Поліноми Чебишова

Формула

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x.$$

$$T_n(x) = q^n,\ q = q(x) \neq 0$$

$$q^{n+1} - 2q^n + q^{n-1} = 0$$

$$q^{n-1}(q^2 - 2xq + 1) = 0,\ q = q(x) \neq 0$$

$$(q^2 - 2xq + 1) = 0$$

$$q_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

1) $|x| \geqslant 1$

$$T_n(x) = Aq_1^n(x) + Bq_2^n(x)$$

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x \Rightarrow A = B = \frac{1}{2}$$

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$$

$$T_0(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^0 + (x - \sqrt{x^2 - 1})^0}{\begin{array}{l}2\\ \qquad\qquad 1\end{array}} = 1$$

$$T_1(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^1 + (x-\sqrt{x^2-1})^1}{2} = x$$

$\ldots$

Тригонометрична формула

$x \in [-1;1] \quad x = \cos t \;\Rightarrow\; t = \arccos x \quad t \in [0;\pi]$

$$\sqrt{1-x^2} = \sin t;\ \ (\cos t \pm i \sin t)^n = \cos nt \pm i \sin nt$$

$$T_n(t) = \frac{(\cos t + i\sin t)^n + (\cos t - i \sin t)^n}{2} = \cos nt$$

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Поліноми Чебишова

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ *і так далі*

з 1 при старшому степені

$\overline{T_n}(x) = 2^{1-n} T_n(x)$

$\overline{T_0}(x) = 1$

$\overline{T_1}(x) = x$

$$\overline{T_2}(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\overline{T_3}(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$$

$\ldots$

Властивість 1

Серед усіх поліномів $P_n(x)$ *степеня* n *із старшим коефіцієнтом, що дорівнює 1 багаточлен* $\overline{T_n}(x)$ *найменш відхиляється від нуля на проміжку* $[-1,1]$ *та*

$$||P_n(x)||_{C[-1,1]} \geqslant ||\overline{T_n}(x)||_{C[-1,1]} = 2^{1-n}$$

Властивість 2

$T_n(x) \qquad [-1;1] \qquad \rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$(T_k(x), T_m(x))_{L_{2,\rho}[a,b]} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) T_m(x) = \begin{cases} = 0, & \text{якщо } k \neq m \\ \neq 0, & \text{якщо } k = m \end{cases}$$

Нулі полінома Чебишова

$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0$

$n \arccos x = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$

$\arccos x = \dfrac{\pi(2k+1)}{2n}$

$x_k = \cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \qquad k = \overline{0, n-1}$

Екстремуми полінома Чебишова

$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 1$

$n \arccos x = \arccos 1 = \pi k$

$\arccos x = \dfrac{\pi k}{n}$

$x_k = \cos \dfrac{\pi k}{n}$

Поліноми Чебишова на [a;b]

$$x = \frac{1}{2}((b-a)z + (b+a)) \;\Rightarrow\; [-1,1] \to [a,b]$$

$$T_n^{[a;b]}(x) = T_n^{[-1;1]}\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$$

Нулі поліному:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} \qquad k = \overline{0, n-1}$$

Відхилення від 0: $||\overline{T_n}^{[a;b]}(x)||_{C[a,b]} = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n}$

З 1 при старшому степені:

$$\overline{T_n}^{[a;b]}(x) = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n} T_n^{[-1;1]}\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$$

Приклад

На проміжку $[0;1]$ *побудувати многочлен Чебишова 4 степеня з 1 при старшому степені. Обчислити відхилення від нуля.*

Розв'язок

$x \in [0;1] \qquad t \in [-1;1] \qquad T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$

$$\overline{T_4}^{[0;1]}(x) = (1-0)^4 \cdot 2^{1-2\cdot 4} T_4^{[-1;1]}\left(\frac{2x-(1+0)}{1-0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^7}\left(8(2x-1)^4 - 8(2x-1)^2 + 1\right) =$$

$$= x^4 - 2x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{128}$$

$$||\overline{T_4}^{[0;1]}(x)|| = (1-0)^4 \cdot 2^{1-2\cdot 4} = \frac{1}{128}$$

Інтерполяція

Постановка задачі

Задано: $x_k \in [a;b]$ $k = \overline{0,n}$, $f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$. *Потрібно побудувати наближення* $F(x)$ *до функції* $f(x)$.

$$f(x) \approx F(x)$$

Функція $F(x)$, *що відповідає умовам* $f(x_k) = F(x_k)$ $\forall x_k$ $k = \overline{0,n}$ *називають інтерполюючою.*

Теорема Вейерштрасса. На компакті Ω *неперервну функцію* $f(x)$ *можна як завгодно точно наблизити поліномом* n*-го степеня* $P_n(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists P_n(x) \; : \; ||f(x) - P_n(x)|| < \varepsilon \; \forall x \in \Omega$$

$F(x) \equiv P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$

Функцію $P_n(x)$, *що відповідає умовам*

$$f(x_k) = P_n(x_k), \; k = \overline{0,n}$$

називають інтерполяційним поліномом, умови - інтерполяційними, точки $x_k \in [a,b]$ *- вузлами інтерполяції.*

Нехай $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ *система лінійно незалежних функцій*

Визначення. Функцію

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x), \; c_i \in R^1$$

називають узагальненим багаточленом. Якщо $F_n(x)$ задовольняє інтерполяційним умовам, то $F(x)$ називають узагальненим інтерполяційним багаточленом.

$$F_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x_k) = f(x_k),\ k = \overline{0,n}$$

Одержали систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих c_i, $i = \overline{0,n}$. Визначник цієї системи

$$D[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n] = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \ldots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

оскільки система функцій $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ - лінійно незалежна. Отже неоднорідна система лінійних рівнянь має єдиний розвязок.

Нехай m - число вузлів інтерполяції, n - степінь інтерполяційного полінома. Поставлена задача буде мати єдиний розв'язок у випадку коли $m = n + 1$.

Визначення. Система функцій $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ називається системою Чебишева порядку n на компакті Ω, якщо будь-який узагальнений багаточлен, що побудований за цією системою та у якого хоча б один коефіцієнт відмінний від нуля, має на Ω не більш як n коренів.

Теорема про існування інтерполяційного узагальненого багаточлена.

Для $f(x) \in C[a,b]$ існує єдиний узагальнений інтерполяційний поліном тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ задана в $n + 1$-ій точці $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqslant b$, а система $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ є системою Чебишева.

Теорема.

Нехай $\varphi_i(x) \in C^2[a,b],\ i = \overline{o,n}$.

Якщо $D[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k] \neq 0,\ k = \overline{0,n}$ *для всіх* $x \in [a,b]$, *то система функцій* $\varphi_i(x),\ i = \overline{o,n}$ *є системою Чебишева.*

Приклади системи функцій Чебишева.

1) $\varphi_i(x) = x^i,\ i = \overline{0,n}$

2) $\{1, cosx, sinx, \ldots, coskx, sinkx\}$

3) $\varphi_i(x) = T_i(x),\ i = \overline{0,n}\ T_i(x)$ *- система ортогональних функцій Чебишева*

4) $\varphi_i(x) = L_i(x),\ i = \overline{0,n}$, $L_i(x)$ *- система ортогональних функцій Лагранжа*

Інтерполяційний поліном Лагранжа

Побудуємо інтерполяційний поліном. На підставі теореми Вейєрштрасса неперевну функцію $f(x)$, *що задана своїми значеннями будемо шукати у вигляді полінома*

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x),$$

$\varphi_i(x)$ *- поліноми степеня не вище* n.

$L_n(x)$ *завольняє інтерполяційні умови, т.т:*

$$L_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x_k) = f(x_k) \ \Rightarrow\ \varphi_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Поліноми, що відповідають останній рівності називають фундаментальними поліномами Лагранжа.

Одержали, що $(x - x_k),\quad k \neq i$ *є дільником шуканого полінома*

$\varphi_n(x)$. *Отже:*

$$\varphi_n(x) = const \prod_{k=0,k\neq i}^{n} (x - x_k)$$

.

Для знаходження $const$ *використаємо умову* $\varphi_i(x_i) = 1$

$$\varphi_n(x_i) = const \prod_{k=0,k\neq i}^{n} (x_i - x_k) = 1$$

$$const = \frac{1}{\prod_{k=0,k\neq i}^{n}(x_i - x_k)}$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)} f(x_k)$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} f(x_k)$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

Оцінка точності інтерполяційної формули Лагранжа

Нехай $f(x) \in C^{n+1}[a,b]$. *Функція* $f(x)$ *задана своїми значеннями* $f(x_k)$, $k = \overline{0,n}$ *у вузлах інтерполяції* $x_k \in [a,b], k = \overline{0,n}$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} f(x_k)$$

Величина $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ *називається похибкою інтерполяції. На підставі інтерполяціних умов:*

$$R_n(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) = 0$$

Постає питання: $R_n(x)-?,\ x \neq x_k, k=\overline{0,n}$.

Для знаходження похибки інтерполяції розглянемо функцію

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - k\omega_{n+1}(t).$$

Нехай в точці $t = x$ *функція* $\varphi(x) = 0,\ \Rightarrow\ k = \dfrac{f(x) - L_n(x)}{\omega_{n+1}(x)}$, *тоді* $\varphi(x) = 0$ *в* $n+2$*-х точках:*

$$x, x_0, x_1, \ldots, x_n.$$

На підставі теореми Ролля $\varphi'(x) = 0$ *в* $n+1$*-й точці,*
$\varphi''(x) = 0$ *в* n *точках*

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$$

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0$$

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Одержали, що

$$f(x) - L_n(x) = k\omega_{n+1}(x)$$

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|$$

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{(n+1)}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}|\omega_{n+1}(x)|$$

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{(n+1)}}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}(x)\|_{C[a,b]}$$

$$\|\omega_{n+1}(x)\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |\omega_{n+1}(x)|$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Приклад

Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа для функції $f(x) = 3^x$*,* $x \in [-1;1]$*. Використати три вузли. Знайти наближене значення функції в точці 0.5.*

Розв'язок

3 вузли $\Rightarrow \quad n = 2$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	-1	1/3
1	0	1
2	1	3

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_k)\omega'_{n+1}(x_k)} f(x_k)$$

$$L_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} +$$

$$+ f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + 1\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} +$$

$+3\dfrac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x + 1$
$L_2(0.5) = \dfrac{2}{3}(0.5)^2 + \dfrac{4}{3}0.5 + 1 = \dfrac{11}{6} \approx 1.833$

Обчислення полінома в деякій точці

Нехай потрібно обчислити значення поліному

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

в точці $\overline{x}$.

Алгоритм 1.

1. $S_1 = a_1 x + a_0$ - 1 операція *, 1 операція +;

2. $S_2 = S_1 + a_2 x^2$ - 2 операції *, 1 операція +;

....

n. $S_n = S_{n-1} + a_n x^n$ - n операцій *, 1 операція +;

Всього: $Q_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2} + n$

Алгоритм 2.

1. Послідовно обчислюємо та запам'ятовуємо $x^2,\ ,x^3,\ \ldots,\ x^n$. Це потребує $n-1$ операцію *.

2. Обчислюємо $a_j x^j$, $j = \overline{1,n}$ - n операцій *.

3.
$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Всього: $Q_2(n) = (2n-1) + n$. У випадку $n > 2$ маємо $Q_1(n) > Q_2(n)$.

Алгоритм 3.

Запишемо $P_n(x)$ у вигляді

$$P_n(x) = (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \cdots + a_0.$$

На кожному кроці потрібно: 1 операція *, 1 операція +.

Всього: $Q_3(x) = n + n$, отже $Q_1(n) > Q_2(n) > Q_3(n)$.

Інетерполяційний поліном Ньютона

Розділені різниці та їх властивості

Першого порядку: $f(x_i; x_j) = \dfrac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}$

Другого порядку:

$$f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_i; x_{i+1}) - f(x_{i-1}; x_i)}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

(k+1) порядку: $f(x_i; x_{i+1}; ...; x_{i+k}; x_{i+k+1}) =$

$$= \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; ...; x_{i+k+1}) - f(x_i; x_{i+1}; ...; x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}$$

1. Має місце рівність

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{i \neq j}(x_j - x_i)}$$

2. При фіксованих $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ розділена різниця є лінійним функціоналом від функції f:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x_1; x_2; \ldots; x_n) = \alpha_1 f_1(x_1; x_2; \ldots; x_n) + \alpha_2 f_2(x_1; x_2; \ldots; x_n).$$

3. Розділена різниця є симетричною функцією своїх аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Якщо функція задана своїми значеннями $x_0, x_1, \ldots, x_n$, то таблицю

$$
\begin{array}{llllllll}
x_0 & f(x_0) & f(x_0;x_1) & f(x_0;x_1;x_2) & \cdots & \cdots & \cdots & f(x_0;x_1;\ldots;x_n) \\
x_1 & f(x_1) & f(x_1;x_2) & f(x_1;x_2;x_3) & \cdots & \cdots & f(x_0;x_1;\ldots;x_{n-1}) & \\
x_2 & f(x_2) & f(x_2;x_3) & f(x_1;x_2;x_3) & \cdots & f(x_1;x_0;\ldots;x_{n-2}) & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \cdots & f(x_{n-1};x_{n-2}) & & & & & \\
x_n & f(x_n) & & & & & &
\end{array}
$$

називають таблицею розділених різниць.

Інтерполяційна формула Ньютона

Має місце рівність:

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} =$$

$$\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \left(\frac{f(x)}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x) \prod_{j \neq i}(x_i - x_j)} \right).$$

Використовуючи першу властивість розділених різниць, одержимо:

$$f(x) - L_n(x) = f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Позначимо: $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$. *Тоді*

$$f(x) - L_n(x) = f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n)\omega_{n+1}(x).$$

Нехай $L_m(x)$ *- інтерполяційний поліном Лагранжа, що побудовано з вузлами* $x_0, x_1, \ldots, x_m$. *Інтерполяційний поліном Лагранжа можна подати у вигляді*

$$L_n(x) = L_0(x) + (L_1(x) - L_0(x)) + (L_2(x) - L_1(x)) + \cdots + (L_n(x) - L_{n-1}(x)).$$

Різниця $L_m(x) - L_{m-1}(x)$ *є багаточленом степеня* m*, що дорівнює нулю в точках* $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$*, оскільки*

$$L_{m-1}(x_j) = L_m(x_j) = f(x_j),\ 0 \leqslant j \leqslant m-1.$$

Маємо

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = A_m \omega_m(x),\ \omega_m(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_{m-1})$$

.

Покладемо $x = x_m$*. Отримаємо*

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = A_m \omega_m(x_m)$$

.

З першої рівності, у випадку коли $n = m-1,\ x = x_m$*, дістанемо*

$$f(x_m) - L_{m-1}(x_m) = f(x_m; x_0; \ldots; x_{m-1}) \omega_m(x_m).$$

Поорівняємо останні дві рівності. Одержимо:

$$A_m = f(x_0; x_1; \ldots; x_m),$$

$$L_m(x) - L_{m-1}(x) = f(x_0; x_1; \ldots; x_m) \omega_m(x).$$

Підставимо останній вираз в $L_n(x)$ *і отримаємо таку формулу*

$$L_n(x) = P_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

$$\cdots + f(x_0; x_1; \ldots; x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- *інтерполяційна формула Ньютона (вперед).*

x_0	$f(x_0)$	$f(x_0; x_1)$	$f(x_0; x_1; x_2)$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$f(x_0; x_1; \ldots;$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_1; x_2; x_3)$	$\cdots$	$\cdots$	$f(x_0; x_1; \ldots; x_{n-1})$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2; x_3)$	$f(x_1; x_2; x_3)$	$\cdots$	$f(x_1; x_0; \ldots; x_{n-2})$		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$			
$\cdots$	$\cdots$	$f(x_{n-1}; x_{n-2})$					
x_n	$f(x_n)$						

Інтерполяційна формула Ньютона (назад)

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}; x_n)(x - x_n) + f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots$$

$$\cdots + f(x_0; x_1; \ldots; x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1})\cdots(x - x_1)$$

Обирають ту чи іншу формули Ньютона, в залежності від того, де знаходиться точка x (в якій потрібно обчислити значення поліному). Якщо ближче до точки x_0, то інтерполяційну формулу Ньютона вперед. Якщо ближче до x_n, то інтерполяційну формулу Ньютона назад.

Для практичного застосування найчастише використовують інтерполяційні поліноми Ньютона, оскільки при їх обчисленні можна застосовувати схему Горнера.

За точністю зручно слідкувати таким чином: якщо доданки $f(x_o; x_1; \ldots; x_k)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})$ в інтерполяційній формулі спадають достатньо швидко, то мажна очикувати на гарну точність.

Похибка інтерполяції

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|$$

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$\omega(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$

Інше представлення

$$f(x) - L_n(x) = \omega(x) f(x, x_0, x_1, ..., x_n)$$

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

Зауваження

$$f(x, x_0, x_1, ..., x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Приклад

Побудувати інтерполяційний поліном Ньютона для функції $f(x) = 3^x$, $x \in [-1; 1]$. Використати три вузли. Оцінити похибку обчислення функції в точці 0.5.

Розв'язок

3 вузли $\Rightarrow$ $n = 2$ $h = 1$

k	x_k	$f(x_k)$	p.p.I п.	p.p.II п.
0	-1	$\boxed{1/3}$		
			$\frac{1 - 1/3}{1 - 0} = \boxed{2/3}$	
1	0	1		$\frac{2 - 2/3}{1 - (-1)} = \boxed{2/3}$
			$\frac{3 - 1}{0 - (-1)} = 2$	
2	1	3		

$P_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) +$

$+ f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x + 1) +$

$$+\frac{2}{3}(x+1)x = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$
$$M_3 = \max_{x\in[-1;1]} |(3^x)'''(x)| = 3\ln^3 3 \approx 3.978$$

$$|f(0.5) - P_2(0.5)| \leqslant \frac{M_3}{3!}|(0.5 - x_0)(0.5 - x_1)(0.5 - x_2)| =$$

$$= \frac{3.978}{6}|(0.5+1)(0.5-0)(0.5-1)| \approx 0.25$$