$z = f(x, y)$

$P_1(x, y) = a_0 + a_1 x + b_1 y$ — 3 точки

$P_2(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{22} y^2$

(x_1, y_1)

$(x_2, y_1)(x_2, y_2)$

$(x_3, y_1)(x_3, y_2)(x_3, y_3)$

$\frac{n(n+1)}{2}$

n — 6 точек

miro

i	0	1	2
x_i	0	1	2
$f(x_i)=y_i$	0	1	4

Інтерполяційний поліном Лагранжа

$$L_2(x)=\sum_{p=0}^{2} f(x_p)\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{p-1})(x-x_{p+1})\dots(x-x_n)}{(x_p-x_0)\dots(x_p-x_{p-1})(x_p-x_{p+1})\dots(x_p-x_n)}$$

$$L_2(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=$$

$$=0\cdot\frac{\dots}{\dots}+1\cdot\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}+4\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=$$

$$=-x(x-2)+\cancel{4}^{2}\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{\cancel{2}\,1}=$$

$$=-x(x-2)+2x(x-1)=x(2x-2-x+2)=\boxed{x^2}\ \checkmark$$

$f(x)=x^2$ $\quad M_3=0$

$$|R_2(x)|\le\frac{M_3}{3!}|(x-0)(x-1)(x-2)|$$

$\Downarrow$

Інтерполяційний поліном Ньютона

Розділені різниці та їх властивості

Першого порядку: $f(x_i;x_j) = \dfrac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$

Другого порядку:

$$f(x_{i-1};x_i;x_{i+1}) = \frac{f(x_i;x_{i+1}) - f(x_{i-1};x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

(k+1) порядку: $f(x_i;x_{i+1};\ldots;x_{i+k};x_{i+k+1}) =$

$$= \frac{f(x_{i+1};x_{i+2};\ldots;x_{i+k+1}) - f(x_i;x_{i+1};\ldots;x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}$$

1. Має місце рівність

$$f(x_1;x_2;\ldots;x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_j - x_i)}$$

[illegible]

$$\begin{array}{llllllll}
x_0 & f(x_0) & f(x_0;x_1) & f(x_0;x_1;x_2) & \cdots & \cdots & \cdots & f(x_0;x_1;\ldots; \\
x_1 & f(x_1) & f(x_1;x_2) & f(x_1;x_2;x_3) & \cdots & \cdots & f(x_0;x_1;\ldots;x_{n-1}) & \\
x_2 & f(x_2) & f(x_2;x_3) & f(x_1;x_2;x_3) & \cdots & f(x_1;x_2;\ldots;x_{n-2}) & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \cdots & f(x_{n-1};x_{n-2}) & & & & & \\
x_n & f(x_n) & & & & & &
\end{array}$$

називають таблицею розділених різниць.

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
$f(x_i)=y_i$	0	1	4	9

$m=4 \Rightarrow n=3$

$P_3(x)$ - ?

Інтерполяційна формула Ньютона (вперед)

РР

k	x_k	$f(x_k)$	I п	II п	III п
0	0	0			
			$\frac{1-0}{1-0}=1$		
1	1	1		$\frac{3-1}{2-0}=1$	
			$\frac{4-1}{2-1}=3$		$\frac{1-1}{3-0}=0$
2	2	4		$\frac{5-3}{3-1}=1$	
			$\frac{9-4}{3-2}=5$		
3	3	9			

інтерполянт 2-го степеня

$$P_{\cancel{3}\,2}(x) = \underbrace{f(x_0)}_{1} + \underbrace{f(x_0, x_1)(x-x_0)}_{2} +$$

$$+ \underbrace{f(x_0, x_1, x_2)(x-x_0)(x-x_1)}_{3} +$$

$$+ \underbrace{f(x_0, x_1, x_2, x_3)}_{=0}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \underbrace{}_{=0}$$

(1, 2, 3)

якщо доданки спадають, варто очікувати гарної т... наближення

$x = 0{,}5$

$$P_2(x) = 0 + 1 \cdot (x-0) + 1 \cdot (x-0)(x-1) =$$

$$= x + x^2 - x = x^2$$

$$P_2(0{,}5) = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot (0{,}5 - 1) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$$

Інтерполяційна формула Ньютона для рівновіддалених вузлів

x_i	0	1	2	3
f_i	0	1	8	27

$m=4, \quad n=3$

$x_i - x_{i-1} = h = 1$

? $P_3(x), \quad x = 0{,}5$

Оскільки точка 0.5 ближче до лівого краю відрізка [0, 3], то будуємо ІФН вперед, тобто беремо перший рядок

① Таблиця скінч. різниць

x_i	$f(x)$	I	II	III
0	0	1	6	6
1	1	7	12	
2	8	19		
3	27			

$h_1 = 1-0 = 1$

$h_2 = 2-1 = 1$

$h_3 = 3-2 = 1$

$x = 0{,}5 \quad x_0 = 0$

② $t = \frac{0{,}5-0}{1} = 0{,}5$

③ $P_3(t) = 0 + \frac{1}{1!}t + \frac{6}{2!}t(t-1) + \frac{6}{3!}t(t-1)(t-2)$

$P_3(0{,}5) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{4-6+3}{8} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

Інтерполяційний поліном Ньютона для рівновіддалених вузлів

Визначення. Вузли інтерполяції називаються рівновіддаленими, якщо $x_i - x_{i-1} = h = const$.

$$x_i = x_0 + ih, \; i = \overline{0,n}.$$

Нехай $f(x_i) = y_i$.

Визначення. Величини $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ називаються скінченою різницею першого порядку.

Величини $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ називаються скінченою різницею другого порядку.

Величини $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ називаються скінченою різницею k-го порядку.

Має місце рівність

$$\Delta^k y_i = k! h^k f(x_i; \ldots; x_k)$$

$$f(x_i; \ldots; x_k) = \frac{\Delta^k y_i}{k! h^k}$$

Підставимо цю формулу в інтерполяційний поліном Ньютона:

$$L_n(x) = P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Покладемо $x = x_0 + th$, $t = \frac{x - x_0}{h}$. Тоді

$$x - x_0 = x_0 + th - x_0 = th,$$

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x - x_1 = x_0 + th - x_0 - h = h(t-1)$$

$$x_2 = x_0 + 2h$$

$$x - x_2 = x_0 + th - x_0 - 2h = h(t-2)$$

. . . .

$$x_n = x_0 + nh$$

$$x - x_n = x_0 + th - x_0 - nh = h(t-n)$$

Тоді інтерполяційний поліном Ньютона набуває вигляду:

$$L_n(x) = P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

(1)

$$\cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) =$$

$$= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h^1} th + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} th(t-1)h + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} th(t-1)h \cdots (t-n+1)h =$$

*

$$P_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1) \cdots (t-n+1).$$

Для побудови інтерполяційного полінома Ньютона для рівновіддалених вузлів спочатку знаходимо таблицю скінченних різниць:

y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\Delta^n y_0$
y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\cdots$	$\cdots$	$\Delta^{n-1} y_1$	
y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\cdots$	$\Delta^{n-2} y_{n-2}$		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$			
$\cdots$	Δy_{n-1}					
y_n						

З якою точністю можна обчислити значення f() в т. x, використовуючи наближення функції?

? $R_2(x)$

• $R_2(0{,}75)$

$f(x) = \ln(x+1)$, $x_i \in [0, 1]$, x_i, $i = \overline{0,2}$ $m = 3$ $P_2(x)$

$|R_2(x)| \le \frac{|f^{(3)}(x)|}{3!} |\omega_3(x)|$, де $\omega_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

① для загальні ситуації

Нулі полінома Чебишова

$x_i \in [-1, 1]$ $m = 3$ m – число вузлів

$x_0 = \cos\left(\frac{2k+1\pi}{2n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}866$

$x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 0$

$x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -0{,}866$

$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0$

$n \arccos x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\arccos x = \frac{\pi(2k+1)}{2n}$

$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ $k = \overline{0, n-1}$

$[-1, 1] \to [0, 1]$ $[a, b]$

$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ $n = 3$

$\cos(n \arccos$ $T_3(x)$

② Для нашої задачі

$x_i = \frac{1}{2}\left((b-a)\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n} + (b+a)\right)$

$x_0 = \frac{1}{2}(0{,}866 + 1) \approx 0{,}933$

$x_1 = \frac{1}{2}(1) = 0{,}5$

$x_2 = \frac{1}{2}(-0{,}866 + 1) = 0{,}067$

③

$f'(x) = \frac{1}{x+1}$

$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$

$n = 2$

④

$|R_2(x)| \le \frac{M_3 \cdot 1^3}{3! \, 2^7} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$

$M_3 = 2 \cdot 1^3$, $|R_2(x)| \le \frac{2 \cdot 1}{3! \cdot 2^7} = \frac{1}{3 \cdot 2^7} \approx 0{,}0026$

M_3 $f^{(3)}(\xi)$

⑤

$R_2(0{,}75) = \frac{f^{(3)}(x)}{3!} \omega_3(x)$ $x = 0{,}75$

$\omega_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$R_2(0{,}75) = \frac{2}{3{,}375} \cdot \frac{1}{6} \cdot (0{,}75 - 0{,}933)(0{,}75 - 0{,}5) \cdot (0{,}75 - 0{,}067) = 0$

$x_0 = 0{,}5$, то це все $= 0$

$R_2(x_i) = 0$

Назарій: $\frac{1}{1+x^2}$, $[-2, 2]$

Антон: $|x|$ $[-3, 3]$

Руслан: $\cos(x)$ $[-\pi, \pi]$

Андрій: $\sin(x)$ $[-\pi, \pi]$

Влада: $ax_j^2 \to a$ $[-5, 5]$

Нікіта: e^{-x^2} $[-2, 2]$

інтерполювати

Ньютон

Ньютон, Лагранж

різн. за часом

Лаб № 4

$f(x)$, $x \in [a, b]$

→ (n) з клавіатури (ст. полінома)

$L_n^1(x)$ – 1) $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ $x_i - x_{i-1} = h = const$

$L_n^2(x)$ – 2) $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ – нулі багаточлена Чебишова

1, 2) ⇒ (x_i, f_i) $L_n^1(x)$, $L_n^2(x)$

e^{-x^2}

ax^2, a

$\bar{x} \in [a, b]$ з клавіатури

$L_n^1(\bar{x})$, $L_n^2(\bar{x})$

інтерполянт в т.

(схема Горнера ж т.)

$R_n(x)$ $f^{(n+1)}(x)$

$R_n(\bar{x})$

3) (x_i, f_i)

$f(x) =$ (a) з клавіатури ⇒ x^*

застосувати обернену інтерполяцію

Лабу №3 зараховано ✓