infty} ||x^k_{я} - x^*|| = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\lambda| < 1$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & \lambda a_{n2} & ... & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Приклад

Зробити один крок методом Якобі для розв'язання системи рівнянь з точністю $0,5$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 = 1,75 \\ x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 = 2,5 \end{cases}$$

Розв'язок

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 & 1,75 \\ 1 & 0,5 & 3 & 2,5 \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} |3| \geqslant |-1| + |1| \\ |2| \geqslant |-1| + |0,5| \\ |3| \geqslant |1| + |0,5| \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ метод Якобі збігається

$x_1 = \dfrac{1}{3}(x_2 - x_3 + 1)$

$x_2 = \dfrac{1}{2}(x_1 - 0,5x_3 + 1,75)$

$$x_3 = \frac{1}{3}(-x_1 - 0,5x_2 + 2,5)$$

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{3}(x_2^k - x_3^k + 1)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{2}(x_1^k - 0,5x_3^k + 1,75)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{3}(-x_1^k - 0,5x_2^k + 2,5)$$

Розв'язок

Крок 1

$x^0 = (0;0;0)^T$

$x_1^1 = 1/3 \cdot (0 - 0 + 1) = 0,33$

$x_2^1 = 1/2 \cdot (0 - 0,5 \cdot 0 + 1,75) = 0,88$

$x_3^1 = 1/3 \cdot (-0 - 0,5 \cdot 0 + 2,5) = 0,83$

$$||x^1 - x^0|| = ||(0,33;0,88;0,83)^T - (0;0;0)^T||_\infty =$$
$$= 0,88 > \varepsilon$$

Приклад

Знайти область збіжності методу Якобі для СЛАР із матрицею

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Приклад

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \lambda\alpha & \beta \\ 0 & \beta & \lambda\alpha \end{vmatrix} = \lambda\alpha(\lambda^2\alpha^2 - \beta^2) - \beta(\beta\lambda\alpha - 0) = 0$$

$$\lambda^3\alpha^3 - \lambda\alpha\beta^2 - \lambda\alpha\beta^2 = \lambda\alpha(\lambda^2\alpha^2 - 2\beta^2) = 0$$

$$\lambda\alpha \neq 0 \Rightarrow \lambda^2\alpha^2 - 2\beta^2 = 0$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\beta}{\alpha} \quad |\lambda| < 1 \Rightarrow \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Метод Зейделя

$$Ax = b$$

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}} \qquad i = \overline{1,n}$$

Ітераційний процес: $x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}},\ i = \overline{1,n},\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Змінивши порядок обчислення компонент, отримаємо ще одну формулу ітераційного процесу для методу Зейделя

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Достатні умови збіжності такі ж самі як і для методу Якобі:

$$1)\ |a_{ii}| \geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall i : i = \overline{1,n}$$

Якщо матриця A близька до діагональної, то метод Зейделя збігається швидше.

Необхідні і достатні умови збіжності

$$A = A_1 + D + A_2$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix},\ A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & \\ a_{21} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = diag(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$$

$$(A_2 + D)x^{k+1} = -A_1 x^k + b$$

$$x^{k+1} = -(A_2 + D)^{-1} A_1 x^k + (A_2 + D)^{-1} b$$

МПІ: $x^{k+1} = Bx^k + c$

$$det(B - \lambda E) = 0$$

$$B = (A_2 + D)^{-1} A_1$$

$$det(-(A_2 + D)^{-1} A_1 - \lambda E) = 0$$

$$det(A_1 + \lambda A_2 + \lambda D) = 0$$

Теорема про необхідні та достатні умови збіжності методу Зейделя.

$\forall x^0 \quad \lim\limits_{k\to\infty} ||x^k_я - x^*|| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & ... & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |\lambda| < 1$$

Теорема.

Нехай A дійсна симетрична додатньовизначена матриця ($A = A^T > 0$). Тоді метод Зейделя збігаєтьяс.

▲

Нехай $A = A^T$. Маємо

$$F(y) = (A(y-x), y-x) - (Ax, x) = (Ay, y) - 2(Ax, y) = (Ay, y) - 2(b, y)$$

Якщо

$$A > 0$$

, то

$$(A(y-x), y-x) > 0,$$

коли $y \neq x$. Тому $F(y)$ має єдиний мінімум, коли $y = x$.

Задача $Ax = b$ та задача пошуку мінімуму $F(y)$ еквівалентні.

Метод покоординатного спуску:

Нехай $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ – наближення до точки екстремуму $F(y)$. Розглянемо

$$F(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

та знайдемо т. x_1^1. Потім за наближення обираємо $(x_1^1, x_2^0, \dots, x_n^0)$ та знаходимо мінімум

$$F(x_1^1, x_2, x_3^0 \dots, x_n^0)$$

. Процес циклічно повторюється. При уточненні компоненти x_k відбувається зміщення по прямій, що паралельна вісі x_k до точки з найменшим на цій прямій значенням....

Позначимо $F(y) + (Ax, x) = (A(y-x), y-x) = F_0(y)$.

При мінімізації за змінною x_k відбувається зміщення до точки, де

$$F'_{x_k} = 0$$

.

Одже нове значення x_k визначаємо із рівняння

$$F'_{x_k} = 2(\sum_{j=1}^{m} a_{kj} - b_k) = 0$$

(Маємо систему $Ax = b$)

Якщо $x^n \neq x^*$, то хоча б одне рівняння системи не виконується та

$$F'_{x_k}(x^n) \neq 0$$

.

Оберемо серед таких k найменше.

Тоді при уточненні компонент $x_1, \ldots, x_{k-1}$ – залишаємось в т. x^n, а при уточненні компоненти x_k відбувається зміщення в сторону менших значень $F(x)$.

При уточненні решти компонент значення $F(x)$ не збільшується, т.ч.

$$F(x^{n+1}) < F(x^n)$$

$$F_0(x^{n+1}) < F_0(x^n)$$

Тому

$$\frac{F_0(x^{n+1})}{F_0(x^n)} < 1, \; x^n \neq x^*$$

Розглянемо похибку $r^{n+1} = Br^n$

Останню нерівність перепишемо у вигляду

$$\varphi(r^n) = \frac{(ABr^n, Br^n)}{(Ar^n, r^n)} < 1, \; r^n \neq 0, \; B = -(A_2 + D)^{-1} A_1$$

(далі буде показано)

На сфері $\|r^n\|_2 = 1$ величина $\varphi(r^n)$ – неперервна, тому досягає свого найбільшого значення φ_0. Оскільки

$$A > 0,$$

то

$$\varphi(r^n) > 0.$$

Покладемо

$$\sqrt{\varphi_0} = \lambda, \; \lambda^2 < 1.$$

Очевидно, що

$$\varphi(cr^n) = \varphi(r^n), \; c \in R^1, \; c \neq 0,$$

тому

$$\varphi(r^n) = \varphi(r^n / \|r^n\|_2) \leqslant \lambda^2.$$

Дістанемо

$$\frac{F_0(x^{n+1})}{F_0(x^n)} \leqslant \lambda^2$$

$$F_0(x^n) \leqslant \lambda^{2n} F_0(x^0).$$

Отже

$$\min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)\|y-x\|_2^2 \leqslant F_0(y) \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)\|y-x\|_2^2,$$

дістанемо оцінку швидкості збіжності

$$\|x^n - x\| \leqslant \sqrt{\frac{F_0(x^n)}{\min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)}} \leqslant \lambda^n \sqrt{\frac{F_0(x^0)}{\min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)}} \leqslant \sqrt{\frac{\max_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)}{\min_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)}} \|x^0 - x\|_2.$$

▼

Приклад

Зробити один крок методом Зейделя для розв'язання системи рівнянь з точністю $0,5$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 = 1,75 \\ x_1 + 0,5x_2 + 3x_3 = 2,5 \end{cases}$$

Розв'язок

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 & 1,75 \\ 1 & 0,5 & 3 & 2,5 \end{array}\right)$$

$1) A = A^T$

$2) Det(3) = 3 > 0$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0$ $\quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 3 \end{vmatrix} = 11,25 > 0$

$\Rightarrow$ метод Зейделя збігається

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{3}(x_2^k - x_3^k + 1)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{2}(x_1^{k+1} - 0,5x_3^k + 1,75)$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{3}(-x_1^{k+1} - 0,5x_2^{k+1} + 2,5)$$

Крок 1

$x^0 = (0;0;0)^T$

$x_1^1 = 1/3 \cdot (0 - 0 + 1) = 0,33$

$x_2^1 = 1/2 \cdot (0,33 - 0,5 \cdot 0 + 1,75) = 1,04$

$x_3^1 = 1/3 \cdot (-0,33 - 0,5 \cdot 1,04 + 2,5) = 0,55$

$||x^1 - x^0|| = ||(0,33;1,04;0,55)^T - (0;0;0)^T||_\infty =$

$= 1,04 > \varepsilon$