Інтерполяційний поліном Ньютона для рівновідалених вузлів

Визначення. Вузли інтерполяції називаються рівновідаленими, якщо $x_i - x_{i-1} = h = const.$

$$x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0, n}$$

Нехай $f(x_i) = y_i$.

Визначення. Величина $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ називаеться скінченою різницею першого порядку.

Величина $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ називаеться скінченою різницею другого порядку.

Величина $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ називаеться скінченою різницею k-го порядку.

Має місце рівність

$$\Delta^k y_i = k! h^k f(x_i; \ldots; x_k)$$

$$f(x_i; \ldots; x_k) = \frac{\Delta^k y_i}{k! h^k}$$

Підставимо цю формулу в інтерполяційний поліном Ньютона:

$$L_n(x) = P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h^1}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

Покладемо $x = x_0 + th,\ t = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тоді

$$x - x_0 = x_0 + th - x_0 = th,$$

$$x_1 = x_0 + h$$

$$x - x_1 = x_0 + th - x_0 - h = h(t-1)$$

$$x_2 = x_0 + 2h$$

$$x - x_2 = x_0 + th - x_0 - 2h = h(t-2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = x_0 + nh$$

$$x - x_n = x_0 + th - x_0 - nh = h(t-n)$$

Тоді інтерполяційний поліном Ньютона набуває вигляду:

$$L_n(x) = P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h^1}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) =$$

$$= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h^1}th + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}th(t-1)h + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}th(t-1)h\cdots(t-n+1)h =$$

$$P_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1)\cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\cdots(t-n+1).$$

Похибка інтерполяцій набуває вигляду, за умови що

$$f(x) \in C^{(n+1)}[a,b]$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)$$

Для інтерполяційної формули Ньютона назад за допомогою аналогічних перетворень дістанемо:

$$P_n(t) = y_0 + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}t + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}t(t+1)\cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t+1)\cdots(t+n-1).$$

$$R_n(t) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t(t+1)(t+2)\cdots(t+n)$$

Для побудови інтерполяційноного полінома Ньютона для рівновіддалених вузлів спочатку знаходимо таблицю скінчених різниць:

$$\begin{array}{llllll l}
y_0 & \Delta y_0 & \Delta^2 y_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta^n y_0 \\
y_1 & \Delta y_1 & \Delta^2 y_1 & \cdots & \cdots & \Delta^{n-1} y_1 & \\
y_2 & \Delta y_2 & \Delta^2 y_2 & \cdots & \Delta^{n-2} y_{n-2} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\
\cdots & \Delta y_{n-1} & & & & & \\
y_n & & & & & &
\end{array}$$

та використовуємо відповідну інтерполяційну формулу Ньютона.

<u>Оптимальний вибір вузлів</u>

Нехай $f(x) \in C^{(n+1)}[a,b]$.

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)|$$

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$\max_{x\in[a;b]} |\omega(x)| \to \min$$

Серед усіх поліномів степеня $n+1$ із старшим крефіцієнтом одиниця найменш відхиляється від нуля на промiжку $[a,b]$ поліном $\overline{T}^{[a;b]}_{n+1}(x)$. Має місце рівність:

$$||\overline{T}^{[a;b]}_{n+1}(x)|| = (b-a)^{n+1}\cdot 2^{1-2(n+1)}.$$

Отже, якщо за вузли інтерполяції обрати нулі багаточлена Чебишова $\overline{T}^{[a;b]}_{n+1}(x)$, а саме $x_k = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$, $k=\overline{0,n}$, то

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

Для промiжку $[-1,1]$ одержимо такий результат:

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{2^{2n+1}}$$

Приклад

Побудувати iнтерполяцiйний полiном для функцiї $f(x) = 3^x$, $x \in [-1;1]$. Використати три вузли, якi є нулям полiному Чебишова. Обчислити наближене значення функцiї в точцi 0.5. Оцiнити похибку обчислення функцiї в точцi 0.5.

Розв'язок

3 вузли $\Rightarrow \quad n=2$

$$x_0 = \cos\frac{(2\cdot 0+1)\pi}{2\cdot(2+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$$

$$x_1 = \cos\frac{(2\cdot 1+1)\pi}{2\cdot(2+1)} = 0$$

$$x_2 = \cos\frac{(2\cdot 2+1)\pi}{2\cdot(2+1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0.866$$

k	x_k	$f(x_k)$	р.р.І п.	р.р.ІІ п.
0	0.866	$\boxed{2.489}$		
			$\boxed{1.719}$	
1	0	1		$\boxed{0.583}$
			0.709	
2	-0.866	0.386		

$P_2^ч(x) = 2.489 + 1.719(x - 0.866) + 0.583(x - 0.866)x \approx$

$\approx 0.583x^2 + 1.214x + 1$

$P_2^ч(0.5) \approx 0.583 \cdot 0.5^2 + 1.214 \cdot 0.5 + 1 \approx 1.753$

$|f(0.5) - P_2^ч(0.5)| \leqslant \dfrac{M_3}{3!}\dfrac{(1-(-1))^3}{2^{2 \cdot 2+1}} \approx 0.166$

$|f(0.5) - P_2(0.5)| \approx 0.25 \qquad P_2^ч(0.5) \approx 1.833$

$|f(0.5) - P_2(0.5)| = |3^{0.5} - 1.833| \approx 0.101$

$|f(0.5) - P_2^ч(0.5)| = |3^{0.5} - 1.753| \approx 0.021$

Приклад

Знайти суму скінченного ряду за допомогою інтерполяції:

$S(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1)$

n	$S(n)$	р.р.І п.	р.р.ІІ п.	р.р.ІІІ п.
1	$\boxed{1}$			
		$\boxed{3}$		
2	4		$\boxed{1}$	
		5		$\boxed{0}$
3	9		1	
		7		0
4	16		1	
		9		
5	25			

Розв'язок

$P_2(n) = 1 + 3(n-1) + 1(n-1)(n-2) = n^2$

Приклад

Визначити степінь інтерполяційного многочлена для функції, заданої таблично:

x_i	-1	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	-4	-2	5	16	31	50

Розв'язок

x	$f(x_)$	р.р.I п.	р.р.II п.	р.р.III п.
-1	$\boxed{-4}$			
1	-2	$\boxed{1}$		
2	5	7	$\boxed{2}$	
3	16	11	2	$\boxed{0}$
4	31	15	2	0
5	50	19	2	0

Степінь інтерполяціійного многочлена: $n = 2$

Приклад

З якою точністю ε можна обчислити $3^{0.5}$ *за відомими значеннями* 3^{-1}, 3^0, 3^1 ?

Розв'язок

За умовою не треба будувати поліном, лише визначити похибку. В нас нічого не сказано про чебишовські вузли $\Rightarrow$

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|$$

Відомі значення: 3^{-1}, 3^0, 3^1 $\Rightarrow$ $f(x) = 3^x$ *і*

$$x_0 = -1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$$

3 вузла $\Rightarrow$ $n = 2$

$$|3^{0.5} - L_2(0.5)| \leqslant \frac{M_3}{3!}|(0.5 - x_0)(0.5 - x_1)(0.5 - x_2)| \boxed{=}$$

$$M_3 = \max_{x\in[-1;1]} |3^x \ln^3 3| = 3\ln^3 3$$

$$\boxed{=} \frac{3\ln^3 3}{6}|(0.5 + 1)(0.5 - 0)(0.5 - 1)| \approx 0.2486$$

Приклад

Скільки чебишовських вузлів інтерполяції необхідно взяти, щоб похибка інтерполяції для функції $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in [0;1]$ *не перевищувала* $\varepsilon = 10^{-4}$ *?*

Розв'язок

За умовою не треба будувати поліном, лише визначити похибку. В нас чебишовські вузли

$$\Rightarrow \quad |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

$$f(x) = \ln(1 + x) \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad \ldots$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$M_{n+1} = \max_{x\in[0;1]} |f^{(n+1)}(x)| = \frac{n!}{(1+0)^{n+1}}$$

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{n!}{(n+1)!}\frac{(1-0)^{n+1}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{(n+1)2^{2n+1}}$$

$$n = 4 \ \ |f(x) - L_4(x)| \leqslant \frac{1}{5\cdot 2^9} \approx 0.0004 > \varepsilon$$

$$n = 5 \ \ |f(x) - L_5(x)| \leqslant \frac{1}{6\cdot 2^{11}} \approx 0.00008 \Rightarrow$$ *6 вузл*

Інтерполяційний поліном Ерміта (інтерполяція з кратними візлами)

Нехай функція

$$f(x) \in C^{\alpha}[a, b]$$

задана своїми значеннями та значеннями своїх похідних до відповідного порядку в кожному вузлі

$$f^{(j)}(x_i),\ i = \overline{0, n},\ j = \overline{0, k_i - 1}$$

Потрібно побудувати $H_m(x)$, що відповідає інтерполяційним умовам:

$$H_m(x_i) = f(x_i),\ H'_m(x_i) = f'(x_i),\ H''_m(x_i) = f''(x_i),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$H_m^{(k_i-1)}(x_i) = f^{(k_i-1)}(x_i),\ i = \overline{0, n}$$

$$x_i \neq x_j,\ if\ i \neq j$$

Ці умови називають інтерполяціними умовами Ерміта.

Числа k_i називають кратністю вузла x_i та $m = \sum\limits_{i=0}^{n} k_i - 1$

Інтерполяціний поліном $H_m(x)$ - единий.

Припустимо, що існує два таких багаточлена, що відповідають інтерполяційним умовам Ерміта. Тоді їх різниця $Q_m(x)$ задовольняє таким умовам

$$Q_m(x_i) = 0,\ Q'_m(x_i) = 0,\ Q''_m(x_i) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q_m^{(k_i-1)}(x_i) = 0,\ i = \overline{0,n}$$

Отже дістали, що поліном m *степеня має* $m + 1$ *нулів. Суперечність.*

Існування інтерполянта Ермiта $H_m(x)$ *доведемо його конструктивною побудовою.*

На кожному проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ *доведемо допоміжні вузли:*

$$x_{i_j}^{\varepsilon},\ i = \overline{0,n},\ j = \overline{0,k_i-1}$$

$$x_i \leqslant x_{i_1}^{\varepsilon} < x_{i_2}^{\varepsilon} < \cdots < x_{i_{k_i}}^{\varepsilon} < x_{i+1}$$

$$x_{i_j}^{\varepsilon} \longrightarrow x_i, \quad \varepsilon \to 0$$

Зокрема, можна взяти

$$x_{i_j}^{\varepsilon} = x_i + (j-1)\varepsilon.$$

Побудуємо інтерполяційний поліном $P_m(x)$*, що збігається з* $f(x)$ *у вузлах* $x_{i_j}^{\varepsilon}$*. Таблиця розділкних рiниць має вигляд:*

$x^{\varepsilon}_{i_j}$	$f(x^{\varepsilon}_{i_j})$	р.р.І п.	р.р.ІІ п.	$\ldots$	р.р. n п.
$x^{\varepsilon}_{1_1}$	$f(x^{\varepsilon}_{1_1})$				
		$f(x^{\varepsilon}_{1_1};x^{\varepsilon}_{1_2})$			
$x^{\varepsilon}_{1_2}$	$f(x^{\varepsilon}_{1_2})$		$f(x^{\varepsilon}_{1_1};x^{\varepsilon}_{1_2};x^{\varepsilon}_{1_3})$		
		$f(x^{\varepsilon}_{1_2};x^{\varepsilon}_{1_3})$		$\ldots$	
$x^{\varepsilon}_{1_3}$	$f(x^{\varepsilon}_{1_3})$		$f(x^{\varepsilon}_{1_2};x^{\varepsilon}_{1_3};x^{\varepsilon}_{1_4})$		
		$f(x^{\varepsilon}_{1_3};x^{\varepsilon}_{1_4})$		$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$		$\ldots$		$f(x^{\varepsilon}_{1_1};\ldots;x^{\varepsilon}_{1_{k_1}};\ldots;x^{\varepsilon}_{n_1};\ldots;x$
		$\ldots$			
$x^{\varepsilon}_{1_{k_1}}$	$f(x^{\varepsilon}_{1_{k_1}})$				
		$f(x^{\varepsilon}_{1_{k_1}};x^{\varepsilon}_{2_1})$			
$x^{\varepsilon}_{2_1}$	$f(x^{\varepsilon}_{2_1})$				
		$\ldots$	$f(x^{\varepsilon}_{n_{k_n-2}};x^{\varepsilon}_{n_{k_n-1}};x^{\varepsilon}_{n_{k_n}})$		
$\ldots$	$\ldots$				
		$f(x^{\varepsilon}_{n_{k_n-1}};x^{\varepsilon}_{n_{k_n}})$			
$x^{\varepsilon}_{n_{k_n}}$	$f(x^{\varepsilon}_{n_{k_n}})$				

Запишемо інтерполяційний поліном Ньютона:

$$P_m(x) = f(x^{\varepsilon}_{1_1}) + f(x^{\varepsilon}_{1_1};x^{\varepsilon}_{1_2})(x-x^{\varepsilon}_{1_1}) + f(x^{\varepsilon}_{1_1};x^{\varepsilon}_{1_2};x^{\varepsilon}_{1_2})(x-x^{\varepsilon}_{1_1})(x-x^{\varepsilon}_{1_2}) + \cdots$$

$$+\cdots+f(x^{\varepsilon}_{1_1};\cdots;x^{\varepsilon}_{1_{k_1}};\cdots;x^{\varepsilon}_{n_1};\cdots;x^{\varepsilon}_{n_{k_n}})(x-x^{\varepsilon}_{1_1})\cdots(x-x^{\varepsilon}_{1_{k_1}})\cdots(x-x^{\varepsilon}_{n_1})\cdots(x-x^{\varepsilon}_{n_{k_n-1}}).$$

Спрямуємо ε до нуля:

$$x^{\varepsilon}_{i_j} \;\to\; x_i$$

Одержимо таку таблицю розділених рініць:

x_i	$f(x_i)$	р.р.I п.	р.р.II п.	$\dots$	р.р. n п.
x_1	$f(x_1)$				
		$f(x_1;x_1)$			
x_1	$f(x_1)$		$f(x_1;x_1;x_1)$		
		$f(x_1;x_1)$		$\dots$	
x_1	$f(x_1)$		$f(x_1;x_1;x_1)$		
		$f(x_1;x_1)$		$\dots$	
$\dots$	$\dots$		$\dots$		$f(x_1;\dots;x_1;\dots;x_n;\dots;x_n)$
		$\dots$			
x_1	$f(x_1)$				
		$f(x_1;x_2)$			
x_2	$f(x_2)$				
		$\cdots$	$f(x_n;x_n;x_n)$		
$\dots$	$\dots$				
		$f(x_n;x_n)$			
x_n	$f(x_n)$				

та інтерполяційний поліном Ньютона

$$P_m(x) = f(x_1) + f(x_1;x_1)(x-x_1) + f(x_1;x_1;x_1)(x-x_1)(x-x_1) + \cdots$$

$$+\cdots + f(x_1;\cdots;x_1;\cdots;x_n;\cdots;x_n)\underbrace{(x-x_1)\cdots(x-x_1)}_{k_1}\cdots\underbrace{(x-x_n)\cdots(x-x_n)}_{k_n-1}.$$

За означенням розділеної ріниці:

$$f(x_i;x_j) = \frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}.$$

Дістанемо невизначеність!!!

Але є рівність:

$$f(\underbrace{x_i,x_i,\dots,x_i}_{k+1}) = \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}.$$

Отже талиця розділених різниць набуває вигляду

x_i	$f(x_i)$	р.р.I п.	р.р.II п.	...	р.р. n п.
x_1	$f(x_1)$				
		$\frac{f'(x_1)}{1!}$			
x_1	$f(x_1)$		$\frac{f''(x_1)}{2!}$		
		$\frac{f'(x_1)}{1!}$		$\dots$	
x_1	$f(x_1)$		$\frac{f''(x_1)}{2!}$		
		$\frac{f'(x_1)}{1!}$		$\dots$	
$\dots$	$\dots$		$\dots$		$f(\underbrace{x_1;\dots;x_1}_{k_1};\dots;\underbrace{x_n;\dots;x_n}_{k_n})$
		$\dots$			
x_1	$f(x_1)$				
		$f(x_1;x_2)$			
x_2	$f(x_2)$				
		$\dots$	$\frac{f''(x_n)}{2!}$		
$\dots$	$\dots$				
		$\frac{f'(x_n)}{1!}$			
x_n	$f(x_n)$				

а інтерполяційний поліном Ньютона такого вигляду

$$H_m(x) = f(x_1) + f(x_1;x_1)(x-x_1) + f(x_1;x_1;x_1)(x-x_1)^2 + \cdots$$

$$+\cdots + f(\underbrace{x_1;\dots;x_1}_{k_1};x_2)(x-x_1)^{k_1} + f(\underbrace{x_1;\dots;x_1}_{k_1};x_2;x_2)(x-x_1)^{k_1}(x-x^2)$$

$$+\cdots+f(\underbrace{x_1;\cdots;x_1}_{k_1};\cdots;\underbrace{x_n;\cdots;x_n}_{k_n})(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_{n-1})^{k_{n-1}}(x-x_n)^{k_n-1}.$$

Якщо $k_i \equiv 1 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad H_m(x) = L_n(x)$

$f(x_i,...,x_i) = \dfrac{f^k(x_i)}{k!} \Rightarrow$

$|f(x)-H_m(x)| \leqslant \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}|(x-x_0)^{k_0}...(x-x_n)^{k_n}|$

Для того, щоб показати, що побудований багаточлен відпоівдає інтерполяційним умовам Ермiта, побудований полiном надамо у виглядi:

$$H_m(x)=\sum_{i=1}^{k_1}\frac{f^{i-1}(x_1)}{(i-1)!}(x-x_1)^{i-1}+(x-x_1)^{k_1}F(x-x_2,x-x_3,\dots,x-x_n),$$

де $F(x-x_2,x-x_3,\dots,x-x_n)$ - деякий багаточлен від $t_1,t_2,\dots,t_{n-1}$. З даної рiвностi випливає, що багаточлен задовольняє iнтерполяцiйним умовам в точцi x_1.

В останнiй рiвностi замiнемо x_1 на $x_k,\forall k$. Одержимо, що iнтеропляцiйнi умови будуть виконуватись в точках $x_k,\forall k$.

Приклад

Побудувати многочлен, що iнтерполює данi:

$x_0=-1;\ f_0=0;\ f_0'=2$

$x_1=0;\ f_1=2;\ f_1'=4;\ f_1''=-4$

$x_2=1;\ f_2=-1;\ f_2'=-14$

$m=2+3+2-1=6$

Розв'язок

x	$f(x)$	I	II	III	IV	V	VI
-1	0						
-1	0	2					
0	2	2	0				
0	2	4	2	2			
0	2	4	-2	-4	-6		
1	-1	-3	-7	-5	-0.5	11/4	
1	-1	-14	-11	-4	1	3/4	-1

x	$f(x)$	I	II	III	IV	V	VI
-1	$\boxed{0}$						
-1	0	$\boxed{2}$					
0	2	2	$\boxed{0}$				
0	2	4	2	$\boxed{2}$			
0	2	4	-2	-4	$\boxed{-6}$		
1	-1	-3	-7	-5	-0.5	$\boxed{11/4}$	
1	-1	-14	-11	-4	1	3/4	$\boxed{-1}$

$$H_6(x) = 0 + 2(x+1) + 0(x+1)^2 + 2(x+1)^2 x-$$

$$-6(x+1)^2 x^2 + \frac{11}{4}(x+1)^2 x^3 - (x+1)^2 x^3 (x-1) =$$

$$= 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2$$