34дов го...

1) $x_2 = f_2(b_1, a_{ij})$

$\delta(f_2) \leq \frac{\Delta(f_2)}{|f_2(x^*)|}$

$x_1 = f_1(b_1, b_2, x_2, a_{ij})$

9. Оцінити відносну похибку розв'язку СЛАР:

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 = b_1, \\ 0{,}99x_1 + x_2 = b_2, \end{cases}$ якщо $b_1 = 2{,}02 \pm 0{,}001$, $b_2 = 1{,}00 \pm 0{,}001$.

$\Delta b_{1,2} = 0{,}001$

$\bar{x} = (x_1, x_2)$

$\delta(x) - ?$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}99 & 1 \end{pmatrix}$

Теорема. *Нехай A - невироджена $n \times n$ матриця, $\overline{A} = A + \Delta A$, при цьому*

$$\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Тоді якщо x та $\overline{x} = x + \Delta x$ є розв'язками систем $Ax = b$ та $\overline{A}\overline{x} = \overline{b}$, $\overline{b} = b + \Delta b$, то має місце оцінка

$$\delta(x) = \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leqslant \frac{cond(A)}{1 - cond(A)\underbrace{\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}_{=0}}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \overbrace{\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}^{=0}\right) \qquad (1)$$

$$\boxed{\delta(x) \leq cond(A)\,\delta(b) \qquad (2)}$$

$\Delta A = 0$

$\delta(x) \leq cond(A)\,\delta(A)$

$det(A) = 0{,}01$

$A^{-1} = \frac{1}{0{,}01}\begin{pmatrix} 1 & -0{,}99 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\|A\|_\infty = 2$

$\|A^{-1}\|_\infty = 200$ $\Rightarrow$ $cond(A) = 400$

$\delta(\vec{b}) = \frac{\|\Delta(\vec{b})\|}{\|\vec{b}\|} = \frac{0{,}001}{2{,}02} = \frac{1}{2020}$

$\delta(x) \leq \frac{400}{2020} \approx 0{,}198 \approx 0{,}002\%$

miro

1. Методом простої ітерації виконати дві ітерації розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x - \sin\dfrac{x-y}{2} = 0, \\ 2y - \cos\dfrac{x+y}{2} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{k+1} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x^k - y^k}{2} = \varphi_1(x,y) \\ y^{k+1} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x^k + y^k}{2} = \varphi_2(x,y) \end{cases}$$

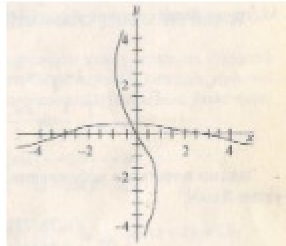


Рис. 5.1

$$\varphi'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} & -\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{x-y}{2} \\ -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x+y}{2} & -\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x+y}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0$$

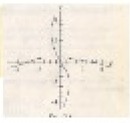
$$\varphi'_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \|\varphi'_0\|_\infty = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$ ітерац. проц. збігається

$$x_1 = 0,\ y_1 = \frac{1}{2} \qquad \varepsilon = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{-\sin\frac{1}{4}}{2} \qquad y_2 = \frac{\cos\frac{1}{4}}{2} \approx \frac{0{,}97}{2} = 0{,}485$$

$$x_2 = \frac{-0{,}247}{2} = -0{,}1235$$

$$\|(x_2, y_2)^T - (x_1, y_1)^T\|_\infty = \|(-0{,}1235; -0{,}015)^T\|_\infty = 0{,}1235 < \varepsilon$$



$f_1 = 2x - \sin\frac{x-y}{2}$

$f_2 = 2y - \cos\frac{x+y}{2}$

$x_0 = 0$
$y_0 = 0$

$f_1(\bar{x}_0) = 0$

$f_2(\bar{x}_0) = -1$

$\delta = 1$

$n = 2$

$L = \frac{1}{4}$ $\left(з\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2}\right)$

$$F'(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \frac{1}{2}\sin\frac{x+y}{2} & 2+\frac{1}{2}\sin\frac{x+y}{2} \end{pmatrix}}$$

$$F'(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left(F'(\bar{x}_0)\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$\parallel$
A_0

$h = \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{1} \frac{1}{2}$

$\| \downarrow \|_\infty = \frac{5}{6} = M$

$A_0 \bar{z}^k = \bar{F}(x_k)$	modNewton
$A_k \bar{z}^k = F(x_k)$	Newton

1) $F(x_0) = (0; -1)^T$ $\qquad A_0 = F'(x_0)$

$A_0 z_0 = F(x_0)$ $\qquad z_0 = (z_1^0, z_2^0)^T$

$\bar{z}^k = \bar{x}^k - \bar{x}^{k+1}$

$z_2^0 = -\frac{1}{2}$ $\qquad z_1^0 = \frac{2}{3}\left(0 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{6}$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon = \frac{1}{4}$

$\|z^k\| < \varepsilon \Rightarrow x^*$ $\qquad \bar{x}^1 = \bar{x}^0 - \bar{z}^0 = \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)^T$

$\|z^0\|_\infty = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

II)

$$F'(\bar{x}) \quad \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\ \frac{1}{2}\sin\frac{x+y}{2} & 2+\frac{1}{2}\sin\frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = F'(x^1) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}\cos\frac{x^1-y^1}{2} & \frac{1}{2}\cos\frac{x^1-y^1}{2} \\ \frac{1}{2}\sin\frac{x^1+y^1}{2} & 2+\frac{1}{2}\sin\frac{x^1+y^1}{2} \end{pmatrix}$$

$$F_1 = F(x^1) = \begin{pmatrix} f_1(x^1) \\ f_2(x^1) \end{pmatrix} \qquad A_1 \bar{z}^1 = F_1$$

$\|\bar{z}^1\| < \varepsilon = \frac{1}{4} \Rightarrow \bar{x}^2 = \bar{x}^1 - \bar{z}^1 = \bar{x}^*$

miro