## Інтерполяційні сплайни

$1^0$. Побудувати лінійний інтерполяційний сплайн для даних

| $x_i$ | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | 3 | 1 | 0 |

Обчислити значення в точці $x = 0.5$.

Розв‘язання. За інтерполяційною формулою Ньютона

$$x \in [-1,0]: L_1(x) = 2 + (x+1),$$

$$x \in [0,1]: \quad L_1(x) = 3 - 2x,$$

$$x \in [1,2]: \quad L_1(x) = 1 - (x-1).$$

Тому

$$s_1(x) = \begin{cases} 3 + x, -1 \le x \le 0, \\ 3 - 2x, \ 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, \ \ 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Далі $s_1(0.5) = 3 - 2 * 0.5 = 2.$

$2^0$. Розв‘язати попередню задачу для кубічного природнього сплайна.

Розв‘язання. Спочатку обчислимо моменти сплайна $m_i = s_3''(x_i)$. Вони задовільняють СЛАР

$$\frac{1}{6}m_0 + \frac{2}{3}m_1 + \frac{1}{6}m_2 = \frac{1-3}{1} - \frac{3-2}{1} = -3,$$

$$\frac{1}{6}m_1 + \frac{2}{3}m_2 + \frac{1}{6}m_3 = \frac{0-1}{1} - \frac{1-3}{1} = 1,$$

$$m_0 = 0, \ m_3 = 0.$$

Розв‘язуючи її, маємо $m_0 = 0, \ m_1 = -5.2, \ m_2 = 2.8, \ m_3 = 0.$ Тому

$$s_3(x) = \begin{cases} -0.86667(x+1)^3 + 3.86667(x+1) - 2x, & -1 \le x \le 0, \\ 0.46667x^3 - 0.86667(1-x)^3 + 3.86667(1-x) + 0.53333x, & 0 \le x \le 1, \\ 0.46667(2-x)^3 + 0.53333(2-x), & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Далі $s_3(0.5) = 2.16$.

$3^0$. Чи є кубічним сплайном функція:

$$s(x)=\begin{cases}2-4x+x^3, & 0<x\le 1,\\ -1-(x-1)+3(x-1)^2-(x-1)^3, & 1<x\le 2,\\ 2(x-2)-(x-2)^3, & 2<x\le 3,\ ?\\ 1-(x-3)-3(x-3)^2+3(x-3)^3, & 3<x\le 4,\\ 2(x-4)+6(x-4)^2-2(x-4)^3, & 4<x\le 5.\end{cases}$$

Який він має дефект?

Розв‘язання. Обчислення значень функції зліва та справа у внутрішніх точках сітки дають такі результати

| $x_i$ | $s(x_i-0)$ | $s(x_i+0)$ |
|---|---|---|
| 1 | $-1$ | $-1$ |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 |

Для похідних маємо

| $x_i$ | $s'(x_i-0)$ | $s'(x_i+0)$ |
|---|---|---|
| 1 | $-1$ | $-1$ |
| 2 | 2 | 2 |
| 3 | $-1$ | $-1$ |
| 4 | 2 | 2 |

| $x_i$ | $s''(x_i-0)$ | $s''(x_i+0)$ |
|---|---|---|
| 1 | 6 | 6 |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | $-6$ | $-6$ |
| 4 | 12 | 12 |

Оскільки на кожному з проміжків $s(x)$ - поліном третього степеня, то це кубічний сплайн. Через неперервность других похідних він має дефект 1.

$4^0$. Розв‘язати задачу $1^0$ для кубічного сплайна, що задовільняє крайовим умовам $s'(0)=1, s'(5)=0$.

Розв‘язання. Як і для природнього сплайна, маємо

$$s(x)=m_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+m_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+ \\ +\left(f_i-m_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{(x-x_{i-1})}{h_i}+\left(f_{i-1}-m_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{(x_i-x)}{h_i} \tag{1}$$

Без змін залишаються і рівняння для моментів у внутрішніх точках сітки

$$m_{i+1}\frac{h_{i+1}}{6}+m_i\frac{h_{i+1}+h_i}{3}+m_{i-1}\frac{h_i}{6}=\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}-\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i},\ i=\overline{1,n-1}.$$

Міняються тільки крайові умови. З (1) знаходимо

$$s'(x) = m_i \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} - m_{i-1} \frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - (m_i - m_{i-1})\frac{h_i}{6}.$$

Звідси

$$s'(x_0) = -m_1 \frac{h_1}{6} - m_0 \frac{h_1}{3} + \frac{f_1 - f_0}{h_1}, \; s'(x_n) = m_{n-1} \frac{h_n}{6} + m_n \frac{h_n}{3} + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_1}.$$

Тому остаточно система для моментів має вигляд

$$m_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} + m_i \frac{h_{i+1} + h_i}{3} + m_{i-1} \frac{h_i}{6} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \; i = \overline{1, n-1},$$

$$m_1 \frac{h_1}{6} + m_0 \frac{h_1}{3} = \frac{f_1 - f_0}{h_1} - A, \quad m_{n-1} \frac{h_n}{6} + m_n \frac{h_n}{3} = B - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}.$$

Для даних задачі маємо

$$\frac{1}{6}m_0 + \frac{2}{3}m_1 + \frac{1}{6}m_2 = -3, \quad \frac{1}{6}m_1 + \frac{2}{3}m_2 + \frac{1}{6}m_3 = 1,$$

$$\frac{1}{3}m_0 + \frac{1}{6}m_1 = 0, \quad \frac{1}{6}m_2 + \frac{1}{3}m_3 = 1,$$

або

$$\begin{aligned}
2m_0 + m_1 \quad\quad\quad &= 0, \\
m_0 + 4m_1 + m_2 \quad &= -18, \\
m_1 + 4m_2 + m_3 &= 6, \\
m_2 + 2m_3 &= 6.
\end{aligned}$$

Останню систему розв'язуємо методом прогонки. Спочатку визначаємо прогоночні коефіцієнти:

$$\alpha_1 = -0.5, \; \beta_1 = 0;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{-4 + 0.5} = -0.28571, \; \beta_2 = \frac{18 + 0}{-4 + 0.5} = -5.14286;$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{-4 + 0.28571} = -0.26923, \; \beta_3 = \frac{-6 - 5.14286}{-4 + 0.28571} = 3.$$

Після цього знаходимо розв'язок:

$$m_3 = \frac{-6 + 3}{-2 + 0.26923} = 1.73333,$$

$$m_2 = -0.26923 * 1.73333 + 3 = 2.53333,$$

$$m_1 = -0.28571 * 2.53333 - 5.14286 = -5.86667,$$

$$m_0 = -0.5 * 5.86667 = 2.93333.$$

Таким чином шуканий сплайн має вигляд

$$s_3(x) = \begin{cases} -0.97778(x+1)^3 - 0.48888x^3 + \\ \quad +3.97778(x+1) - 1.51111x, & -1 \le x \le 0, \\ 0.42222x^3 - 0.97778(1-x)^3 + \\ \quad +0.57778x + 3.97778(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ 0.28888(x-1)^3 + 0.42222(2-x)^3 - \\ \quad -0.28888(x-1) + 0.57778(2-x), & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$