Розв'язання задач на власні значення

Повна та частинна проблеми на власні значення

Постановка задачі

Нехай задано матрицю A розмірності $n \times n$. Потрібно знайти ті значення λ при яких задача

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}$$

має ненульовий розв'язок $\overline{x} \neq \overline{0}$.

$$(A - \lambda E)\overline{x} = \overline{0}$$

$P_n(\lambda) = det(A - \lambda E) = 0$ – характеристичний багаточлен, його корені і будуть власними числами

λ_i, $i = \overline{1, n}$ $\quad \overline{x}_i$: $\quad A\overline{x}_i = \lambda_i\overline{x_i}$

якщо $\overline{x}$, $\overline{y}$ – власні вектори, що відповідають власному числу λ, то і вектор $\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}$ є власним вектором λ.

В силу рівностей

$$det(A - \lambda E) = det(A - \lambda E)^T = det(A^T - \lambda E)$$

маємо: Якщо λ – власне значення матриці A, то λ – власне значення матриці A^T.

Теорема Шура.

Для довільної матриці A розмірності $n \times n$ існує унітарна матриця U така, що

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

де $\lambda_i,\ i = \overline{1,n}$ – власні значення матриці A (необов'язково різні).

Наслідок теореми Шура.

Для довільної ермітової м-ці A існує унітарна м-ця U така, що

$$U^{-1} A U = U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

при цьому всі власні значення $\lambda_I,\ i = \overline{1,n}$ м-ці A є дісними, а i-й стовбчик U є власним вектором, що відповідає власному значенню λ_i, т.т. м-ця A має n лін. незалежних власних векторів.

Визначення границь власних значень. Відношення Релея.

Нехай $A = A^T$,

$$Ax = \lambda x,$$

впорядкуємо власні числа

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n,$$

що відповідають власним векторам

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n.$$

Система власних векторів $\{x_i\}_{i=1}^n$ – ортонормована.
Якщо $x \neq 0$, то

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

Розглянемо

$$(Ax, x) = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \cdots + \lambda_n c_n^2,$$

$$Ax_i = \lambda_i x_i$$

$$(x, x) = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2.$$

Маємо

$$(Ax, x) = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \cdots + \lambda_n c_n^2 \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_n(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2).$$

З іншого боку

$$(Ax, x) = \lambda_1 c_1^2 + \lambda_2 c_2^2 + \cdots + \lambda_n c_n^2 \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_1(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2).$$

Одержали

$$\lambda_1(x,x) \leqslant (Ax,x) \leqslant \lambda_n(x,x)$$

чи

$$\lambda_1 \leqslant \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \leqslant \lambda_n$$

Часткова проблема власних значень

Степеневий метод із формулою скалярних добутків

Постановка задачі: потрібно знайти максимальне за модулем власне значення матриці A.

$$Ae_i = \lambda_i e_i,\ (e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_m|.$$

Оберемо деякий вектор x^0 та послідовно обчислюємо вектори

$$x^{n+1} = Ax^n$$

x^0 подамо у вигляді

$$x^0 = \sum_{i=1}^{m} c_i e_i.$$

Маємо:

$$x^n = A^n x^0$$

$$Ae_i = \lambda_i e_i$$

$$x^n = \sum_{i=1}^{m} c_i A^n e_i = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i^n e_i$$

$$x^n = c_1\lambda_1 e_1 + O(|\lambda_2|^n)$$

$$(x^n, x^n) = (c_1\lambda_1^n e_1 + O(|\lambda_2|^n), c_1\lambda_1 e_1 + O(|\lambda_2|^n)) =$$

$$= |c_1|^2|\lambda_2|^{2n} + O(|\lambda_1|^n|\lambda_2|^n),$$

$$(x^{n+1}, x^n) = (c_1\lambda_1^{n+1} + O(|\lambda_2|^{n+1}), c_1\lambda_1^n e_1 + O(|\lambda_2|^n)) =$$

$$= \lambda_1|c_1|^2|\lambda_1|^{2n} + O(|\lambda_1|^{n+1}|\lambda_2|^n).$$

Покладемо

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{(x^{n+1}, x^n)}{(x^n, x^n)}.$$

Із останніх співвідношень у випадку коли $c_1 \neq 0$ отримаємо

$$\lambda_1^{(n)} = \frac{\lambda_1|c_1|^2|\lambda_1|^{2n} + O(|\lambda_1|^{n+1}|\lambda_2|^n)}{|c_1|^2|\lambda_1|^{2n} + O(|\lambda_1|^n|\lambda_2|^n)} =$$

$$\frac{\lambda_1\left(1 + O(\frac{1}{|c_1|^2}\frac{|\lambda_2|^n}{|\lambda_1|^n})\right)}{1 + O(\frac{1}{|c_1|^2}\frac{|\lambda_2|^n}{|\lambda_1|^n})} =$$

$$= \lambda_1 + O\frac{|\lambda_2|^n}{|\lambda_1|^n}.$$

Маємо

$$\|x^n\| = (x^n, x^n)^{1/2} = |c_1||\lambda_1| + O(|\lambda_2|^n),$$

$$e_i^n = \frac{x^n}{\|x^n\|}.$$

Алгоритм: 1) Обираємо $x^0 \neq 0$

2)Для $k = 0, 1, \ldots$ обчислюємо

$$e^k = \frac{x^k}{\|x^k\|},\ x^{k+1} = Ae^k,\ \mu_k = (x^{k+1}, e^k).$$

3)Процес продовжується до виконання умови $|\mu_N - \mu_{N-1}| < \varepsilon$, де ε – задана точність.

Тоді $\lambda_1 \approx \mu_N,\ x_1 \approx e^N$.

Розглянемо випадок:

$$\lambda_1 \neq \lambda_2,\ |\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3| \geqslant \cdots .$$

Нехай

$$A,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ x^0$$

– дійсні, $\lambda_1 > 0,\ \lambda_1 = -\lambda_2$.

Тоді

$$x^n = c_1\lambda_1^n e_1 + c_2(\lambda_1)^n e_2 + O(|\lambda_3|^n),$$

$$x^{n+2} = c_1\lambda_1^{n+2} e_1 + c_2(-\lambda_1)^{n+2} + O(|\lambda_3|^{n+2}) =$$

$$= \lambda_1(c_1\lambda_1^n e_1 + c_2(-\lambda_1)^n c_2 + O(|\lambda_3|^n).$$

Одержимо

$$\tilde{\lambda}^n = \frac{(x^{n+2}, x^n)}{(x^n, x^n)} = \lambda_1^2 + O(|\lambda_3/\lambda_1|^n).$$

Якщо

$$\tilde{\lambda}^n > 0,$$

то покладемо

$$\lambda_{1,2}^n = \pm\sqrt{\tilde{\lambda}^n}.$$

Одержимо

$$z_1^{n+1} = x^{n+1} + \lambda_1^n x^n = 2c_1\lambda_1^{n+1} + O(|\lambda_3|^n),$$

отже

$$e_1^n = \frac{z_1^{n+1}}{\|z_1^{n+1}\|} = e_1 + O(|\lambda_3/\lambda_1|^n).$$

Аналогічно

$$z_2^{n+1} = x^{n+1} + \lambda_2^n x^n = 2c_2\lambda_2^{n+1} + O(|\lambda_3|^n),$$

$$e_2^n = \frac{z_2^{n+1}}{\|z_2^{n+1}\|} = e_2 + O(|\lambda_3/\lambda_1|^n)$$

<u>Степеневий метод</u>

$|\lambda_1| > |\lambda_2| > ... > |\lambda_n|$

$\forall \overline{x}_0 \neq \overline{0}$

$x^{(1)} = Ax^{(0)}$

$x^{(2)} = Ax^{(1)} = A^2x^{(0)}$

....

$x^{(n)} = A^n x^{(0)}$

$x^{(0)} = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n$

$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = \alpha_1 A^k x^1 + \alpha_2 A^k x^2 + ... + \alpha_n A^k x^n$

$Ax^1 = \lambda_1 x^1$

$A^2x^1 = A(Ax^1) = \lambda_1 Ax^1 = \lambda_1^2 x^1$

....

$$A^k x^1 = \lambda_1^k x^1$$

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1^k x^1 + \alpha_2 \lambda_2^k x^2 + ... + \alpha_n \lambda_n^k x^n$$

$$\left.\begin{array}{l} x_j^{(k+1)} = \alpha_1 \lambda_1^{k+1} x_j^1 + \alpha_2 \lambda_2^{k+1} x_j^2 + ... + \alpha_n \lambda_n^{k+1} x_j^n \\ x_j^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k x_j^1 + \alpha_2 \lambda_2^k x_j^2 + ... + \alpha_n \lambda_n^k x_j^n \end{array}\right\} \div$$

$$\beta_{ij} = \alpha_i x_j^i, \quad i = \overline{1; n}$$

$$\frac{x_j^{(k+1)}}{x_j^{(k)}} = \frac{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1} + \beta_{2j}\lambda_2^{k+1} + ... + \beta_{nj}\lambda_n^{k+1}}{\beta_{1j}\lambda_1^k + \beta_{2j}\lambda_2^k + ... + \beta_{nj}\lambda_n^k}$$

$$\div \beta_{1j}\lambda_1^{k+1}$$

$$\frac{x_j^{(k+1)}}{x_j^{(k)}} = \frac{\dfrac{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1}} + \dfrac{\beta_{2j}\lambda_2^{k+1}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1}} + ... + \dfrac{\beta_{nj}\lambda_n^{k+1}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1}}}{\dfrac{\beta_{1j}\lambda_1^{k}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1}} + \dfrac{\beta_{2j}\lambda_2^{k}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1}} + ... + \dfrac{\beta_{nj}\lambda_n^{k}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1}} + \dfrac{\beta_{2j}\lambda_2^{k+1}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1}} + ... + \dfrac{\beta_{nj}\lambda_n^{k+1}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k+1}}}{\dfrac{1}{\lambda_1}\left(\dfrac{\beta_{1j}\lambda_1^{k}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k}} + \dfrac{\beta_{2j}\lambda_2^{k}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k}} + ... + \dfrac{\beta_{nj}\lambda_n^{k}}{\beta_{1j}\lambda_1^{k}}\right)} =$$

$$= \lambda_1 \frac{1 + \gamma_{2j}\mu_2^{k+1} + ... + \gamma_{nj}\mu_n^{k+1}}{1 + \gamma_{2j}\mu_2^{k} + ... + \gamma_{nj}\mu_n^{k}}$$

$$\frac{x_j^{(k+1)}}{x_j^{(k)}} = \lambda_1 \frac{1 + \gamma_{2j}\mu_2^{k+1} + ... + \gamma_{nj}\mu_n^{k+1}}{1 + \gamma_{2j}\mu_2^{k} + ... + \gamma_{nj}\mu_n^{k}}$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{1j}}, \quad i = \overline{2; n} \quad \mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1} < 1$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_j^{(k+1)}}{x_j^{(k)}} = \lambda_1 \qquad \lambda_1 \approx \frac{x_j^{(k+1)}}{x_j^{(k)}}$$

$$\overline{x}^0 \neq \overline{0}$$

Ітераційний процес:

$$x^{k+1} = Ax^k \qquad \lambda_1^{k+1} = \frac{x_m^{k+1}}{x_m^k}, \qquad 1 \leqslant m \leqslant n$$

Умова припинення: $|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| \leqslant \varepsilon$

Зауваження

Якщо $|\lambda_1| > 1$, то в разі $k \to \infty$ компоненти вектора x^k експоненціально зростають, що може причинити переповнення. У разі $|\lambda_1| < 1$ компоненти вектора x^k зменшуються, що може зумовити заміну їх нулем, це призводить до зникнення інформації.

$$e^k = \frac{x^k}{||x^k||}$$

$$x^{k+1} = Ae^k$$

Мінімальне власне значення

Нехай: $A = A^T > 0, \ \lambda_1 = \lambda_{max}(A)$

$$B = \lambda_1 E - A \qquad \to \qquad \lambda_{max}(B)$$

$$\lambda_{min}(A) = \lambda_{max}(A) - \lambda_{max}(B)$$

$$B = \|A\|_\infty E - A$$

$\lambda_{max}(A) \leqslant ||A||_\infty \quad \Rightarrow$

$$\lambda_{min}(A) = ||A||_\infty - \lambda_{max}(B)$$

Приклад

Знайти максимальне власне значення методом скалярних добутків з точністю $\varepsilon = 0.2$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Розв'язок</u>

Крок 1:

$x^0 = (1;1;1)^T$

$$x^1 = Ax^0 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^1 = \frac{(x^1, x^0)}{(x^0, x^0)} = \frac{\left((8;6;6)^T, (1;1;1)^T\right)}{((1;1;1)^T, (1;1;1)^T)} \approx 6.66$$

Крок 2:

$$x^2 = Ax^1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 38 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Крок 2:

$$||x^1||_\infty = 8 \qquad e^1 = \frac{x^1}{||x||_\infty} = (\frac{8}{8}; \frac{6}{8}; \frac{6}{8})^T$$

$$x^2 = Ae^1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.25 \\ 4.75 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^2 = \frac{(x^2, e^1)}{(e^1, e^1)} \approx \frac{14.56}{2.13} \approx 6.84$$

$$|\lambda_1^2 - \lambda_1^1| = |6.84 - 6.66| = 0.18 \leqslant \varepsilon$$

$$\lambda_{max}(A) \approx 6.84$$

<u>Приклад</u>

Знайти мінімальне власне значення степеневим методом з точністю $\varepsilon = 0.5$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Розв'язок</u>

$A = A^T$

$Det(2) > 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \Rightarrow A > 0$$

$||A||_\infty = 4$

$$B = ||A||_\infty E - A = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Крок 1:

$x^0 = (1; 1; 1)^T$

$$x^1 = Ax^0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3} \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$m = 1$

$$\lambda_1^1 = \frac{x_1^1}{x_1^0} = \frac{3}{1} = 3$$

Крок 2:

$$||x^1||_\infty = 4 \qquad e^1 = \frac{x^1}{||x||_\infty} = (\frac{3}{4}; \frac{4}{4}; \frac{3}{4})^T$$

$$x^2 = Ae^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{0.75} \\ 1 \\ 0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2.5} \\ 3.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1^2 = \dfrac{x_1^2}{e_1^1} = \dfrac{2.5}{0.75} = 3.33$
$|\lambda_1^2 - \lambda_1^1| = |3.33 - 3| = 0.33 \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow$

$\lambda_{max}(B) = 3.33$

$\lambda_{min}(A) = ||A||_\infty - \lambda_{max}(B) = 4 - 3.33 = 0.67$

Повна проблема власних значень

Метод обертань (Якобі)

Нехай $A = A^T \Rightarrow U^T A U = \Lambda$
$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$
Позначимо: $A_0 = A$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$.
Задача на власні значення: $Ax_i = \lambda_i x_i,\ i = \overline{1, n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow U^T A U e_i = U^{-1} A U e_i = \lambda_i x_i,\ i = \overline{1, n}$$

$$U \cdot U^T A U e_i = U \cdot U^{-1} A U e_i = U \cdot \lambda_i x_i,\ i = \overline{1, n}$$

$$\Rightarrow AUe_i = \lambda_i U x_i,\ i = \overline{1, n}$$

Позначимо: $Ue_i = x_i \ i = \overline{1, n}$

Одержимо: $Ax_i = \lambda_i x_i,\ i = \overline{1, n},$

$Ue_i = x_i\ i = \overline{1, n}$ - власний вектор матриці A, що відповідає λ_i. Компоненти вектора x_i – це елементи i-стовбчика матриці U. Потрібно знайти ортогональну матрицю U.

В методі обертання матриця U будується як границя послідовності добутку матриць простих обертів. При цьому ці матриці будуються таким чином, щоб на кожному кроці знищувався максимальний за модулем недіагональний елемент матриці A.

Побудуємо матрицю простого оберту. Для цього в матриці $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$ обираємо максимальний за модулем недіагональний елемент:

$$a_{i_0 j_0} = \max_{i,j=\overline{1,n}, i \neq j} |a_{ij}|$$

$$A_{k+1} = U_k A_k U_k^T$$

$$U_k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i_k & & j_k & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \cos\varphi_k & ... & \sin\varphi_k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & -\sin\varphi_k & ... & \cos\varphi_k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ i_k \\ \\ j_k \\ \\ \\ \end{array}$$

$$A_{k+1} = U_k A_k U_k^T = X_k U_k^T$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{x_{11}} & & i & & j & & \phantom{x_{1n}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} x_{11} & ... & x_{1i} & ... & x_{1j} & ... & x_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \hline x_{i1} & ... & x_{ii} & ... & x_{ij} & ... & x_{in} \\ \hline ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{j1} & ... & x_{ji} & ... & x_{jj} & ... & x_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x_{n1} & ... & x_{ni} & ... & x_{nj} & ... & x_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c|cc} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \cos\varphi & ... & -\sin\varphi & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \sin\varphi & ... & \cos\varphi & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad a_{ij} = -x_{ii}\sin\varphi + x_{ij}\cos\varphi$$

$$X_k = U_k A_k$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline
0 & \dots & \cos\varphi & \dots & \sin\varphi & \dots & 0 \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & -\sin\varphi & \dots & \cos\varphi & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & i & & j & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cc|c|cccc}
a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad x_{ii} = a_{ii}\cos\varphi + a_{ij}\sin\varphi$$

$$X_k = U_k A_k$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline
0 & \dots & \cos\varphi & \dots & \sin\varphi & \dots & 0 \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & -\sin\varphi & \dots & \cos\varphi & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & i & & j & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c|cc}
a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad x_{ij} = a_{ij}\cos\varphi + a_{jj}\sin\varphi$$

$$a_{ij} = -x_{ii}\sin\varphi + x_{ij}\cos\varphi =$$

$$= -(a_{ii}\cos\varphi + a_{ij}\sin\varphi)\sin\varphi + (a_{ij}\cos\varphi + a_{jj}\sin\varphi)\cos\varphi =$$

$$= -a_{ii}\sin\varphi\cos\varphi - a_{ij}\sin^2\varphi + a_{ij}\cos^2\varphi + a_{jj}\sin\varphi\cos\varphi =$$

$$= a_{ij}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi(a_{jj} - a_{ii}) =$$

$$= a_{ij}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi(a_{jj} - a_{ii}) = 0 \qquad \div \cos 2\varphi$$

$$a_{ij} + \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\varphi(a_{jj} - a_{ii}) = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}$$

Метод обертань (Якобі)

$$a^k_{i_k j_k} = \max_{i \neq j} |a^k_{ij}| \qquad i = \overline{1, n} \qquad j = \overline{2+1, n}$$

$$a^{k+1}_{ij} = 0$$

$$\varphi_k = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a^k_{ij}}{a^k_{ii} - a^k_{jj}}$$

Якщо $a_{ii} = a_{jj}$, то $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$t(A_k) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a^2_{ij}$$

Умова припинення: $t(A_N) \leqslant \varepsilon$

Метод обертань (Якобі)

Швидкість збіжності:

$$t(A_{k+1}) \leqslant q t(A_k) \qquad q = 1 - \frac{2}{n(n-1)}$$

Власні вектори:

$$U = \prod_{k=1}^{n} U_k = \begin{pmatrix} u_{11} & ... & u_{1j} & ... & u_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ u_{j1} & ... & u_{jj} & ... & u_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ u_{n1} & ... & u_{nj} & ... & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$(u_{1j}, ..., u_{nj})^T \quad \leftrightarrow \quad \lambda_j$

Метод обертань (Якобі)

Зауваження:

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \cos\varphi_k & ... & -\sin\varphi_k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \sin\varphi_k & ... & \cos\varphi_k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

$A_{k+1} = U_k^T A_k U_k$

Приклад

Знайти всі власні значення матриці з точністю 0.1

$$U_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Розв'язок

$A = A^T \quad \Rightarrow \quad$ метод обертань

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a^0_{i_0,j_0} = |a_{12}| = |-1| \quad \Rightarrow \quad i_0 = 1,\, j_0 = 2$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a^0_{12}}{a^0_{11} - a^0_{22}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{4}$$

$$U_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = U_0^T A_0 U_0 =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$i_1 = 3,\, j_1 = 4$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2a^1_{34}}{a^1_{33} - a^1_{44}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{4}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = U_1^T A_1 U_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \boxed{0.5} & 0.5 \\ 0 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 3 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i_2 = 1 \qquad j_2 = 3 \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = U_2^T A_2 U_2 = \begin{pmatrix} 3.5 & -0.35 & 0 & 0.35 \\ -0.35 & 1 & -0.35 & \boxed{-0.5} \\ 0 & -0.35 & 2.5 & -0.35 \\ 0.35 & -0.5 & -0.35 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i_3 = 2 \qquad j_3 = 4 \qquad \varphi_3 = -\frac{\pi}{4}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_4 = U_3^T A_3 U_3 = \begin{pmatrix} 3.5 & \boxed{-0.5} & 0 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$i_4 = 1 \qquad j_4 = 2 \qquad \varphi_4 = -0.23$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0.97 & 0.23 & 0 & 0 \\ -0.23 & 0.97 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = U_4^T A_4 U_4 = \begin{pmatrix} 3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & \boxed{-0.5} \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$i_5 = 3 \qquad j_5 = 4 \qquad \varphi_5 = -0.23$$

$$U_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.97 & 0.23 \\ 0 & 0 & -0.23 & 0.97 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = U_5^T A_5 U_5 = \begin{pmatrix} 3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.38 \end{pmatrix}$$

Інший підхід до розв'язання повної проблеми на власні значення

Матрицю A за допомогою елементарних перетворень зводять до трьохдіагональної матриці B.

Якщо матриця трьохдіагональна, то можна швидко обчислити $det(B - \lambda E)$.

Нехай $D_n(\lambda) = det(B - \lambda E)$. Розкладемо $D_n(\lambda)$ за останнім рядком

$$D_n(\lambda) = \begin{pmatrix} D_{n-2}(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} - \lambda & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} - \lambda \end{pmatrix} = (a_{nn} - \lambda)D_{n-1}(\lambda) - a_{n,n-1}B_{n-1}(\lambda),$$

де $B_{n-1}(\lambda)$ – мінор, ощ доповнює елемент $a_{n,n-1}$.

Останній стовчик цього мінору містить лише один ненульовий елемент $a_{n-1,n}$. Розкладемо його за останнім стовчиком

$$B_{n-1}(\lambda) = a_{n-1,n}D_{n-2}.$$

Одержимо:

$$D_n(\lambda) = (a_{nn} - \lambda)D_{n-1}(\lambda) - a_{n,n-1}a - n - 1, nD_{n-2}(\lambda).$$

Покладемо: $D_0(\lambda) = 1,\ D_1(\lambda) = a_{11} - \lambda.$

Для обчислення $D_n(\lambda)$ потрібно $5n$ арифметичних операцій.