№ 1

1. Степеневим методом із точністю 10^{-3} знайти максимальне власне значення матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{pmatrix}.$$

$x^0=(1,1,1)$, $\varepsilon=10^{-3}$

$$x^{n+1}=Ax^n,\quad n=0,1,\dots$$

$$\lambda_k^{n+1}=\frac{x_k^{n+1}}{x_k^n},\quad x^n=(x_1^n, x_2^n, \dots x_n^n)$$

$$x^1=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{6}\\ \frac{13}{12}\\ \frac{47}{60}\end{pmatrix}$$

$\lambda^1_{k}-\lambda^1_{k-1}>\varepsilon$

$\lambda_1^1=\frac{11}{6}=1{,}8333$

$\lambda_k^1>\varepsilon,\quad k=\overline{1,3}$

$\frac{11}{6}-\frac{13}{12}>\varepsilon \qquad \frac{13}{12}-\frac{47}{60}>\varepsilon$

$$x^2=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{11}{6}\\ \frac{13}{12}\\ \frac{47}{60}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}6361\\ 1{,}4736\\ 1{,}0386\end{pmatrix}$$

$\lambda_1^2=1{,}4376$

$|\lambda_k^{n+1}-\lambda_k^n|<\varepsilon$

$$x^3=\begin{pmatrix}1 & \frac12 & \frac13\\ \frac12 & \frac13 & \frac14\\ \frac13 & \frac14 & \frac15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2{,}6361\\ 1{,}4736\\ 1{,}0386\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3{,}7191\\ 2{,}0689\\ 1{,}4548\end{pmatrix}$$

Подробности (Умножение матриц)

$\lambda_1^3=1{,}4108 \qquad \lambda_1^3-\lambda_1^2>\varepsilon$

$$x^4=\begin{pmatrix}1 & \frac12 & \frac13\\ \frac12 & \frac13 & \frac14\\ \frac13 & \frac14 & \frac15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{37191}{10000}\\ \frac{20689}{10000}\\ \frac{72741}{50000}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5{,}2385\\ 2{,}9129\\ 2{,}0479\end{pmatrix}$$

Подробности (Умножение матриц)

...

№2 (min λ)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(2) > 0$, $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$, $\det A > 0$ ☑ умова, ✓ $A = A^T$

алгоритм: 1) $\lambda_1 = \lambda_{max}(A)$ $B = \lambda_{max}(A) \cdot E - A$ (1) $\lambda_{min}(A) = \lambda_{max}(A) - \lambda_{max}(B)$

2) $\|A\|_\infty$ $B = \|A\|_\infty E - A \Rightarrow \lambda_{max}(B)$ (2)

$\lambda_{min}(A) = \|A\|_\infty - \lambda_{max}(B)$

$\|A\|_\infty = 4$

$B = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Скалярний

1. $x^0 = (1,1,1)^T$

$e^0 = \frac{x^0}{\|x^0\|_\infty} = (1,1,1)^T$

$x^1 = B \cdot e^0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda^1 = (x^1, e^0) = 2$

$\lambda_1 = \frac{(x^1, x^0)}{(x^0, x^0)} = \frac{2}{3}$

$|\lambda_n - \lambda_{n-1}| < \varepsilon$ умова зупинки

Степеневий

$\lambda_1^1 = \frac{x_1^1}{x_1^0} = \frac{1}{1} = 1?$

$\lambda_1^2 = \frac{x_1^2}{e_1^1} = \frac{2}{1} = 2$

2. $e^1 = \frac{x^1}{\|x^1\|_\infty} = (1,0,1)^T$

$x^2 = B \cdot e^1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = \frac{(x^2, x^1)}{(x^1, x^1)} = \frac{4}{2} = 2$

$\lambda^2 = (x^2, e^1) = 4$ $|\lambda_2 - \lambda_1| = 2 > \varepsilon$

$\lambda_3 = \frac{x_1^3}{e_1^2} = \frac{3}{1} = 3$

3. $e^2 = \frac{x^2}{\|x^2\|_\infty} = (1,-1,1)^T$

$\lambda^n = \frac{(x^{n+1}, x^n)}{(e^n, e^n)}$ альтернативна формула

$\cancel{\lambda^n = \frac{(x^{n+1}, x^n)}{(e^n, e^n)}}$ у якусь площину

$x^3 = B \cdot e^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = \frac{(x^3, x^2)}{(x^2, x^2)} = \frac{20}{12} = 1.(6)$

$\lambda^3 = (x^3, e^2) = 10$ $|\lambda_3 - \lambda_2| = 6$

$x^3 = \frac{B \cdot x^2}{\|x^2\|}$

???

Степеневий

$x^{n+1} = Bx^n$

Зауваження: нормувати, щоб уникнути переповнення

1) $x_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $x_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda^1 = 2$

3) $x_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\lambda_3^1 = 3$

4) $x_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -28 \\ 20 \end{pmatrix}$

$\lambda_4^1 = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} = 3.(3)$

5) x_5 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -28 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ -96 \\ 68 \end{pmatrix}$

$\lambda_5^1 = \frac{68}{20} = \frac{17}{5} = 3{,}4$

6) $x_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 68 \\ -96 \\ 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 232 \\ -328 \\ 232 \end{pmatrix}$

$\lambda_6^1 = \frac{232}{68} = 3{,}4117$

7) $x_7 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 232 \\ 328 \\ 232 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 792 \\ 1120 \\ 792 \end{pmatrix}$

$\lambda_7^1 = 3{,}41379$

8) $x_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 792 \\ 1120 \\ 792 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2704 \\ 3824 \\ 2704 \end{pmatrix}$

$\lambda_8^1 = 3{,}4141$

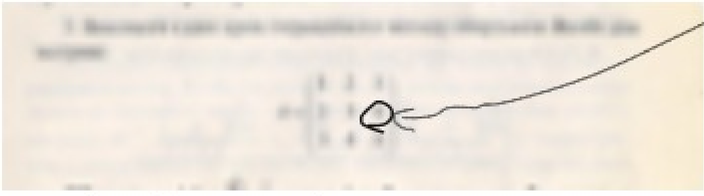
9) $x_9 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2704 \\ -3824 \\ 2704 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9232 \\ [illegible] \\ 9232 \end{pmatrix}$

$\lambda_9^1 = 3{,}414201$

$|\lambda_9^1 - \lambda_8^1| < \varepsilon$

$\lambda_{min}(A) = 4 - 3{,}414201 \approx 0.585798$

№3



Метод обертань (Якобі)

$$a^k_{i_k j_k} = \max_{i \neq j} |a^k_{ij}| \quad i = \overline{1,n} \quad j = \overline{2+1,n}$$

$$a^{k+1}_{ij} = 0$$

$$\varphi_k = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a^k_{ij}}{a^k_{ii} - a^k_{jj}}$$

Якщо $a_{ii} = a_{jj}$, то $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$t(A_k) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a^2_{ij}$$

Умова припинення: $t(A_N) \leqslant \varepsilon$

✓ $A = A^T$, $i=2,\ j=3$

$$\varphi_k = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot a^k_{ij}}{a^k_{ii} - a^k_{jj}}$$

1) $k=0$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot 4}{3-5} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-4) = -0{,}663$$

$\cos\varphi_0 = 0{,}788$

$\sin\varphi_0 = -0{,}615$

$$U^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}788 & -0{,}615 \\ 0 & 0{,}615 & 0{,}788 \end{pmatrix}$$

$$A^1 = U^0 A^0 U^{0T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}788 & -0{,}615 \\ 0 & 0{,}615 & 0{,}788 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}788 & -0{,}615 \\ 0 & 0{,}615 & 0{,}788 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}269 & 3{,}594 \\ -0{,}269 & -0{,}1230 & 0{,}0016 \\ 3{,}594 & 0{,}0016 & 8{,}1164 \end{pmatrix}$$

$k=2$, $i=1,\ j=3$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot 3{,}594}{1 - 8{,}1164} = -0{,}395$$

$\cos(\varphi_2) = 0{,}923$

$\sin(\varphi_2) = -0{,}385$

$$A^{k+1} = U^k A^k U^{kT}$$

$$U^? = \begin{pmatrix} 0{,}923 & 0 & -0{,}385 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}385 & 0 & 0{,}923 \end{pmatrix}$$

$$A_N \approx \Lambda$$

$$S(A_k) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} |a^k_{ij}| < \varepsilon$$

$$A^{k+1} = U^{kT} A^k U^k$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0{,}923 & 0 & -0{,}385 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}385 & 0 & 0{,}923 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{-269}{1000} & \frac{1797}{500} \\ \frac{-269}{1000} & \frac{-123003}{1000000} & \frac{409}{250000} \\ \frac{1797}{500} & \frac{409}{250000} & \frac{1623271}{200000} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}923 & 0 & -0{,}385 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}385 & 0 & 0{,}923 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -0{,}4993 & -0{,}2489 & 0{,}0003 \\ -0{,}2489 & -0{,}1230 & -0{,}1021 \\ 0{,}0003 & -0{,}1021 & 9{,}6171 \end{pmatrix}$$