ББК 22.193я73
П69

Автори: *М. М. Москальков, А. І. Риженко, С. О. Войцеховський, А. В. Кузьмін, О. Ф. Кашпур, В. М. Лужних, І. М. Вергунова*

Рецензенти: *В. К. Задірака*, д-р фіз.-мат. наук, проф.
В. Г. Приказчиков, д-р фіз.-мат. наук, проф.

Схвалено Вченою радою Міжрегіональної Академії управління персоналом (протокол № 1 від 26.01.05)

Практикум з методів обчислень: Метод. вказівки та навч. завдання до практ. і лаб. робіт із чисельного розв'язання рівнянь і систем / М. М. Москальков, А. І. Риженко, С. О. Войцеховський та ін. — К.: МАУП, 2006. — 80 с.: іл. — Бібліогр.: с. 77–78.

П69

ISBN 966-608-504-6

Пропонований практикум містить короткі теоретичні відомості з навчального матеріалу, приклади розв'язання задач, задачі для самостійного розв'язання та варіанти контрольної роботи за темами.

Для студентів вищих навчальних закладів, які вивчають дисципліни "Чисельні методи" та "Чисельні методи в інформатиці".

ББК 22.193я73

ISBN 966-608-504-6

1
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК

Похибкою називають величину, що характеризує точність результату. Похибки, що виникають під час розв'язування задач, можна поділити на *три групи*:

1) неусувні;
2) похибки методу;
3) похибки обчислень.

Неусувна похибка — це наслідок неточності вхідних даних, що входять до математичного опису задачі, а також невідповідності математичної моделі реальній задачі (інколи цю похибку називають *похибкою математичної моделі*).

Похибку методу пояснюють тим, що для розв'язання математичної задачі доводиться застосовувати наближені методи, оскільки для отримання точного розв'язку потрібно виконати необмежену чи неприйнятно велику кількість арифметичних операцій, що в багатьох випадках просто неможливо.

Похибка обчислень виникає під час уведення-виведення даних в ЕОМ та виконання математичних операцій (унаслідок заокруглень).

Основна задача теорії похибок — відшукання області невизначеності результату.

Розглянемо процес заокруглення чисел. Заокруглимо 4,167493 до п'яти десяткових знаків після коми, отримаємо 4,16749. Отже, якщо цифра в старшому відкинутому розряді менше 5, то попередня цифра не змінюється. Заокругливши число 4,167493 до чотирьох знаків після коми, отримаємо число 4,1675. Отже, якщо цифра в старшому відкинутому розряді дорівнює чи більше 5, то попередня цифра в числі збільшується на одиницю.

Інколи дотримуються такого правила: якщо в старшому відкинутому розряді стоїть цифра 5, а попередня цифра парна, то вона не змінюється; якщо ж попередня цифра непарна, то вона збільшується на одиницю.

У разі заокруглення цілого числа відкинуті десяткові знаки не можна заміняти нулями, потрібно застосовувати множення на відповідний степінь числа 10.

Нехай x — точне значення якоїсь величини, а x^* — її відоме наближене значення.

Абсолютною похибкою числа x^* називається величина $\Delta(x^*)$, що задовольняє умові

$$\left|x^* - x\right| \le \Delta(x^*).$$

Відносною похибкою числа x^* називається величина $\delta(x^*)$, що задовольняє умові

$$\left|\frac{x^* - x}{x^*}\right| \le \delta(x^*).$$

Відносна похибка краще характеризує точність результату. За допомогою абсолютної та відносної похибки число x можна подати в такому вигляді:

$$x = x^* \pm \Delta(x^*),$$

$$x = x^*\left(1 \pm \delta(x^*)\right).$$

Значущими цифрами числа називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва. Значуща цифра називається *правильною*, якщо абсолютна похибка числа не перевищує 1/2 одиниці розряду (інколи беруть одиницю розряду), що відповідає цій цифрі.

Пряму задачу теорії похибок ставлять так. У якійсь області G n-вимірного простору розглядають неперервно диференційовну функцію $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Потрібно обчислити її значення $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ в точці $(x_1, x_2, ..., x_n) \in G$, але відомі тільки наближені значення. Обчислимо наближене значення $y^* = f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ й оцінимо його абсолютну похибку.

Використовуючи формулу Лагранжа, маємо для абсолютної похибки оцінку

$$\Delta(y^*) = \left|f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) - f(x_1, x_2, ..., x_n)\right| \le \sum_{j=1}^{n} B_j \Delta(x_j^*), \qquad (1.1)$$

де

$$B_j = \sup_G \left|\frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j}\right|.$$

У практичних обчисленнях окрім (1.1) використовують оцінку

$$\Delta(y^*) \le \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}{\partial x_j}\right| \Delta(x_j^*), \qquad (1.2)$$

яку називають *лінійною оцінкою похибки*. Вона відрізняється від (1.1) членами другого порядку за $\Delta(x_j^*)$.

Виходячи з оцінки (1.2), знайдемо відносну похибку:

$$\delta(y^*) \le \frac{\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}{\partial x_j}\right| \Delta(x_j^*)}{\left|f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)\right|}. \qquad (1.3)$$

За допомогою формул (1.2), (1.3) визначимо похибки результатів основних математичних операцій.

1. *Похибка суми*:

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \; x_1, x_2 > 0.$$

Оскільки $f'_{x_i}(x^*) = 1$, то з оцінки (1.2) маємо

$$\Delta(y^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*),$$

а з (1.3) —

$$\delta(y^*) = \left|\frac{x_1^*}{x_1^* + x_2^*}\right| \delta(x_1^*) + \left|\frac{x_2^*}{x_1^* + x_2^*}\right| \delta(x_2^*). \qquad (1.4)$$

Із рівності (1.4) випливає така оцінка:

$$\delta(y^*) = \max\{\delta(x_1^*), \delta(x_2^*)\}.$$

2. *Похибка різниці*:

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \; x_1 > x_2 > 0;$$

$$\Delta(y^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*);$$

$$\delta(y^*) = \frac{\left|x_1^*\right| \delta(x_1^*) + \left|x_2^*\right| \delta(x_2^*)}{\left|x_1^* - x_2^*\right|}. \qquad (1.5)$$

3. *Похибка добутку*:

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 x_2, \; x_1, x_2 > 0;$$

$$\Delta\left(y^*\right)=\left|x_2^*\right|\Delta\left(x_1^*\right)+\left|x_1^*\right|\Delta\left(x_2^*\right);$$

$$\delta\left(y^*\right)=\delta\left(x_1^*\right)+\delta\left(x_2^*\right).$$

4. *Похибка частки*:

$$y=f\left(x_1, x_2\right)=x_1/x_2,\ x_1,\ x_2>0;$$

$$\Delta\left(y^*\right)=\frac{\left|x_2^*\right|\Delta\left(x_1^*\right)+\left|x_1^*\right|\Delta\left(x_2^*\right)}{\left(x_2^*\right)^2}; \qquad (1.6)$$

$$\delta\left(y^*\right)=\delta\left(x_1^*\right)+\delta\left(x_2^*\right).$$

Для операцій додавання та віднімання додають абсолютні похибки, а для операцій множення та ділення — відносні. Із формули (1.5) видно, що в разі віднімання близьких чисел відносна похибка результату може значно зрости, а в разі ділення на досить мале число може значно зрости абсолютна похибка (1.6).

Обернену задачу теорії похибок можна сформулювати так: з якою точністю потрібно задати значення аргументів $x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*$ функції $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, щоб похибка значення функції $f\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ не перевищувала заданої величини ε?

Для функції однієї змінної $y=f(x)$ абсолютну похибку можна наближено обчислити за формулою

$$\Delta\left(x^*\right)=\frac{\Delta\left(y^*\right)}{\left|f'\left(x^*\right)\right|}\le\frac{\varepsilon}{\left|f'\left(x^*\right)\right|},\ f'\left(x^*\right)\ne 0. \qquad (1.7)$$

Для функції декількох змінних $y=f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ задачу можна розв'язувати такими способами.

1. Принцип рівних впливів: уважаємо, що всі доданки $\left|\frac{\partial f^*}{\partial x_i}\right|\Delta\left(x_i^*\right)$, $i=\overline{1,\ n}$, рівні між собою. Тоді абсолютні похибки всіх аргументів можна визначити за формулою

$$\Delta\left(x_i^*\right)=\frac{\Delta\left(y^*\right)}{n\left|\frac{\partial f^*}{\partial x_i}\right|}\le\frac{\varepsilon}{n\left|\frac{\partial f^*}{\partial x_i}\right|},\ i=\overline{1,\ n}.$$

2. Уважаємо всі похибки рівними та максимально можливими:

$$\Delta\left(x_1^*\right)=\Delta\left(x_2^*\right)=...=\Delta\left(x_n^*\right)\le\varepsilon\left(c_1+c_2+...+c_n\right),$$

де $c_i=\left|\frac{\partial f^*}{\partial x_i}\right|$.

Приклади розв'язання задач

1. Нехай $x^*=14{,}537$ і відомо, що $\Delta\left(x^*\right)=0{,}04$. Скільки правильних значущих цифр має число x^*?

Розв'язання. Маємо $\Delta\left(x^*\right)>0{,}5\cdot10^{-2}$ та $\Delta\left(x^*\right)<0{,}5\cdot10^{-1}$. Отже, у числі x^* правильні значущі цифри 1, 4, 5, а цифри 3, 7 — сумнівні.

2. Нехай $x^*=8{,}677142$ і $\Delta\left(x^*\right)=0{,}5\cdot10^{-4}$. Скільки правильних значущих цифр має число x^*?

Розв'язання. Оскільки $\Delta\left(x^*\right)=0{,}3\cdot10^{-3}<0{,}5\cdot10^{-3}$, то x^* має три правильні значущі цифри після коми, тобто 8, 6, 7.

3. Нехай $x^*=0{,}046725$ і $\Delta\left(x^*\right)=0{,}008$. Скільки правильних значущих цифр має число x^*?

Розв'язання. Маємо $\Delta\left(x^*\right)=0{,}8\cdot10^{-2}>0{,}5\cdot10^{-2}$, тому в числі x^* всі значущі цифри сумнівні.

4. Заокруглюючи наступні числа до трьох значущих цифр, визначити абсолютну та відносну похибки отриманих наближених чисел: 1) 0,1545; 2) 1,343; 3) −372,75.

Розв'язання. 1) $x=0{,}1545$. Заокруглення до трьох значущих цифр дає $x^*=0{,}155$; тоді $\Delta\left(x^*\right)=0{,}0005=5\cdot10^{-4}$, а відносна похибка $\delta\left(x^*\right)=5\cdot10^{-4}/0{,}155\approx0{,}32\cdot10^{-4}$;

2) $x=1{,}343$. Тоді $x^*=1{,}34$; $\Delta\left(x^*\right)=\left|x^*-x\right|=0{,}003$; $\delta\left(x^*\right)=3\cdot10^{-3}:1{,}34\approx2{,}2\cdot10^{3}$;

3) $x=-372{,}75$. Тоді $x^*=-373$; $\Delta\left(x^*\right)=0{,}25$; $\delta\left(x^*\right)=0{,}25/373\approx\approx6{,}7\cdot10^{-4}$.

5. Визначити кількість правильних значущих цифр у числі x^*, якщо відома його відносна похибка:

1) $x^*=22{,}351$, $\delta\left(x^*\right)=0{,}1$;

2) $x^*=9{,}4698$, $\delta\left(x^*\right)=0{,}1\cdot10^{-2}$;

3) $x^* = 47361$, $\delta(x^*) = 0{,}01$.

Розв'язання. 1) Обчислимо абсолютну похибку $\Delta(x^*) = x^*\delta(x^*) = 2{,}2351$. Отже, у числі x^* правильна тільки цифра 2, тобто одна правильна цифра;

2) обчислимо абсолютну похибку $\Delta(x^*) = x^*\delta(x^*) = 9{,}4698\cdot 0{,}1\times 10^{-2} = 2{,}2351$. Отже, у числі x^* правильні дві цифри: 9 і 4;

3) абсолютна похибка $\Delta(x^*) = 4736\cdot 0{,}01 = 473{,}61$. Отже, у числі x^* правильні дві цифри: 4 і 7.

"Поведінка" обчислювальної похибки залежить від правил заокруглення й алгоритму чисельного розв'язання задачі. Це ілюструє така задача.

6. На гіпотетичній "десятковій" ЕОМ з мантисою довжиною 4 знайти суму $S = 0{,}2764 + 0{,}3944 + 1{,}475 + 26{,}46 + 1364$:

1) сумуючи від найменшого доданка до найбільшого;

2) сумуючи від найбільшого доданка до найменшого.

Розв'язання. 1) $S_2 = 0{,}2764 + 0{,}3944 = 0{,}6708$; $S_3 + S_2 + 1{,}475$. Вирівнявши порядки цих доданків, отримаємо $S_3 \approx 1{,}475 + 0{,}671 = 2{,}146$. Аналогічно $S_4 \approx S_3 + 26{,}46 \approx 2{,}15 + 26{,}46 = 28{,}61$; $S = S_5 \approx S_4 + 1364 \approx 29 + 1364 = 1393$;

2) $S_2 = 1364 + 26{,}46 \approx 1364 + 26 = 1390$; $S_3 \approx S_2 + 1{,}475 \approx 1390 + 1 = 1391$; $S_4 \approx S_3 + 0{,}3944 \approx 1391$; $S = S_5 \approx S_4 + 0{,}2764 \approx 1391$.

З урахуванням того, що точне значення $S = 1392{,}6058$, доходимо висновку, що сумувати потрібно починаючи з менших доданків, а не то можна втратити чимало значущих цифр.

7. Нехай числа $\sqrt{2{,}01} \approx 1{,}417744688$ та $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$ задано з десятьма правильними значущими цифрами. Скільки значущих цифр має число $\sqrt{2{,}01} - \sqrt{2}$?

Розв'язання. Віднявши $\sqrt{2}$ від $\sqrt{2{,}01}$, отримаємо $x^* = 0{,}003531126$. Позначимо $x_1^* = 1{,}417744688$, $x_2^* = 1{,}414213562$. Тоді $\Delta(x_1^*) = \Delta(x_2^*) = 0{,}5\cdot 10^{-9}$. Абсолютна похибка різниці $x^* = x_1^* - x_2^*$ дорівнює $\Delta(x^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*) = 10^{-9}$. Оскільки $10^{-9} < 0{,}5 \cdot 10^{-8}$, то доходимо висновку, що число x^* має шість правильних значущих цифр: 3, 5, 3, 1, 1, 2.

Такий самий результат можна отримати, подавши x^* у вигляді

$$x^* = \frac{\left(\sqrt{2{,}01} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2{,}01} + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2{,}01} + \sqrt{2}} = \frac{0{,}01}{\sqrt{2{,}01} + \sqrt{2}},$$

причому для цього достатньо взяти величини x_1^* й x_2^* із сімома правильними значущими цифрами.

8. Оцінити похибку обчислення функції

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 z}{y^3},$$

якщо $x = 0{,}15 \pm 0{,}005$; $y = 2{,}13 \pm 0{,}01$; $z = 1{,}14 \pm 0{,}007$.

Розв'язання. Згідно з формулою (1.2) для абсолютної похибки результату отримаємо

$$\Delta(f^*) = \left|\frac{2x^* z^*}{(y^*)^3}\right| \Delta(x^*) + \left|\frac{3(x^*)^2 z}{(y^*)^4}\right| \Delta(y^*) + \left|\frac{(x^*)^2}{(y^*)^3}\right| \Delta(z^*) =$$

$$= \frac{2\cdot 0{,}15\cdot 1{,}14}{2{,}13^3}\cdot 0{,}005 + \frac{3\cdot 0{,}15^2\cdot 1{,}14}{2{,}13^4}\cdot 0{,}01 + \frac{0{,}15^2}{2{,}13^3}\cdot 0{,}007 =$$

$$= 0{,}00017695 + 0{,}00003738 + 0{,}000016298 \approx 0{,}00023 = 2{,}3\cdot 10^{-4}.$$

Тоді $f(x^*, y^*, z^*) = \dfrac{0{,}15^2\cdot 1{,}14}{2{,}13^3} = 0{,}00265429$; $\delta(f^*) = \dfrac{2{,}3\cdot 10^{-4}}{0{,}00265429} \approx 0{,}08665$.

9. Висота h і радіус основи циліндра виміряно з точністю до 0,5 %. Чому дорівнює відносна похибка в разі обчислення об'єму циліндра, якщо $\pi^* = 3{,}14$?

Розв'язання. $V = \pi R^2 h$. Точніше значення $\pi \approx 3{,}14159265$, отже $\Delta(\pi^*) = 0{,}16\cdot 10^{-2}$, а $\delta(\pi^*) = 0{,}16\cdot 10^{-2}/3{,}14 \approx 0{,}0005 = 0{,}05$ %. Тоді згідно з формулою для відносної похибки добутку отримаємо $\delta(V^*) = \delta(\pi^*) + 2\delta(R^*) + \delta(h) \approx 0{,}05 + 2\cdot 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}55\%$.

10. Ребро куба, виміряне з точністю до 0,02 см, дорівнює 8 см. Знайти абсолютну та відносну похибки в разі обчислення об'єму куба.

Розв'язання. Позначимо сторону куба як a. Тоді $V = a^3$, $V^* = (a^*)^3 = 512$ см. Застосувавши формулу (1.2), отримаємо $\Delta(V^*) = 3(a^*)^2 \Delta(a^*) = 3\cdot 8^2\cdot 0{,}02 = 3{,}84$ см³, а $\delta(V^*) = (3{,}84/512) = 0{,}0075$.

11. Визначити відносну похибку числа, записаного в ЕОМ із системою числення β й довжиною мантиси t.

Розв'язання. Число x^* можна записати в ЕОМ у вигляді

$$x^* = \pm\left(d_1\beta^{-1} + d_2\beta^{-2} + \ldots + d_t\beta^{-t}\right)\beta^l,$$

де l визначає порядок числа, d_i — цілі, причому $0 \le d_i \le \beta - 1$, $d_1 \ne 0$.

Нехай точне значення числа

$$x = \pm\left(d_1\beta^{-1} + d_2\beta^{-2} + \ldots + d_t\beta^{-t} + d_{t+1}\beta^{-t-1}\right)\beta^l.$$

Тоді

$$\frac{\left|x^* - x\right|}{\left|x^*\right|} = \frac{d_{t+1}\beta^{l-t-1}}{\left|x^*\right|} = \left|\frac{d_{t+1}}{d_1\beta^t + d_2\beta^{t-1} + \ldots + d_t\beta}\right| \le \frac{d_{t+1}}{d_1\beta^t} \le \frac{d_{t+1}}{\beta^t} =$$

$$= \beta^{1-t}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \le \beta^{1-t}.$$

Отже, $\delta\left(x^*\right) \le \beta^{1-t}$.

Якщо вводити числа за правилами заокруглення, то $d_{t+1} \le 0{,}5\beta$, і тоді

$$\delta\left(x^*\right) \le \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

12. Сторона квадрата дорівнює 2 м. З якою точністю її потрібно виміряти, щоб похибка обчислення площі квадрата не перевищувала 1 см^2?

Розв'язання. Позначимо сторону квадрата як x; $S = x^2$, $S' = 2x$. Тоді за формулою (1.7) отримаємо

$$\Delta\left(x^*\right) = \frac{1}{2 \cdot 200} = 0{,}25 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

13. З якою кількістю правильних значущих цифр потрібно взяти вільний член квадратного рівняння

$$x^2 - 2x + \lg 2 = 0, \qquad (1.8)$$

щоб отримати корені рівняння з чотирма правильними значущими цифрами?

Розв'язання. Рівняння (1.8) має два корені: $x_1 = 1 + \sqrt{1 - \lg 2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{1 - \lg 2}$. Оскільки $\lg 2 \approx 0{,}3\ldots$, то $x_1 \approx 1{,}8\ldots$, $x_2 \approx 0{,}1\ldots$. Отже, x_1^* потрібно визначити так, щоб $\Delta\left(x_1^*\right) \le 0{,}5 \cdot 10^{-3}$, а x_2^* — так, щоб $\Delta\left(x_2^*\right) \le 0{,}5 \cdot 10^{-4}$. Позначимо $z = \ln 2$ і розглянемо функцію $f(z) = 1 + \sqrt{1 - z}$. З'ясуємо, з якою точністю потрібно обчислити z^* в околі точки 0,3, щоб $\Delta\left(f\left(z^*\right)\right) \le 0{,}5 \cdot 10^{-3}$. Оскільки $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{1-z}}$, то за допомогою формули (1.7) отримаємо

$$\Delta\left(z^*\right) = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{2\sqrt{0{,}7}} \approx 0{,}0002988.$$

Доходимо висновку, що для обчислення кореня x_1 потрібно взяти $\lg 2$ з трьома правильними значущими цифрами після коми, тобто $\lg 2 \approx 0{,}301$.

Аналогічно, розглянувши функцію $f(z) = 1 - \sqrt{1 - z}$, отримаємо, що для обчислення кореня x_2 з точністю $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ потрібно взяти $\lg 2$ з чотирма правильними значущими цифрами після коми, тобто $\lg 2 \approx 0{,}3010$.

14. У п'ятизначних логарифмічних таблицях наведено значення десяткових логарифмів із точністю до $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$. Оцінити можливу похибку в разі визначення числа за його логарифмом, якщо саме число лежить у межах між 300 та 400.

Розв'язання. Позначимо $y = \lg x$, $x \in [300;\ 400]$. За умовою задачі $\Delta\left(y^*\right) \le 0{,}5 \cdot 10^{-6}$; потрібно знайти $\Delta\left(x^*\right)$. Маємо $y' = \frac{1}{x \ln 10}$; тоді за формулою (1.7) $\Delta\left(x^*\right) = x^*(\ln 10)\Delta\left(y^*\right) \le 400 \cdot 2{,}30 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}00046$. Отже, x можна знайти принаймні з трьома правильними значущими цифрами після коми.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Заокруглюючи наступні числа до трьох значущих цифр, визначити абсолютну та відносну похибки наближених чисел:

1) 3,2523; 2) 0,17153; 3) 0,02103; 4) 1,445; 5) –0,0035392; 6) –583,71; 7) 0,004966; 8) 315,55; 9) 71,534.

2. Визначити кількість правильних цифр у числі x, якщо відома його відносна похибка:

1) $x = 2{,}7981$, $\delta(x) = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$; 2) $x = 12{,}8370$, $\delta(x) = 1\%$;
3) $x = 0{,}3328$, $\delta(x) = 0{,}2 \cdot 10^{-1}$; 4) $x = 372{,}8$, $\delta(x) = 2\%$;
5) $x = 23{,}652$, $\delta(x) = 0{,}1$; 6) $x = 17261$, $\delta(x) = 1\%$;
7) $x = 0{,}03575$, $\delta(x) = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$; 8) $x = 0{,}22453$, $\delta(x) = 10\%$;
9) $x = 0{,}000335$, $\delta(x) = 0{,}15$; 10) $x = 6{,}3495$, $\delta(x) = 0{,}1\%$.

3. Визначити, яка рівність точніша:

1) $6/7 = 0{,}857$, $\sqrt{4{,}8} = 2{,}19$; 2) $2/21 = 0{,}095$, $\sqrt{22} = 4{,}69$;
3) $7/19 = 0{,}895$, $\sqrt{52} = 7{,}21$; 4) $49/13 = 3{,}77$, $\sqrt{14} = 3{,}74$.

4. Яка відносна похибка наближена числа π числом 3,14?

5. Записати число π з п'ятьма правильними значущими цифрами та визначити відносну похибку отриманого наближення.

6. З якою кількістю значущих цифр потрібно взяти $\sqrt{3{,}02}$ та $\sqrt{3}$, щоб обчислити $\sqrt{3{,}02} - \sqrt{3}$ з трьома правильними значущими цифрами?

7. У результаті вимірювання радіуса кола з точністю до 0,5 см отримали значення 14 см. Знайти абсолютну та відносну похибки в разі обчислення площі кола.

8. Кожне ребро куба, виміряне з точністю 0,02 см, виявилося рівним 15 см. Знайти абсолютну та відносну похибки в разі обчислення об'єму куба.

9. Визначити відносну похибку обчислення повної поверхні зрізаного конуса, якщо радіуси його основ R і r та твірна l, виміряні з точністю до 0,01 см, дорівнюють відповідно 23,64, 17,31 й 10,21 см.

10. Обчислити значення функції f. Знайти абсолютну та відносну похибки результату, уважаючи всі значущі цифри вхідних даних правильними:

1) $f = x_1 x_2$, де
а) $x_1 = 5{,}49$, $x_2 = 7{,}6$; б) $x_1 = 15{,}1$, $x_2 = 2{,}543$; в) $x_1 = 0{,}03$, $x_2 = 12{,}5$;

2) $f = x_1 x_2 x_3$, де
а) $x_1 = 381{,}56$, $x_2 = 6157$, $x_3 = 0{,}0053$;
б) $x_1 = 0{,}147$, $x_2 = 653$, $x_3 = 76{,}3$; в) $x_1 = 1{,}28$, $x_2 = 6{,}3$, $x_3 = 2{,}173$;

3) $f = x_1 x_2 + x_2 x_3$, де $x_1 = 2{,}104$, $x_2 = 1{,}935$, $x_3 = 0{,}845$;

4) $f = x_1 / x_2$, де
а) $x_1 = 526{,}677$, $x_2 = 829$; б) $x_1 = 745{,}8371$, $x_2 = 336{,}2$;
в) $x_1 = 6{,}3$, $x_2 = 449$; г) $x_1 = 5{,}684$, $x_2 = 5{,}032$;

5) $f = \ln(x_1 + x_2^2)$, де $x_1 = 0{,}93$, $x_2 = 1{,}123$;

6) $f = \dfrac{x_1 + x_2^2}{x_3}$, де $x_1 = 3{,}15$, $x_2 = 0{,}831$, $x_3 = 1{,}123$.

11. Оцінити абсолютну та відносну похибки обчислення функцій:

1) $f(x,y,z) = \ln\dfrac{xy}{z}$, де $x = 2{,}34 \pm 0{,}02$, $y = 1{,}25 \pm 0{,}02$, $z = 3{,}05 \pm 0{,}02$;

2) $f(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{xy}{z}}$, де $x = 0{,}757 \pm 0{,}001$, $y = 21{,}7 \pm 0{,}05$, $z = 1{,}84 \pm 0{,}05$;

3) $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{\sqrt[3]{z}}$, де $x = 4 \pm 0{,}1$, $y = 3 \pm 0{,}05$, $z = 1 \pm 0{,}08$;

4) $f(x,y,z) = \ln\left(xy + \dfrac{z}{x}\right)$, де $x = 1{,}02 \pm 0{,}01$, $y = 2{,}35 \pm 0{,}02$, $z = 3{,}04 \pm 0{,}01$;

5) $f(x,y,z) = \dfrac{(x+y)(2z-1)^2}{x-y}$, де $x = 5{,}8 \pm 0{,}01$, $y = 0{,}65 \pm 0{,}02$, $z = 1{,}1753 \pm 0{,}0002$;

6) $f(x,y,z) = \dfrac{(x^2+4xy+y^2)(2z-1)^2}{(x+y)^2}\dfrac{z^2}{18}$, де $x = 27{,}51 \pm 0{,}0001$, $y = 21{,}78 \pm 0{,}003$, $z = 32{,}5 \pm 0{,}06$;

7) $f(x,y) = \dfrac{\pi}{64}\sqrt{x^4 - y^4}$, де $x = 36{,}5 \pm 0{,}01$, $y = 26{,}35 \pm 0{,}005$, $\pi = 3{,}14$.

12. Знайти межі абсолютної та відносної похибки аргументів, які дають змогу обчислити з чотирма правильними значущими цифрами значення функції $f = \dfrac{x_1 + x_2^2}{3}$, де $x_1 = 2{,}10415$, $x_2 = 1{,}93521$, $x_3 = 0{,}84542$.

13. Оцінити похибку визначення кута 60° за п'ятизначною таблицею синусів.

14. З якою кількістю правильних значущих цифр потрібно взяти значення аргументу $x \in [0;\ 1]$, щоб обчислити значення функції $f(x) = x^3 \sin x$ з абсолютною похибкою $0{,}1 \cdot 10^{-5}$?

15. З якою точністю потрібно обчислити $\sin\dfrac{\pi}{8}$, щоб відносна похибка обчислення коренів рівняння $x^2 - 2x + \sin\dfrac{\pi}{8} = 0$ не перевищувала 10^{-3}?

16. З якою відносною похибкою потрібно виміряти висоту $h = 0{,}5$ м і радіус основи $r = 10$ м для того, щоб відносна похибка обчислення об'єму конуса не перевищувала 0,1 %?

2
РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо задачу відшукання коренів рівняння

$$f(x)=0, \tag{2.1}$$

де $f(x)$ — задана функція дійсної змінної.

Розв'язання цієї задачі можна поділити на декілька етапів:

а) дослідження розміщення коренів (у загальному випадку на комплексній площині) та їх кратність;

б) відділення коренів, тобто областей, що містять тільки один корінь;

в) обчислення кореня із заданою точністю.

Розглянемо ітераційні процеси, що дають можливість побудувати числову послідовність $\{x_n\}$, яка збігається до шуканого кореня x^* рівняння (2.1).

Метод ділення проміжку навпіл. Нехай $f \in C[a;\ b]$, $f(a)f(b)<0$ та відомо, що рівняння (2.1) має єдиний корінь $x^* \in [a;\ b]$. Нехай $a_0=a$, $b_0=b$, $x_0=(a_0+b_0)/2$. Якщо $f(x_0)=0$, то $x^*=x_0$. Якщо $f(x_0)=0$, то нехай

$$a_{n+1}=\begin{cases} x_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(a_n)=\operatorname{sign} f(x_n),\\ a_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(a_n)\neq \operatorname{sign} f(x_n);\end{cases} \tag{2.2}$$

$$b_{n+1}=\begin{cases} x_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(b_n)=\operatorname{sign} f(x_n),\\ b_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(b_n)\neq \operatorname{sign} f(x_n);\end{cases} \tag{2.3}$$

$$x_{n+1}=\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.3}$$

обчислимо $f(x_{n+1})$. Якщо $f(x_{n+1})=0$, то зупинимо ітераційний процес і будемо вважати, що $x^* \approx x_{n+1}$. Якщо $f(x_{n+1})\neq 0$, то повторимо обчислення за формулами (2.2)–(2.4).

Із формул (2.2), (2.3) видно, що $\operatorname{sign} f(a_{n+1})=\operatorname{sign} f(a_n)$ і $\operatorname{sign} f(b_{n+1})=\operatorname{sign} f(b_n)$. Тому $f(a_{n+1})f(b_{n+1})<0$, отже шуканий корінь x^* належить проміжку $[a_{n+1};\ b_{n+1}]$. При цьому правдива така оцінка точності:

$$\left|x_n-x^*\right|\le \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Звідси випливає, що кількість ітерацій, які потрібно виконати для відшукання наближеного кореня рівняння (2.1) із заданою точністю ε, задовольняє співвідношенню

$$n\ge\left[\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}\right]+1, \tag{2.5}$$

де $[c]$ — ціла частина числа c.

Переваги цього методу — простота реалізації та надійність, бо послідовність $\{x_n\}$ збігається до кореня x^* для довільної неперервної функції $f(x)$. До недоліків можна віднести невисоку швидкість збіжності методу та неможливість безпосереднього узагальнення для систем нелінійних рівнянь.

Метод простої ітерації. Цей метод застосовують до розв'язання нелінійного рівняння вигляду

$$x=\varphi(x). \tag{2.6}$$

Перейти від рівняння (2.1) до рівняння (2.6) можна багатьма способами, наприклад подавши функцію $\varphi(x)$ у вигляді

$$\varphi(x)=x+\psi(x)f(x), \tag{2.7}$$

де $\psi(x)$ — довільна знакостала неперервна функція.

Виберемо x_0, а наступні наближення знайдемо за формулою

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{2.8}$$

Наведемо достатні умови збіжності методу простої ітерації.

Теорема 2.1. Нехай для вибраного початкового наближення x_0 на проміжку

$$S=\{x:|x-x_0|\le\delta\}$$

функція $\varphi(x)$ задовольняє умові Ліпшица

$$|\varphi(x')-x''|\le q\,|x'-x''|,\ x',x''\in S, \tag{2.9}$$

де $0<q<1$, і виконується нерівність

$$\left|\varphi\left(x_0\right)-x_0\right|\le\left(1-q\right)\delta. \tag{2.10}$$

Тоді рівняння (2.6) має на проміжку S єдиний корінь x^*, до якого збігається послідовність (2.8), причому швидкість збіжності можна задати нерівністю

$$\left|x_n-x^*\right|\le\frac{q^n}{1-q}\left|\varphi\left(x_0\right)-x_0\right|. \tag{2.11}$$

Якщо функція $\varphi(x)$ має на проміжку S неперервну похідну $\varphi'(x)$ таку, що $\left|\varphi'(x)\right|\le q<1$, то $\varphi(x)$ задовольняє умові (2.9) теореми 2.1.

Із нерівності (2.11) можна отримати оцінку кількості ітерацій, потрібних для відшукання розв'язку задачі (2.6) із наперед заданою точністю ε:

$$n\ge\left[\frac{\ln\dfrac{b-a}{(1-q)\,\varepsilon}}{\ln\left(1/q\right)}\right]+1\ge\left[\frac{\ln\dfrac{\left|\varphi\left(x_0\right)-x_0\right|}{(1-q)\,\varepsilon}}{\ln\left(1/q\right)}\right]+1. \tag{2.12}$$

Наведемо ще одну оцінку, що характеризує збіжність методу простої ітерації:

$$\left|x_n-x^*\right|\le\frac{q}{1-q}\left|x_n-x_{n-1}\right|. \tag{2.13}$$

Формула (2.13) дає можливість оцінити похибку наближеного значення x_n, використовуючи значення двох останніх наближень x_n та x_{n-1}. Ітераційний процес відшукання кореня з точністю ε слід продовжувати доти, доки не буде виконано нерівність

$$\left|x_n-x_{n-1}\right|\le\frac{1-q}{q}\varepsilon.$$

Якщо ж використовувати значення трьох останніх наближень, то можна сформулювати такий критерій збіжності:

$$\frac{\left(x_n-x_{n-1}\right)^2}{\left|2x_{n-1}-x_n-x_{n-2}\right|}<\varepsilon.$$

Вираз у лівій частині останньої нерівності — це *поправка Ейткена*. Якщо уточнити останні три ітерації згідно з процесом Ейткена

$$\overline{x}_n=x_n+\left(x_n-x_{n-1}\right)/\left(2x_{n-1}-x_{n-2}-x_n\right),$$

то це підвищить точність обчислень і дасть змогу обмежитися меншою кількістю ітерацій.

Метод релаксації. Для збіжності ітераційного процесу (2.8) суттєве значення має вибір функції $\varphi(x)$. Зокрема, якщо в (2.7) вибрати $\psi(x)=\tau=\text{const}$, отримаємо метод релаксації, формула якого має вигляд

$$x_{n+1}=x_n+\tau f\left(x_n\right),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \tag{2.14}$$

Цей метод збігається, якщо $-2<\tau f'(x)<0$.

Якщо в якомусь околі кореня виконуються умови $f'(x)<0$, $0<m_1<\left|f'(x)\right|<M_1$, то метод релаксації збігається для $\tau\in\left(0;\ \dfrac{2}{M_1}\right)$. Збіжність найкраща за умови

$$\tau=\tau_{\text{опт}}=2/\left(m_1+M_1\right). \tag{2.15}$$

За такого вибору τ для похибки $z_n=x_n-x$ правдива оцінка

$$\left|z_n\right|\le q^n\left|z_0\right|,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.16}$$

де $q=\left(M_1-m_1\right)/\left(m_1+M_1\right)$.

Кількість ітерацій, які потрібно виконати для відшукання розв'язку з точністю ε, можна визначити з нерівності

$$n\ge\left[\frac{\ln\left(\left|z_0\right|/\varepsilon\right)}{\ln\left(1/q\right)}\right]+1. \tag{2.17}$$

Якщо виконується умова $f'(x)>0$, то формулу ітераційного методу (2.14) потрібно записати у вигляді $x_{n+1}=x_n-\tau f\left(x_n\right)$.

Метод Ньютона. Його застосовують для розв'язання задачі (2.1) із неперервно диференційовною функцією $f(x)$. Спочатку вибирають початкове наближення x_0, а наступні наближення обчислюють за формулою

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ f'\left(x_n\right)\ne0. \tag{2.18}$$

З геометричного погляду x_{n+1} — це значення абсциси точки перетину дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_n, f(x_n))$ із віссю абсцис. Тому метод Ньютона називають також *методом дотичних*.

Теорема 2.2. Якщо $f(x) \in C^2[a;\, b]$, $f(a)f(b) < 0$, а $f''(x)$ не змінює знака на $[a;\, b]$, то для $x_0 \in [a;\, b]$, що задовольняє умові $f(x_0)f''(x_0) > 0$, можна методом Ньютона (2.3) обчислити єдиний корінь x^* рівняння (2.1) із будь-яким степенем точності.

Теорема 2.3. Нехай x^* — простий дійсний корінь рівняння (2.1) та $f(x) \in C^2(S)$, де $S = \{x : |x - x^*| \le \delta\}$, $0 < m_1 = \min\limits_{x \in S} |f'(x)|$, $M_2 = \max\limits_{x \in S} |f''(x)|$, причому

$$q = \frac{M_2 |x_0 - x^*|}{2m_1} < 1. \tag{2.19}$$

Тоді для $x_0 \in S$ метод Ньютона збігається, і для похибки правдива оцінка $|x_n - x^*| \le q^{2^n - 1} |x_0 - x^*|$.

Метод Ньютона має квадратичну збіжність.

Кількість ітерацій, потрібних для відшукання розв'язку задачі (2.1) із точністю ε, задовольняє нерівності

$$n \ge \log_2 \left(\frac{\ln(|x_0 - x^*|/\varepsilon)}{\ln(1/q)} + 1 \right) + 1. \tag{2.20}$$

Розглянемо кратні корені. Говорять, що x^* — корінь кратності p, якщо

$$f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = \ldots = f^{(p-1)}(x^*) = 0,\ f^{(p)}(x^*) \ne 0.$$

Для обчислення кореня кратності p застосовують таку формулу методу Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0,\ 1,\ \ldots . \tag{2.21}$$

Теорема 2.4. Нехай x^* — корінь кратності p рівняння (2.1), похідна $f^{(p)}(x)$ відмінна від нуля та неперервна в області $S = \{x : |x - x^*| \le \delta\}$ та виконується умова

$$q = \frac{M_{p+1} |x_0 - x^*|}{m_p p(p+1)} < 1,$$

де $0 < m_p = \min\limits_{x \in S} |f^{(p)}(x)|$, $M_{p+1} = \max\limits_{x \in S} |f^{(p+1)}(x)|$. Тоді для $x_0 \in S$ метод Ньютона (2.21) збігається, причому для похибки правдива оцінка

$$|x_n - x^*| \le q^{2^n - 1} |x_0 - x^*|.$$

Модифікований метод Ньютона. Його формула має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Цей метод дає змогу не обчислювати похідну $f'(x)$ на кожній ітерації, а отже, позбутися можливого ділення на нуль. Однак цей алгоритм має тільки лінійну збіжність.

Метод січних. У методі Ньютона основна обчислювальна робота полягає у відшуканні значень $f(x)$ та $f'(x)$. Замінивши похідну $f'(x)$, використовувану в методі Ньютона, різницею послідовних значень функції, віднесеною до різниці значень аргументу (тобто замінивши дотичну січною), отримаємо таку ітераційну формулу для розв'язання рівняння (2.1):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots . \tag{2.22}$$

Ітераційний процес (2.22) двокроковий, бо в ньому для відшукання наступного наближення потрібно знати два попередні, зокрема x_0 та x_1. Порядок збіжності методу січних дорівнює $1/2(\sqrt{5} + 1) \approx 1{,}62$ [8, с. 146]. Отже, обчислювальна складність методу січних менша порівняно з методом Ньютона, а його збіжність гірша.

Зауваження. Викладені вище алгоритми розв'язання рівняння (2.1) можна застосувати й для відшукання комплексних коренів, використовуючи арифметику комплексних чисел. При цьому початкове наближення потрібно брати також із множини комплексних чисел.

Приклади розв'язання задач

1. Розв'язати рівняння

$$x + \sin x - 1 = 0 \qquad (2.23)$$

методом ділення проміжку навпіл з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо проміжок, де рівняння має єдиний корінь. Оскільки похідна функції $f(x) = x + \sin x - 1$ не змінює знака, то рівняння (2.23) має один корінь. Очевидно, що $f(0) = -1 < 0$, а $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$. Отже, корінь належить проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Виберемо $a_0 = 0,\ b_0 = \frac{\pi}{2}$. Згідно з формулою (2.5), для відшукання кореня з точністю 10^{-4} потрібно виконати 13 ітерацій. Відповідні значення x_n наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

n	x_n	$f(x_n)$
0	0,785398	0,492505
1	0,392699	–0,224617
2	0,589049	0,144619
3	0,490874	$-0{,}377294 \cdot 10^{-1}$
4	0,539961	$0{,}540639 \cdot 10^{-1}$
5	0,515418	$0{,}831580 \cdot 10^{-2}$
6	0,503146	$-0{,}146705 \cdot 10^{-1}$
7	0,509282	$-0{,}316819 \cdot 10^{-2}$
8	0,512350	$0{,}257611 \cdot 10^{-2}$
9	0,510816	$0{,}295467 \cdot 10^{-3}$
10	0,511583	$0{,}114046 \cdot 10^{-2}$
11	0,511199	$-0{,}422535 \cdot 10^{-3}$
12	0,511007	$0{,}635430 \cdot 10^{-4}$
13	0,510911	$-0{,}116016 \cdot 10^{-3}$

2. Знайти додатні корені рівняння

$$x^3 - x - 1 = 0 \qquad (2.24)$$

методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язання. Графічне дослідження рівняння (2.24) показує, що воно має єдиний дійсний додатний корінь, який належить проміжку [1; 2]. Оскільки на цьому проміжку $x \neq 0$, то рівняння (2.24) можна подати у вигляді

$$x = \sqrt{\frac{1}{x} + 1}.$$

Позначимо $\varphi(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^{1/2}$. Перевіримо виконання умов теореми про збіжність методу простої ітерації. Виберемо $x_0 = 1{,}5$, тоді $\delta = 0{,}5$. Оскільки

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3 + x^4}}; \ \max_{1 \le x \le 2} |\varphi'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

то $q = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Тоді

$$|\varphi(x_0) - x_0| = \left|\sqrt{\frac{2}{3} + 1} - 1{,}5\right| \approx 0{,}205, \ (1 - q)\delta = 0{,}5\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \approx 0{,}3232,$$

отже умову (2.10) виконано. Із формули (2.12) випливає, що кількість ітерацій, потрібних для відшукання кореня з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, має задовольняти умові $n \geq 8$. Відповідні значення x_n та $x_n - \varphi(x_n)$ наведено в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

n	x_n	$x_n - \varphi(x_n)$
0	1,50000	0,209006
1	1,29099	$-0{,}411454 \cdot 10^{-1}$
2	1,33214	$0{,}901020 \cdot 10^{-2}$
3	1,32313	$-0{,}193024 \cdot 10^{-2}$
4	1,32506	$0{,}415444 \cdot 10^{-3}$
5	1,32464	$0{,}892878 \cdot 10^{-4}$
6	1,32473	$-0{,}191927 \cdot 10^{-4}$
7	1,32471	$-0{,}417233 \cdot 10^{-5}$
8	1,32472	$0{,}953674 \cdot 10^{-6}$

Із нерівності (2.13) і отриманих результатів видно, що для досягнення заданої точності достатньо було виконати п'ять ітерацій. Апостеріорна оцінка (2.13) точніша, і її використання дає змогу зменшити обсяг обчислень.

3. Методом релаксації знайти найменший за модулем від'ємний корінь рівняння

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0$$

з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язання. Позначимо $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. Оскільки $f(x) = -1$, а $f(-1) = -1$, то рівняння має корінь на проміжку [–1; 0]. Обчисливши значення $f(-0,5) = -0,375$, зменшимо проміжок існування кореня до [–1; –0,5]. На ньому функція $f'(x) = 3x^2 + 6x < 0$ монотонно зростає, $f''(x) = 6x + 6 \geq 0$. Тому $m_1 = \min\limits_{x\in[-1;-0,5]} |f'(x)| = |f'(-0,5)| = 2,25$, $M_1 = \max\limits_{x\in[-1;-0,5]} |f'(x)| = |f'(-1)| = 3$. Тоді відповідно до формул (2.15) і (2.16) $x_{n+1} = x_n + \tau_{\text{опт}}\left(x_n^3 + 3x_n^2 - 1\right)$.

Виберемо як початкове наближення точку $x_0 = -0,5$. Матимемо оцінку $|z_0| \leq 0,5$, а згідно з нерівністю (2.17) кількість ітерацій, потрібних для відшукання розв'язку з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, дорівнює 5. Відповідні значення x_n і $f(x_n)$ наведено в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

n	x_n	$f(x_n)$
0	–0,500000	0,142857
1	–0,642857	$0,985700 \cdot 10^{-2}$
2	–0,652714	$0,105500 \cdot 10^{-4}$
3	–0,652704	$0,596046 \cdot 10^{-7}$
4	–0,652704	0,000000
5	–0,652704	0,000000

Із наведених даних видно, що потрібної точності досягнуто раніше п'ятої ітерації. Це властиво апріорним оцінкам типу (2.17).

4. Методом Ньютона знайти найменший додатний корінь рівняння

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \qquad (2.25)$$

з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язання. Позначимо $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$, $f(0) = -1$, а $f(1) = 1$, тому рівняння (2.25) має додатний корінь, що належить проміжку [0; 1]. Обчислимо $f(0,5) = -0,125$. Це дає змогу шукати корінь на проміжку [0,5; 1]. Оскільки $f'(x) = 3x^2 + 6x > 0$, $f''(x) = 6x + 6 > 0$ для $x \in [0,5;\ 1]$, то функція $f(x)$ монотонно зростає на [0,5; 1]. Тому

$$m_1 = \min_{x\in[0,5;1]} |f'(x)| = |f'(0,5)| = 3,75, \quad M_2 = \max_{x\in[0,5;1]} |f''(x)| = |f''(1)| = 12.$$

Виберемо $x_0 = 1$, тоді $|x_0 - x^*| \leq 0,5$. Із формули (2.19) маємо

$$q = \frac{12 \cdot 0,5}{2 \cdot 3,75} = 0,8 < 1.$$

Отже, усі умови теореми про збіжність методу Ньютона виконано. Із нерівності (2.20) випливає, що для досягнення заданої точності достатньо виконати сім ітерацій. Відповідні обчислення наведено в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

n	x_n	$f(x_n)$
0	0,100000	$0,3000000 \cdot 10$
1	0,6666667	0,6296297
2	2,5486111	$0,6804019 \cdot 10^{-1}$
3	0,5323902	$0,1218202 \cdot 10^{-2}$
4	0,5320890	$0,4395228 \cdot 10^{-6}$
5	0,5320889	$-0,4230802 \cdot 10^{-7}$
6	0,5320889	$-0,4230802 \cdot 10^{-7}$
7	0,5320889	$-0,4230802 \cdot 10^{-7}$

Із таблиці видно, що потрібної точності досягнуто раніше сьомої ітерації.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Одним з ітераційних методів знайти дійсні корені рівнянь із точністю ε (наприклад $\varepsilon = 10^{-4}$).

1) $x^3-5x^2+4x+0,092=0$; 2) $x^3-4x^2-7x+13=0$;
3) $x^4+x^3-6x^2+20x-16=0$; 4) $x^3+\sin x-12x+1=0$;
5) $x^3-10x^2+44x+29=0$; 6) $x^2+\sin x-12x=0,25$;
7) $3x+\cos x+1=0$; 8) $x^3-3x^2-17x+22=0$;
9) $x^4-2x^3-3,74x^3+8,18x-3,48=0$; 10) $x^2+4\sin x-1=0$;
11) $x^3+4\sin x=0$; 12) $x^4-10x^3+48,16x^2+108,08x+70,76=0$;
13) $x^4-3x^3+20x^2+44x+54=0$; 14) $x^3-3x^2-14x-8=0$;
15) $x^3-x-1=0$; 16) $3x-\cos x-1=0$; 17) $3x^2-\cos^2\pi x=0$;
18) $x^2+4\sin x=0$; 19) $(x-1)^3+0,5e^x=0$; 20) $x^3+4x-6=0$;
21) $x^3-2x^2+x+1=0$; 22) $x^2\lg x-1=0$; 23) $x^3+6x^2+9x+2=0$;
24) $\mathrm{sh}x-12\mathrm{th}x-0,311=0$; 25) $e^x-2(x-1)^2=0$; 26) $e^{-x}+x^2-2=0$;
27) $x^4+4x-2=0$; 28) $x^4+2x-1=0$; 29) $x^3-x^2+x-3=0$;
30) $x^5+x-3=0$; 31) $x^7+x+4=0$; 32) $2^x+x^2-1,15=0$;
33) $3^{-x}-x^2+1=0$; 34) $x^4-2x^3+x^2-2x+1=0$;
35) $x^5-5x+2=0$; 36) $x^7+6x-5=0$; 37) $x^4+2x-2=0$;
38) $(x-1)^2-\sin 2x=0$; 39) $x^4+2x^2-6x+2=0$; 40) $x^5-3x^2+1=0$;
41) $5x^3+2x^2-15x-6=0$; 42) $x^6-3x^2+x-1=0$;
43) $(x-1)^2-0,5e^x=0$; 44) $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$;
45) $x^2\cos 2x=1$; 46) $x^2-3+0,5^x=0$; 47) $x^2-10\sin x=0$.

2. Система регулювання має характеристичне рівняння

$$12x^3+7x^2+x+k=0,$$

де k — коефіцієнт підсилення у зворотному зв'язку системи. Із точністю $\varepsilon=10^{-4}$ знайти найбільше значення k, за якого система залишається стійкою (стійкість системи означає, що $\mathrm{Re}\, x \le 0$).

3. Для хімічної реакції $CO+\frac{1}{2}O_2 \leftrightarrow CO_2$ концентрація x дисоційованого моля CO_2 в суміші газів визначають із рівняння

$$\left(\frac{P}{K^2}-1\right)x^3+3x-2=0,$$

де P — тиск у реакторі; K — стала рівноваги. Знайти концентрацію CO_2 для значень $P = 2,3$; $K = 0,65$.

4. Знайти критичну силу P, що призводить до втрати стійкості стержня (рис. 2.1), яка являє собою найменший додатний розв'язок рівняння

$$\mathrm{tg}\sqrt{\frac{P}{E}}L=\sqrt{\frac{P}{E}}L.$$

Тут згинальна жорсткість стержня $E=10$, а довжина $L=0,1$.

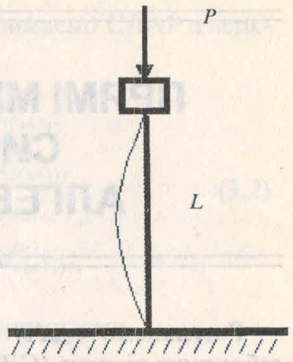

Рис. 2.1

5. Нехай в алгоритмі методу простої ітерації (2.8) у якомусь околі кореня x^* похідна $\varphi'(x)$ зберігає сталий знак і виконано нерівність $\left(\varphi'(x)\right) \le q < 1$. Довести, що в разі додатної похідної послідовні наближення (2.8) монотонно збігаються до кореня, а в разі від'ємної — коливаються навколо кореня x^*.

6. Визначити порядок збіжності алгоритму Чебишова

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\frac{f''(x_n)\,f^2(x_n)}{2\left[f'(x_n)\right]^3}$$

розв'язання рівняння (2.1).

7. Визначити порядок збіжності методу січних розв'язання рівняння (2.1).

3

ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо задачу чисельного розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{3.1}$$

де A — матриця з розмірністю $n \times n$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ — шуканий вектор, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}$ — заданий вектор правих частин. Припустімо, що $\det A \neq 0$, тобто існує єдиний розв'язок задачі (3.1).

Методи чисельного розв'язання задачі (3.1) можна поділити на дві групи: прямі й ітераційні. У прямих методах розв'язок можна знайти за скінченну кількість арифметичних операцій. Ці методи порівнюють за кількістю математичних операцій, потрібних для розв'язання СЛАР.

Метод Гаусса. Запишемо рівняння (3.1) у вигляді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1(n+1)}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2(n+1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n(n+1)}, \end{cases}$$

де $a_{i(n+1)} = b_i$, $i = \overline{1, n}$.

Перший крок методу Гаусса (його ще називають методом виключення невідомих) полягає у виключенні невідомого x_1 з усіх рівнянь, починаючи з другого, тобто в переході до системи

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1(n+1)}^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2(n+1)}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n(n+1)}^{(1)}, \end{cases}$$

Продовжуючи цей процес виключення, отримаємо СЛАР з верхньою трикутньою матрицею вигляду

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1(n+1)}^{(1)}, \\ x_2 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2(n+1)}^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n(n+1)}^{(n)}, \end{cases} \tag{3.2}$$

Коефіцієнти системи (3.2) обчислюють за формулами

$$\left. \begin{aligned} & a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} \big/ a_{kk}^{(k-1)},\ k = \overline{1,\ n},\ j = \overline{k+1,\ n+1}, \\ & a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}a_{kj}^{(k)},\ k = \overline{1,\ n-1},\ i = \overline{k+1,\ n},\ j = \overline{k+1,\ n+1}, \end{aligned} \right\} \tag{3.3}$$

за умови $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.

Систему (3.3) можна розв'язати за формулами

$$x_n = a_{n(n+1)}^{(n)},\ x_i = a_{i(n+1)}^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}x_j,\ i = \overline{n-1,\ 1}. \tag{3.4}$$

Перехід від задачі (3.1) до (3.2) називається *прямим ходом* методу Гаусса, а обчислення розв'язку за формулами (3.4) — *зворотним*.

Загальна кількість арифметичних операцій, які потрібно виконати для реалізації методу Гаусса, має порядок

$$Q = \frac{2}{3}n^3 + O\left(n^2\right).$$

Метод Гаусса з вибором головного елемента. Його застосовують тоді, коли головний елемент на k-му кроці $a_{kk}^{(k-1)} = 0$. На кожному кроці виключають чергове невідоме за допомогою рівняння з найбільшим за модулем коефіцієнтом при відповідному невідомому. Головний елемент можна вибирати такими способами:

а) за рядком —

$$\left| a_{kj_0}^{(k-1)} \right| = \max_j \left| a_{kj}^{(k-1)} \right|,\ j = \overline{k,\ n};$$

у цьому разі на кожному кроці потрібно відповідно перенумерувати змінні;

б) за стовпцем —

$$\left|a_{i_0 k}^{(k-1)}\right| = \max_j \left|a_{ik}\right|,\ i = \overline{k,\ n};$$

тоді на кожному кроці потрібно відповідно перенумерувати рівняння;

в) за всією матрицею.

Найчастіше віддають перевагу алгоритму вибору головного елемента за стовпцем.

Метод Гаусса з вибором головного елемента дає також можливість дещо зменшити обчислювальну похибку алгоритму.

У матричному вигляді k-й крок методу Гаусса можна подати у вигляді

$$A_k = M_k A_{k-1},$$

де $A_{k-1} = M_{k-1} M_{k-2} \cdots M_1 A$, а

$$M_k = \begin{pmatrix} 1\ 0 & & \ldots & & 0 \\ 0\ 1 & & & & \\ & & & & \\ & & m_k & & \\ 0\ 0 & \ldots & m_{k+1k} & 1\ 0 & \ldots\ 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ \ldots & m_k & 0\ 0 & \ldots\ 1 \end{pmatrix},$$

де $m_{kk} = \dfrac{1}{a_{kk}^{(k-1)}}$, $m_{ik} = -a_{i,k}^{(k-1)} \big/ a_{kk}^{(k-1)}$, $i = \overline{k+1,\ n}$.

Метод Гаусса можна подати в матричному вигляді:

$$MA\bar{x} = M\bar{b},$$

де $M = M_n M_{n-1} \cdots M_1$ — нижня трикутня матриця, а $MA = U$ — верхня трикутня з одиничною головною діагоналлю. Отже, метод Гаусса базується на можливості розкласти матрицю A на дві трикутні матриці.

Теорема 3.1. Нехай усі головні мінори матриці A відмінні від нуля. Тоді матрицю A можна подати як добуток

$$A = LU, \tag{3.5}$$

де L — нижня трикутна матриця з ненульовими діагональними елементами, а U — верхня трикутна з одиничною діагоналлю.

Із формули (3.5) випливає $L = M^{-1}$.

Алгоритм вибору головного елемента можна записати в матричному вигляді за допомогою матриці перестановок.

Елементарною матрицею перестановок P_{kl} називається матриця, отримана з одиничної матриці перестановкою k-го та l-го рядків.

Із цього означення випливає, що матриця $P_{kl}A$ відрізняється від матриці A перестановкою k-го та l-го рядків, а матриця AP_{kl} — перестановкою k-го та l-го стовпців. Тоді алгоритм прямого ходу методу Гаусса з вибором головного елемента за стовпцем набере вигляду

$$M_n P_n \cdots M_2 P_2 M_1 P_1 A\bar{x} = M_n P_n \cdots M_2 P_2 M_1 P_1 \bar{b},$$

де P_k — матриця перестановок на k-му кроці.

Метод квадратного кореня. Його застосовують для розв'язання СЛАР (3.1) із неособливою симетричною матрицею $A = A^{\mathrm{T}}$. Цей метод базується на тому, що симетричну матрицю A можна подати у вигляді

$$A = S^{\mathrm{T}} DS,$$

де S — права трикутна матриця

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & s_{nn} \end{pmatrix},$$

а D — діагональна матриця з елементами $d_{ii} = \pm 1$, $i = \overline{1,\ n}$.

Елементи матриці S та D обчислюють за формулами

$$d_{ii} = \operatorname{sign}\left(a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} \left|s_{pi}\right|^2 d_{pp}\right),\ s_{ii} = \sqrt{\left|a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} \left|s_{pi}\right|^2 d_{pp}\right|},\ i = \overline{1,\ n},$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{p=1}^{i-1} s_{pi} d_{pp} s_{pj}}{d_{ii} s_{ii}},\ i = \overline{2,\ n-1},\ j = \overline{i+1,\ n}.$$

Тоді розв'язання СЛАР (3.1) зводиться до розв'язання наступних двох СЛАР:

$$S^{\mathrm{T}} D\bar{y} = \bar{b}; \tag{3.6}$$

$$S\vec{x} = \vec{y}. \tag{3.7}$$

Матриця D — ліва трикутна. Це дає змогу знайти розв'язок системи (3.6), виконавши зворотний хід методу Гаусса зверху вниз, а після цього розв'язати систему (3.7), виконавши, як у методі Гаусса, зворотний хід знизу вгору (тобто починаючи з останнього рівняння).

Отже, алгоритм методу квадратного кореня можна подати так:

1) перевірити, чи симетрична матриця A;

2) обчислити елементи матриць S і D за формулами (3.6);

3) розв'язати СЛАР (3.6) і знайти вектор y;

4) розв'язати СЛАР (3.7) і знайти шуканий розв'язок $\vec{x}$ системи (3.1).

Загальна кількість арифметичних операцій, які потрібно виконати для реалізації методу квадратного кореня, має порядок $Q = \dfrac{n^3}{3} + O\left(n^2\right)$.

Обчислення визначника матриці. Для алгоритму методу Гаусса з вибором головного елемента за стовпцем $\det A = (-1)^l\, a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} \cdots$ $\cdots a_{nn}^{(n-1)}$, де l — загальна кількість перестановок.

У методі квадратного кореня $A = S^{\mathrm{T}} DS$. Тому

$$\det A = \prod_{k=1}^{n} d_{kk} \prod_{k=1}^{n} s_{kk}^2.$$

Обчислення оберненої матриці. Відшукання матриці, оберненої до матриці A, еквівалентне розв'язанню матричного рівняння

$$AX = E, \tag{3.8}$$

де X — шукана матриця; E — одинична. Система (3.8) розпадається на n незалежних систем рівнянь з однаковою матрицею, але різними правими частинами. Ці системи мають вигляд

$$A\vec{x}^{(j)} = \vec{e}^{(j)},\ j = \overline{1, n},$$

де $\vec{x}^{(j)} = \left(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}\right)^{\mathrm{T}}$, j-та компонента вектора $\vec{e}^{(j)}$ дорівнює одиниці, а всі інші — нулю. Тоді, якщо ми один раз уже знайшли розвинення $A = LU$, то зворотний хід методу Гаусса зводиться до розв'язання СЛАР із трикутними матрицями

$$L\vec{y}^{(j)} = \vec{e}^{(j)},\ j = \overline{1, n},$$

$$U\vec{x}^{(j)} = \vec{y}^{(j)},\ j = \overline{1, n},$$

$$\vec{y}^{(j)} = \left(y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{nj}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Загальна кількість арифметичних операцій, потрібних для відшукання матриці A^{-1} методом Гаусса, дорівнює $Q = 2n^3 + O\left(n^2\right)$.

Аналогічно обчислюють матрицю, обернену до симетричної матриці A, методом квадратного кореня.

Метод прогонки. Цей метод застосовують для розв'язання СЛАР із тридіагональною матрицею. Розглянемо СЛАР вигляду

$$\begin{cases} -c_0 y_0 + b_0 y_1 = -f_0, \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i,\ i = \overline{1, n-1}, \\ a_n y_{n-1} - c_n y_n = -f_n. \end{cases} \tag{3.9}$$

Алгоритм розв'язання системи (3.9) такий:

1) за допомогою прямих прогонкових формул (зліва направо) знайти прогонкові коефіцієнти α_{i+1} та β_{i+1}:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = b_0/c_0,\ \beta_1 = f_0/c_0, \\ &\alpha_{i+1} = b_i/z_i,\ \beta_{i+1} = \left(f_i + \alpha_i\beta_i\right)/z_i,\ i = \overline{1, n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

де $z_i = c_i - \alpha_i a_i$;

2) визначити y_n за формулою

$$y_n = \left(f_n + a_n\beta_n\right)/\left(c_n - \alpha_n a_n\right); \tag{3.11}$$

3) обчислити значення y_i за формулами

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1},\ i = n-1,\ 0. \tag{3.12}$$

Лема 3.1. Нехай $a_i \neq 0,\ b_i \neq 0,\ i = \overline{1, n-1},\ a_0 = 0,\ b_n = 0,\ c_0 \neq 0,$ $c_n \neq 0$ та виконуються умови

$$|c_i| \ \geq\ |a_i| + |b_i|,\ i = \overline{0, N}, \tag{3.13}$$

причому в (3.13) хоча б для одного i виконується строга нерівність. Тоді правдиві оцінки

$$|\alpha_i| \ \leq 1,\ |z_i| > 0,\ i = \overline{1, n}. \tag{3.14}$$

Оцінка (3.14) — умова стійкості методу прогонки. Загальна кількість математичних операцій, які потрібно виконати для його реалізації, має порядок $Q = 8n - 2$.

Число обумовленості матриці. Розглянемо СЛАР (3.1) із квадратною невиродженою матрицею A. Розв'язуючи таку систему зі скінченною розрядністю, замість вектора отримаємо наближений розв'язок $\bar{y}$, який можна розглядати як точний розв'язок збуреної системи $(A+\Delta A)\bar{y} = (\bar{b}+\Delta\bar{b})$, де матриця ΔA та вектор $\Delta\bar{b}$ досить малі. Тоді для відносної похибки $\bar{y}$ правдива оцінка

$$\frac{\|\bar{y}-\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \le \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A)\dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\Delta\bar{b}\|}{\|\bar{b}\|}\right), \tag{3.15}$$

де $\operatorname{cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ — *число обумовленості* матриці A.

Із формули (3.15) видно, що число обумовленості відіграє важливу роль для оцінки того, наскільки отриманий розв'язок відрізняється від точного розв'язку СЛАР (3.1).

Якщо число $\operatorname{cond}(A)$ досить велике, то говорять, що матриця A *погано обумовлена*.

Приклади розв'язання задач

1. Виконавши трикутний розклад методом Гаусса з вибором головного елемента за стовпцем, знайти розв'язок системи $A\bar{x} = \bar{b}$, де

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ \bar{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розглянемо розширену матрицю системи

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

На першому кроці переставляти рядки не потрібно, тобто $P_1 = E$, $P_1\bar{A} = A$. Матриця виключення M_1 має вигляд

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ -0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\bar{A}_1 = M_1 P_1 \bar{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & -1 & -0{,}9 & -0{,}1 \\ 0 & 4 & 1{,}6 & 2{,}4 \end{array}\right).$$

На другому кроці матриця перестановок

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

отже

$$P_2\bar{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 4 & 1{,}6 & 2{,}4 \\ 0 & -1 & -0{,}9 & -0{,}1 \end{array}\right).$$

Тоді

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{A}_2 = M_2 P_2 \bar{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{array}\right),$$

$$P_3 = E,\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ \bar{A}_3 = M_3 P_3 \bar{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 1 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

З останньої системи знайдемо розв'язок даної системи:

$$x_3 = -1,\ x_2 = 0{,}6 + 0{,}4 = 1,\ x_1 = 0{,}7 + 0{,}3 = 1.$$

2. Для матриці A з попереднього прикладу обчислити визначник і обернену матрицю.

Розв'язання. Із трикутного розкладу матриці A маємо

$$\det(PA) = -\det A = -a_{11}^{(0)} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} = -10 \cdot 4 \cdot (-0{,}5) = 20.$$

Обернена матриця $X = A^{-1}$ задовольняє матричне рівняння $AX = E$. Із матрицею E виконаємо ті самі перетворення, що й із матрицею A в попередньому прикладі:

$$E_1 = M_1 P_1 E_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ -0{,}3 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = M_2 P_2 E_2 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 \\ -0{,}25 & 1 & 0{,}25 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = M_3 P_3 E_3 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & -2 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язавши матричне рівняння $A_3 X = E_3$, тобто три СЛАР із трикутною матрицею A_3, визначимо

$$X = \begin{pmatrix} -0{,}05 & 0{,}6 & 0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}45 \\ 0{,}5 & -2 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

3. Методом квадратних коренів розв'язати СЛАР (3.1), де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -7 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -18 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Знайдемо розклад матриці $A = S^{\mathrm{T}} D S$, де S — права трикутна матриця, а D — діагональна матриця з елементами ± 1 на діагоналі. Згідно з формулами методу квадратних коренів отримаємо:

$$d_{11} = 1,\ s_{11} = \sqrt{1} = 1,\ s_{12} = \frac{-1}{1 \cdot 1} = -1,\ s_{13} = 1/1 = 1,\ s_{14} = -1/1 = -1,$$

$$d_{22} = \operatorname{sign}(5-1) = 1,\ s_{22} = \sqrt{|5-1|} = 2,$$

$$s_{23} = \frac{-3-(-1)\cdot 1\cdot 1}{1\cdot 2} = -1,\ s_{24} = \frac{3-(-1)\cdot 1\cdot(-1)}{1\cdot 2} = 1,$$

$$d_{33} = \operatorname{sign}\left(-7-1\cdot 1-(-1)^2\cdot 1\right) = -1,\ s_{33} = \sqrt{|-7-1-1|} = 3,$$

$$s_{34} = \frac{1-1\cdot 1\cdot(-1)-(-1)\cdot 1\cdot 1}{(-1)\cdot 3} = -1;$$

$$d_{44} = \operatorname{sign}\left(10-(-1)^2\cdot 1-1^2\cdot 1-(-1)^2(-1)\right) = 1,\ s_{44} = \sqrt{10-1-1+1} = 3.$$

Отже,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо систему $S^{\mathrm{T}} D\bar{y} = \bar{b}$, де

$$S^{\mathrm{T}} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ —

нижня трикутна матриця. Виконавши зворотний хід методу Гаусса згори вниз, отримаємо

$$y_1 = 2,\ y_2 = (-4 + y_1)/2 = -1,$$

$$y_3 = (-18 + y_1 + y_2)/(-3) = 7,$$

$$y_4 = (-5 + y_1 - y_2 - y_3)/3 = -3.$$

Розв'яжемо систему з верхньою трикутною матрицею $S\bar{x} = \bar{y}$. Виконавши зворотний хід методу Гаусса знизу вгору, отримаємо

$$x_4 = -1,\ x_3 = (7 + x_4)/3 = 2,$$

$$x_2 = (-1 - x_4 + x_3)/2 = 1,$$

$$x_1 = 2 + x_4 - x_3 + x_2 = 0.$$

Отже, розв'язок системи — вектор $\vec{x}=(0,\ 1,\ 2,\ -1)$.

4. Методом прогонки розв'язати СЛАР $A\vec{y}=\vec{b}$, де

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad \vec{y}=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За допомогою прямих прогонкових формул (3.10) визначимо коефіцієнти α_i, β_i :

$$\alpha_1=(-1)/(-1)=1,\ \beta_1=(-1)/(-1)=1,\ z_1=-2-(-1)\cdot 1=-1;$$

$$\alpha_2=(-1)/(-1)=1,\ \beta_2=\left(2+(-1)\cdot 1\right)/(-1)=-1,\ z_2=-2-(-1)\cdot 1=-1;$$

$$\alpha_3=(-1)/(-1)=1,\ \beta_3=\left(3+(-1)(-1)\right)/(-1)=-4,\ z_3=-2-(-1)\cdot 1=-1;$$

$$\alpha_4=(-1)/(-1)=1,\ \beta_4=\left(4+(-1)(-4)\right)/(-1)=-8,\ z_4=-2-(-1)\cdot 1=-1.$$

За формулою (3.11) обчислимо y_4:

$$y_4=\left(-3+(-1)(-8)\right)/\left(-2-(-1)\cdot 1\right)=-5.$$

Інші y_i визначимо за формулами зворотної прогонки (3.12):

$$y_3=1\cdot(-5)+(-8)=-13,$$
$$y_2=1\cdot(-13)+(-4)=-17,$$
$$y_1=1\cdot(-17)+(-1)=-18,$$
$$y_0=1\cdot(-18)+1=-17.$$

Отже, розв'язок даної СЛАР — вектор

$$\vec{y}=(-17,\ -18,\ -17,\ -13,\ -5)^{\mathrm{T}}.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Розв'язати на ЕОМ СЛАР $A\vec{x}=\vec{b}$, де $A=\left(a_{ij}\right)$, $\vec{b}=\left(b_i\right)$; $a_{ij}=\delta_{ij}+$ $+zp^{i-1}q^{j-1}$, $z=(\alpha-1)/c$, $c=\sum\limits_{k=1}^{n}p^{k-1}q^{k-1}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $b_i=\sum\limits_{k=1}^{n}(k-1)a_{ik}$. Обчислити $\det A$, A^{-1}, $\vec{r}=A\vec{x}-\vec{b}$, $\mathrm{cond}(A)$. Пояснити

отримані результати. Матриця $A=A(\alpha)$ залежить від параметрів α, p та q (якщо $p=q$, то матриця стає симетричною). Можна рекомендувати такі значення параметрів: $\alpha=10^{-1}\ldots10^{-8}$, $p=\overline{1,\ 10}$, $q=\overline{1,\ 10}$.

2. Уважаючи, що коефіцієнти багаточлена найкращого середньоквадратичного наближення $Q_{n-1}(t)=c_0+c_1t+\ldots+c_{n-1}t^{n-1}$ для функції на проміжку [0; 1] — розв'язок СЛАР (3.1), де

$$\vec{x}=\left(c_0,\ c_1,\ldots,c_{n-1}\right)^{\mathrm{T}};\ a_{ij}=a_{ji}=\int\limits_0^1 t^{i+1-2}dt=y_4=1/(i+j-1);$$

$$b_i=\int\limits_0^1 f(t)t^{i-1}dt;\ i,j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

і, узявши різні функції та степені багаточлена $Q_{n-1}(t)$, дістаємо кілька варіантів завдання. Наприклад, можна вибрати функцію $f(t)=d_0+d_1t+\ldots+d_nt^n$ із різними коефіцієнтами d_i, де $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, а $d_n\neq 0$, $n=\overline{3,\ 10}$.

3. Методом Гаусса знайти розв'язок СЛАР $A_n\vec{x}=\vec{b}_n$:

а) $$A_n=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n-1 & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & -n+1 & 0 \end{pmatrix},\quad \vec{b}_n=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix},\quad n=\overline{10,\ 100};$$

б) $$A_n=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_n \end{pmatrix},\quad \vec{b}_n=\begin{pmatrix} n \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$a_k=\left(1+\frac{1}{k}\right),\ x_k=5-\frac{1}{k},\ n=\overline{10,\ 100};$$

в) $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & a_{n-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$, $\vec{b}_n = \begin{pmatrix} \sin\dfrac{\pi}{n} \\ \sin\dfrac{\pi}{n-1} \\ 1 \\ \vdots \\ \sin\dfrac{\pi}{1} \end{pmatrix}$,

$a_k = 1 + k \cdot 0{,}1,\ n = \overline{10,\ 100};$

г) $A_n = \begin{pmatrix} c_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & c_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$, $\vec{b}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$, $c_k = \dfrac{2}{k},\ a_k = (-1)^k \cdot k,\ n = \overline{10,\ 20};$

д) $A_n = e\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ c_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_3 & c_3 & c_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_n & c_n & c_n & \dots & c_n & a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$,

$c_k = \dfrac{1}{k},\ a_k = k,\ n = \overline{10,\ 100}.$

4. Методом Гаусса знайти розв'язок СЛАР $Ax = \vec{b}$:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$.

5. Методом квадратних коренів знайти розв'язок системи $A\vec{x} = \vec{b}$:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & -5 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 5{,}4 \\ 5{,}0 \\ 7{,}5 \\ 3{,}3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

6. Методом прогонки знайти розв'язок системи $A_n\vec{x} = \vec{b}_n$:

а) $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ n \end{pmatrix}$, $n = \overline{10,\ 20};$

$$\text{б)}\ A_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_1 & a_2 & 1 & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & a_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & a_n \end{pmatrix},\ \vec{b}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ n \end{pmatrix},$$

$$a_k = 2 + 2/k,\ p_k = 1/k,\ n = \overline{10,\ 20}.$$

7. Обчислити обернену матрицю та визначник матриці A:

$$\text{а)}\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \text{б)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

8. Знайти розв'язок СЛАР $A\vec{x} = \vec{b}$ й обчислити число обумовленості матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 3{,}00 & 1{,}00 & -1{,}00 \\ 6{,}00 & 2{,}01 & 0{,}00 \\ 3{,}00 & 1{,}02 & 3{,}01 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} -2{,}00 \\ 2{,}01 \\ 1{,}99 \end{pmatrix}.$$

9. Оцінити відносну похибку розв'язку СЛАР:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 = b_1, \\ x_1 + 0{,}49x_2 = b_2, \end{cases} \quad \text{якщо}\ b_1 = 1{,}01 \pm 0{,}001,\ b_2 = 3{,}00 \pm 0{,}001;$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} x_1 + x_2 = b_1, \\ 0{,}99x_1 + x_2 = b_2, \end{cases} \quad \text{якщо}\ b_1 = 2{,}02 \pm 0{,}001,\ b_2 = 1{,}00 \pm 0{,}001.$$

10. Обчислити обернену матрицю та визначник матриці A із задач 3–6.

4

ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Прямі методи розв'язання СЛАР (3.1) застосовують зазвичай для систем із повною матрицею середньої розмірності. Для розв'язання систем із розрідженою матрицею великої розмірності певні переваги мають ітераційні методи. Розглянемо деякі з них.

Метод Якобі. Припустімо, що діагональні коефіцієнти невиродженої матриці A ненульові $(a_{ii} \neq 0)$. Якщо деякі $a_{ii} = 0$, то цього можна досягти, переставивши деякі рядки чи стовпці матриці. Розділивши i-те рівняння на a_{ii}, отримаємо таку СЛАР:

$$x_i = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1,\ n}.$$

Задамо якесь початкове наближення $\vec{x}^0 = \left(x_1^0, \dots, x_n^0\right)$. Наступні наближення обчислимо за формулами

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}},\ i = \overline{1,\ n} \quad k = 0,\ 1,\ \dots . \tag{4.1}$$

Метод збігається, тобто $\lim_{k\to\infty} \left\| \vec{x}^k - \vec{x} \right\| = 0$, якщо виконуються умови діагональної переваги матриці A $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $i = \overline{1,\ n}$. Якщо ж виконуються нерівності $q|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$, $i = \overline{1,\ n}$, $q < 1$, то правдива така оцінка точності:

$$\left\| \vec{x}^k - \vec{x} \right\| \leq \frac{q^k}{1-q} \left\| \vec{x}^0 - \vec{x}^1 \right\|. \tag{4.2}$$

Ітерації виконують, поки не буде отримано потрібну кількість цифр у компонентах розв'язку чи до виконання умови $\frac{q^k}{1-q} \leq \varepsilon$.

Вибір останньої умови пояснюється тим, що в разі її виконання для $\vec{x}^0 = 0$ маємо оцінку

$$\delta(\vec{x}) \le \frac{\| \vec{x}^k - \vec{x} \|}{\| \vec{x} \|} \le \frac{q^k}{1-q} < \varepsilon.$$

Метод Зейделя. Якщо в першій сумі (4.1) використати вже відомі нові значення x_j^{k+1}, $j = \overline{1, i-1}$, то отримаємо формулу

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Достатні умови збіжності методу Зейделя такі самі, як для методу Якобі. Крім того, метод Зейделя збігається, якщо $A^{\mathrm{T}} = A \ge 0$. Умова невід'ємності симетричної матриці A означає, що невід'ємні її головні мінори.

Змінивши порядок обчислення компонент, отримаємо ще одну формулу методу Зейделя:

$$x_i^{k+1} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1} + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Метод простої ітерації. Зведемо СЛАР (3.1) до вигляду

$$\vec{x} = B\vec{x} + \vec{f}. \tag{4.3}$$

Це можна зробити, наприклад, за допомогою тотожного перетворення

$$\vec{x} = \vec{x} - C(A\vec{x} - \vec{b}), \ \det C \ne 0. \tag{4.4}$$

Порівнявши праві частини рівностей (4.3) та (4.4), отримаємо $B = E - CA$, $\vec{f} = C\vec{b}$.

Формула методу простої ітерації має вигляд

$$\vec{x}^{k+1} = B\vec{x}^k + \vec{f} \tag{4.5}$$

для заданого $\vec{x}^0$. Цей метод збігається, якщо $\|B\| \le q < 1$. Тоді правильна оцінка точності (4.2).

Теорема 4.1. Нехай система (4.3) має єдиний розв'язок. Ітераційний процес (4.5) збігається для довільного початкового наближення тоді й тільки тоді, коли всі власні значення матриці за модулем менші 1.

Інше перетворення, ніж (4.4), потрібно застосувати в методі Якобі, що являє собою окремий випадок методу простої ітерації. Дійсно, якщо подати A як $A = A_1 + D + A_2$, де A_1 — нижній трикутник матриці A, D — її діагональ, а A_2 — верхній трикутник, то система (3.1) еквівалентна такій: $\vec{x} = -D^{-1}A_1\vec{x} - D^{-1}A_2\vec{x} + D^{-1}\vec{b}$. Вона має вигляд (4.3), де $B = -D^{-1}(A_1 + A_2)$, $\vec{f} = D^{-1}\vec{b}$.

Як наслідок теореми 4.1 отримаємо умову збіжності методу Якобі.

Теорема 4.2. Метод Якобі збігається для довільного початкового наближення тоді й тільки тоді, коли всі корені рівняння

$$P_n^J(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

за модулем менші 1.

Корені цього рівняння можуть бути комплексними. Тоді беруть модуль комплексного числа.

Методу Зейделя у формулі (4.3) відповідає матриця $B = -(A_1 + D)^{-1} A_2$. Тому правдива така теорема.

Теорема 4.3. Метод Зейделя збігається для довільного початкового наближення тоді й тільки тоді, коли всі корені рівняння

$$P_n^Z(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{vmatrix} = 0$$

за модулем менші 1.

Однокрокові ітераційні схеми. Формула довільного однокрокового методу має вигляд

$$B_k \frac{\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k}{\tau_{k+1}} + A\vec{x}^k = \vec{b}. \tag{4.6}$$

Параметри цього методу — оператори $\{B_k\}$ та числа $\{\tau_k\}$. Якщо $B_k = E$, то метод (4.6) називається *явним*, бо наступні наближення потрібно шукати за явними формулами $\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^k - \tau_{k+1}\left(A\vec{x}^k - \vec{b}\right)$. Метод називається *стаціонарним*, якщо $B_k = B$, $\tau_k = \tau$.

Розглянемо окремі випадки методу (4.6). Якщо $B_k = D$, $\tau_k = 1$, то маємо метод Якобі. Методу Зейделя відповідає $B_k = A_1 + D$, $\tau_k = 1$. У разі $B_k = E$, $\tau_k = \tau$ маємо метод простої ітерації з $B = E - \tau A$. Якщо $A^{\mathrm{T}} = A \geq 0$, то цей метод збігається в разі $\tau \leq \frac{2}{\gamma_2}$, де $\gamma_2 \geq \max_i \lambda_i(A)$. Оптимальний параметр такий:

$$\tau = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2},$$

де $\gamma_1 \leq \min_i \lambda_i(A)$. При цьому в оцінці точності (4.2) $q = q_0 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}$.

Узагальнення методу Зейделя — *метод верхньої релаксації*, формула якого має вигляд

$$(D + \omega A_1)\frac{\bar{x}^{k+1} - \bar{x}^k}{\omega} + A\bar{x}^k = \bar{b}. \quad (4.7)$$

Методу Зейделя відповідає $\omega = 1$. Метод верхньої релаксації збігається, якщо $0 < \omega < 2$. Він збігається швидше, ніж метод Зейделя.

Подальше прискорення збіжності методу (4.6) можливе за допомогою вибору більшої кількості параметрів, ніж у методі простої ітерації (один параметр $\tau = \tau_0$) та методі верхньої релаксації (два параметри $\tau = \omega$, $B = D + \omega A_1$).

Приклади розв'язання задач

1. Методом Якобі виконати дві ітерації для СЛАР

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0{,}5 & 1{,}75 \\ 1 & 0{,}5 & 3 & 2{,}5 \end{array}\right).$$

Скільки ітерацій потрібно для досягнення точності $\varepsilon = 10^{-3}$?

Розв'язання. Зведемо дану СЛАР до вигляду

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(x_2 - x_3 + 1), \\ x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{7}{4}\right), \\ x_3 = \frac{1}{3}\left(-x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}\right). \end{cases}$$

Виберемо $\bar{x}^0 = (0,\ 0,\ 0)$. Далі обчислимо

$$x_1^1 = \frac{1}{3} = 0{,}33333,\ x_2^1 = \frac{7}{8} = 0{,}875,\ x_3^1 = \frac{5}{6} = 0{,}83333;$$

$$x_1^2 = 0{,}34722,\ x_2^2 = 0{,}83333,\ x_3^2 = 0{,}57870.$$

Після десяти ітерацій отримаємо

$$x_1^{10} = 0{,}49625,\ x_2^{2} = 0{,}99590,\ x_3^{2} = 0{,}50302.$$

Для матриці заданої СЛАР виконується умова діагональної переваги з $q = \frac{3}{4}$. Це означає, що для досягнення точності ε потрібно виконати таку кількість ітерацій:

$$n \geq \left[\frac{\ln((1-q)\varepsilon)}{\ln q}\right] + 1 = 29.$$

Отримаємо

$$x_1^{29} = 0{,}49999,\ x_2^{29} = 0{,}99999,\ x_3^{29} = 0{,}50001.$$

2. Методом Зейделя виконати дві ітерації для СЛАР

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0{,}5 & 1{,}75 \\ 1 & 0{,}5 & 3 & 2{,}5 \end{array}\right).$$

Розв'язання. Матриця A симетрична та додатна:

$$\det A_1 = a_{11} = 3 > 0,\ \det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 6 - 1 > 0,\ \det A_3 = \det A = 11{,}25 > 0.$$

Нехай $\vec{x}^0 = (0,\ 0,\ 0)$. Тоді

$$x_1^1 = \frac{1}{3} = 0{,}33333,\ x_2^1 = 1{,}04167,\ x_3^1 = 0{,}54861;$$

$$x_1^2 = 0{,}49768,\ x_2^2 = 0{,}98670,\ x_3^2 = 0{,}50233.$$

Після десяти ітерацій

$$x_1^{10} = 0{,}49999, x_2^2 = 0{,}99999,\ x_3^2 = 0{,}50001.$$

Порівнюючи з попереднім прикладом, доходимо висновку про вищу швидкість збіжності методу Зейделя: за 10 ітерацій метод Зейделя дає ту саму точність, що й метод Якобі за 29 ітерацій.

3. Довести, що для лінійних систем другого порядку методи Якобі та Зейделя водночас збігаються та розбігаються.

Розв'язання. Згідно з теоремою 4.2 для методу Якобі маємо рівняння

$$P_2^J(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\lambda \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0.$$

Його корені — $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}}$.

Для методу Зейделя згідно з теоремою 4.3 маємо рівняння

$$P_2^Z(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\lambda^2 - a_{12}a_{21}\lambda = 0.$$

Його корені — $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$. Як бачимо корені обох рівнянь водночас задовольняють умову $|\lambda_k| < 1,\ k = 1,\ 2.$

4. Знайти області збіжності методів Якобі та Зейделя для СЛАР (3.1) із матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо

$$P_3^J(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha\lambda & \beta & 0 \\ \beta & \alpha\lambda & \beta \\ 0 & \beta & \alpha\lambda \end{vmatrix} = \alpha\lambda\left(\alpha^2\lambda^2 - 2\beta^2\right) = 0,$$

$$P_3^Z(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha\lambda & \beta & 0 \\ \beta\lambda & \alpha\lambda & \beta \\ 0 & \beta\lambda & \alpha\lambda \end{vmatrix} = \alpha\lambda\left(\alpha^2\lambda^2 - 2\beta^2\right) = 0.$$

Отже, для обох методів маємо таку умову збіжності:

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Однокроковим явним методом виконати десять ітерацій для СЛАР

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0{,}5 & 1{,}75 \\ 1 & 0{,}5 & 3 & 2{,}5 \end{array}\right).$$

Розв'язання. Оскільки $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A) \le \gamma_2 = \|A\|_\infty = 5$ виберемо $\tau = \dfrac{2}{5} < \dfrac{2}{\max\limits_{i=\overline{1,n}} \lambda_i(A)}$. За десять ітерацій для $\vec{x}^0 = (0,\ 0,\ 0)$ отримаємо

$$x_1^{10} = 0{,}49209,\ x_2^{10} = 0{,}99545,\ x_3^{10} = 0{,}50057.$$

6. Методом верхньої релаксації з точністю 10^{-4} знайти розв'язок системи (3.1) із матрицею

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/3 & 5/6 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 11/24 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 19/60 \end{array}\right).$$

Розв'язання. Зведемо формулу методу верхньої релаксації (4.7) до вигляду $D\bar{x}^{k+1} = (1-\omega)D\bar{x}^k - \omega A_1\bar{x}^{k+1} - \omega A_2\bar{x}^k + \omega\bar{b}$. Звідси знайдемо формули для обчислення значень на $(k+1)$-й ітерації:

$$x_1^{k+1} = (1-\omega)x_1^k - \omega\cdot\frac{1}{2}x_2^k - \omega\cdot\frac{1}{3}x_3^k + \omega b_1,$$

$$x_2^{k+1} = (1-\omega)x_2^k - \omega\cdot\frac{3}{2}x_1^{k+1} - \omega\cdot\frac{3}{4}x_3^k + 3\omega b_2,$$

$$x_3^{k+1} = (1-\omega)x_3^k - \omega\cdot\frac{5}{3}x_1^{k+1} - \omega\cdot\frac{5}{4}x_2^{k+1} + 5\omega b_3.$$

Візьмемо $\vec{x}^0 = (0,\ 0,\ 0)$. Параметр ω зазвичай добирають експериментально. Нехай $\omega = 1,7$ (ми почали зі значення $\omega = 1$ та збільшували його з кроком 0,1, поки компоненти $\vec{x}^k$ монотонно збігалися та кількість ітерацій для виконання умови $\left\| \vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k \right\| \le \varepsilon$ була мінімальна). На 52-й ітерації отримаємо

$$x_1^{52} = 0,500291,\ x_2^{52} = 0,998281,\ x_3^{52} = -0,498347.$$

При цьому $\left\| \vec{x}^{52} - \vec{x}^{51} \right\| \approx 0,57\cdot 10^{-4}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Методом Якобі з точністю 10^{-4} знайти розв'язок СЛАР (3.1):

а) $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$, б) $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 10 & 0 \end{array}\right)$,

в) $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right)$

2. Методом Зейделя з точністю 10^{-4} знайти розв'язок СЛАР (3.1):

а) $A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$, б) $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 10 & 0 \end{array}\right)$,

в) $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 7,6 & 0,5 & 2,4 & 1,9 \\ 2,2 & 9,1 & 4,4 & 9,7 \\ -1,3 & 0,2 & 5,8 & -1,4 \end{array}\right)$, г) $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 7,2 & 2,4 & 3,3 & 5,9 \\ 2,5 & 4,7 & -7,8 & 3,5 \\ -1,6 & 5,3 & 1,3 & -2,4 \end{array}\right)$,

д) $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right)$, е) $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$.

3. Методом простої ітерації знайти п'яте наближення для СЛАР:

а) $\begin{cases} x_1 = \ \ 0,32x_1 - 0,05x_2 + 0,11x_3 - 0,08x_4 + 2,15, \\ x_2 = \ \ 0,11x_1 + 0,16x_2 - 0,28x_3 - 0,06x_4 - 0,83, \\ x_3 = \ \ 0,08x_1 - 0,15x_2 + 0,12x_4 + 1,16, \\ x_4 = -0,21x_1 + 0,13x_2 - 0,27x_3 + 0,44; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 = 0,24x_1 + 0,21x_2 + 0,06x_3 - 0,34x_4 + 1,42, \\ x_2 = 0,05x_1 + 0,32x_3 + 0,12x_4 - 0,57, \\ x_3 = 0,35x_1 - 0,27x_2 - 0,05x_4 + 0,68, \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,43x_2 + 0,34x_3 - 0,21x_4 - 2,14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 = 0,23x_1 - 0,04x_2 + 0,21x_3 - 0,18x_4 + 1,24, \\ x_2 = 0,45x_1 - 0,23x_2 + 0,06x_3 - 0,88, \\ x_3 = 0,26x_1 + 0,34x_2 - 0,11x_3 + 0,62, \\ x_4 = 0,05x_1 - 0,26x_2 + 0,34x_3 - 0,12x_4 - 1,17; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 = 0,23x_1 - 0,15x_2 + 0,09x_3 + 1,15, \\ x_2 = 0,02x_1 + 0,31x_2 - 0,09x_3 - 0,53, \\ x_3 = 0,18x_1 - 0,25x_2 - 0,06x_3 + 1,86. \end{cases}$

Оцінити точність.

4. Однокроковим явним методом з точністю 10^{-4} знайти розв'язок СЛАР (3.1):

а) $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$, б) $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 10 & 14 \end{array}\right)$,

$$\text{в) } A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -5 \end{array}\right), \quad \text{г) } A = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

5. Для розв'язання задачі Діріхле

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad u = 0, \\ x = 0, \quad u = y(1-y) \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

застосовують метод сіток. При цьому диференціальну задачу на сітці

щ$= \left\{ x_i = ih,\ y_j = jl,\ i = \overline{0,N},\ j = \overline{0,M},\ h = \dfrac{1}{N},\ l = \dfrac{1}{M} \right\}$ заміняють різницевою

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{-v(i-1,j) + 2v(i,j) - v(i+1,j)}{h^2} + \dfrac{-v(i,j-1) + 2v(i,j) - v(i,j+1)}{l^2} = 0, \\ i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M-1}, \\ v(i,0) = 0, \quad v(i,M) = 0, \quad i = \overline{0,N}, \quad v(N,j) = 0, \quad j = \overline{0,M}, \\ v(0,j) = jl(1-jl), \quad j = \overline{0,M}. \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

Задача (4.9) являє собою СЛАР $A\vec{v} - \vec{b} = \vec{0}$ відносно вектора невідомих значень у внутрішніх вузлах сітки $\vec{v} = \left(v(i,j)\right)_{i=\overline{1,N-1};\, j=\overline{1,M-1}}$. (Праву частину СЛАР $\vec{b}$ утворено підстановкою в систему (4.9) ненульових значень $v(0,j)$.) Матриця A задовольняє співвідношенню $A = A^{\mathrm{T}} > 0$. Більше того, $\min \lambda(A) \ge 16 = \gamma_1$; $\max \lambda(A) \le \dfrac{4}{h^2} + \dfrac{4}{l^2} = \gamma_2$.

Розв'язати задачу (4.9) для $N = 16$, $M = 16$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

а) однокроковим явним методом з оптимальним значенням параметра $\tau = \tau_0$;

б) методом Зейделя;

в) методом верхньої релаксації.

Побудувати лінії рівня знайденого розв'язку задачі (4.8).

5

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Нехай потрібно розв'язати систему нелінійних рівнянь

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{array}\right.$$

Запишемо її у вигляді векторного рівняння

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}, \tag{5.1}$$

де $\vec{F} = \left(f_1, \ldots, f_n\right)^{\mathrm{T}}$, $\vec{x} = \left(x_1, \ldots, x_n\right)^{\mathrm{T}}$.

Метод простої ітерації. Зведемо векторне рівняння (5.1) до вигляду

$$\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x}). \tag{5.2}$$

Це можна зробити, наприклад, узявши $\Phi(\vec{x}) = \vec{x} - C\vec{F}(\vec{x})$, де C — невироджена матриця, або

$$\vec{\Phi}(\vec{x}) = \vec{x} - \tau\vec{F}(\vec{x}), \tag{5.3}$$

де τ — параметр релаксації.

Метод простої ітерації для рівняння (5.2) полягає в обчисленні наближень за формулою $\vec{x}^{k+1} = \vec{\Phi}\left(\vec{x}^k\right)$ для заданого $\vec{x}^0$.

Умови збіжності методу дає теорема про стискальні відображення:

$$\left\|\vec{\Phi}(\vec{x}) - \vec{\Phi}(\vec{y})\right\| \le q\left\|\vec{x} - \vec{y}\right\|, \quad q < 1,$$

або

$$\left\|\Phi'(\vec{x})\right\| \le q, \quad q < 1,$$

де $\Phi'(\vec{x}) = \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$ — матриця Якобі вектора правих частин $\vec{\Phi}(\vec{x})$.

Правдива така оцінка точності:

$$\left\|\vec{x}^k-\vec{x}\right\|\le\frac{q^k}{1-q}\left\|\vec{x}^1-\vec{x}^0\right\|.$$

Наприклад, для збіжності методу релаксації, якому відповідає права частина вигляду (5.3), потрібно виконання умови $\tau<\dfrac{2}{\max\limits_{\vec{x}}\left\|F'(\vec{x})\right\|}$, де $F'(\vec{x})$ — матриця Якобі правої частини $\vec{F}(\vec{x})$.

Метод Ньютона. Лінеризуючи рівняння (5.1) в околі наближення до розв'язку $\vec{x}$, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно нового наближення $\vec{x}^{k+1}$:

$$\vec{F}\left(\vec{x}^k\right)+F'\left(\vec{x}^k\right)\left(\vec{x}^{k+1}-\vec{x}^k\right)=\vec{0}. \tag{5.4}$$

Можна запропонувати такий алгоритм розв'язання рівняння (5.4):

1) задати початкове наближення $\vec{x}^0$;

2) обчислимо матрицю Якобі $A_k=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(\vec{x}^k\right)\right)_{i,j=1}^{n}$;

3) розв'язати СЛАР $A_k\vec{z}^k=\vec{F}\left(\vec{x}^k\right)$;

4) обчислити нове наближення $\vec{x}^{k+1}=\vec{x}^k-\vec{z}^k$;

5) перевірити умову $\left\|\vec{z}^k\right\|<\varepsilon$; якщо її виконано, припинити процес, а не то повторити обчислення, починаючи з п. 2).

Як і для одного рівняння, метод Ньютона збігається, якщо початкове наближення $\vec{x}^0$ близьке до розв'язку $\vec{x}$. Для систем зберігається властивість квадратичної швидкості збіжності в околі розв'язку.

Оскільки для реалізації методу Ньютона потрібно розв'язувати СЛАР, то в разі довільної матриці A_k застосовують метод Гаусса, для чого потрібно виконати $\frac{2}{3}n^3+O\left(n^2\right)$ арифметичних операцій. У разі симетричної матриці A_k доцільніше застосовувати метод квадратних коренів, а в разі тридіагональної матриці — метод прогонки.

Модифікований метод Ньютона

$$\vec{F}\left(\vec{x}^k\right)+F'\left(\vec{x}^0\right)\left(\vec{x}^{k+1}-\vec{x}^k\right)=\vec{0}$$

дає змогу економити арифметичні операції за допомогою визначення оберненої матриці A_0^{-1} до матриці Якобі $A_0=F'\left(\vec{x}^0\right)$ й обчислення наступних наближень за явною формулою $\vec{x}^{k+1}=\vec{x}^k-A_0^{-1}\vec{F}\left(\vec{x}^k\right)$. На жаль, такий метод має тільки лінійну швидкість збіжності.

Приклади розв'язання задач

1. Методом простої ітерації виконати дві ітерації розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases}2x-\sin\dfrac{x-y}{2}=0,\\[2mm] 2y-\cos\dfrac{x+y}{2}=0.\end{cases}$$

Розв'язання. З геометричних міркувань (рис. 5.1, де зображено графіки неявних функцій обох рівнянь системи) виберемо $x_0=0$, $y_0=0{,}5$. Зведемо систему до вигляду

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x-y}{2},\\[2mm] y=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}.\end{cases}$$

Побудуємо матрицю Якобі останньої системи:

$$B=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} & -\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2}\\[2mm] -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x+y}{2} & -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x+y}{2}\end{pmatrix}$$

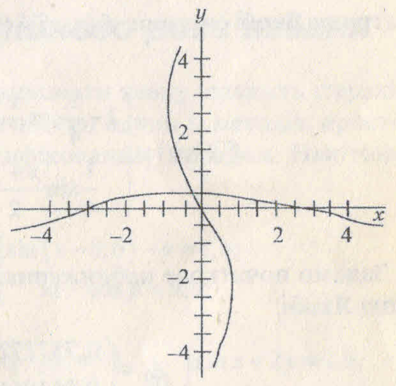

Рис. 5.1

$\left\|B(x_0,y_0)\right\|_1=\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{1}{4}+\sin\dfrac{1}{4}\right)\approx 0{,}3<1$, тому в околі початкового наближення метод простої ітерації збігається. Обчислимо

$$x_1=\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{1}{4}\right)=-0{,}12370,\ y_1=\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{1}{4}\right)=0{,}48446,$$

$$x_2 = -0{,}14971,\ y_2 = 0{,}49189.$$

Після десяти ітерацій знайдемо розв'язок із точністю 10^{-5}:

$$x_{10} = -0{,}16051,\ y_{10} = 0{,}49310.$$

2. Методом Ньютона виконати дві ітерації для системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - \sin\dfrac{x-y}{2} = 0, \\[2ex] 2y - \cos\dfrac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай

$$f_1(x,y) = x - \frac{1}{2}\sin\frac{x-y}{2},\quad f_2(x,y) = y - \frac{1}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Матриця Якобі системи $f_1(x,y)=0,\ f_2(x,y)=0$ має вигляд

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} & \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x+y}{2} & 1 + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x+y}{2} \end{pmatrix}.$$

Задамо початкове наближення: $x_0 = 0,\ y_0 = 0{,}5$. Обчислимо матрицю Якобі:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0{,}757772 & 0{,}242228 \\ 0{,}061851 & 1{,}061851 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо СЛАР $A_0\vec{z}^0 = \vec{F}(\vec{x}^0) = (0{,}123702,\ \ 0{,}015544)^{\mathrm{T}}$: маємо $\vec{z}^0 = (0{,}16157;\ 0{,}005227)^{\mathrm{T}}$. Обчислимо нове наближення $\vec{x}^1 = \vec{x}^0 - \vec{z}^0 = (-0{,}16157;\ 0{,}49477)^{\mathrm{T}}$.

На другій ітерації отримаємо $\vec{x}^2 = (-0{,}16051;\ 0{,}49310)^{\mathrm{T}}$, що збігається з точним розв'язком до п'ятого знака.

3. Модифікованим методом Ньютона виконати дві ітерації для системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - \sin\dfrac{x-y}{2} = 0, \\[2ex] 2y - \cos\dfrac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Праву частину та матрицю Якобі побудовано для попереднього прикладу. Обернена матриця до матриці Якобі для $x_0 = 0,\ y_0 = 0{,}5$ така:

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}3446 & -0{,}30675 \\ -0{,}078326 & 0{,}959620 \end{pmatrix}.$$

Перше наближення $\vec{x}^1 = \vec{x}^0 - A_0^{-1}\vec{F}\left(\vec{x}^0\right) = (-0{,}16157;\ 0{,}49477)^{\mathrm{T}}$ збігається з першим наближенням із попереднього прикладу. На другій ітерації отримаємо $\vec{x}^2 = \vec{x}^1 - A_0^{-1}\vec{x}^1 = (-0{,}16049;\ 0{,}49311)^{\mathrm{T}}$, що трохи гірше, ніж у методі Ньютона.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Розв'язати систему рівнянь (виконати певну кількість ітерацій або знайти розв'язок із заданою точністю) одним із методів: простої ітерації, методом Ньютона, модифікованим методом Ньютона; $x^0 = 1{,}25,\ y^0 = 0,\ z^0 = 0{,}25$:

а) $\begin{cases} \sin(2x-y) - 1{,}2x = 0{,}4, \\ 0{,}8x^2 + 1{,}5y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \sin(x-0{,}6) - y = 1{,}6, \\ 3x - \cos y = 0{,}9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \mathrm{tg}(xy+0{,}1) = x^2, \\ x^2 + 2y^2 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sin(x-y) - xy = -1, \\ x^2 - y^2 = 0{,}75; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \sin x + 2y = 1{,}6, \\ \cos(y-1) = 1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} xy - y^2 = 1, \\ x^2y + y = 5; \end{cases}$ є) $\begin{cases} 5x - 6y + 20\lg x = -16, \\ 2x + y - 10\lg y = 4; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x^2 + 1{,}5y^2 + z^2 - 5 = 0, \\ 6xyz - x + 5y + 3z = 0, \\ 5xz - yz - 1 = 0. \end{cases}$

2. Для побудови перетину поверхні двох тіл у просторі, заданих рівняннями

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0, \\ f_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$

можна запропонувати такий алгоритм. Фіксуючи одну змінну, наприклад $z=z_m$, розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} f_1(x,y,z_m)=0, \\ f_2(x,y,z_m)=0 \end{cases}$$

відносно інших змінних (x,y). Знайдені розв'язки являють собою точки (x_m,y_m,z_m) у просторі (одному z_m може відповідати один, декілька розв'язків (x_m,y_m) або жодного). Побудувавши за знайденими точками (x_m,y_m,z_m), $m=\overline{1,M}$, параметричну криву в просторі, отримаємо графік перетину.

Побудувати графіки перетину таких поверхонь:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ x+y+z=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z+0{,}5=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ 2x-y+z+1=0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2-\dfrac{z^2}{9}=0, \\ x+y+z+1=0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2-z=0, \\ x-z+1=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{9}+z^2=0, \\ x+2y-z-1=0; \end{cases}$

є) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1, \\ x^2+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2-z=0, \\ x^2+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{9}+z^2=0, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1. \end{cases}$

3. Розв'язати крайову задачу

$$\delta\frac{d^2u}{dx^2}-\left(u^2-1\right)=0,\quad 0<x<1,$$

$$u(0)=u(1)=0,$$

замінивши її різницевою

$$\delta\,\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}-\left(y_i^{\,2}-1\right)=0,\quad i=\overline{1,\,N-1};$$

$$y_0=y_N=0.$$

Тут $h=1/N$, $y_i=y(x_i)\approx u(x_i)$, $x_i=ih$, $i=\overline{0,\,N}$.

Для реалізації нелінійної схеми застосувати метод Ньютона. Лінійні системи на кожній ітерації розв'язувати методом прогонки. Знайти розв'язок для $\delta=1,\ 10^{-1},\ \ldots,\ 10^{-6}$, якщо $N=10,\ 20,\ 50$. Побудувати графіки розв'язку $u(x)$ за значеннями y_i, $i=\overline{0,\,N}$.

6

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

Нагадаємо постановку алгебричних задач на власні значення: для матриці A знайти такі λ й $\vec{x} \neq \vec{0}$, що $A\vec{x} - \lambda\vec{x} = 0$. Відшукання λ зводиться до розв'язання алгебричного рівняння $P_n(\lambda) \equiv \det(A - \lambda E) = 0$. Воно має n коренів λ_i $i = \overline{1, n}$, яким відповідають власні вектори $\vec{x}_i : A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i$. Задачу пошуку всіх власних значень і векторів називають *повною проблемою власних значень*. Якщо ж потрібно знайти тільки деякі з власних значень (наприклад, $\lambda_{\max}(A) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$, $\lambda_{\min}(A) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$ та інші), то її називають *частковою проблемою власних значень*.

Розв'язання часткової проблеми власних значень. Розглянемо степеневий метод відшукання максимального за модулем власного значення.

Нехай власні значення впорядковано за зростанням їх модулів:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|.$$

Для відшукання λ_1 побудуємо таку послідовність векторів $\{\vec{x}^k\}$: $\vec{x}^0$ задано, а $\vec{x}^k = A\vec{x}^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Наближення до λ_1 обчислимо за однією з формул

$$\mu_k^{(m)} = \frac{x_m^{k+1}}{x_m^k}$$

або

$$\mu_k = \frac{\left(\vec{x}^{k+1}, \vec{x}^k\right)}{\left(\vec{x}^k, \vec{x}^k\right)}. \tag{6.1}$$

Тут x_m^k — m-та компонента вектора $\vec{x}^k$, m — довільне число від 1 до n.

Послідовності наближень $\{\mu_k^m\}$, $\{\mu_k\}$ збігаються до λ_1, причому правдиві такі оцінки збіжності:

$$\mu_k^{(m)} = \frac{x_m^{k+1}}{x_m^k} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right), \quad \mu_k = \frac{\left(\vec{x}^{k+1}, \vec{x}^k\right)}{\left(\vec{x}^k, \vec{x}^k\right)} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right) \text{ —}$$

для довільної матриці A. Окрім того, послідовність $\{\vec{x}^k\}$ прямує до власного вектора $\vec{x}_1$, що відповідає власному значенню λ_1.

Для симетричної матриці $A = A^{\mathrm{T}}$ формула скалярних добутків (6.1) дає вищу швидкість збіжності:

$$\mu_k = \frac{\left(\vec{x}^{k+1}, \vec{x}^k\right)}{\left(\vec{x}^k, \vec{x}^k\right)} = \lambda_1 + O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}\right).$$

Якщо $|\lambda_1| > 1$, то в разі $k \to \infty$ компоненти вектора $\vec{x}^k$ експоненціонально зростають, що може спричинити "переповнення" (overflow). У разі $|\lambda_1| < 1$ компоненти вектора $\vec{x}^k$ зменшуються, що може зумовити заміну їх нулем; це призводить до зникнення інформації (underflow). Тому потрібно нормувати вектори $\vec{x}^k$.

Алгоритм відшукання λ_1, $\vec{x}_1$ степеневим методом за формулою скалярних добутків (6.1) із нормуванням $\vec{x}^n$ має такий вигляд:

1) задати $\vec{x}^0$;

2) для $k = 0, 1, \ldots$ обчислити $\vec{e}^k = \dfrac{\vec{x}^k}{\|\vec{x}^k\|}$, $\vec{x}^{k+1} = A\vec{e}^k$, $\mu_k = \left(\vec{x}^{k+1}, \vec{e}^k\right)$.

3) продовжити процес до виконання умови $|\mu_N - \mu_{N-1}| < \varepsilon$, де ε — задана точність.

Тоді $\lambda_1 \approx \mu_N$, $\vec{x}_1 \approx \vec{e}^N$.

Для симетричної матриці $A = A^{\mathrm{T}}$ метод відшукання λ_2, $\vec{x}_2$ має квадратичну швидкість збіжності:

$$\mu_k - \lambda_2 = O\left(\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right|^{2k}\right).$$

Для симетричної невід'ємної матриці $A = A^{\mathrm{T}} \geq 0$ за допомогою степеневого метода можна обчислити мінімальне власне значення $\lambda_{\min}(A) = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \lambda_i$.

Якщо відоме $\lambda_{\max}(A) = \lambda_1$, то утворимо матрицю $B = \lambda_1 E - A$, де E — одинична матриця. За допомогою степеневого метода знайдемо $\lambda_{\max}(B)$. Тоді $\lambda_{\max}(B)=\lambda_{\max}(A)-\lambda_{\min}(A)$ й $\lambda_{\min}(A)=\lambda_{\max}(A)-$ $-\lambda_{\max}(B)$.

Якщо $\lambda_{\max}(A)=\lambda_1$ невідоме, то утворимо матрицю $B=\|A\|_\infty E-A$, де $\|A\|_\infty=\max\limits_i\sum\limits_j|a_{ij}|$. Оскільки $\lambda_1\le\|A\|_\infty$, то $\lambda_{\min}(A)=\|A\|_\infty-\lambda_{\max}(B)$.

Розв'язання повної проблеми власних значень. Для симетричної матриці $A=A^{\mathrm{T}}$ можна застосовувати ітераційний метод обертання (Якобі). Він полягає у виконанні ортогональних перетворень вихідної матриці A, які зводять її до діагонального вигляду $\Lambda=UAU^{\mathrm{T}}$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_i)$, $U^{\mathrm{T}}=U^{-1}$, де λ_i — власні значення матриці A.

Побудуємо послідовність матриць $\{A_k\}$, що збігається до Λ, за правилом $A_{k+1}=U_kA_kU_k^{\mathrm{T}}$, $A_0=A$, де

$$U_k=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \cos\varphi & \dots & \sin\varphi & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & -\sin\varphi & \dots & \cos\varphi & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array}$$

— елементарна матриця обертання. Її будують за таким алгоритмом. Виберемо в матриці A_k найбільший за модулем недіагональний елемент a_{ij}^k. Тоді

$$a_{ij}^{k+1}=a_{ij}^k\cos(2\varphi_k)+\frac{1}{2}\left(a_{jj}^k-a_{ii}^k\right)\sin(2\varphi_k).$$

Виберемо φ_k так, щоб $a_{ij}^{k+1}=0$. Тоді $\mathrm{tg}(2\varphi_k)=\dfrac{2a_{ij}^k}{a_{ii}^k-a_{jj}^k}\equiv h_k$. Отже, $\varphi_k=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,h_k$. Якщо $a_{ii}^k=a_{jj}^k$, то $\varphi_k=\dfrac{\pi}{4}$.

Нехай $t(A_k)=\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\ne j}}^{n}a_{ij}^2$. Виконується рівність $t(A_{k+1})=t(A_k)-2\left(a_{ij}^k\right)^2$. Швидкість збіжності послідовності $\{t(A_k)\}$ можна оцінити так:

$t(A_{k+1})\le qt(A_k)$, де $q=1-\dfrac{2}{n(n-1)}$, а n — розмірність матриці. Це означає, що послідовність $t(A_k)$ монотонно спадає, прямуючи до нуля. При цьому матриця A_k для $k\to\infty$ прямує до діагональної. Отже, ітераційний метод Якобі збігається зі швидкістю геометричної прогресії, знаменник якої q залежить від n. Ітераційний процес припиняється, якщо виконано умову $t(A_N)\le\varepsilon$, де ε — точність обчислення власних значень. j-й стовпець номера матриці $\tilde{U}=\prod\limits_{k=1}^{N}U_k$ дає наближення до власного вектора, що відповідає λ_j.

Інший підхід до розв'язання повної проблеми власних значень полягає в тому, що матрицю A за допомогою ортогональних перетворень (наприклад, обертання) зводять до трикутної, майже трикутної чи тридіагональної. Власні значення таких простіших матриць легко знайти.

Якщо матриця тридіагональна, то можна швидко обчислити $\det(A-\lambda E)$, явно не знаходити характеристичний багаточлен. Позначимо головний мінор n-го порядку матриці $A-\lambda E$ як $D_n(\lambda)$. Розклавши його за останнім рядком, отримаємо

$$\begin{pmatrix}D_{n-2}(\lambda) & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-1)(n-1)}-\lambda & a_{(n-1)n}\\ 0 & 0 & a_{n(n-1)} & a_{nn}-\lambda\end{pmatrix},$$

$D_n(\lambda)=(a_{nn}-\lambda)D_{n-1}(\lambda)-a_{nn-1}B_{n(n-1)}(\lambda)$, де $B_{n(n-1)}(\lambda)$ — мінор, що доповнює елемент $a_{n(n-1)}$. Останній стовпець цього мінора містить тільки один елемент $a_{(n-1)n}$. Розкладемо цей мінор за останнім стовпцем: $B_{n(n-1)}(\lambda)=a_{(n-1)n}D_{n-2}(\lambda)$. Підставивши останній вираз у попереднє рекурентне співвідношення, отримаємо $D_n(\lambda)=(a_{nn}-\lambda)D_{n-1}(\lambda)-$ $-a_{n(n-1)}a_{(n-1)n}D_{n-2}(\lambda)$. Узявши $D_{-1}(\lambda)=0$, $D_0(\lambda)=1$, обчислимо $D_n(\lambda)$ для будь-якого значення n.

Ці підходи неприйнятні для великих значень n, тому що, як відомо, корені багаточлена високого степеня можуть бути дуже чутливими до похибок у коефіцієнтах цього багаточлена.

Приклади розв'язання задач

1. Степеневим методом із точністю 10^{-3} знайти максимальне власне значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виберемо $\vec{x}^0 = (1,\ 1,\ 1)$. Обчислимо наступні наближення:

$$\vec{x}^1 = A\vec{x}^0 = (1{,}83333;\ 1{,}08333;\ 0{,}78333),$$
$$\vec{x}^2 = A\vec{x}^1 = (2{,}63611;\ 1{,}47361;\ 1{,}03861),$$
$$\vec{x}^3 = A\vec{x}^2 = (3{,}71912;\ 2{,}06891;\ 1{,}45483),$$
$$\vec{x}^4 = A\vec{x}^3 = (5{,}23852;\ 2{,}91290;\ 2{,}04790),$$
$$\vec{x}^5 = A\vec{x}^4 = (7{,}37761;\ 4{,}10220;\ 2{,}88398).$$

Якщо для обчислення власного значення скористатися формулою

$$\mu_n^{(k)} = \frac{x_k^{n+1}}{x_k^n}$$

для $k = 1$, то отримаємо таку послідовність наближень для власного значення: $\mu_1^{(1)} = 1{,}83333$, $\mu_2^{(1)} = 1{,}43788$, $\mu_3^{(1)} = 1{,}41084$, $\mu_4^{(1)} = 1{,}40854$, $\mu_5^{(1)} = 1{,}40834$.

Обчисливши ж власне значення за формулою скалярних добутків

$$\mu_n = \frac{(\vec{x}^{n+1},\ \vec{x}^n)}{(\vec{x}^n,\ \vec{x}^n)},$$

отримаємо таку послідовність наближень для власного значення: $\mu_1 = 1{,}23333$, $\mu_2 = 1{,}40684$, $\mu_3 = 1{,}40831$, $\mu_4 = 1{,}40832$.

Як бачимо, у другій послідовності швидше встановлюються три цифри після десяткової коми (це забезпечує потрібну точність власного значення) унаслідок вищої швидкості збіжності послідовності $\{\mu_n\}$ порівняно з послідовністю $\{\mu_n^k\}$.

2. Степеневим методом із точністю 10^{-3} знайти мінімальне власне значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}| = 4$. Побудуємо матрицю

$$B = \|A\|E - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Степеневим методом знайдемо наближення:

$$\vec{x}^0 = (1,\ 1,\ 1)$$
$$\vec{x}^1 = A\vec{x}^0 = (3,\ 4,\ 3),$$
$$\vec{x}^2 = A\vec{x}^1 = (10,\ 14,\ 10),$$
$$\vec{x}^3 = A\vec{x}^2 = (34,\ 48,\ 34),$$
$$\vec{x}^4 = A\vec{x}^3 = (116,\ 164,\ 116).$$

За формулою скалярних добутків обчислимо $\lambda_{\max}(B) \approx \lambda_1^{(4)} = 3{,}41421$. Тоді $\lambda_{\min}(A) = \|A\| - \lambda_{\max}(B) \approx 0{,}58579$.

Звернімо увагу на зростання компонент векторів наближення $\vec{x}^k$. Це зумовлено тим, що $\lambda_{\max}(B) > 1$. Тому потрібно нормувати вектори наближень на кожній ітерації, бо зростання компонент векторів $\vec{x}^n$ може призвести як до збільшення похибок заокруглення, так і до зупинки ЕОМ через переповнення.

3. Виконати один крок ітераційного методу обертання Якобі для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $t(A) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}^2$ для вихідної та перетвореної матриць.

Розв'язання. Виберемо найбільший за модулем недіагональній елемент $a_{ij} = 4$, $i = 2$, $j = 3$. Обчислимо

$$g = \frac{2a_{23}}{a_{33} - a_{22}} = 4, \quad 2\varphi = \operatorname{arctg} 4 = 1{,}32582,$$

$$\varphi = 0{,}66291, \quad \cos\varphi = 0{,}78821, \quad \sin\varphi = 0{,}61541.$$

Матриця обертання має вигляд

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}78821 & 0{,}61541 \\ 0 & -0{,}61541 & 0{,}78821 \end{pmatrix}, \quad U^{\mathrm{T}} = U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}78821 & -0{,}61541 \\ 0 & 0{,}61541 & 0{,}78821 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо

$$A_1 = UAU^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}269832 & 3{,}59544 \\ -0{,}269832 & -0{,}12311 & 0 \\ 3{,}59544 & 0 & 0{,}78821 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, обчислимо $t(A) = 58$, $t(A_1) = 26$. Отже, $t(A) - t(A_1) = 32 = 2a_{23}^2$.

Продовжуючи процес, на п'ятий ітерації отримаємо

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0{,}62348 & -0{,}000447 & 1{,}30 \cdot 10^{-16} \\ -0{,}000447 & -3{,}207 \cdot 10^{-7} & 2{,}01998 \cdot 10^{-6} \\ 1{,}30 \cdot 10^{-16} & 2{,}01998 \cdot 10^{-6} & 9{,}62348 \end{pmatrix}$$

$t(A_5) = 4 \cdot 10^{-7}$. Отже, $\lambda_1 \approx 0{,}62348$, $\lambda_2 \approx 0$, $\lambda_3 = 9{,}62348$.

4. Розглянемо систему мас, з'єднаних пружинами (рис. 6.1).

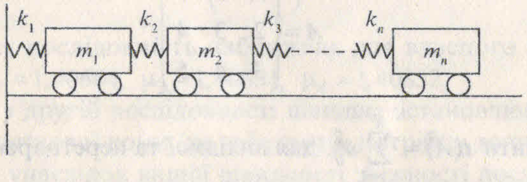

Рис. 6.1

Математична модель процесу руху цієї системи під впливом зовнішньої сили має вигляд системи диференціальних рівнянь

$$M\frac{d^2\vec{U}}{dt^2} + K\vec{U} = \vec{F}(t), \tag{6.2}$$

де $\vec{U} = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}}$ — вектор зміщень мас у горизонтальному напрямку; $M = \operatorname{diag}(m_i)$, $i = \overline{1,\ n}$ — діагональна матриця мас кожного елемента, кг; K — тридіагональна матриця жорсткості:

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ -k_2 & k_1 + k_2 & -k_3 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -k_3 & k_n \end{pmatrix}.$$

Тут k_i — коефіцієнт жорсткості i-ї пружини, $\vec{F}(t) = \left(f_1(t), \ldots, f_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$ — вектор зовнішніх сил.

Якщо зовнішніх сил немає, фундаментальні розв'язки системи (6.2) (вільні коливання) мають вигляд $\vec{U}_i(t) = \vec{A}_i \sin(\omega_i t + \theta)$, $i = \overline{1,\ n}$, де $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, а λ_i — одне з власних значень такої узагальненої задачі на власні значення

$$K\vec{x}_i = \lambda_i M\vec{x}_i. \tag{5.3}$$

Якщо зовнішні сили $f_i(t) = a_i \sin(\omega t + \theta)$ — періодичні функції, то за умови $\omega \approx \sqrt{\lambda_i}$, де λ_i — одне з власних значень, відбувається резонанс. Тому повна задача на власні значення (6.3) дуже важлива.

Потрібно розробити метод розв'язання задачі (6.3) відшукання λ_i, $\vec{x}_i$.

Розв'язання. Побудуємо метод розв'язання цієї задачі на основі ітераційного методу Якобі. На перший погляд, можна звести узагальнену задачу до звичайної задачі на власні значення, застосувавши до (6.3) матрицю M^{-1}. Проте якщо m_i різні, то матриця $A = M^{-1}K$ несиметрична, і застосування методу Якобі стає проблематичним. Тому введемо матрицю $M^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}\left(\sqrt{m_i}\right)$ та власні вектори $\vec{y}_i = M^{\frac{1}{2}}\vec{x}_i$. Тоді (6.3) зводиться до задачі $A\vec{y}_i = \lambda_i \vec{y}_i$ із симетричною матрицею $A = M^{-\frac{1}{2}}KM^{-\frac{1}{2}}$, де $M^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{m_i}}\right)$. Застосувавши метод Якобі, отримаємо λ_i й $\vec{x}_i = M^{-\frac{1}{2}}\vec{y}_i$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Степеневим методом із точністю 10^{-3} знайти максимальні власні значення матриць:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 2,1 & 1,0 & 1,1 \\ 1,0 & 2,6 & 1,1 \\ 1,1 & 1,1 & 3,1 \end{pmatrix}; \text{ д) } A = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,5 & 0,6 \\ 0,5 & 1,4 & 0,3 \\ 0,6 & 0,3 & 1,4 \end{pmatrix};$$

$$\text{е) } A = \begin{pmatrix} 3,1 & 1,0 & 2,1 \\ 1,0 & 3,6 & 2,1 \\ 2,1 & 2,1 & 4,1 \end{pmatrix}; \text{ є) } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Степеневим методом із точністю 10^{-3} знайти мінімальні власні значення матриць:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Виконати один крок ітераційного методу обертання Якобі для таких матриць:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити $t(A) = \sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}^2$ для вихідних і перетворених матриць.

4. Для матриці A підібрати число a так, щоб мінімальне власне значення дорівнювало 0,3:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

5. Для матриці A підібрати число a так, щоб максимальне власне значення дорівнювало 10:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}, \text{ в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & a \end{pmatrix}.$$

6. Перевірити, чи не зумовлять хвилі довжиною $l = 1$ м на поверхні озера резонансних коливань баржі з шістьма вагонетками (див. рис. 6.1) масою $m_1 = 8 \cdot 10^4$, $m_2 = m_4 = 3 \cdot 10^4$, $m_3 = m_5 = 4 \cdot 10^4$, $m_6 = 2 \cdot 10^4$ кг, з'єднаними пружинами з коефіцієнтами жорсткості $k_1 = k_2 = k_3 =$ $= k_4 = k_5 = k_6 = 10^5$ Н.

Зауваження. Частота ω та довжина хвилі l пов'язані співвідношенням $\omega = l^{-1}$.

7. Обчислити всі власні значення матриці A з елементами $a_{ij} = \max(i, j)$, $i, j = \overline{1, 30}$, методом обертання Якобі.

8. Знайти власні значення матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2{,}2 & 1{,}0 & 0{,}5 & 2{,}0 \\ 1{,}0 & 1{,}3 & 2{,}0 & 1{,}0 \\ 0{,}5 & 2{,}0 & 0{,}5 & 1{,}6 \\ 2{,}0 & 1{,}0 & 1{,}6 & 2{,}0 \end{pmatrix}$$

методом обертання Якобі з чотирма правильними цифрами.

9. Нехай B — тридіагональна матриця з елементами $b_{ii}=2$, $b_{i(i+1)}=1$, $i=\overline{1,\ n}$, а $A=8B-5B^2+B^3$ й $n=44$. Знайти одинадцять власних значень, розміщених в інтервалі [4; 4,163]. Застосувати метод обертання Якобі.

ПРИКЛАДИ ВАРІАНТІВ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ № 1

1. Дати геометричну інтерпретацію методу простої ітерації для всіх випадків $\varphi'(x)$.

2. Яка відносна похибка обчислення площі сектора кола радіусом $R=21{,}53\pm0{,}005$ см, кута $\alpha=137^\circ\,(25\pm1)'$, якщо число π взято з чотирма правильними знаками? Обчислити цю площу.

3. Скільки ітерацій методу Ньютона потрібно виконати для відшукання кореня рівняння $\sin x=1-x$ із точністю $\varepsilon=10^{-5}$?

4. Методом Гаусса обчислити визначник матриці

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ВАРІАНТ № 2

1. Довести теорему про монотонну збіжність методу Ньютона.

2. Радіус основи конуса та його висота наближено дорівнюють $R\approx25$ см і $h\approx13$ см. З якою точністю потрібно задати R і h, щоб можна було обчислити площу повної поверхні конуса з точністю 0,1 %?

3. Скільки ітерацій методу релаксації потрібно виконати для відшукання кореня рівняння $3x+\cos x+1=0$ з точністю 10^{-4}?

4. Виконати степеневим методом чотири ітерації відшукання мінімального за модулем власного значення матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ВАРІАНТ № 3

1. Довести теорему про стійкість методу прогонки.

2. Радіус основи конуса та його твірна наближено дорівнюють $R \approx 11$ см і $l \approx 23$ см. З якою точністю потрібно задати R і l, щоб можна було обчислити об'єм конуса з точністю 0,1 %? Обчислити об'єм.

3. Скільки ітерацій методу ділення навпіл потрібно виконати для розв'язання рівняння $e^x = 2 - x$ із точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Методом квадратних коренів знайти обернену матрицю для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ № 4

1. Вивести формулу методу січних із геометричних міркувань.

2. Корені рівняння $x^2 - 2\,\mathrm{tg}\,2 \cdot x + e = 0$ слід обчислити з трьома правильними цифрами. Скільки правильних значущих цифр треба взяти для $\mathrm{tg}\,2$ і e? Обчислити корені.

3. Скільки ітерацій методу ділення навпіл потрібно виконати для розв'язання рівняння $\mathrm{arctg}\,x = 1 - x$ із точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Методом квадратних коренів розв'язати СЛАР $A\vec{x} = \vec{b}$, якщо

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

ВАРІАНТ № 5

1. Обчислення визначника й оберненої матриці.

2. Радіус основи циліндра та його висота наближено дорівнюють $R \approx 25$ см і $h \approx 32$ см. З якою точністю потрібно задати R і h, щоб можна було обчислити площу повної поверхні циліндра з точністю 0,1 %? Обчислити площу.

3. Скільки ітерацій методу простої ітерації потрібно виконати для розв'язання рівняння $e^x = 2 - x$ із точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Виконати чотири ітерації відшукання максимального за модулем власного значення матриці степеневим методом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ № 6

1. Побудувати аналог методу січних для систем нелінійних рівнянь.

2. Катет прямокутного трикутника дорівнює $a = (21{,}12 \pm 0{,}01)$ см, а його гіпотенуза $c = (37{,}51 \pm 0{,}01)$ см. Обчислити синус кута A, протилежного до a, й оцінити абсолютну похибку результату.

3. Скільки ітерацій методу релаксації потрібно виконати для розв'язання рівняння $\mathrm{arctg}\,x = 1 - x$ із точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Виконати чотири ітерації відшукання мінімального за модулем власного значення матриці степеневим методом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ № 7

1. Довести, що коли виконуються нерівності $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots$, то

$$\mu_2^{(k)} = \frac{x_m^{k+1} - \lambda_1 x_m^k}{x_m^k - \lambda_1 x_m^{k-1}} \xrightarrow[k \to \infty]{} \lambda_2,$$

де $\vec{x}^{k+1} = A\vec{x}^k$, а x_m^k — m-та компонента вектора $\vec{x}^k$.

2. Корені рівняння $x^2 - 2\pi x + \mathrm{tg}\,2 = 0$ слід обчислити з чотирма правильними значущими цифрами. Скільки значущих цифр треба взяти, задаючи π й $\mathrm{tg}\,2$? Обчислити корені.

3. Скільки ітерацій методу ділення навпіл потрібно виконати для відшукання додатного кореня рівняння $e^{-x} = 2 - x^2$ з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Методом Гаусса розв'язати СЛАР $A\vec{x} = \vec{b}$, якщо

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

ВАРІАНТ № 8

1. Побудувати алгоритм обчислення другого за модулем власного значення симетричної матриці на основі формули скалярних добутків та за допомогою нормування вектора на кожній ітерації.

2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють $a = 12{,}10 \pm 0{,}01$ і $b = (25{,}21 \pm 0{,}01)$ см. Обчислити тангенс кута A, протилежного до a, й оцінити абсолютну похибку результату.

3. Скільки ітерацій методу релаксації потрібно виконати для відшукання додатного кореня рівняння $e^{-x} = 2 - x^2$ з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Виконати чотири ітерації відшукання максимального за модулем власного значення матриці степеневим методом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ № 9

1. Метод Гаусса розв'язання СЛАР як розклад матриць на добуток трикутних.

2. Треба обчислити корені рівняння $x^2 - 2\pi x + \ln 3 = 0$ з чотирма правильними значущими цифрами. Скільки правильних значущих цифр потрібно взяти для π, $\ln 3$? Обчислити корені.

3. Скільки ітерацій методу Ньютона потрібно виконати для розв'язання рівняння $e^x = 2 - x$ із точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Методом Зейделя з точністю 10^{-4} знайти розв'язок СЛАР (3.1) із матрицею

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7{,}2 & 2{,}4 & 0{,}3 & 5{,}1 \\ 2{,}4 & 4{,}7 & 1{,}3 & -1{,}0 \\ 0{,}3 & 1{,}3 & 1{,}3 & 0{,}3 \end{array}\right).$$

ВАРІАНТ № 10

1. Метод квадратних коренів розв'язання СЛАР.

2. Оцінити відносну похибку обчислення значення функції

$$f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{x - y},$$

якщо $x = 0{,}39 \pm 0{,}005$, $y = 0{,}211 \pm 0{,}005$.

3. Скільки ітерацій методу Ньютона потрібно виконати для розв'язання рівняння $5^x + 3x = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Методом прогонки розв'язати СЛАР $Ax = \bar{b}$, якщо

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

ВАРІАНТ № 11

1. Число обумовленості й оцінка похибки розв'язання СЛАР.

2. Оцінити відносну похибку обчислення значення функції

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$$

якщо $x = 1{,}15 \pm 0{,}005$, $y = 1{,}21 \pm 0{,}005$.

3. Скільки ітерацій методу Ньютона потрібно виконати для відшукання додатного кореня рівняння $e^{-x} = 2 - x^2$ з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. За яких значень параметра ітераційний метод Якобі для системи $A\vec{x} = \vec{b}$ з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

збігається?

ВАРІАНТ № 12

1. Ітераційний метод обертання для розв'язання часткової проблеми власних значень.

2. З якою точністю потрібно задати x, y, z, щоб можна було обчислити функцію

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x + y}$$

із відносною похибкою 10^{-4}, якщо $x \approx 0{,}26$, $y \approx -0{,}18$, $z \approx 0{,}34$. Обчислити це значення.

3. Скільки ітерацій методу ділення навпіл потрібно виконати для відшукання кореня рівняння $\sin x = 1 - x$ із точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. За яких значень параметра ітераційний метод Зейделя для системи $A\vec{x}=\vec{b}$ з матрицею

$$A=\begin{pmatrix}1&a&0\\a&1&a\\0&a&1\end{pmatrix}$$

збігається?

ВАРІАНТ № 13

1. Ітераційні методи розв'язання СЛАР.

2. Яка відносна похибка обчислення площі сектора кола радіусом $R = 21,53 \pm 0,005$ із кутом $\alpha = 137^\circ\,(25\pm1)'$ якщо число π взято з чотирма правильними знаками? Обчислити площу.

3. Скільки ітерацій методу Ньютона потрібно виконати для відшукання кореня рівняння $\sin x = 1 - x$ із точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Методом Гаусса обчислити визначник матриці

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\-3&2&-1&2\\1&-1&3&0\\2&3&1&1\end{pmatrix}$$

ВАРІАНТ № 14

1. Ітераційний метод Якобі розв'язання повної проблеми власних значень.

2. Обчислити площу паралелограма зі сторонами $a = 21,34 \pm 0,005$ і $b = 13,49 \pm 0,005$ та кутом між ними $\alpha = 43^\circ\,(21\pm1)'$. Оцінити похибку обчисленого значення.

3. Виконати одну ітерацію методу Ньютона для розв'язання системи

$$\begin{cases} x = e^{-y}, \\ y = e^{x} \end{cases}$$

4. Методом квадратних коренів обчислити визначник матриці

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ № 15

1 Метод простої ітерації розв'язання нелінійних рівнянь.

2. Оцінити відносну похибку обчислення значення функції

$$f(x,y)=\frac{\cos(xy)}{x+y},$$

якщо $x = 0,39 \pm 0,005$, $y = 0,211 \pm 0,005$. Обчислити значення.

3. Скільки ітерацій методу Ньютона потрібно виконати для розв'язання рівняння $5^x + 3x = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Методом прогонки розв'язати СЛАР $A\vec{x}=\vec{b}$, якщо

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&2&2\\1&2&1&0&-1\\0&1&2&1&-4\\0&0&1&2&2\end{array}\right).$$

ВАРІАНТ № 16

1. Метод ділення навпіл для розв'язання нелінійних рівнянь.

2. Яка відносна похибка обчислення площі сектора кола радіусом $R = 56,38 \pm 0,005$ із кутом $\alpha = 24^\circ\,(28\pm1)'$, якщо число π взято з чотирма правильними знаками? Обчислити площу.

3. Скільки ітерацій методу Ньютона потрібно виконати для відшукання кореня рівняння $\ln x + x = 0,5$ із точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Методом Гаусса обчислити визначник матриці

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1&0\\-3&2&-1&2\\1&1&3&0\\2&3&1&1\end{pmatrix}$$

ВАРІАНТ № 17

1. Метод Ньютона для розв'язання нелінійних рівнянь.

2. Радіус основи конуса та його висота наближено дорівнюють $R \approx 25$ см і $h \approx 13$ см. З якою точністю потрібно задати R і h, щоб можна було обчислити площу повної поверхні конуса з точністю 0,1 %? Обчислити площу.

3. Скільки ітерацій методу простої ітерації потрібно виконати для розв'язання рівняння $4\sin x + x^2 = 1$ з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$?

4. Виконати чотири ітерації алгоритму відшукання максимального за модулем власного значення матриці степеневим методом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ № 18

1. Ітераційні методи розв'язання систем нелінійних рівнянь.

2. Обчислити площу паралелограма зі сторонами $a = 35,29 \pm 0,005$ і $b = 51,18 \pm 0,005$ і кутом між ними $\alpha = 26^\circ\,(37 \pm 1)'$. Оцінити похибку обчисленого значення.

3. Виконати одну ітерацію методу Ньютона розв'язання системи

$$\begin{cases} \sin(x - 0,6) - y = 1,6, \\ 3x - \cos y = 0,9, \end{cases}$$

якщо $x_0 = 0,15$, $y_0 = -2$.

4. Методом квадратних коренів обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Список використаної та рекомендованої літератури

1. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 600 с.
2. *Бахвалов Н. С., Лапин А. В., Чижонков Е. В.* Численные методы в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 2000. — 190 с.
3. *Волков Е. А.* Численные методы. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
4. *Воробьева Г. Н., Данилова А. Н.* Практикум по вычислительной математике. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.
5. *Гаврилюк І. П., Макаров В. Л.* Методи обчислень. — Ч. 1. — К.: Вища шк., 1995.— 367 с.
6. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970. — 670 с.
7. *Збірник* задач з методів обчислень / І. П. Гаврилюк, М. П. Копистира, В. Л. Макаров, М. М. Москальков. — К.: ВЦ "Київський університет", 2000. — 204 с.
8. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
9. *Каханаер Д. Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. — М.: Мир, 1998. — 575 с.
10. *Коллатц Л., Альбрехт Ю.* Задачи по прикладной математике. — М.: Мир, 1978. — 168 с.
11. *Копченова Н. В., Марон И. А.* Вычислительная математика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1972. — 368 с.
12. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы. — Т. 1. — М.: Наука, 1976. — 303 с.
13. *Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробагатько А. А.* Методы вычислений. — К.: Высш. шк., 1977. — 406 с.
14. *Методи* обчислень: Практикум на ЕОМ / В. Л. Бурківська, С. О. Войцехівський, І. П. Гаврилюк та ін. — К.: Вища шк., 1995. — 303 с.
15. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Самарская Е. А.* Задачи и упражнения по численным методам. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 208 с.

16. *Самарский А. А.* Введение в численные методы. — М.: Наука, 1987. — 272 с.
17. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
18. *Сборник* задач по методам вычислений / А. И. Азаров, В. А. Басик, И. Н. Мелешко и др. — Минск: Изд-во БГУ, 1983.— 287 с.

ЗМІСТ