$z = f(x, y)$

$P_1(x, y) = a_0 + a_1 x + b_1 y$ — 3 точки

$P_2(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{22} y^2$

(x_1, y_1)

$(x_2, y_1)\ (x_2, y_2)$

$(x_3, y_1)\ (x_3, y_2)\ (x_3, y_3)$

$\frac{n(n+1)}{2}$

n — 6 точек

miro

i	0	1	2
x_i	0	1	2
$f(x_i)=y_i$	0	1	4

Інтерполяційний поліном Лагранжа

$$L_2(x)=\sum_{p=0}^{2} f(x_p)\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{p-1})(x-x_{p+1})\dots(x-x_n)}{(x_p-x_0)\dots(x_p-x_{p-1})(x_p-x_{p+1})\dots(x_p-x_n)}$$

$$L_2(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=$$

$$=0\cdot\frac{\dots}{\dots}+1\cdot\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}+4\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}=$$

$$=-x(x-2)+\cancel{4}^{2}\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{\cancel{2}\,1}=$$

$$=-x(x-2)+2x(x-1)=x(2x-2-x+2)=\boxed{x^2}$$

$f(x)=x^2$ $\quad M_3=0$

$$|R_2(x)|\le\frac{M_3}{3!}|(x-0)(x-1)(x-2)|$$

$\Downarrow$

Інетерполяційний поліном Ньютона

Розділені різниці та їх властивості

Першого порядку: $f(x_i;x_j)=\dfrac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$

Другого порядку:

$$f(x_{i-1};x_i;x_{i+1})=\frac{f(x_i;x_{i+1})-f(x_{i-1};x_i)}{x_{i+1}-x_{i-1}}$$

(k+1) порядку: $f(x_i;x_{i+1};...;x_{i+k};x_{i+k+1})=$

$$=\frac{f(x_{i+1};x_{i+2};...;x_{i+k+1})-f(x_i;x_{i+1};...;x_{i+k})}{x_{i+k+1}-x_i}$$

1. Має місце рівність

$$f(x_1;x_2;\ldots;x_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{f(x_j)}{\prod_{i\neq j}(x_j-x_i)}$$

3. Розділена різниця є симетричною функцією своїх аргументів $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

Якщо функція задана своїми значеннями $x_0,x_1,\ldots,x_n$, *то таблицю*

$$\begin{array}{llllllll}
x_0 & f(x_0) & f(x_0;x_1) & f(x_0;x_1;x_2) & \cdots & \cdots & \cdots & f(x_0;x_1;\ldots; \\
x_1 & f(x_1) & f(x_1;x_2) & f(x_1;x_2;x_3) & \cdots & \cdots & f(x_0;x_1;\ldots;x_{n-1}) & \\
x_2 & f(x_2) & f(x_2;x_3) & f(x_1;x_2;x_3) & \cdots & f(x_1;x_0;\ldots;x_{n-2}) & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \cdots & f(x_{n-1};x_{n-2}) & & & & & \\
x_n & f(x_n) & & & & & &
\end{array}$$

називають таблицею розділених різниць.

miro

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
$f(x_i)=y_i$	0	1	4	9

$m=4 \Rightarrow n=3$

$P_3(x) - ?$

Інтерполяційна формула Ньютона (вперед)

k	x_k	$f(x_k)$	I р	II р	III р
0	0	0			
			$\frac{1-0}{1-0}=1$		
1	1	1		$\frac{3-1}{2-0}=1$	
			$\frac{4-1}{2-1}=3$		$\frac{1-1}{3-0}=0$
2	2	4			
			$\frac{9-4}{3-2}=5$	$\frac{5-3}{3-1}=1$	
3	3	9			

інтерполянт 2-го степеня

$$P_{\cancel{3}\,2}(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x-x_0) +$$
$$+ f(x_0, x_1, x_2)(x-x_0)(x-x_1) +$$
$$+ \underbrace{f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}_{=0}$$

$x = 0{,}5$

$$P_2(x) = 0 + 1\cdot(x-0) + 1\cdot(x-0)(x-1) =$$
$$= x + x^2 - x = x^2$$

$$P_2(0{,}5) = 0{,}5 + 0{,}5\cdot(0{,}5-1) =$$
$$= 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$$

miro