Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Постановка задачі

$$Ax = b$$

$A - n \times n$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$

$b = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$

$detA \neq 0$

Прямі методи

Метод Гауса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{1(n+1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{2(n+1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = a_{n(n+1)} \end{cases}$$

$a_{i(n+1)} = b_i, \quad i = \overline{1,n}$

$a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)},\ k = \overline{1,n}$

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)},\ j = \overline{k+1, n+1}$

$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \qquad\qquad i = \overline{k+1, n}$

Метод Гауса

$$\begin{cases} x_1 + \ \ a_{12}^{(1)}x_2 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1(n+1)}^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2(n+1)}^{(1)} \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + ... + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n(n+1)}^{(1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + ... + a_{1n}^{(1)}x_n = & a_{1(n+1)}^{(1)} \\ \qquad x_2 + ... + a_{2n}^{(2)}x_n = & a_{2(n+1)}^{(2)} \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \qquad\qquad\qquad x_n = & a_{n(n+1)}^{(n)} \end{cases}$$

Метод Гауса

Прямий хід

$a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)}$, $k = \overline{1,n}$

$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}a_{kj}^{(k)}$,
$j = \overline{k+1, n+1}, \quad i = \overline{k+1, n}$

$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

Зворотній хід

$x_n = a_{n(n+1)}^{(n)}$

$x_i = a_{i(n+1)}^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}$, $i = \overline{n-1, 1}$
$x_n = a_{n(n+1)}^{n}$

$x_i = a_{i(n+1)}^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}$, $i = \overline{n-1, 1}$

Метод Гауса з вибором головного

1) $|a_{kj_0}^{(k-1)}| = \max\limits_{j} |a_{kj}^{(k-1)}|, \quad j = \overline{k, n}$

2) $|a_{i_0k}^{(k-1)}| = \max\limits_{i} |a_{ik}^{(k-1)}|, \quad i = \overline{k, n}$

3)Вибір головного елемента за всією матрицею

P_{kl} - матриця перестановок, що утворюється з одиничної матриці за допомогою перестановки рядків k та l

1) AP_{kl}

2) $P_{kl}A$

Метод Гауса з вибором головного в матричному вигляді

Нехай P_i - матриця перестановок на i кроці.
$A_k = M_k A_{k-1}$ $\qquad i = \overline{k+1, n}$

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{kk} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & m_{(k+1)k} & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & m_{nk} & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} m_{kk} = \dfrac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \\ \\ m_{ik} = \dfrac{-a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \end{array}$$

Метод Гауса (по стовпцях)

$Ax = b$

$$P_1Ax = P_1b$$

$$M_1P_1Ax = M_1P_1b$$

$$P_2M_1P_1Ax = P_2M_1P_1b$$

....

$$M_nP_n...M_2P_2M_1P_1Ax = M_nP_n...M_2P_2M_1P_1b$$

Визначник

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = & a_{1(n+1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = & a_{2(n+1)}^{(1)} \\ .... & \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = & a_{n(n+1)}^{(n-1)} \end{cases}$$

$$detA = (-1)^l a_{11}^{(0)}a_{22}^{(1)}...a_{nn}^{(n-1)}$$

Приклад

Знайти розв'язок системи методом Гауса з вибором головного по стовпцях. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язок

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

Розв'язок

$$\overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 3 \end{array}\right) \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1\overline{A_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Розв'язок

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overline{A_1} = M_1 P_1 \overline{A_0} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 5/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Розв'язок

$$\overline{A_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{5/3} & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad P_2 = E \qquad P_2\overline{A_1} = \overline{A_1}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок

$$\overline{A_2} = M_2 P_2 \overline{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 5/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4/5} & 0 \end{array}\right)$$

Розв'язок

$$P_3 = E \qquad P_3\overline{A_2} = \overline{A_2} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix}$$

$$\overline{A_3} = M_3 P_3 \overline{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/4 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Розв'язок

$$\overline{A_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = 0 - 3/5x_3 = 0$$

$$x_1 = 1 - 5/3x_2 - 2x_3 = 1$$

Розв'язок

$$\overline{A_0} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 2 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 3 \end{array}\right) \quad \overline{A_1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{5/3} & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overline{A_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5/3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4/5} & 0 \end{array}\right) \qquad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2, P_3 = E \Rightarrow DetA = (-1)^1 \cdot 3 \cdot 5/3 \cdot 4/5 = -4$$

Метод квадратного кореня

$$A = A^T \qquad \Rightarrow \qquad A = S^T DS$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & ... & s_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & s_{nn} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \pm 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Метод квадратного кореня

$$Ax = b, \quad A = S^T DS \quad \Rightarrow$$

$$S^T DSx = b$$

Позначимо $Sx = y$.

Тоді одержимо систему $S^T y = b$.

Розв'язвши яку дістанемо y.

На другому кроці із системи $Sx = y$ знайдемо y.

І в першому , і в другому випадках маємо трикутні матриці, отже потрібно виконувати лише зворотній хід – перевага.

Потрібно побудувати матриці S та D.

Нехай $S = (s_{ij})_{i,j=1}^n$, $D = (d_{ii}\delta_{ij})$,

δ_{ij} – символ Кронекера.

Тоді

$$(DS)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik} s_{ki}$$

,

$$(S^T DS)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} s_{ki} d_{kk} s_{kj} = a_{ij}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} d_{kk} s_{kj} + s_{ii} s_{ij} d_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} s_{ki} d_{kk} s_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} d_{kk} s_{kj} + s_{ii} s_{ij} d_{ii} = a_{ij}$$

Нехай $i = j$

$$s_{ii}^2 d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2 d_{kk}$$

Покладемо

$$d_{ii} = sign(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2 d_{kk})$$

.

Тоді

$$s_{ii} = \sqrt{(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2 d_{kk})}$$

Формули методу квадратного кореня

$$d_{11} = sign(a_{11})$$

$$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|}$$

$$d_{ii} = \operatorname{sgn}\left|a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi}^2 d_{pp}\right| \qquad i = \overline{1,n}$$

$$s_{ii} = \sqrt{\left|a_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi}^2 d_{pp}\right|} \qquad i = \overline{1,n}$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} s_{pi} d_{pp} s_{pj}}{d_{ii} s_{ii}} \qquad \begin{matrix} i = \overline{2, n-1} \\ j = \overline{i+1, n} \end{matrix}$$

Визначник

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & ... & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & ... & s_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & s_{nn} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \pm1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \pm1 \end{pmatrix}$$

$$detA = Det(S^T DS) = DetS^T \cdot DetD \cdot DetS \quad \Rightarrow$$

$$detA = \prod_{k=1}^{n} d_{kk} \prod_{k=1}^{n} s_{kk}^2$$

Приклад

Знайти розв'язок системи методом квадратних коренів. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \end{cases}$$

<u>Розв'язок</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$A = A^T \Rightarrow$
можна м.кв.к.

$$d_{11} = \operatorname{sgn}(a_{11}) = \operatorname{sgn}(1) = 1$$

$$s_{11} = \sqrt{|a_{11}|} = \sqrt{|1|} = 1$$

$$s_{12} = \frac{a_{12}}{d_{11}s_{11}} = \frac{2}{1 \cdot 1} = 2$$

$$s_{13} = \frac{a_{13}}{d_{11}s_{11}} = \frac{3}{1 \cdot 1} = 3$$

<u>Розв'язок</u>

$$d_{22} = \operatorname{sgn}(a_{22} - s_{12}^2 d_{11}) = \operatorname{sgn}(5 - 2^2 \cdot 1) = \operatorname{sgn} 1 = 1$$

$$s_{22} = \sqrt{|a_{22} - s_{12}^2 d_{11}|} = \sqrt{|1|} = 1$$

$$s_{23} = \frac{a_{23} - s_{12}d_{11}s_{13}}{d_{22}s_{22}} = \frac{5 - 2 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 1} = -1$$

$$d_{33} = \operatorname{sgn}(a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}) =$$
$$= \operatorname{sgn}(6 - 3^2 \cdot 1 - (-1)^2 \cdot 1) = \operatorname{sgn}(-4) = -1$$

$$s_{33} = \sqrt{|a_{33} - s_{13}^2 d_{11} - s_{23}^2 d_{22}|} = \sqrt{|-4|} = 2$$

<u>Розв'язок</u>

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S^T D y = b$$

$$S^T D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Розв'язок</u>

$S^T D y = b$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow$$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 2 - 2y_1 = 2 - 2\cdot 1 = 0$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(3 - 3y_1 + y_2) = -\frac{1}{2}(3 - 3\cdot 1 + 0) = 0$$

<u>Розв'язок</u>

$Sx = y$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_3 = 0\\ x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = 0\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \quad \Rightarrow x_1 = 1 \end{array}\right\} x = (1;0;0)^T$$

<u>Розв'язок</u>

$$S = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\qquad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$DetA = \prod_{i=1}^{3} d_{ii}s_{ii}^2 = -1\cdot 2^2 = -4$$

<u>Метод прогонки</u>

A – тридіагональна

$$\begin{cases} -c_0y_0 + b_0y_1 = -f_0\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_iy_{i-1} - c_iy_i + b_iy_{i+1} = -f_i, \quad i = \overline{1, n-1}\\ \dots\dots\dots\dots\\ a_ny_{n-1} - c_ny_n = -f_n \end{cases}$$

Розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1},$$

де

$$\alpha_{i+1},\ \beta_{i+1} \in R^1$$

.

Побудуємо формули для їх знаходження.

$y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ підставимо в рівняння. Одержимо

$$a_i(\alpha_i y_i + \beta_i) - c_i y_i + b_i y_{i+1} = -f_i$$

$$y_i(a_i\alpha_i - c_i) = -f_i - a_i\beta_i - b_i y_{i+1}$$

$$y_i = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i} y_{i+1} + \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}$$

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$$

Маємо

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i} \qquad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{z_i}$$

$$i = \overline{1, n-1}$$

$$z_i = c_i - \alpha_i a_i$$

Для знаходження $\alpha_1,\ \beta_1$ скористаємось першим рівнянням:

$$y_0 = \frac{b_0}{c_0} y_1 + \frac{f_0}{c_0}$$

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$$

Одержимо

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0},\ \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}.$$

Для знаходження y_n скористаємось останнім рівнням

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n$$

$$a_n(\alpha_n y_n + \beta_n) - c_n y_n = -f_n$$

$$y_n(a_n\alpha_n - c_n) + a_n\beta_n = -f_n$$

$$y_n = \frac{f_n + a_n\beta_n}{c_n - a_n\alpha_n}$$

Метод прогонки

Прямий хід

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0} \qquad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i} \qquad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{z_i}$$

$$i = \overline{1, n-1}$$

$$z_i = c_i - \alpha_i a_i$$

Зворотній хід

$$y_n = \frac{f_n + a_n\beta_n}{z_n} \qquad y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1}$$

$$i = \overline{n-1, 0}$$

Теорема про стійкість прогонки

$a_i, b_i, c_i \neq 0;\ i = \overline{1, n-1};\ a_0, b_0 = 0;\ c_0, c_n \neq 0$

1) $|c_i| \geq |a_i| + |b_i|, \quad i = \overline{0, n}$

2) $\exists\ i : |c_i| > |a_i| + |b_i| \qquad \Rightarrow$

$|\alpha_i| \leq 1, \quad |z_i| > 1, \quad i = \overline{1, n}$

Визначник

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -c_n \end{pmatrix} \sim \qquad \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0} \qquad z_i = c_i - \alpha_i a_i$$

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 + (-c_0)\dfrac{a_1}{c_0} & -c_1 + b_0\dfrac{a_1}{c_0} & b_1 + 0\dfrac{a_1}{c_0} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -c_n \end{pmatrix} \sim$$

Визначник

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -c_n \end{pmatrix} \sim \qquad \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{z_i} \qquad z_i = c_i - \alpha_i a_i$$

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 + (-z_1)\dfrac{a_2}{z_1} & -c_2 + b_1\dfrac{a_2}{z_1} & b_2 + 0\dfrac{a_2}{z_1} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -c_n \end{pmatrix} \sim$$

Визначник

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -z_2 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -c_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -z_1 & b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -z_2 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -z_n \end{pmatrix}$$

$$detA = -c_0 \cdot (-z_1) \cdot ... \cdot (-z_n)$$

Приклад

Знайти розв'язок системи методом прогонки. Знайти визначник.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'язок

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A - тридіаг. $\Rightarrow$ можна м.прог.

$$\left.\begin{matrix} |1| \geq |1| \\ |3| \geq |1| + |2| \\ |2| > |1| \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{метод стійкий}$$

Розв'язок

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\beta_1 = \frac{f_0}{c_0} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$z_1 = c_1 - \alpha_1 a_1 = -3 - (-1) \cdot 1 = -2$$

$$\alpha_2 = \frac{b_1}{z_1} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$\beta_2 = \frac{f_1 + a_1\beta_1}{z_1} = \frac{-1 + 1 \cdot 1}{-2} = 0$$

$$z_2 = c_2 - \alpha_2 a_2 = -2 - (-1) \cdot 1 = -1$$

Розв'язок

$$y_2 = \frac{f_2 + a_2\beta_2}{z_2} = \frac{-1 + 1 \cdot 0}{-1} = 1$$

$$y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2 = -1 \cdot 1 + 0 = -1$$

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 = -1 \cdot (-1) + 1 = 2$$

$$y = (2; -1; 1)^T$$

$$DetA = -c_0 \cdot (-z_1) \cdot (-z_2) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$