ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

1. Постановка задачі чисельного інтегрування. Основні означення

Знаходження інтеграла – невід'ємна складова багатьох прикладних задач. На практиці не завжди вдається точно обчислити визначений інтеграл: первісна функція або надто складна, або не виражається через елементарні функції (наприклад, $\int\limits_{1.5}^{2} \frac{dx}{\ln x}$, $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ і т.д.). Якщо функція задається таблично, тоді саме поняття первісної втрачає сенс.

Задача чисельного інтегрування полягає в знаходженні наближеного значення визначеного інтеграла

$$I = \int\limits_{a}^{b} \rho(x) f(x) dx,$$

де $f(x)$ – задана функція, а $\rho(x)$ – деякий ваговий множник, $\rho(x) > 0$. На відрізку $[a, b]$ вводиться сітка

$$\{x_k : a \leqslant x_0 < x_1 < ... < x_n \leqslant b\},$$

а в якості наближеного значення інтеграла розглядається скінченна сума

$$I_h = \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k). \qquad (1)$$

Оскільки обчислення інтеграла називається *квадратурою*, то сума (1) називається *квадратурною сумою*, а наближена рівність – *квадратурною формулою*

$$\int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k). \tag{2}$$

Точки x_k, $k = \overline{0,n}$, називаються *вузлами* або *абсцисами* квадратурної формули, а числа c_k – *коефіцієнтами* або *ваговими коефіцієнтами* квадратурної формули. Необхідно, щоб вузли x_k та коефіцієнти c_k не залежали від вибору функції $f(x)$, а також від класу функцій, який розглядається.

Квадратурну формулу (2) називають квадратурною формулою *замкненого типу*, якщо $x_0 = a$, $x_n = b$, інакше формулою *відкритого типу*.

Величину

$$R(f) = \int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k) \tag{3}$$

будемо називати *залишковим членом* квадратурної формули.

Алгебраїчним степенем точності квадратурної формули називають найвищий степінь алгебраїчного полінома, для якого квадратурна формула є точною. Тобто, квадратурна формула має алгебраїчний степінь точності m, якщо $R(P_i) = 0$ для $\forall P_i(x)$, $i = \overline{0,m}$, та $\exists P_{m+1}(x)$: $R(P_{m+1}) \neq 0$, де P_i – алгебраїчний многочлен степеня i.

Квадратурна формула має *порядок (степінь) точності* p

по кроку h, якщо $R(f) = O(h^p)$, де $h = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} h_i$.
$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = \overline{1, n}$.

Якщо представити інтеграл у вигляді суми N інтегралів

$$I = \int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} I_i,$$

то отримаємо *складену квадратурну формулу*

$$I \approx \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=0}^{n} c_k^{(i)} f(x_k^{(i)}).$$

Для побудови квадратурних формул вигляду (2) використовують різні підходи. В залежності від використаного підходу можна отримати відповідні квадратурні формули.

1) Інтерполяційні квадратурні формули

Квадратурні формули можна отримати через заміну підінтегральної функції алгебраїчним інтерполяційним многочленом, значення якого співпадають із значеннями функції у вузлах x_k, $k = \overline{0, n}$.

2) Квадратурні формули найвищого степеня точності

Потрібно знайти формулу вигляду (2), яка при заданому n буде точною для алгебраїчного многочлена якомога більшого степеня. При цьому або вагові коефіцієнти, або вузли квадратурної формули (2) можуть бути зафіксованими заздалегідь.

3) Квадратурні формули з найкращою оцінкою на

класі функцій

Потрібно визначити вузли та вагові коефіцієнти квадратурної формули (2) таким чином, щоб величина

$$R = \sup_{f \in B} R(f)$$

була найменшою. Такі формули називають формулами з найменшою оцінкою на класі B.

2. Інтерполяційні квадратурні формули

Представимо функцію $f(x)$ у вигляді $f(x) = \varphi(x) + r(x)$, де $\varphi(x)$ – узагальнений інтерполяційний многочлен, $r(x)$ – залишковий член інтерполяційної формули. Тоді

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x)\varphi(x) dx + \int_a^b \rho(x) r(x) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k) + R(f), \tag{4}$$

формула для залишкового члена інтерполяції має вигляд:

$$|r(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|, \tag{5}$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$, $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$.

Отже, оцінка залишкового члена квадратурної формули:

$$|R(f)| \leqslant \int\limits_a^b \rho(x)\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|dx. \tag{6}$$

Замість узагальненого многочлена розглянемо інетрполяційний многочлен у формі Лагранжа, покладемо в представленні (4) $\varphi(x) = L_n$, де $L_n(x)$ – многочлен Лагранжа n-го степеня, побудований за вузлами $a \leqslant x_0 < x_1 < \dots < x_n \leqslant b$, та запишемо рівність

$$\int\limits_a^b \rho(x)f(x)dx = \int\limits_a^b \rho(x)L_n(x)dx + R(f) =$$
$$= \int\limits_a^b \rho(x)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx + R(f) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\int\limits_a^b \rho(x)\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx + R(f).$$

Отримуємо наближену квадратурну формулу (2), вагові коефіцієнти якої можна знайти за формулою:

$$c_k = \int\limits_a^b \rho(x)\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx. \tag{7}$$

Зауваження. Якщо квадратурна формула буде точною на многочленах n-го степеня, то це квадратурна формула інтерполяційного типу.

Зазначимо, для полінома степеня n формула (2) є точною, оскільки тоді $L_n(x) \equiv f(x)$. Зокрема, формула (2) є точною при $f(x) = x^i$, $i = \overline{0,n}$. Врахувавши цю умову, отримуємо наступну систему лінійних рівнянь

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x_k^i = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1}, \; i = \overline{0,n}. \tag{8}$$

Оскільки визначник системи (8) не дорівнює 0 (визначник Вандермонда), то для неї завжди є розв'язок, який є єдиним.

Зауваження. Зрозуміло, що квадратурні формули інтерполяційного типу мають алгебраїчний степінь точності принаймні n, але виявляється, що для парних n та симетричному розташуванні вузлів інтегрування (відносно середини проміжку), алгебраїчний степінь точності на одиницю вищий степеня інтерполяційного полінома ($m = n + 1$).

Зауваження. Підвищення точності інтегрування часто відбувається за рахунок розбиття відрізка на рівні частини. Може здатися природним досягати збільшення точності квадратурної формули за рахунок підвищення степеня многочленів, для яких ця квадратура є точною. Однак цей шлях не такий простий, як здається. Дійсно, розглянемо квадратуру

$$S_n(f) = \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^{n} D_k f(x_k) \approx I(f) = \int_a^b f(x) p(x) dx,$$

яка є точною для будь-якого многочлена P_m степеня m:

$$I(P_m) = S(P_m).$$

Звідси

$$R(f) = I(f) - S_n(f) = R(P_m) + R(f - P_m) = R(f - P_m).$$

Має місце очевидна оцінка

$$|R(f)| \leqslant V_n E_m(f), \quad E_m(f) = \inf_{P_m} \sup_{[a,b]} |f(x) - P_m(x)|,$$

$$V_n = \int_a^b |p(x)| dx + \left(\frac{b-a}{2}\right) \sum_{k=0}^{n} |D_k|.$$

За невдалого вибору вузлів може виявитися, що для деяких (навіть аналітичних) функцій, величина V_n збільшується із зростанням n так, що це збільшення не може компенсувати спадання E_m. Окрім того, для формул Ньютона-Котеса можна показати, що серед D_k за великих n будуть зустрічатися як додатні, так і від'ємні величини, які по модулю перевищують як завгодно велике число. Звідси випливає, що за великих n, малі похибки у значеннях функції $f(x_k)$ можуть дати велику похибку у квадратурній сумі.

Таким чином, вказані вище формули мало придатні для обчислень, коли число вузлів (або максимальний степінь многочленів, для яких вони є точними) буде великим. Через це часто виявляється вигідним розбити вихідний проміжок на частини і на кожній з них застосувати квадратурну формулу з малою кількістю вузлів, а потім скласти отримані результати за всіма відрізками. Тобто замість звичайних формул скористатися складеними.

Приклад. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу з $\rho(x) = 1$ за вузлами $a; (3a+b)/4; (a+3b)/4; b$.
Розв'язок. Позначимо $x_0 = a$, $x_1 = (3a+b)/4$, $x_2 = (a+3b)/4$, $x_3 = b$. Для зручності обчислень перейдемо до проміжку $[-1; 1]$, скористаємося заміною

$$t = \frac{2x-(a+b)}{b-a}, \quad dx = \frac{b-a}{2}dt, \quad t \in [-1;1], \quad x \in [a;b].$$

Маємо $t_0 = -1, \quad t_1 = -1/2, \quad t_2 = 1/2, \quad t_3 = 1,$

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(t)dt.$$

З формули (2) інтеграл наближено дорівнює

$$I \approx c_0 f(a) + c_1 f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + c_2 f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + c_3 f(b),$$

невідомі коефіцієнти знайдемо з формули (7):

$$c_0 = \frac{b-a}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x+1/2)(x-1/2)(x-1)}{(-1+1/2)(-1-1/2)(-1-1)} dx = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{9};$$

$$c_1 = \frac{b-a}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x-1/2)(x-1)}{(-1/2+1)(-1/2-1/2)(-1/2-1)} dx = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{8}{9};$$

$$c_2 = \frac{b-a}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x+1/2)(x-1)}{(1/2+1)(1/2+1/2)(1/2-1)} dx = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{8}{9};$$

$$c_3 = \frac{b-a}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(x+1)(x+1/2)(x-1/2)}{(1+1)(1+1/2)(1-1/2)} dx = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{9}.$$

Тоді квадратурна формула матиме вигляд

$$I \approx \frac{b-a}{18} \left(f(a) + 8f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 8f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right).$$

Приклад. Визначити алгебраїчний степінь точності квадратурної формули

$$I \approx \frac{b-a}{18} \left(f(a) + 8f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 8f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right).$$

Розв'язок. Квадратурні формули інтерполяційного типу мають алгебраїчний степінь точності принаймні n, в нашому випадку за 4 вузлами можна побудувати інтерполяційний поліном принаймні 3 степеня. Покажемо, що алгебраїчний степінь точності дорівнює принаймні три і перевіримо, чи не є він більшим.

$m = 0; \quad f(x) = P_0 = 1;$

$$\left.\begin{aligned}
&I \approx \frac{b-a}{18}\,(1+8+8+1) = b-a\\
&I = \int\limits_a^b dx = b-a
\end{aligned}\right\} \Rightarrow R(P_0) = 0;$$

$m = 1; \quad f(x) = P_1 = x;$

$$\left.\begin{aligned}
&I \approx \frac{b-a}{18}\left(a + 8\frac{3a+b}{4} + 8\frac{a+3b}{4} + b\right) = \frac{b^2-a^2}{2}\\
&I = \int\limits_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}
\end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\Rightarrow\\ R(P_1) = 0;\end{array}$$

$m = 2; \quad f(x) = P_2 = x^2;$

$$\left.\begin{aligned}
&I \approx \frac{b-a}{18}\left(a^2 + 8\left(\frac{3a+b}{4}\right)^2 + 8\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2 + b^2\right) = \frac{b^3-a^3}{3}\\
&I = \int\limits_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow R(P_2) = 0;$$

$m = 3; \quad f(x) = P_3 = x^3;$

$$\left.\begin{aligned}
&I \approx \frac{b-a}{18}\left(a^3 + 8\left(\frac{3a+b}{4}\right)^3 + 8\left(\frac{a+3b}{4}\right)^3 + b^3\right) = \frac{b^4-a^4}{4}\\
&I = \int\limits_a^b x^3 dx = \frac{b^4-a^4}{4}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow R(P_3) = 0;$$

$m = 4; \quad f(x) = P_4 = x^4;$

$$\left.\begin{aligned} I \approx \frac{b-a}{18}\left(a^4+8\left(\frac{3a+b}{4}\right)^4+8\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4+b^4\right) = \\ = \frac{1}{96}\left(19b^5+ab^4+2a^3b^2-2a^2b^3-a^4b-19a^5\right) \\ I = \int\limits_a^b x^4dx = \frac{b^5-a^5}{5} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow R(P_4) \neq 0.$$

Отже, алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює трьом.

Приклад. Визначити оцінку залишкового члена квадратурної формули інтерполяційного типу, побудованої за вузлами a, $(3a+b)/4$, $(a+3b)/4$, b з ваговим множником $\rho(x)=1$.
Розв'язок. Скористаємось оцінкою залишкового члена (6):

$$|R(f)| = \int\limits_a^b |f(x)-L_3(x)|dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \frac{M_4}{4!}\left|(x-a)(x-\frac{3a+b}{4})(x-\frac{a+3b}{4})(x-b)\right|dx =$$

$$= \frac{b-a}{2}\cdot\frac{M_4}{4!}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4\left|(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-1)\right|dx =$$

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{M_4}{24} \int\limits_{-1}^{1} \left|(x^2-1)(x^2-\frac{1}{4})\right| dx = \frac{(b-a)^5 M_4}{32\cdot 24}\cdot\frac{1}{15} =$$

$$= \frac{M_4(b-a)^5}{11520}.$$

3. Формули Ньютона-Котеса

Якщо у формулі (2) вузли $x_k,\ k=\overline{0,n}$, вибрати рівновіддаленими, то отримаємо квадратурну формулу *Ньютона-Котеса.*

Оберемо крок $h=\dfrac{b-a}{n}$ та покладемо $x_0=a,\ \ x_n=b,$ $x_k=x_0+kh,\ \ k=\overline{1,n-1},\ \ \rho(x)=1$, після обчислення коефіцієнтів отримаємо формулу

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} H_k f(x_k),$$

де сталі H_k називаються *коефіцієнтами Котеса* та визначаються наступним чином

$$H_k = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int\limits_0^n \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-k}dt.$$

Зупинимося на деяких часткових випадках формули Ньютона-Котеса, для найпростішого випадку розглянемо побудову квадратурної формули, складеної, а також їх залишкових членів.

Формула лівих прямокутників. Якщо в інтегралі замінити підінтегральну функцію сталою функцією, значення якої співпадає із значенням функції в лівому вузлі, то отримаємо формулу лівих прямокутників:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(a)dx = (b-a)f(a),$$

використавши оцінку залишкового члена інтерполяції (5), отримаємо оцінку залишкового члена квадратурної формули:

$$|R(f)| = \left| \int_a^b f(x)dx - (b-a)f(a) \right| = \left| \int_a^b (f(x)-f(a))dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b M_1(x-a)dx = \frac{M_1(b-a)^2}{2}, \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Порядок точності формули лівих прямокутників дорівнює 2.

Складена формула лівих прямокутників, яка отримується розбиттям проміжку $[a,b]$ на проміжки довжини h та додаванням інтегралів по цих проміжках, має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1})dx = h(f(x_0)+f(x_1)+...+f(x_{n-1})),$$

тоді її залишковий член:

$$|R(f)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{M_{1,k}(x_k - x_{k-1})^2}{2} \leqslant \frac{nM_1h^2}{2} = \frac{M_1(b-a)h}{2},$$

де $M_{1,k} = \max\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} |f'(x)|$, $k = \overline{1,n}$.
Порядок точності складеної квадратурної формули лівих прямокутників дорівнює 1.

Зауваження. Оскільки складена формула отримується додаванням інтегралів, а при цьому абсолютні похибки додаються, то степінь точності квадратурної формули Ньютона-Котеса на одному проміжку на порядок вищий, ніж у її складеного аналогу.

Зауваження. Алгебраїчний степінь точності формули Ньютона-Котеса на одиницю менший порядка точності відповідної складеної формули.

Знайдемо алгебраїчний степінь точності формули лівих прямокутників:

$$m = 0; \quad f(x) = P_0 = 1;$$

$$\left.\begin{aligned} I^{лів} &= (b-a) \\ I &= \int\limits_a^b dx = (b-a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow R(P_0) = 0;$$

$$m = 1; \quad f(x) = P_1 = x;$$

$$\left.\begin{aligned} I^{лів} &= (b-a)a \\ I &= \int\limits_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow R(P_1) \neq 0.$$

Отже, алгебраїчний степінь точності формули лівих прямокутників дорівнює 0, що узгоджується із останнім заувабженням.

Формула правих прямокутників будується аналогічно попередньому випадку, тільки замість лівого вузла береться правий:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(b),$$

оцінка залишкового члена квадратурної формули:

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2}.$$

Складена формула з оцінкою залишкового члена мають вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)),$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)h}{2}.$$

Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули правих прямокутників, так саме як і лівих, дорівнює 0, порядок точності складеної формули – 1, а формули по одному проміжку – 2.

Формула середніх прямокутників. Якщо у формулі Ньютона-Котеса відкритого типу взяти один вузол $\dfrac{a+b}{2}$, отримаємо формулу середніх прямокутників

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

з оцінкою залишкового члена

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24}.$$

Складена формула з оцінкою залишкового члена:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\Big(f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_{\frac{3}{2}}) + ... + f(x_{n-\frac{1}{2}})\Big), \qquad (9)$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)h^2}{24}. \qquad (10)$$

Враховуючи зауваження про симетричне розташування вузлів, алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює 1. Порядок точності складеної формули середніх прямокутників – 2, а на одному проміжку – 3.

Приклад. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-1}^{3} \frac{dx}{2+x}$ за допомогою формули середніх прямокутників з $n = 4$.

Розв'язок. Для $n = 4$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3+1}{4} = 1,$$

складемо таблицю значень:

k	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
x_k	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x_k)$	1	2/3	1/2	2/5	1/3	2/7	1/4	2/9	1/5

За формулою (9)

$$I \approx 1 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{9} +\right) \approx 1,5746.$$

Формула трапецій. Якщо у квадратурній формулі замкненого типу взяти $n = 1$, то отримаємо формулу трапецій

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2}(b-a), \tag{11}$$

з оцінкою залишкового члена

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12}.$$

Тоді складена формула з оцінкою залишкового члена:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right), \tag{12}$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)h^2}{12}. \tag{13}$$

Алгебраїчний степінь та порядок точності співпадає з формулою середніх прямокутників.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-1}^{3} \frac{dx}{2+x}$ за допомогою формули трапецій з точністю $\varepsilon = 0,25$, використавши оцінку залишкових членів.

Розв'язок. З формули (13)

$$h \leqslant \sqrt{\frac{12\varepsilon}{M_2(b-a)}},$$

знайдемо значення M_2 та отримаємо оцінку для кроку:

$$M_2 = \max_{x\in[-1;3]} \left| \frac{2}{(2+x)^3} \right| = 2; \qquad h \leqslant \sqrt{\frac{12 \cdot 0,25}{2(3+1)}} \approx 0,6124.$$

Для зручності обчислень покладемо $h = 0,5$ і складемо таблицю значень:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_k	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x_k)$	1	2/3	1/2	2/5	1/3	2/7	1/4	2/9	1/5

За форумулою (12)

$$I \approx 0,5 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{1}{10} \right) \approx 1,629.$$

Формула Сімпсона. Поклавши у формулі Ньютона-Котеса замкненого типу $n = 2$, отримуємо формулу парабол (Сімпсона)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) \right),$$

з оцінкою залишкового члена

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{2880}.$$

Складена формула Сімпсона з оцінкою залишкового члена має вигляд:

$$I \approx \frac{h}{6}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right), \qquad (14)$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)h^4}{2880}.$$

Враховуючи зауваження про парні степені інтерполяції, алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює 3. Порядок точності складеної формули – 4, а по одному проміжку – 5.

Зауваження. Інколи, при застосуванні складеної квадратурної формули Сімпсона, для зручності використовують цілу нумерацію вузлів:

$$I \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(x_n)\right), \qquad (15)$$

Похибка при цьому має вигляд

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4(b-a)h^4}{180}.$$

4. Правило Рунге

Величина похибки чисельного інтегрування залежить від кроку h та від гладкості підінтегральної функції $f(x)$. Наприклад, величина M_i, яка є складовою оцінки залишкових членів, може сильно змінюватись від точки до точки та невідома заздалегідь. Якщо величина похибки велика, то її можна зменшити за рахунок зменшення кроку, але для цього необхідно вміти оцінювати похибку апостеріорно, наприклад, методом Рунге.

Апостеріорна оцінка похибки. Розглянемо деяку складену квадратурну формулу, яка має порядок точності p, з кроком h та $h/2$:

$I = I_h + ch^p + o(h^p),\ (I)$

$I = I_{\frac{h}{2}} + c\left(\frac{h}{2}\right)^p + o(h^p),\ (II)$

де ch^p – головний член похибки квадратурної формули, c не залежить від h.

$(I)-(II) : I_{\frac{h}{2}} - I_h \approx ch^p - c\left(\frac{h}{2}\right)^p;\ c\left(\frac{h}{2}\right)^p \approx \frac{(I_{\frac{h}{2}} - I_h)}{2^p - 1}$ – підставляємо в (II) і отримуємо *апостеріорну оцінку похибки* інтеграла I за допомогою наближення $I_{\frac{h}{2}}$ за *правилом Рунге*:

$$|I - I_{\frac{h}{2}}| \approx \frac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1}. \tag{16}$$

Обчислення інтеграла із заданою точністю. Алгоритм обчислення інтеграла з заданою точністю ε за допомогою правила Рунге:

1) Наближено обчислюємо інтеграл з кроками h та $\frac{h}{2}$, оцінюємо похибку за формулою (16).

2) Якщо $\frac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1} > \varepsilon$, то наближено обчислюємо інтеграл з

кроком $\dfrac{h}{4}$ і обчислюємо похибку $|I - I_{\frac{h}{4}}|$.
3) Процес обчислення інтеграла $I_{\frac{h}{2^i}}$, $i = 1, 2, ..., n$, з двічі меншим кроком продовжуємо, поки не виконається умова $\dfrac{\left|I_{\frac{h}{2^n}} - I_{\frac{h}{2^{n-1}}}\right|}{2^p - 1} \leqslant \varepsilon$.
4) Тоді $I \approx I_{\frac{h}{2^n}}$ з точністю ε.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_1^3 \ln x dx$ за формулою Сімпсона, використавши правило Рунге з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.
Розв'язок. Покладем$n = 2$, тоді $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{3-1}{2} = 1$. о $n = 2$, тоді $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{3-1}{2} = 1$.
Скористаємось формулою (15):

$$I_h \approx \frac{1}{3}\Big(\ln 1 + 4\ln 2 + \ln 3\Big) \approx 1,29040.$$

Обчислимо з двічі меншим кроком $0,5$:

$$I_{\frac{h}{2}} \approx \frac{0,5}{3}\Big(\ln 1 + 4(\ln 1,5 + \ln 2,5) + 2\ln 2 + \ln 3\Big) \approx 1,29532.$$

За формулою (16) обчислимо точність останнього знайденого інтеграла, врахуємо, що порядок точності складеної квадратурної формули Сімпсона дорівнює 4:

$$|I - I_{\frac{h}{2}}| \leqslant \frac{|1,29040 - 1,29532|}{2^4 - 1} \approx 0,00033 > \varepsilon,$$

тому обчислимо з кроком $0,25$:

$$I_{\frac{h}{4}} \approx \frac{0,25}{3}\Big(\ln 1 + 4(\ln 1,25 + \ln 1,75 + \ln 2,25 + \ln 2,75) +$$

$$+2(\ln 1,5 + \ln 2 + \ln 2,5) + \ln 3\Big) \approx 1,29580.$$

$$|I - I_{\frac{h}{4}}| \leqslant \frac{|1,29532 - 1,29580|}{2^4 - 1} \approx 0,000032 \leqslant \varepsilon,$$

отже, $I \approx 1,2958$.

Зменшення кількості обчислень. При застосуванні правила Рунге інколи можна зменшити кількість обчислень за рахунок вже обчисленого значення інтеграла. Розглянемо формулу лівих прямокутників з кроком h та $\frac{h}{2}$:

$I_h = h\Big(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})\Big)$,

$I_{\frac{h}{2}} = \frac{h}{2}\Big(f(x_0)+f(x_{\frac{1}{2}})+f(x_1)+...+f(x_{n-\frac{3}{2}})+f(x_{n-1})+f(x_{n-\frac{1}{2}})\Big)$

Використаємо в останній формулі попереднє, вже обчислене, значення інтеграла, тоді отримаємо спрощену формулу лівих прямокутників:

$$I_{\frac{h}{2}} = \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}I_h, \tag{17}$$

в якій замість обчислення значень функції в $2n$ точках, достатньо обчислення в n точках.

Зауваження. Спрощена формула правих прямокутників та трапецій співпадає із формулою (17).

Зауваження. При застосуванні формули середніх прямокутників зменшити кількість обчислень схожим чином не вийде.

Чисельне визначення порядка точності квадра-

турної формули. Якщо взяти

$$I = I_{\frac{h}{4}} + c\left(\frac{h}{4}\right)^p + o(h^p) \quad (III)$$

та розглянути (I) - (II), (II) - (III), отримаємо

$$I_{\frac{h}{2}} - I_h \approx \frac{ch^p(2p-1)}{2^p} \quad (IV),$$

$$I_{\frac{h}{4}} - I_{\frac{h}{2}} \approx \frac{ch^p(2p-1)}{2^{2p}} \quad (V).$$

Розділимо (IV) на (V):

$$\frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{I_{\frac{h}{4}} - I_{\frac{h}{2}}} \approx 2^p.$$

Таким чином можна отримати формулу для *визначення порядка точності* квадратурної формули за допомогою правила Рунге:

$$p \approx \log_2\left|\frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{I_{\frac{h}{4}} - I_{\frac{h}{2}}}\right|. \qquad (18)$$

Адаптивні квадратурні формули. На прикладі формули трапецій розглянемо процедуру визначення змінного кроку.

Нехай відрізок $[a;b]$ розбитий на часткові відрізки $[x_{i-1};x_i]$, $i=\overline{1,n}$, які можуть мати різну довжину. Складена формула трапецій із змінним кроком відповідає формулі (12), в якій замість кроку h береться крок h_i, $h_i = x_i - x_{i-1}$:

$$I_h = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2},$$

а формула на одному кроці відповідає (11):

$$I_{h,i} = \int\limits_{x_i}^{x_{i-1}} f(x)dx \approx h_i \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

з оцінкою залишкового члена

$$|R_i(f)| \leqslant \frac{M_{2,i} h_i^3}{12}, \text{ де } M_{2,i} = \max_{x \in [x_{i-1}; x_i]} |f''(x)|,$$

отже формула (16) для методу трапецій на одному кроці має вигляд

$$|I - I_{\frac{h}{2},i}| = \frac{\left| I_{\frac{h}{2},i} - I_{h,i} \right|}{2^3 - 1}.$$

Кожен з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$, довжиною h_i, розбивається навпіл, поки не виконається умова

$$|I - I_{\frac{h}{2},i}| \leqslant \frac{\varepsilon h_i}{b - a},$$

що забезпечує величину похибки ε на проміжку $[a, b]$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon h_i}{b - a} = \varepsilon.$$

Екстраполяційна формула Річардсона. З формули

(16) безпосередньо випливає *наближення Річардсона*, яке дає змогу отримати більш точне значення інтеграла:

$$I \approx I_{\frac{h}{2}} + \frac{I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^p - 1} = \frac{2^p I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^p - 1}. \tag{19}$$

Наприклад, для складених формул трапецій та середніх прямокутників наближення дає четвертий порядок точності замість другого, а для складеної формули Сімпсона точність підвищується до шостого степеня.

Приклад. Вивести явний вигляд квадратурної формули, яка отримується екстраполяцією Річардсона з складеної формули трапецій.

Розв'язок. Використаємо формулу трапецій (12), формулу Річардсона (19), врахуємо, що для складеної формули трапецій $p = 2$.

$$I^{тр,Річ} = \frac{2^2 I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^2 - 1} = \frac{4}{3} I^{тр}_{\frac{h}{2}} - \frac{1}{3} I^{тр}_h = \frac{4}{3} \cdot \frac{h}{2} \Big(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) + \frac{f(x_n)}{2} \Big) - \frac{1}{3} \cdot h \Big(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2} \Big) =$$

$$= \frac{h}{6} \Big(2f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) + 2f(x_n) - f(x_0) -$$

$$-2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) - f(x_n) \Big) = \frac{h}{6} \Big(f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-\frac{1}{2}}) +$$

$$+ f(x_n) \Big) = I^{Сімп}.$$

З формули (14) отримали, що результатом буде формула Сімпсона.

Приклад. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ за допомогою формули трапецій, використавши уточнення Річардсона.

Розв'язок. Використаємо формулу (19), врахуємо, що $p = 2$, покладемо $h = 0,5$ і спочатку обчислимо інтеграли I_h та $I_{\frac{h}{2}}$ за формулами (12), (17), скориставшись таблицею значень:

x_k	0	0,25	0,5	0,75	1
$f(x_k)$	1	0,941176	0,8	0,64	0,5

$$I_h = 0,5\left(\frac{f(0)}{2} + f(0,5) + \frac{f(1)}{2}\right) \approx 0,775;$$

$$I_{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}I_h + \frac{0,5}{2}\Big(f(0,25) + f(0,75)\Big) \approx 0,782794;$$

$$I \approx \frac{2^2 I_{\frac{h}{2}} - I_h}{2^2 - 1} \approx 0,785392.$$

Таблиця Ромберга. За допомогою таблиці Ромберга можна з високою точністю обчислити інтеграл від достатньо гладкої функції.

$$\begin{array}{lllll}
I_h^{(0)} & & & & \\
I_{\frac{h}{2}}^{(0)} & I_{\frac{h}{2}}^{(1)} & & & \\
I_{\frac{h}{4}}^{(0)} & I_{\frac{h}{4}}^{(1)} & I_{\frac{h}{4}}^{(2)} & & \\
I_{\frac{h}{8}}^{(0)} & I_{\frac{h}{8}}^{(1)} & I_{\frac{h}{8}}^{(2)} & I_{\frac{h}{8}}^{(3)} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Для побудови таблиці обчислюються інтеграли за допомогою складених квадратурних формул із сталим кроком. Перший стовпчик таблиці – інтеграли, які обчислюються за допомогою ділення кроку навпіл, вони мають порядок точності p. Другий стовпчик – інтеграли, які обчислюються за допомогою формули екстраполяції Річардсона (19) та мають порядок точності $(p+s)$. Якщо до отриманих інтегралів знов застосувати формулу Річардсона, то отримаємо інтеграли третього стовпця, точність яких підвищується до $(p+2s)$, процес продовжується, поки не досягається необхідна точність.

Похибку кожного з отриманих інтегралів (крім останнього), можна оцінити за правилом Рунге (16):

$$|I - I^{(l)}_{\frac{h}{2^k}}| \approx \left| \frac{I^{(l)}_{\frac{h}{2^k}} - I^{(l)}_{\frac{h}{2^{k-1}}}}{2^{p+sl} - 1} \right|.$$

Зауваження. Для складених формул середніх прямокутників, трапецій та Сімпсона $s = 2$.

Приклад. Для інтеграла $I = \int\limits_0^1 \ln(1+x^2)dx$ побудувати таблицю Ромберга за квадратурною формулою трапецій з кроком 1, 1/2, 1/4, 1/8. Чисельно перевірити порядок точності інтегралів другого стовпця таблиці.

Розв'язок. Наближено обчислимо інтеграл з кроком $h = 1$ за формулою (12), для обчислень використаємо таблицю значень

x_k	0	1/8	1/4	3/8
$f(x_k)$	0	0,01550419	0,06062462	0,13157636

x_k	1/2	5/8	3/4	1
$f(x_k)$	0,22314355	0,32975328	0,44628710	0,69314718

$I_h^{(0)} = 1 \cdot \left(\dfrac{f(0)}{2} + \dfrac{f(1)}{2}\right) = 1 \cdot \left(\dfrac{\ln 1}{2} + \dfrac{\ln 2}{2}\right) \approx 0,34657359.$

Далі обчислюємо з двічі меншим кроком за формулою (17):

$I_{\frac{h}{2}}^{(0)} = \dfrac{1}{2} I_h^{(0)} + \dfrac{1}{2} f(\dfrac{1}{2}) \approx 0,28485857;$

$I_{\frac{h}{4}}^{(0)} = \dfrac{1}{2} I_{\frac{h}{2}}^{(0)} + \dfrac{1}{4} \left(f(\dfrac{1}{4}) + f(\dfrac{3}{4})\right) \approx 0,26915721;$

$I_{\frac{h}{8}}^{(0)} = \dfrac{1}{2} I_{\frac{h}{4}}^{(0)} + \dfrac{1}{8} \left(f(\dfrac{1}{8}) + f(\dfrac{3}{8}) + f(\dfrac{5}{8}) + f(\dfrac{7}{8})\right) \approx 0,26524592.$

Оскільки, для складеної формули трапецій $p = 2$, $s = 2$, то отримані інтеграли мають степінь точності 2, підвищимо точність до 4 за формулою (19):

$$I_{\frac{h}{2}}^{(1)} = \frac{2^2 I_{\frac{h}{2}}^{(0)} - I_h^{(0)}}{2^2 - 1} \approx 0,26428690;$$

$$I_{\frac{h}{4}}^{(1)} = \frac{2^2 I_{\frac{h}{4}}^{(0)} - I_{\frac{h}{2}}^{(0)}}{2^2 - 1} \approx 0,26392342;$$

$$I_{\frac{h}{8}}^{(1)} = \frac{2^2 I_{\frac{h}{8}}^{(0)} - I_{\frac{h}{4}}^{(0)}}{2^2 - 1} \approx 0,26394216.$$

Маємо змогу ще підвищити точність за екстраполяційною формулою (19), але враховуємо, що для отриманих інтегралів порядок точності $p = 4$:

$$I_{\frac{h}{4}}^{(2)} = \frac{2^4 I_{\frac{h}{4}}^{(1)} - I_{\frac{h}{2}}^{(1)}}{2^4 - 1} \approx 0,26389919;$$

$$I^{(2)}_{\frac{h}{8}} = \frac{2^4 I^{(1)}_{\frac{h}{8}} - I^{(1)}_{\frac{h}{4}}}{2^4 - 1} \approx 0,26394341;$$

Інтеграли $I^{(2)}$ мають порядок точності 6, можна підвищити його до 8:

$$I^{(3)}_{\frac{h}{8}} = \frac{2^6 I^{(2)}_{\frac{h}{8}} - I^{(2)}_{\frac{h}{4}}}{2^6 - 1} \approx 0,26394411.$$

Запишемо отримані значення в таблицю:

	$I^{(0)}$	$I^{(1)}$	$I^{(2)}$	$I^{(3)}$
I_h	0,34657359			
$I_{\frac{h}{2}}$	0,28485857	0,26428690		
$I_{\frac{h}{4}}$	0,26915721	0,26392342	0,26389919	
$I_{\frac{h}{8}}$	0,26524592	0,26394216	0,26394341	0,26394411

Для чисельного визначення порядка точності інтегралів другого стовпця таблиці ($I^{(1)}$) скористаємось формулою (18):

$$p = \log_2 \left| \frac{I^{(1)}_{\frac{h}{4}} - I^{(1)}_{\frac{h}{2}}}{I^{(1)}_{\frac{h}{8}} - I^{(1)}_{\frac{h}{4}}} \right| \approx 4.$$

5. Квадратурні формули найвищого алгебраїчного степеня точності

При використанні формул Ньютона-Котеса значення функції задаються на множині вузлів із сталим кроком, при цьому для n вузлів квадратурні формули є точними для алгебраїчних многочленів степеня $(n-1)$. За рахунок вибору вузлів можна побудувати квадратурні формули, які будуть точними для многочленів вищих степенів.

Нехай формула чисельного інтегрування

$$I = \int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k) \qquad (20)$$

є формулою інтерполяційного типу, для $\forall x \in [a;b]$ $\rho(x) > 0$ – вагові функції, що задовольняють нерівностям

$$\left| \int_a^b \rho(x)x^i dx \right| < \infty, \quad i = 0, 1, ...$$

Вузли вибираються таким чином, щоб формула була точною для алгебраїчного многочлена якомога більшого степеня m. Такі формули називають *квадратурними формулами найвищого алгебраїчного степеня точності* або *формулами Гауса.*

Невідомі c_k, x_k вибираються таким чином, щоб мали місце рівності:

$$\int_a^b \rho(x)x^{\alpha}dx = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k^{\alpha}, \quad \alpha = \overline{0, m}. \qquad (21)$$

Таким чином отримали систему, де кількість рівнянь – $(m+1)$, кількість невідомих – $2n$, для існування єдиного розв'язку необхідно, щоб $2n = m+1$. Дійсно, для n вузлів можна побудувати квадратурну формулу, яка буде точною для алгебраїчних многочленів степеня $m = (2n-1)$ і нижче.

Теорема. Квадратурна формула (20) буде точною для довільного многочлена $P_m(x)$ степеня $m = 2n-1$ тоді і тільки тоді, коли

1) вона є квадратурною формулою інтерполяційного типу, тобто:

$$c_k = \int\limits_a^b \rho(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx,$$

де $\omega(x) = (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)$;

2) многочлен $\omega(x)$ є ортогональним з ваговим множником $\rho(x)$ до будь-якого многочлена $P_i(x)$, $i = \overline{0, n-1}$, степеня менше n, тобто:

$$\int\limits_a^b \rho(x)\omega(x)P_i(x)dx = 0.$$

Нехай $f(x) \in C^{2n}_{[a;b]}$, $\rho(x) > 0$, $x \in [a; b]$, тоді залишковий член формули Гауса має вигляд:

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_{2n}}{(2n)!} \int\limits_a^b \rho(x)\omega^2(x)dx.$$

Властивості квадратурних формул Гауса:

1) вузли x_k і вагові коефіцієнти c_k визначаються однозначно;

2) коефіцієнти формули Гауса додатні, тобто $c_k > 0$.

Приклад. Побудувати квадратурну формулу найвищого алгебраїчного степеня точності з ваговим множником $\rho(x) = 1$ на проміжку $x \in [-1; 1]$, $n = 1$.

Розв'язок. Оскільки $n = 1$, значить $m = 2 \cdot 1 - 1 = 1$. Квадратурну формулу будемо шукати у вигляді:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1).$$

Невідомі c_1, x_1 знайдемо із системи (21):

$$\begin{array}{ll} \alpha = 0: & \int\limits_{-1}^{1} x^0 dx = c_1 x_1^0; \\ \alpha = 1: & \int\limits_{-1}^{1} x^1 dx = c_1 x_1^1; \end{array} \quad \begin{cases} c_1 = 2; \\ c_1 x_1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 2; \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Таким чином,

$$I \approx 2f(0).$$

Отримали квадратурну формулу середніх прямокутників з кроком $h = 2$ та одним вузлом $x_1 = 0$ – середня точка проміжку $[-1; 1]$.

Приклад. Побудувати квадратурну формулу найвищого алгебраїчного степеня точності з ваговим множником 1 для $x \in [-1; 1]$, $n = 2$.

Розв'язок. Оскільки $n = 2$, значить $m = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Квадратурну формулу будемо шукати у вигляді:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2).$$

Невідомі знайдемо із системи нелінійних рівнянь (21):

$$
\begin{aligned}
\alpha = 0:&\quad \int\limits_{-1}^{1} x^0 dx = c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0;\\
\alpha = 1:&\quad \int\limits_{-1}^{1} x^1 dx = c_1 x_1^1 + c_2 x_2^1;\\
\alpha = 2:&\quad \int\limits_{-1}^{1} x^2 dx = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2;\\
\alpha = 3:&\quad \int\limits_{-1}^{1} x^3 dx = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3;
\end{aligned}
\qquad
\begin{cases}
c_1 + c_2 = 2; & (I)\\
c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0; & (II)\\
c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \dfrac{2}{3}; & (III)\\
c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0; & (IV)
\end{cases}
$$

З $(I) \Rightarrow c_2 = 2 - c_1$ – підставляємо в (IV) та (II):

$$
\begin{cases}
c_1 x_1^3 + (2 - c_1) x_2^3 = 0;\\
c_1 x_1 + (2 - c_1) x_2 = 0;
\end{cases}
\quad (\div) \qquad \Rightarrow x_1 = -x_2
$$
– підставляємо в

(II): $c_1 x_1 - c_2 x_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$, отже $c_2 = 2 - c_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$ – підставляємо в (III):

$$1 \cdot x_1^2 + 1 \cdot x_1^2 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таким чином,

$$I \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Поліноми Лежандра. Розв'язання системи нелінійних рівнянь (21) – досить складна задача, для її уникнення можна використати систему ортогональних многочленів, яку покладемо в якості $\omega(x)$. Розглянемо систему многочленів Лежандра $\{L_n(x)\}, n = 0, 1, ...$ Вони є ортогональними на проміжку $[-1; 1]$ з $\rho(x) = 1$, визначаються за формулою:

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, ...,$$

але зручніше використовувати рекурентну формулу:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

Наведемо декілька перших поліномів Лежандра:

$L_0(x) = 1;$

$L_1(x) = x;$

$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$

$L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$

$L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$

$L_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$ і так далі.

Отже, за допомогою поліномів Лежандра можна побудувати квадратурну формулу найвищого алгебраїчного степеня точності у вигляді:

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k),$$

де x_k знаходяться, як нулі полінома Лежандра $L_n(x)$, а коефіцієнти для за формулою:

$$c_k = \frac{2}{(1-x_k^2)(L_n'(x_k))^2}. \tag{22}$$

Оцінка залишкового члена приймає вигляд:

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_{2n}2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3}. \tag{23}$$

Зауваження. Якщо інтеграл розглядається по проміжку $[a; b]$, то або сам інтеграл зводиться до проміжку $[-1; 1]$, або поліноми Лежандра розглядають на $[a; b]$.

Приклад. За допомогою квадратурної формули Гауса з ваговим множником $\rho(x) = 1$, $n = 2$, наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Оцінити похибку.

Розв'язок. Оскільки $\rho(x) = 1$, то використаємо ортогональні поліноми Лежандра, але зведемо інтеграл до проміжку $[-1; 1]$ заміною $x = \frac{t+1}{2}$, $dx = \frac{dt}{2}$, $t \in [-1; 1]$:

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-1}^1 \frac{2dt}{t^2+2t+5}.$$

Побудуємо квадратурну формулу за допомогою поліномів Лежандра. Невідомі вузли x_k, $k = \overline{1,2}$, знайдемо як корені рівняння $L_2(x) = 0$:

$$\frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Невідомі коефіцієнти знайдемо з формули (22):

$$c_1 = \frac{2}{(1-\frac{1}{3})(3\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1; \quad c_2 = \frac{2}{(1-\frac{1}{3})(3(-\frac{1}{\sqrt{3}}))^2} = 1.$$

$$I \approx f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}+5} + \frac{2}{\frac{1}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}+5} \approx 0,7869.$$

Похибку знайдемо з оцінки (23):

$$M_4 = \max_{x\in[-1;1]} \left| \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{IV} \right| = 24 = 4!$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_4 \cdot 2^5 \cdot (2!)^4}{5 \cdot (4!)^3} = \frac{2^3}{5 \cdot 3^2} \approx 0,1778.$$

Приклад. Побудувати квадратурну формулу найвищого алгебраїчного степеня точності для $\rho(x) = 1$, $x \in [0;1]$, $n = 2$, за допомогою ортогональних поліномів.

Розв'язок. Ортогональні поліноми з ваговим множником $\rho(x) = 1$ – це многочлени Лежандра, але вони визначені на проміжку $[-1;1]$. Побудуємо квадратурну формулу на проміжку $[0;1]$, використавши заміну: $t = 2x - 1$, $x = \dfrac{t+1}{2}$, $x \in [0;1]$, $t \in [-1;1]$.

Спочатку переведемо $L_2(t)$ на проміжок $[0;1]$:

$$L_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1); \quad L_2(x) = \frac{1}{2}\Big(3(2x-1)^2 - 1\Big) = 6x^2 - 6x + 1.$$

Знайдемо невідомі x_k, $k = \overline{1,2}$:

$$L_2(x) = 6x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}.$$

Для знаходження невідомих c_k формула (22) не підійде, оскільки вона відповідає іншому проміжку, тому скористаємось формулою (7):

$$c_1 = \int\limits_0^1 \frac{x - \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{3-\sqrt{3}}{6} - \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}} dx = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{3} + 3 - 6x}{2\sqrt{3}} dx = \frac{1}{2};$$

$$c_2 = \int\limits_0^1 \frac{x - \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}}{\dfrac{3+\sqrt{3}}{6} - \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}} dx = \frac{1}{2}.$$

Таким чином,

$$I \approx \frac{1}{2} f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right).$$

Поліноми Чебишова також часто використовуються при побудові квадратурних формул. Вони є ортогональними на проміжку $[-1; 1]$ з ваговим множником $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, для $n = 0, 1, ...,$ визначаються за формулою:

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2}, \qquad |x| \geqslant 1,$$

або за тригонометричною формулою:

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right), \quad |x| \leqslant 1, \tag{24}$$

але для знаходження поліномів Чебишова зручніше використовувати рекурентну формулу:

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Наведемо декілька перших поліномів:

$T_0(x) = 1;$

$T_1(x) = x;$

$T_2(x) = 2x^2 - 1;$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x;$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ і так далі.

Отже, за допомогою поліномів Чебишова можна побудувати квадратурну формулу вигляду:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k),$$

де x_k знаходяться як нулі полінома Чебишова $T_n(x)$, при чому формулу для них можна вивести в явному вигляді з (24):

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0;$$

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \tag{25}$$

а невідомі коефіцієнти знаходяться за формулою:

$$c_k = \int\limits_{-1}^{1} \frac{T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}(x-x_k)T_n'(x_k)} = \frac{\pi}{n}. \tag{26}$$

Оцінка залишкового члена приймає вигляд:

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_{2n}\pi}{2^{2n-1}(2n)!}.$$

Зауваження. Поліном Чебишова з проміжку $[-1;1]$ на довільний проміжок $[a;b]$ можна перевести заміною змінної:

$$T_n^{[a;b]}(x) = T_n^{[-1;1]}\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right),$$

а знайти корені многочлена $T_n^{[a;b]}$:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k=\overline{1,n}.$$

Поліноми Чебишова та Лежандра найбільш поширені, але не єдині, існують й інші системи ортогональних многочленів, які можна використовувати для наближеного інтегрування, деякі з них будуть наведені пізніше.

Приклад. За допомогою квадратурної формули Гауса з ваговим множником $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $n=2$, наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$.

Розв'язок. Спочатку зведемо інтеграл до проміжку $[-1;1]$ заміною $x = \dfrac{t+1}{2}$, $\quad dx = \dfrac{dt}{2}$, $\quad t\in[-1;1]$:

$$I = \int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}dx = \int\limits_{-1}^1 \sqrt{\frac{t+1}{2} - \left(\frac{t+1}{2}\right)^2}\frac{dt}{2} =$$

$$= \int\limits_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{4}dt = \int\limits_{-1}^1 \frac{1-t^2}{4\sqrt{1-t^2}}dt \approx c_1 f(t_1) + c_2 f(t_2).$$

Отримали ваговий множник $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на проміжку інтегрування $[-1;1]$, значить можна використати поліноми Чебишова, при чому функція має вигляд:

$$f(t) = \frac{1-t^2}{4}.$$

Знайдемо невідомі за формулами (25), (26):

$$t_1 = \cos\frac{(2\cdot 1-1)\pi}{2\cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad t_2 = \cos\frac{(2\cdot 2-1)\pi}{2\cdot 2} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$c_1 = c_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином,

$$I \approx \frac{\pi}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2}}{4} + \frac{1-\frac{1}{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

Приклад. За допомогою квадратурної формули Гауса з ваговим множником $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $n=3$, знайти наближене значення $I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$.

Розв'язок. Оскільки в початковому інтегралі в явному вигляді вагового множника немає, спробуємо спочатку застосувати інтегрування частинами:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = -\int_{-1}^{1} \arcsin x \; d\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= -\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Bigg|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(\arcsin x) =$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Отримали інтеграл по проміжку $[-1;1]$ з ваговим множником $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, отже можна застосовувати поліноми Чебишова. Знайдемо невідомі вузли та коефіцієнти за формулами (25), (26) для $n=3$:

$$x_1 = \cos\frac{(2\cdot 1-1)\pi}{2\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \cos\frac{(2\cdot 2-1)\pi}{2\cdot 3} = 0,$$

$$x_3 = \cos\frac{(2\cdot 3-1)\pi}{2\cdot 3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad c_1 = c_2 = c_3 = \frac{\pi}{3}.$$

Таким чином,

$$I \approx -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3) =$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{3}{4}}} + 1\right) \approx 0,409.$$

6. Інтегрування за допомогою степеневих рядів

Якщо підінтегральна функція $f(x)$ розкладається в степеневий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, збіжний на проміжку інтегрування, тоді інтеграл можна обчислити за допомогою часткової суми ряду:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}).$$

Похибка отриманого результату складається з таких складових:

1) з похибки заміни ряду частковою сумою (вона дорівнює залишку ряду);

2) з похибки обчислень, яка виникає із заокруглень при обчисленні суми.

Для ряду, в якому відбувається чергування знаків та абсолютна величина членів монотонно зменшується, абсолютна величина залишку ряду не перевищує абсолютну величину першого з членів ряду, який відкидається. Для оцінки залишку ряду в інших випадках використовується мажорування такими рядами, залишки яких легко оцінюються.

Приклад. За допомогою розкладу в степеневий ряд обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{\pi/4} \sin x^2 dx$ з точністю 10^{-4}.

Розв'язок. Розкладемо функцію в степеневий ряд:

$\sin x^2 = x^2 - \dfrac{x^6}{3!} + \dfrac{x^{10}}{5!} - \dfrac{x^{14}}{7!} + ...$

Цей ряд збігається для довільного x, проінтегруємо його

$$I = \int\limits_0^{\pi/4} \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + ... \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} + ... \right) \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi^3}{3 \cdot 4^3} - \frac{\pi^7}{7 \cdot 3! \cdot 4^7} + \frac{\pi^{11}}{11 \cdot 5! \cdot 4^{11}} - \frac{\pi^{15}}{15 \cdot 7! \cdot 4^{15}} + ...$$

Оскільки знаки ряду чергуються, то достатньо взяти таку кількість членів, щоб перший член, який відкидається, був меншим за 10^{-4}. В нашому випадку

$$\frac{\pi^{11}}{11 \cdot 5! \cdot 4^{11}} \approx 0,5 \cdot 10^{-4},$$

тому обчислимо суму перших двох членів, при цьому візьмемо додатковий розряд для похибки обчислень, а результат заокруглимо.

$$I \approx \frac{\pi^3}{3 \cdot 4^3} - \frac{\pi^7}{7 \cdot 3! \cdot 4^7} \approx 0,16149 - 0,00439 = 0,1571.$$

Приклад. За допомогою розкладу в степеневий ряд обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1 - x^5}$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язок. Розкладемо функцію в степеневий ряд:

$$\frac{1}{1 - x^5} = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + ... + x^{5n-5} + ...$$

На проміжку $[0; 0,5]$ ряд є збіжним, проінтегруємо його:

$$I = \int\limits_0^{0,5} (1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + ... + x^{5n-5} + ...)dx =$$
$$= (x + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{16}}{16} + ... + \frac{x^{5n-4}}{5n-4} + ...)\Big|_0^{0,5} =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^6} + \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{1}{16 \cdot 2^{16}} + ... + \frac{1}{(5n-4)2^{5n-4}} + ...$$

Оскільки

$$\frac{1}{11 \cdot 2^{11}} \approx 0,4 \cdot 10^{-4},$$

спробуємо інтеграл наблизити сумою перших двох членів, при цьому перевіримо, чи задана похибка менша суми решти членів, які відкидаються.

$$|R(f)| = \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{1}{16 \cdot 2^{16}} + ... + \frac{1}{(5n-4)2^{5n-4}} + ... \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{1}{11 \cdot 2^{16}} + ... + \frac{1}{11 \cdot 2^{5n-4}} + ... = \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^5}} =$$
$$= \frac{2^5}{11 \cdot 2^{11} \cdot 31} \approx 0,5 \cdot 10^{-4} < \varepsilon$$

Отримали оцінку на основі суми нескінченної геометричної прогресії, вона менша заданої точності ε, отже

$$I \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 2^6} \approx 0,50260.$$

7. Обчислення невласних інтегралів

Розглянемо підходи до наближеного інтегрування, коли
1) межі інтегрування є нескінченними – невласні інтеграли I роду;
2) функція необмежена в околі особливих точок – невласні інтеграли II роду.

Обчислення невласних інтегралів II роду.

Мультиплікативний метод полягає в представленні підінтегральної функції у вигляді добутку функцій, який легко інтегрується:

$$f(x) = \rho(x)\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ – обмежена; $\rho(x)$ – додатна, інтегрована на $[a;b]$, найчастіше має вигляд вагового множника.

Приклад. Знайти наближене значення $I = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Розв'язок. I – невласний інтеграл II роду: $f(-1) = f(1) = +\infty$.

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx,$$

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ – ваговий множник поліномів Чебишова, межі інтегрування співпадають з проміжком, на якому поліноми є ортогональними. Умови на точність немає, візьмемо $n = 2$.

Вузли знайдемо як нулі полінома Чебишова $T_2(x)$:

$$2x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Коефіцієнти знайдемо за формулою (26):

$$c_1 = c_2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$I \approx \frac{\pi}{2}\left(f(\frac{1}{\sqrt{2}}) + f(-\frac{1}{\sqrt{2}})\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}\right) = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 2,565.$$

Адитивний метод полягає в розбитті інтеграла на суму, в якій один інтеграл знаходиться аналітично, а другий – чисельно:

$$f(x) = \psi(x) + \varphi(x),$$

де $\psi(x)$ – інтегрована аналітично; $\varphi(x)$ – обмежена, інтегрована чисельно.

Приклад. Знайти наближене значення $I = \int\limits_0^1 \ln\sin x dx$.
Розв'язок. I – невласний інтеграл II роду: $f(0) = -\infty$.

$$I = \int\limits_0^1 \ln\sin x dx = \int\limits_0^1 (\ln x + \ln\sin x - \ln x)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \ln x dx + \int\limits_0^1 \ln\frac{\sin x}{x}dx = I_1 + I_2.$$

Перший інтеграл знайдемо аналітично частинами: $I_1 = -1$, а другий – методом трапецій (12) з кроком $h = 0,2$, врахуємо, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \ln 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 0.$$

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x_k)$	0	-0,0067	-0,0268	-0,0607	-0,1090	-0,1726

$$I_2 = 0,2\left(\frac{f(0)}{2} + f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8) + \frac{f(1)}{2}\right) \approx$$

$$\approx -0,058;$$

$$I = I_1 + I_2 \approx -1 - 0,058 = -1,058.$$

Метод обрізання границь також використовує розбиття інтеграла на суму інтегралів. Наприклад, для обчислення з точністю ε невласного інтеграла II роду з особливою точкою c можна представити його у вигляді такої суми:

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)dx + \int\limits_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)dx. \quad (27)$$

При цьому величини δ_1, δ_2 вибирають, наприклад, щоб виконувалась умова:

$$\left|\int\limits_{c-\delta_1}^{c+\delta_2} f(x)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тоді інтеграли $\int\limits_a^{c-\delta_1} f(x)dx$, $\int\limits_{c+\delta_2}^{b} f(x)dx$ наближено обчислюються чисельними методами також з точністю $\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Зауваження. Для невласних інтегралів II роду з особливими точками c_1, c_2,..., c_m розв'язок будується аналогічно (27):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1-\delta_1^1} f(x)dx + \int_{c_1-\delta_1^1}^{c_1+\delta_1^2} f(x)dx + \int_{c_1+\delta_1^2}^{c_2-\delta_2^1} f(x)dx +$$

$$+ \int_{c_2-\delta_2^1}^{c_2+\delta_2^2} f(x)dx + ... + \int_{c_m-\delta_m^1}^{c_m+\delta_m^2} f(x)dx + \int_{c_m+\delta_m^2}^{b} f(x)dx,$$

при цьому кожен інтеграл обчислюється з точністю $\dfrac{\varepsilon}{2m+1}$.

Приклад. Наближено знайти інтеграл $\int\limits_{0,3}^{2} \dfrac{e^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}dx$ з точністю $\varepsilon = 0,05$ методом обрізання границь.

Розв'язок. Маємо невласний інтеграл II роду: $f(2) = +\infty$.

$$I = \int_{0,3}^{2} \frac{e^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}dx =$$

$$= \int_{0,3}^{2-\delta} \frac{e^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}dx + \int_{2-\delta}^{2} \frac{e^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}dx =$$

$$= \int_{0,3}^{2-\delta} \frac{e^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}dx + \int_{2-\delta}^{2} \frac{e^{-x}}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)}}dx = I_1 + I_2.$$

Оцінимо інтеграл I_2:

$$I_2 = \int\limits_{2-\delta}^{2} \frac{e^{-x}}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)}}dx \leqslant \frac{e^{-(2-\delta)}}{\sqrt[4]{1+(2-\delta)}} \int\limits_{2-\delta}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{2-x}} =$$

$$= \frac{e^{-(2-\delta)}}{\sqrt[4]{1+(2-\delta)}} \left(-\frac{4}{3}\right)(2-x)^{\frac{3}{4}}\Big|_{2-\delta}^{2} = \frac{4\delta^{\frac{3}{4}} e^{\delta-2}}{3\sqrt[4]{3-\delta}}.$$

Для зручності можна покласти $\delta = 0,1$, тоді

$$I_2 \leqslant \frac{4 \cdot 0,1^{\frac{3}{4}} e^{0,1-2}}{3\sqrt[4]{3-0,1}} \approx 0,027 = \varepsilon_2,$$

щоб зберегти при обчисленні I точність ε,

$$I_1 = \int\limits_{0,3}^{0,9} \frac{e^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}dx$$

наближено обчислимо з точністю ε_1:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2 = 0,05 - 0,027 = 0,023.$$

Для цього використаємо формулу Сімпсона (14) із застосуванням принципа Рунге (16) та значення функції в точках:

x_k	0,3	0,7	1,1	1,5	1,9
$f(x_k)$	0,608	0,407	0,284	0,211	0,204

$$n = 1, \quad h = \frac{1,9-0,3}{1} = 1,6;$$

$$I_{1,h} = \frac{1,6}{6}(f(0,3) + 4f(1,1) + f(1,9)) \approx 0,519;$$

$$n = 2, \quad \frac{h}{2} = \frac{1,6}{2} = 0,8;$$

$$I_{1,\frac{h}{2}} = \frac{0,8}{6}(f(0,3)+4f(0,7)+2f(1,1)+4f(1,5)+f(1,9)) \approx 0,514$$

$$|I - I_{1,\frac{h}{2}}| \approx \frac{|0,514 - 0,519|}{2^4 - 1} \approx 0,0003 < \varepsilon_1.$$

Отже, $I_1 \approx 0,514$, таким чином $I \approx 0,514 + 0,027 = 0,541$.

Метод виділення особливостей (Канторовича) знов використовує представлення інтеграла у вигляді суми:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + \int_a^b (f(x) - g(x))dx,$$

де функція $g(x)$ має таку ж особливість, як $f(x)$; функція $(f(x) - g(x))$ – достатньо гладка: $(f(x) - g(x)) \in C^{(m)}_{[a;b]}$, $m \geqslant 1$.

Розглянемо метод для інтегралів вигляду

$$I = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^\alpha} dx$$

з особливою точкою $x_0 \in [a;b]$, $\alpha \in (0;1)$.

Функцію $\varphi(x)$ розкладають в ряд Тейлора:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \Psi(x) = P_m(x) + \Psi(x) \Rightarrow$$

$$\Psi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k;$$

$$I = \int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^\alpha}dx = \int\limits_a^b \frac{P_m(x)+\Psi(x)}{(x-x_0)^\alpha}dx =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{1}{(x-x_0)^\alpha}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \Psi(x)\right)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}\int\limits_a^b (x-x_0)^{k-\alpha}dx + \int\limits_a^b \frac{\Psi(x)}{(x-x_0)^\alpha}dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!(k+1-\alpha)}\left((b-x_0)^{k+1-\alpha} - (a-x_0)^{k+1-\alpha}\right) +$$

$$+ \int\limits_a^b \frac{\Psi(x)}{(x-x_0)^\alpha}dx = I_1 + I_2.$$

Отже, інтеграл I_1 обчислюється аналітично, а інтеграл I_2 – наближено, наприклад, за допомогою квадратурних формул.

Приклад. Знайти наближене значення $I = \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ методом Канторовича.

Розв'язок. I – невласний інтеграл II роду: $f(0) = +\infty$.

$$I = \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\limits_0^{0,5} \frac{(1-x)^{-0,5}}{(x-0)^{0,5}}dx \qquad \Rightarrow$$

$$\alpha = 0,5, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Розкладемо $\varphi(x)$ в ряд Тейлора до x^4:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = P_4(x) + \Psi(x);$$

$$P_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4;$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 - \frac{35}{128}x^4.$$

$$I = \int\limits_0^{0,5} \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}}dx + \int\limits_0^{0,5} \frac{\Psi(x)}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= \int\limits_0^{0,5} \frac{1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4}{\sqrt{x}}dx +$$

$$+ \int\limits_0^{0,5} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 - \frac{35}{128}x^4}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= \int\limits_0^{0,5} \Big(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{16}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{128}x^{\frac{7}{2}}\Big)dx +$$

$$+ \int\limits_0^{0,5} \Big(\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} - x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{35}{128}x^{\frac{7}{2}}\Big)dx =$$

$$= I_1 + I_2;$$

Інтеграл I_1 проінтегруємо аналітично, I_2 наближено обчислимо методом Сімпсона за формулою (15) з кроком $h = 0,1$, врахуємо, що

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} - x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{35}{128}x^{\frac{7}{2}}\Big) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x_0) = 0.$$

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x_k)$	0	0	0,0002	0,0015	0,0063	0,0202

$$I_1 = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{0,5} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{0,5} + \frac{3}{20}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{0,5} + \frac{5}{56}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^{0,5} + \frac{35}{576}x^{\frac{9}{2}}\Big|_0^{0,5} = 1,5692;$$

$$I_2 = \frac{0,1}{3}\Big(f(0)+4f(0,1)+2f(0,2)+4f(0,3)+2f(0,4)+f(0,5)\Big) \approx$$
$$\approx 0,0013;$$

$$I = I_1 + I_2 \approx 1,5692 + 0,0013 = 1,5705.$$

Обчислення невласних інтегралів I роду.

Заміна змінної інтегрування. В цьому випадку вводиться така змінна, щоб межі інтегрування стали скінченними. Після цього застосовуються вже відомі чисельні методи.

Розглянемо можливі варіанти заміни на прикладі невласного інтеграла I роду вигляду $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$:

1) якщо $a > 0$, тоді $t = \dfrac{a}{x}$; $\quad x = \dfrac{a}{t}$; $\quad dx = -\dfrac{a}{t^2}dt$;

$$I = \int\limits_0^1 f\left(\frac{a}{t}\right)\frac{a}{t^2}dt; \tag{28}$$

2) якщо $a = 0$, тоді $t = e^{-x}$; $\quad x = -\ln t$; $\quad dx = -\frac{1}{t}dt$;

$$I = \int\limits_0^1 \frac{f(-\ln t)}{t}dt; \tag{29}$$

3) якщо $a < 0$, тоді

$$I = \int\limits_a^0 f(x)dx + \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx,$$

де перший інтеграл обчислюється чисельно, а до другого – застосовується заміна змінної за формулою (29).

Приклад. Знайти наближене значення $I = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.
Розв'язок. Застосуємо заміну змінної (28), де $a = 1$:

$$I = \int\limits_0^1 f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2(1+\frac{1}{x})\sqrt{\frac{1}{x}}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

Розв'яжемо інтеграл за допомогою методу Канторовича: особлива точка $x_0 = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{1}{1+x}$ розкладемо до x^5:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \Psi(x) = P_5 + \Psi(x);$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5;$$

$$I = \int\limits_0^1 \frac{P_5(x)}{\sqrt{x}}dx + \int\limits_0^1 \frac{\Psi(x)}{\sqrt{x}}dx = \int\limits_0^1 \frac{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5}{\sqrt{x}}dx +$$

$$+ \int\limits_0^1 \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{2}} - x^{\frac{9}{2}})dx +$$

$$+ \int\limits_0^1 \Big(\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} - x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{7}{2}} + x^{\frac{9}{2}}\Big)dx = I_1 + I_2.$$

Інтеграл I_1 проінтегруємо аналітично, I_2 наближено обчислимо методом трапецій за формулою (12) з кроком $h = 0,2$:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x_k)$	0	0,0001	0,0046	0,0376	0,1628	0,5

$$I_1 = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 - \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1 + \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}\Big|_0^1 - \frac{2}{11}x^{\frac{11}{2}}\Big|_0^1 \approx 1,4880;$$

$$I_2 = 0,2\Big(\frac{f(0)}{2} + f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8) + \frac{f(1)}{2}\Big) \approx 0,091$$

$$I = I_1 + I_2 = 1,4880 + 0,0910 = 1,579.$$

Мультиплікативний метод, так саме як і для невласних інтегралів II роду, полягає в розбитті підінтегрованої функції на добуток:

$$f(x) = \rho(x)\varphi(x),$$

де $\varphi(x)$ – обмежена; $\rho(x)$ – додатна, інтегрована, приймає вигляд вагового множника.

Розглянемо ортогональні поліноми, які найчастіше використовують на нескінченних проміжках.

Поліноми Лагерра. Система многочленів Лагерра є ортогональною на проміжку $[0;+\infty)$ з ваговим множником $\rho(x) = x^{\alpha}e^{-x}$, $\alpha > -1$ та визначається за формулою:

$$L_n^{\alpha}(x) = x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x})$$

або за більш зручною для обчислень рекурентною формулою:

$$L_{n+1}^{\alpha}(x) = (2n+\alpha+1-x)L_n^{\alpha}(x) - n(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x).$$

Наведемо декілька перших поліномів Лагерра:

$L_0^{\alpha}(x) = 1;$

$L_1^{\alpha}(x) = -x+\alpha+1;$

$L_2^{\alpha}(x) = x^2 - 2(\alpha+2)x + (\alpha+1)(\alpha+2);$

$L_3^{\alpha}(x) = -x^3 + 3(\alpha+3)x^2 - 3(\alpha+2)(\alpha+3)x + (\alpha+1)\times$

$\times(\alpha+2)(\alpha+3);$

$L_4^{\alpha}(x) = x^4 - 4(\alpha+4)x^3 + 6(\alpha+3)(\alpha+4)x^2 - 4(\alpha+2)\times$

$\times(\alpha+3)(\alpha+4)x + (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4);$

$L_5^{\alpha}(x) = -x^5 + 5(\alpha+5)x^4 - 10(\alpha+4)(\alpha+5)x^3 + 10(\alpha+3)\times$

$\times(\alpha+4)(\alpha+5)x^2 - 5(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)x+$

$+(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)$ і так далі.

Отже, за допомогою поліномів Лагерра можна побудувати квадратурну формулу вигляду:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha}f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k),$$

де x_k знаходяться як нулі полінома $L_n^{\alpha}(x)$, а невідомі коефіцієнти – за формулою:

$$c_k = \frac{n!\Gamma(\alpha+n+1)}{x_k\Big(L_n'^{\alpha}(x_k)\Big)^2}. \tag{30}$$

Оцінка залишкового члена приймає вигляд:

$$|R(f)| \leqslant M_{2n}\frac{n!\Gamma(\alpha+n+1)}{(2n)!}.$$

Приклад. Знайти наближене значення інтеграла за формулою Гауса для $n = 2$: $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(e^x + e^{-x} - 1)}dx$.

Розв'язок. На проміжку $[0; +\infty)$ визначені поліноми Лагерра з $\rho = x^{\alpha}e^{-x}$, виділимо його в інтегралі:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(e^x + e^{-x} - 1)}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}x}{1 + e^{-2x} - e^{-x}}dx.$$

Отже, $\alpha = 1$, $\rho(x) = xe^{-x}$. Знайдемо x_k як нулі полінома $L_2^1(x) = x^2 - 2(1+2)x + (1+1)(1+2) = x^2 - 6x + 6$:

$$L_2^1(x) = x^2 - 6x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 1,268, \quad x_2 \approx 4,732.$$

Знайдемо невідомі c_k за формулою (30):

$$c_1 = \frac{2!\Gamma(1+2+1)}{1,268(2\cdot 1,268-6)^2} = \frac{2\cdot 2\cdot 3}{15,215} \approx 0,789;$$

$$c_2 = \frac{2!\Gamma(1+2+1)}{4,732(2\cdot 4,732-6)^2} = \frac{2\cdot 2\cdot 3}{56,780} \approx 0,211.$$

Таким чином,

$$I \approx 0,789\cdot f(1,268) + 0,211\cdot f(4,732) =$$

$$= \frac{0,789}{1+e^{-2\cdot 1,268}-e^{-1,268}} + \frac{0,211}{1+e^{-2\cdot 4,732}-e^{-4,732}} \approx 1,202.$$

Поліноми Ерміта складають ортогональну систему на $(-\infty;+\infty)$ з $\rho(x) = e^{-x^2}$ та визначаються за формулою:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2},$$

або за рекурентною формулою:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

Наведемо декілька перших поліномів Ерміта:

$H_0(x) = 1;$

$H_1(x) = 2x;$

$H_2(x) = 4x^2 - 2;$

$H_3(x) = 8x^3 - 12x;$

$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12;$

$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$ і так далі.

Отже, за допомогою поліномів Ерміта можна побудувати квадратурну формулу:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k),$$

де x_k знаходяться як нулі полінома $H_n(x)$, а коефіцієнти:

$$c_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{(H_n'(x_k))^2}. \qquad (31)$$

Оцінка залишкового члена приймає вигляд:

$$|R(f)| \leqslant M_{2n} \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!}. \qquad (32)$$

Приклад. Наближено обчислити $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x dx$ за допомогою формули Гауса для $n = 3$ та оцінити похибку.

Розв'язок. На проміжку $(-\infty; +\infty)$ визначені поліноми Ерміта з $\rho = e^{-x^2}$. Знайдемо x_k як нулі полінома Ерміта $H_3(x)$.

$$H_3 = 8x^3 - 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{1,5},\ x_3 = -\sqrt{1,5}.$$

Знайдемо невідомі c_k за формулою (31):

$$c_1 = \frac{2^{3+1} 3! \sqrt{\pi}}{(24 \cdot 0^2 - 12)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\pi} \approx 1,1816;$$

$$c_2 = c_3 = \frac{2^{3+1} 3! \sqrt{\pi}}{(24 \cdot 1,5 - 12)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{6} \approx 0,2954.$$

$$I \approx 1,1816 \cdot f(0) + 0,2954 \cdot f(-\sqrt{1,5}) + 0,2954 \cdot f(\sqrt{1,5}) =$$

$$= 1,1816 \cos 0 + 0,2954(\cos\sqrt{1,5} + \cos(-\sqrt{1,5})) \approx 1,3820.$$

Похибку знайдемо за формулою (32):

$$M_6 = \max_{x\in(-\infty;+\infty)} |\cos^{(VI)} x| = \max_{x\in(-\infty;+\infty)} |-\cos x| = 1;$$

$$|R(f)| \leqslant 1\frac{3!\sqrt{\pi}}{2^3 6!} = 1 \approx 0,0018.$$

Метод обрізання границь. Невласний інтеграл I роду вигляду $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ можна представити у вигляді суми:

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{A} f(x)dx + \int\limits_A^{+\infty} f(x)dx \qquad (33)$$

Величину A, наприклад, вибирають таким чином, щоб виконувалась умова

$$\left|\int\limits_A^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

тоді інтеграл $\int\limits_a^{A} f(x)dx$ також обчислюють з точністю $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Зауваження. Для невласних інтегралів I роду вигляду $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ розв'язок будується аналогічно (33):

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{B} f(x)dx + \int\limits_B^{b} f(x)dx,$$

де кожен інтеграл обчислюється, наприклад, з точністю $\dfrac{\varepsilon}{2}$;

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{A} f(x)dx + \int\limits_{A}^{B} f(x)dx + \int\limits_{B}^{+\infty} f(x)dx,$$

де кожен інтеграл обчислюється, наприклад, з точністю $\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Приклад. Знайти наближене значення $I = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ з точністю $\varepsilon = 0,05$ за допомогою методу обрізання границь.

Розв'язок. Розкладемо інтеграл на суму інтегралів:

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int\limits_{0}^{A} e^{-x^2}dx + \int\limits_{A}^{+\infty} e^{-x^2}dx = I_1 + I_2.$$

Для обмеження I_2 зверху використаємо нерівність:

$$(x-A)^2 \geqslant 0; \quad x^2 - 2Ax + A^2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 \leqslant A^2 - 2Ax;$$

таким чином

$$I_2 = \int\limits_{A}^{+\infty} e^{-x^2}dx \leqslant \int\limits_{A}^{+\infty} e^{(A^2-2Ax)}dx = e^{A^2}\int\limits_{A}^{+\infty} e^{-2Ax}dx =$$

$$= -\frac{e^{A^2}}{2A}e^{-2Ax}\Big|_{A}^{+\infty} = \frac{1}{2Ae^{A^2}}.$$

Знайдемо A, при якому $I_2 \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} = 0,025$. Якщо покласти $A = 1$, тоді

$$I_2 \leqslant \frac{1}{2e} \approx 0,18 > \frac{\varepsilon}{2},$$

похибка велика, покладемо $A = 2$, тоді

$$I_2 \leqslant \frac{1}{2 \cdot 2e^{2^2}} \approx 0,0046 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Інтеграл I_1 при $A = 2$ наближено обчислимо з точністю $\dfrac{\varepsilon}{2}$ методом середніх прямокутників (9), для цього використаємо оцінку залишкових членів (10):

$$M_2 = \max_{x \in [0;2]} \left| \left(e^{-x^2} \right)'' \right| = 2;$$

$$h \geqslant \sqrt{\frac{24\varepsilon}{M_2(b-a)}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 0,025}{2 \cdot 2}} \approx 0,39.$$

Для зручності покладемо $h = 0,5$:

k	0,5	1,5	2,5	3,5
x_k	0,25	0,75	1,25	1,75
$f(x_k)$	0,9394	0,5698	0,2096	0,0468

$$I_1 \approx 0,5\Big(f(0,25) + f(0,75) + f(1,25) + f(1,75) \Big) \approx 0,8828,$$

отже,

$$I \approx 0,8828 + 0,0046 = 0,8874.$$

8. Задачі для самостійного розв'язання

1. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу з $\rho(x) = 1$ за вузлами $a; (2a + b)/3; (a + 2b)/3; b$. Визначити алгебраїчний степінь точності та оцінку залишкового члена отриманої формули.

2. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу на проміжку $[0;1]$ з ваговим множником $\rho(x) = \sqrt{x}$ за вузлами 0 та 1. Визначити оцінку залишкового члена отриманої формули.

3. Побудувати квадратурну формулу інтерполяційного типу на проміжку $[0;1]$ з ваговим множником $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ за вузлами 0, $\dfrac{1}{2}$, 1. Визначити оцінку залишкового члена отриманої формули.

4. Визначити алгебраїчний степінь точності квадратурної формули $I \approx \dfrac{\pi}{3}\Big(f(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) + f(0) + f(\dfrac{\sqrt{3}}{2})\Big)$, визначеної на проміжку $[-1;1]$ з ваговим множником $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Знайти наближене значення числа π з трьома правильними значущими цифрами за його інтегральним представленням $\pi = \int\limits_0^1 \dfrac{4}{1+x^2}dx$ за допомогою квадратурних формул а) лівих прямокутників; б) правих прямокутників; в) середніх прямокутників. Яку кількість значень підінтегральної функції необхідно використати в кожному випадку?

6. При $n = 10$ за формулою трапецій наближено обчислити значення сталої Каталана $G = \int\limits_0^1 \dfrac{\arctan x}{x}dx$.

7. Наближено обчислити повний еліптичний інтеграл другого роду $E\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 x}dx$ з точністю 0,05 за формулою середніх прямокутників.

8. На скільки частин необхідно розбити відрізок $[0;1]$, щоб обчислити значення функції Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ при

$x = 1$ з похибкою $\varepsilon \leqslant 10^{-6}$ а) за формулою середніх прямокутників; б) за формлою Сімпсона ?

9. Скільки значень підінтегральної функції необхідно знати, щоб наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ за формулою трапецій з точністю $\varepsilon = 0,01$.

10. За формулою Сімпсона обчислити функцію Лобачевського $F(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos t dt$ для $x = \pi/2$ з точністю $\varepsilon = 0,001$.

11. Побудувати таблиці функції Лобачевського (задача 10) з 4 правильними значущими цифрами на проміжку $[0; \pi/2]$ з кроком $\pi/36$, побудувати графік функції.

12. Наближено обчислити довжину дуги еліпса за формулою $L = 4 \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$ за допомогою таблиці Ромберга, використавши 4 кроки.

13. Ймовірність, що значення нормально розподіленої випадкової величини буде менше заданого числа x задається формулою $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Наближено обчислити значення $p(0,5)$, $p(1)$, $p(5)$ за допомогою таблиці Ромберга, використавши три кроки.

14. Побудувати квадратурну формулу Гауса для функції $f(x)$, $x \in [-1; 1]$ з ваговим множником $\rho = 1$ для $n = 3$.

15. Обчислити ділогарифм Ейлера $F(x) = -\int\limits_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ для $x = 1$ за формулою Гауса.

16. Побудувати таблиці ділогарифмів Ейлера (задача 15) з 6 правильними значущими цифрами на проміжку $[0; 1]$ з кроком $0,01$, побудувати графік функції.

17. Для $x = 0,5$ за формулою Гауса обчислити функцію інтегрального логарифма $F(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}$.

18. Побудувати таблиці інтегрального логарифма (задача 17) з 6 правильними значущими цифрами на проміжку $[0; 0,5]$ з кроком $0,01$, побудувати графік функції.

19. За допомогою розкладу в степеневий ряд обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

20. За допомогою розкладу в степеневий ряд обчислити інтеграл $I = \int\limits_{0,1}^1 \frac{\sin x}{x} dx$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

21. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,5$.

22. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ методом Канторовича.

23. Використавши заміну змінної інтегрування, наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x} dx$ за формулою середніх прямокутників з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.

25. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{x^2-x}}$ за формулою Гауса для $n = 3$. Оцінити похибку.

26. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_2^\infty \frac{dx}{1+x^3} dx$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,005$.

Список використаної літератури

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 600 с.

2. Буслов В.А., Яковлев С.Л. Численные методы. 1. Исследование функций. — Санкт-Петербург: С-Петерб. гос. ун-т, 2001. — 59 с.

3. Вержбицкий В.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 248 с.

4. Волков Е.А. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 248 с.

5. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень. — К.: Вища школа, 1995. — 367 с.

6. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. — 664 с.

7. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. Учебное пособие. — М.: Высшая школа, 2000. — 190 с.

8. Калиткин Н.Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. — 512 с.

9. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2008. — 480 с.

10. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. — М.: Наука, 1972. — 368с.

11. Методические указания и учебные задания к практикуму по численному интегрированию и методам решения задачи Коши для студентов третьего курса факультета кибернетики / специальность 0647 – прикладная математика / Макаров В.Л., Войцеховский С.А., Гаврилюк И.П. и др. — Киев: КГУ, 1984. — 69 с.

12. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. — Киев: Наукова думка, 1987. — 288 с.

13. Самарский А.А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1987. — 272 с.

14. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Самарская Е.А. Задачи и упражнения по численным методам: учебное пособие. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 208 с.

15. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

16. Сборник задач по методам вычислений / Азаров А.И., Басик В.А., Кремень Ю.А. и др. — Минск: Изд-во БГУ, 1983. — 287 с.

17. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. — М.: Физматлит, 2003. — 304 с.

18. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. — М.: Физматлит, 2004. — 400 с.

19. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980. — 280 с.