Оцінка точності інтерполяційного процесу

Нехай $f(x) \in C^{(n+1)}$.

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) - ?$$

Не зменшуючи загальності, покладемо, що вузли інтерполяції розташовані рівномірно

$$x_i = x_0 + ih,\ h = const,\ i = \overline{0, n}.$$

Оцінка для залишкового члену має вигляд:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

Введемо нову змінну

$$t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Тоді $\omega_{n+1}(x)$ набуває вигляду:

$$\omega_{n+1}(x) = \omega_{n+1}(x_0 + th) = h^{n+1} t(t-1) \cdots (t-n).$$

Розглянемо функцію

$$\varphi(t) = t(t-1) \cdots (t-n).$$

$$\varphi(t+1) = (t+1)t(t-1) \cdots (t+1-n)$$

Мають місце такі властивості:

Функція $\varphi(t)$ є парною чи непарною відносно точки $t = \frac{n}{2}$ залежно від непарності чи парності n, це випливає із співвідношення

$$\varphi(t) = (-1)^{n+1} \varphi(n-t),$$

$$\varphi(t+1) = \frac{t+1}{t-n}\varphi(t).$$

Якщо розбити $[0, n]$ *на частини*

$$[0,1],\ [1,2],\ \ldots,\ [n-1, n]$$

, то на кожному з цих відрізків значення $\varphi(t)$ *знаходяться множенням відповідного значення на попередньому відрізку на* $\frac{t+1}{t-n}$*. Цей множник завжди від'ємний при* $t \in (0,1)$*, тому знаки* $\varphi(t)$ *завжди чергуються при переході від інтервалу до інтервалу.*

$$\left|\frac{t+1}{t-n}\right| < 1,\ t \in [0, \frac{n-1}{2}].$$

Таким чином, екстремальні значення $\varphi(t)$ *за абсолютною величиною спадатимуть до середини відрізка* $[0, n]$ *і потім в силу симетрії знову зростати. За межами відрізку* $[0, n]$ *функція* $\varphi(t)$ *швидко зростає за абсолюною величиною. Таким же чином поводить себе функція*

$$\omega_{n+1}(x) = \omega_{n+1}(x_0 + th) = h^{n+1}\varphi(t).$$

Таким чином, можна дістати таких висновків:

1) При екстраполюванні слід чекати великої похибки.

2) При інтерполюванні для значень x*, які лежать не близько до вузлів інтерполювання, точність буде більшою для середніх відрізків і меншою для крайніх.*

3) Вигідно вибирати вузли так, щоб точка x *попадала ближче до центру даної конфігурації вузлів, що забезпечить більшу точність.*

Збіжність процесу інтерполяції

Введемо вузли інтерполяції:

$$x_0^0$$

$$x_0^1,\ x_1^1$$

$$x_0^2,\ x_1^2,\ x_2^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_0^n,\ x_1^n,\ \cdots\ x_n^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Побудуємо інтерполяційні поліноми для функції $f(x) \in C[a,b]$*, що задана у вузлах інтерполяції*

$$x_0^0\ -\ L_0(x)$$

$$x_0^1,\ x_1^1\ -\ L_1(x)$$

$$x_0^2,\ x_1^2,\ x_2^2\ -\ L_2(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_0^n,\ x_1^n,\ \cdots\ x_n^n\ -\ L_n(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Визначення. *Інтерполяційний процес збігається в точці* $x \in [a,b]$*, якщо*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Визначення. *Інтерполяційний процес збігається* рівномірно на відрізку $[a, b]$ для заданої послідовності вузлів, якщо

$$\lim_{n \to \infty} \max_{x \in [a,b]} |R_n(x)| = 0$$

Властивість збіжності інтерполяційного процесу залежить від вузлів інтерполяції та від гладкості функції, що інтерполюємо.

Теорема Фабера. Для будь-якої послідовності вузлів інтерполяції знайдеться функція (яку інтерполюємо) для якої інтерполяційний процес рівномірно не збігається на заданому відрізку інтерполяції.

Теорема Марцинкевича. Якщо функція $f(x) \in C[a, b]$, то знайдеться така послідовність вузлів інтерполяції, для якої інтерполяційний процес збігається.

Застосування інтерполяції

Обернена інтерполяція

Нехай функція $y = f(x) \in C[a, b]$, що задана таблично (x_i, y_i) $i = \overline{0, n}$, монотонна.

$$f(x^*) = y^*$$

$$y(x^*) \approx L_n(x^*) = y^* \;\Rightarrow\; x^*$$

1) Нехай функція $y = f(x) \in C[a,b]$, що задана таблично (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$, монотонна. Для знаходження x^* застосовуємо такий алгоритм:

Будуємо за таблицею (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$ таку таблицю:

$$(y_i, x_i),\ i = \overline{0,n}$$

та за нею будуємо інтерполяційний поліном

$$L_n(y) = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\omega_{n+1}(y)}{(y - y_i)\omega'_{n+1}(y_i)},$$

де $\omega_{n+1}(y) = (y - y_0)(y - y_1)\cdots(y - y_n)$.

$$L(y^*) \approx x*$$

Залишковий член в цьому випадку утворюється із залишкового члена формули Ньютона, якщо в останньому поміняти місцями x та y, а похідну $f'(x)$ замінити на похідну від оберненої функції.

2) Нехай функція $y = f(x) \in C[a,b]$, що задана таблично (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$, немонотонна. Для знаходження x^* застосовуємо такий алгоритм:

За заданою таблицею (x_i, y_i), $i = \overline{0,n}$ будуємо інтерполяційний поліном

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$$

та розв'язують нелінійне рівняння

$$L_n(x) = y^*.$$

На підставі теореми про середнє:

$$f(x) - f(x^*) = f'(\xi)(x - x^*)$$

одержимо

$$x - x^* = \frac{f(x) - f(x^*)}{f'(\xi)}$$

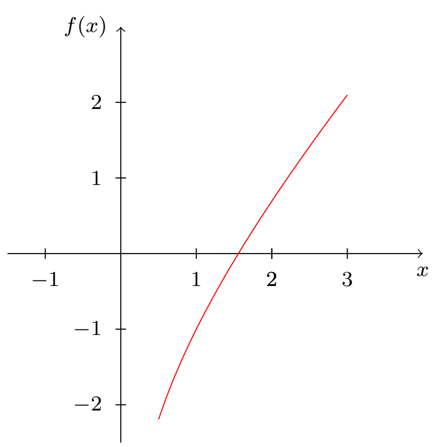
$$|x - x^*| \leqslant \frac{M_{n+1}|\omega_{n+1}(x)|}{m_1(n+1)!}$$

$$m_1 = \min_x |f'(x)| \qquad M_{n+1} = \max_x |f^{n+1}(x)|$$

<u>*Приклад*</u>

Розв'язати рівняння $\ln x + x - 2 = 0$*, використавши інтерполяційний многочлен 2 степеня. Оцінити похибку.*

<u>*Розв'язок*</u>



$$\left.\begin{aligned} f(1) &= -1 \\ f(2) &= 0.6931 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x^* \in [1;2]$$

k	x_k	$f(x_k)$	p.p.I п.	p.p.II п.
0	1	-1		
			1.8109	
1	1.5	-0.0945		-0.2356
			1.5754	
2	2	0.6931		

k	x_k	$f(x_k)$	p.p.I п.	p.p.II п.
0	1	$\boxed{-1}$		
			$\boxed{1.8109}$	
1	1.5	-0.0945		$\boxed{-0.2356}$
			1.5754	
2	2	0.6931		

$$L_2(x) = -1 + 1.8109(x-1) - 0.2356(x-1)(x-1.5) =$$

$$= -0.2356x^2 + 2.3999x - 3.1643$$

$$L_2(x) = 0 \;\Rightarrow \qquad -0.2356x^2 + 2.3999x - 3.1643 = 0$$

$$x_1 = 8.63 \notin [1;2]f \qquad x_2 = 1.5563 \;\Rightarrow\; x^* \approx 1.5563$$

$$m_1 = \min_{x\in[1;2]} |f'(x)| = \min_{x\in[1;2]} |\frac{1}{x} + 1| = \frac{3}{2}$$

$$M_3 = \max_{x\in[1;2]} |f'''(x)| = \max_{x\in[1;2]} |\frac{2}{x^3}| = 2$$

$$|x^* - 1.5563| \leqslant \frac{2\cdot 2}{3\cdot 6}\big|(1.5563-1)(1.5563-1.5)\times$$

$$\times(1.5563-2)\big| \approx 0.0031$$

<u>Розв'язок 2</u>

$f(x)$- монотонна $\quad \Rightarrow \quad x \leftrightarrow y$

k	y_k	x_k	р.р.I п.	р.р.II п.
0	-1	$\boxed{1}$		
			$\boxed{0.5522}$	
1	-0.0945	1.5		$\boxed{0.0488}$
			0.6348	
2	0.6931	2		

$$L_2(y) = 1 + 0.5522(y-1) + 0.0488(y-1)(y-1.5) =$$
$$= 0.0488y^2 + 0.6056y + 1.5568$$

$$L_2(0) = 1.5568$$
$$F'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+1/x} = \frac{x}{x+1}$$
$$F''(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) \times$$
$$\times \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' =$$
$$= \frac{x}{(1+x^3)}$$
$$F'''(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right) = \frac{x}{x+1} \cdot \left(\frac{x}{(1+x^3)}\right)' =$$
$$= \frac{x-2x^2}{(1+x)^5} = g(x)$$
$$g'(x) = \frac{1-8x+6x^2}{(1+x)^6} = 0$$
$$x_1 = 1.1937 \qquad x_2 = 0.1396 \notin [1;2]$$
$$\left.\begin{array}{l} g(1.1937) = -0.0326 \\ g(1) = -0.03125 \\ g(2) = -0.0247 \end{array}\right\} \Rightarrow \widetilde{M}_3 = 0.0326$$

$$|x^* - 1.5568| \leqslant \frac{\widetilde{M_3}}{3!}|(0+1)(0+0.0945)(0-0.6931)| \approx$$

$$\approx 0.00036$$

Кускова інтерполяція

Кусково-лінійна інтерполяція

$$[a;b] \ \to \ [x_{i-1};x_i] \qquad i=\overline{1;n}$$

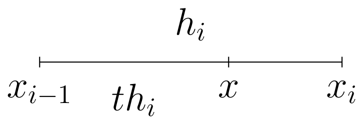
$$L_1^i(x) = f(x_{i-1})\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} + f(x_i)\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} =$$

$$= \frac{f(x_{i-1})(x_i-x)+f(x_i)(x-x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$$

$$h_i = x_i - x_{i-1} \qquad i=\overline{1;n}$$

$$f(x)\in C^2_{[a;b]} \qquad h=\max_{1\leqslant i\leqslant n} h_i \qquad M_2 = \max_{x\in[x_0;x_n]}|f''(x)|$$

$$|f(x)-L_1^i(x)| \leqslant \frac{M_2^i}{2!}|(x-x_{i-1})(x-x_i)| \quad \boxed{\leqslant}$$



$$t\in[0;1]$$

$$x - x_{i-1} = th_i$$

$$x - x_i = x-(x_{i-1}+h_i) = x-x_{i-1}-h_i = th_i - h_i =$$

$$= h_i(t-1)$$

$$\boxed{\leqslant} \quad \frac{M_2^i}{2!}\big|th_ih_i(t-1)\big| = \frac{M_2^i}{2!}\big|h_i^2t(t-1)\big|$$

$$g(t) = t(t-1)$$

$$g'(t) = 2t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2}$$

$$g(0) = 0 \qquad g(1) = 0 \qquad g(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$$

$$|f(x) - L_1^i(x)| \leqslant \frac{M_2^i}{2!}\left|h_i^2 t(t-1)\right| \leqslant \frac{M_2 h^2}{8}$$

Побудова таблиць

Постановка задачі:потрібно побудувати таблицю значень функції таким чином, щоб похибка при інтерполяції багаточленом степеня n не перевищувала величину ε. Зазвичай такі таблиці будуються, щоб вони дозволяли лінійну чи квадратичну інтерполяцію.

Розглянемо побудову таблиць для лінійної інтерполяції у випадку рівновідалених вузлів. Залишковий член має вигляд:

$$R_1(x) = f''(\xi)h^2\frac{t(t-1)}{2},\ x = x_0 + th.$$

$$|R_1(x)| < \varepsilon$$

$\max_{t\in[0,1]} |\frac{t(t-1)}{2}|$ *досягається при*

$$t = 1/2$$

та дорівнює $1/8$.

Таким чином, для побудови таблиці значень функції для лінійної інтерполяції із точністю ε достатньо *виконання умови:*

$$\max|f''(\xi)|\frac{h^2}{8} \leqslant \varepsilon.$$

Одержимо для h таку оцінку:

$$0 < h \leqslant \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2h^2}}, \quad M_2 = \max|f''(x)|.$$

Інший алгоритм:

Введемо систему функцій:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \\ 0, & x \leqslant x_{i-1},\ x \geqslant x_{i+1} \end{cases}, \ i = \overline{1, n-1}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ 0, & x \geqslant x_1, \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n \\ 0, & x \leqslant x_{n-1} \end{cases}$$

Тоді для кусково-лінійної інтерполяції зручно використовувати формулу:

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x)$$

Теорема. Для $f(x) \in C^2[a,b]$, *що задана своїми* *значеннями* $f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$ *має місце оцінка*

$$\|f^{(k)}(x)-\Phi_1^{(k)}(x)\|_{C[a,b]} \leqslant 2M_2|h|^{2-k},\ k=0,1,$$

де $|h|=\max_{i=\overline{1,n}} h_i,\ h_i=x_i-x_{i-1}.$

<u>*Кусково-квадратична інтерполяція*</u>

$h=x_i-x_{i-1} \qquad \forall i:\ i=\overline{1,n}$

$$L_2^i(x)=f(x_{i-1})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}+$$

$$+f(x_i)\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}+$$

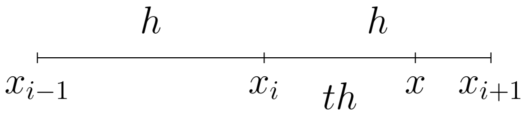
$$+f(x_{i+1})\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}=$$

$$L_2^i(x)=f(x_{i-1})\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{2h^2}-$$

$$-f(x_i)\frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})}{h^2}+$$

$$+f(x_{i+1})\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2h^2}$$

$$|f(x)-L_2(x)| \leqslant \frac{M_3}{3!}|(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})| \quad \boxed{\leqslant}$$



$t\in[0;1]$

$$x-x_i=th$$

$$x-x_{i-1}=x-(x_i-h)=th+h=h(t+1)$$

$$x-x_{i+1}=x-(x_i+h)=th-h=h(t-1)$$

$$\boxed{\leqslant} \quad \frac{M_3}{3!}\big|h(t+1)thh(t-1)\big|=\frac{M_3}{3!}\big|h^3t(t-1)(t+1)\big|$$

$$g(t)=t(t-1)(t+1)=t(t^2-1)=t^3-t$$

$$g'(t) = 3t^2 - 1 = 0; \;\; t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin [0;1]; \;\; t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$g(0) = 0; \;\; g(1) = 0; \;\; g(\frac{1}{\sqrt{3}}) = (\frac{1}{\sqrt{3}})^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$$

$$|f(x) - L_2(x)| \leqslant \frac{M_3}{3!}\left|h^3 t(t-1)(t+1)\right| \leqslant \frac{M_3}{6}h^3\frac{2}{3\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{M_3}{9\sqrt{3}}h^3$$

<u>*Приклад*</u>

З яким кроком h *потрібно розбити відрізок* $[0;1]$*, щоб кусково-лінійною інтерполяцією знайти наближене значення функції* $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ *для* $\forall\ x \in [0;1]$ *з точністю* $\varepsilon = 10^{-4}$.

<u>*Розв'язок*</u>

$$|f(x) - L_1(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{8} \leqslant \varepsilon \quad \Rightarrow \quad h \leqslant \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}}$$

$$f''(x) = (\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2})' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}(-2x) = \frac{-4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

$$(\frac{-4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2})' = 0; \qquad \frac{-4}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2} + \frac{-4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}(-2x) = 0$$

$$\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}(-4 + 8x^2) = 0 \qquad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \notin [0;1]; \;\; x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

<u>*Розв'язок*</u>

$$f''(x) = \frac{-4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

$$f''(0) = 0 \qquad f''(1) = \frac{-4}{\sqrt{\pi}}e^{-1} \approx -0.83$$

$$f''(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{-4}{\sqrt{2e\pi}} \approx -0.97 \qquad M_2 = \frac{4}{\sqrt{2e\pi}}$$

$$h \leqslant \sqrt{\frac{8\varepsilon}{M_2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{2e\pi}}{4}} = 0.029$$

$h = 0.025 \qquad \Rightarrow \qquad n = (b-a)/h = 40$ *частин*

Інтерполяційний кубічний сплайн

Сплайн

Нехай на $[a,b]$ *задану сітку вузлів* $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. *Функція* $f(x)$ *задана своїми значеннями* $f(x) \qquad f(x_i) = f_i \qquad i = \overline{0,n}/$

Функція $s(x)$ *називається сплайном степеня* m

дефекту k *якщо*

1) $s(x)$ *- m ст.* $\quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad i = \overline{1,n}$

2) $s(x) \in C^{m-k}_{[a;b]}$

3)$s(x_i) = f(x_i) = f_i,\ i = \overline{0,n}/$

Кусково-кубічна ермітова інтерполяція

Нехай функція $f(x) \in C[a,b]$ *задана своїми значеннями* $f(x_i),\ i = \overline{0,n}$ *у вузлах* $x_i \in [a,b],\ i = \overline{0,n}$ *та значеннями своїх похідних* $f'(x_i),\ i = \overline{0,n}$.

Постановка задачі. Побудувати ермітов кубічний сплайн $\Phi_3(x)$, *що відповідає інтерполяційним умовам*

$$\Phi_3(x_i) = f(x_i), \;\; \Phi_3'(x_i) = f'(x_i), \;\; i = \overline{0,n}.$$

Розв'язання. Представимо шуканий сплайн у вигляді

$$\Phi_3(x) = \sum_{i=0}^{n} (y_i \varphi_i^0(x) + y_i' \varphi_i^1(x)).$$

З інтерполяційних умов випливає, що

$$\varphi_i^0(x_j) = \delta_{ij}, \;\; (\varphi_i^0)'(x_j) = 0, \;\; i,j = \overline{0,n},$$

$$\varphi_i^1(x_j) = 0, \;\; (\varphi_i^1)'(x_j) = \delta_{ij}, \;\; i,j = \overline{0,n}$$

Функції $\varphi_i^0(x)$, $\varphi_i^1(x)$ *є поліномами 3-го степеня на відрізку* $[x_{i-1}, x_i]$, *на інших відрізках дорівнюють нулю.*

Нехай $h_i = h$. *Позначимо* $s = \dfrac{x - x_i}{h}$. *Тоді*

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \;\Rightarrow\; s \in [-1, 0],$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}] \;\Rightarrow\; s \in [0, 1].$$

Позначимо $\varphi_1^0(s) = \varphi_i^0(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $s \in [0,1]$. *Побудуємо цю функцію.*

$\varphi_1^0(s)$ *відповідає таким інтерполяційним умовам з кратними вузлами*

$$\varphi_1^0(0) = 1, \; \varphi_1^0(1) = 0, \; (\varphi_1^0)'(0) = (\varphi_1^0)'(1) = 0.$$

Побудуємо таблицю розділених різниць

s	$\varphi(s)$	p.p.I п.	p.p.II п.	p.p.III п.
0	1			
		0	-1	
0	1			2
		-1	1	
1	0			
		0		
1	0			

Отже

$$\varphi_1^0(s) = 1 + 0 \cdot s - 1 \cdot s^2 + 2s^2(s-1) = 2s^3 - 3s^2 + 1.$$

Аналогічно до викладеного вище знаходимо:

2)

$$\varphi_2^0(s) = \varphi_i^0(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i],\ s \in [-1, 0]$$

$$\varphi_2^0(s) = -2s^3 + 3s^2 + 1$$

3)

$$\varphi_1^1(s) = \varphi_i^1(x),\ x \in [x_i, x_{i+1}],\ s \in [0, 1]$$

$$\varphi_1^1(s) = s(s-1)^2$$

4)

$$\varphi_2^1(s) = \varphi_i^1(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i],\ s \in [-1, 0]$$

$$\varphi_2^1(s) = s(s+1)^2$$

Отже

$$\varphi_i^0(x) = \begin{cases} 2s^3 - 3s^2 + 1, & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \\ -2s^3 + 3s^2 + 1, & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \\ 0, & x \leqslant x_{i-1},\ x \geqslant x_{i+1} \end{cases},$$

$$\varphi_i^1(x) = \begin{cases} s(s-1)^2, & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \\ s(s+1)^2, & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \\ 0, & x \leqslant x_{i-1},\ x \geqslant x_{i+1} \end{cases},$$

де $s = \dfrac{x - x_i}{h}$. *Якщо сітка нерівномірна, то в формулах замість* h *буде* h_{i-1} *та* h_i.

Оцінимо $\|f(x) - \Phi_(x)\|_{C[a,b]}$. *Нехай* $f(x) \in C^4[a,b]$. *Розглянемо* $x \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$f(x) - \Phi_3(x) = \frac{f^{(4)}}{4!}(x - x_{i-1})^2(x - x_i)^2$$

Максимум функції $(x - x_{i-1})^2(x - x_i)^2$ *досягається в точці* $\overline{x} = \dfrac{x_i + x_{i-1}}{2}$. *Отже одержимо*

$$|f(x) - \Phi_3(x)| \leqslant \frac{M_4}{4!}(\frac{h^2}{4})^2 = \frac{M_4 h^4}{384}.$$

Теорема. Якщо функція $f(x) \in C^4[a,b]$ *задана в точках* $x_i, ß = \overline{0,n}$ *своїми значеннями* $y_i = f(x_i)$, $y_i' = f'(x_i)$, $i = \overline{0,n}$, *то для кусково-кубічної ермітової інтерполяція* $\Phi_3(x) = \sum_{i=0}^{n}(y_i\varphi_i^0 + y_i'\varphi_i^1(x))$ *має місце* *оцінка*

$$\|f(x)-\Phi_3(x)\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{M_4h^4}{384},$$

$$\|f'(x)-\Phi_3'(x)\|_{C[a,b]} \leqslant MM_4h^3,$$

де M - стала, що не залежить від h.

<u>*Природній кубічний інтерполяційний сплайн*</u>

Функція $s(x)$ називається природнім кубіним інтерполяціним сплайном, якщо:

1) $s(x)$ - 3 ст. $[x_{i-1},x_i]$ $i=\overline{1,n}$

2)

$$s(x)\in C^2[a;b]$$

3) $s(x_i)=f(x_i)$ $i=\overline{0,n}$ - умова інтерполяції

4) $s''(a)=s''(b)=0$ - умова природності

$4^*)$ $s''(a)=A$ $s''(b)=B$

$4^{**})$ $s'(a)=A$ $s'(b)=B$

$$4^{***})\quad \left.\begin{array}{l} s(a)=s(b)\\ s'(a)=s'(b)\\ s''(a)=s''(b)\end{array}\right\}\ \text{умови періодичності}$$

Покажемо, що задача має єдиний розв'язок та побудуємо алгоритм.

Позначимо $m_i = s''(x_i)$, $h_i = x_i - x_{i-1}$. На підставі 1) для $x\in[x_{i-1},x_i]$, $i=\overline{1,n}$ маємо

$$s''(x) = m_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + m_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i}.$$

Проінтегруємо останню рівність

$$s(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i\frac{x_i - x}{h_i} + B_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i},$$

A_i, B_i *- сталі інтегрування, які знайдемо із умов*

$$s(x_{i-1}) = f(x_{i-1}),\ s(x_i) = f(x_i).$$

Підставимо $s(x)$ *в ці умови і дістанемо*

$$m_i\frac{h_i^2}{6} + B_i = f_i,\ m_{i-1}\frac{h_i^2}{6} + A_i = f_{i-1}.$$

Звідки

$$B_i = f_i - \frac{m_i h_i^2}{6},\ \ A_i = f_{i-1} - \frac{m_{i-1}h_i^2}{6}.$$

Підставимо знайдені значення і одержимо для $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$s(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} +$$

$$+(f_{i-1} - \frac{m_{i-1}h_i^2}{6})\frac{x_i - x}{h_i} + (f_i - \frac{m_i h_i^2}{6})\frac{x - x_{i-1}}{h_i},$$

$$m_i - ?$$

Скористаємось властивістю

$$s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0)$$

Знайдемо похідну:

$$s'(x) = -m_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} +$$

$$+\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{m_i - m_{i-1}}{6h_i}$$

$$s'(x_i - 0) = \frac{h_i}{6}m_{i-1} + \frac{h_i}{3}m_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

/

Позначимо $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$*, запишемо* $s(x)$ *для* $x \in [x_i, x_{i+1}]$ *та знайдемо похідну.*

$$s'(x) = -m_i\frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + m_{i+1}\frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}} +$$

$$+\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_{i+1}}.$$

Отже

$$s'(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3}m_i + \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}}.$$

Із умови

$$s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0)$$

одержимо

$$\frac{h_i}{6}m_{i-1}+\frac{h_i}{3}m_i+\frac{f_i-f_{i-1}}{h_i}=-\frac{h_{i+1}}{3}m_i+\frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1}+\frac{f_{i+1}-f_i}{h_{i+1}}$$

Доповнивши ці рівняння рівностями

$$m_0=s''(x_0)=0,\ m_n=s''(x_n)=0$$

отримаємо СЛАР для знаходження невідомих

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{n-1}.$$

$$Am=Hf,$$

де

$$m=\begin{pmatrix} m_1\\ m_2\\ \cdots\\ m_{n-1}\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} f_0\\ f_1\\ \cdots\\ f_n\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & \frac{h_4}{6} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3}
\end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} & (-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}) & \frac{1}{h_2} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{h_2} & (-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{h_{n-2}} & (-\frac{1}{h_{n-2}} - \frac{1}{h_{n-1}}) & \frac{1}{h_{n-1}} & 0 \\ \cdots & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & (-\frac{1}{h_{n-1}} - \frac{1}{h_n}) & \frac{1}{h_n} \end{matrix}\right)$$

Властивості матриці A.

Матриця A симетрична і для її елементів a_{ij}, $i, j = \overline{1, n-1}$ виконуються співвідношення

$$\min_i(|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|) = q > 0,$$

$$q = \min(\frac{h_1}{3} + \frac{h_2}{6}, \min_{i=2,\ldots,n-2} \frac{h_i + hi + 1}{6}, \frac{h_n}{3} + \frac{h_{n-1}}{6})$$

Матриця A із строгою діагональною перевагою.

Лема. Матриця зі строгою діагональною перевагою невиролджена, причому

$$\|A^{-1}\| = \max_i \sum_j |a_{ij}^{(-1)}| \leqslant \min_i \left(|a_{ij}| - \sum_{i \neq j} |a_{ij}|\right)^{-1} = q^{-1}$$

Чисельне диференціювання

Постановка задачі: за заданими значеннями функції $f(t)$ в точках x_i, $i = \overline{0,n}$ і за заданими x, k знайти $f^{(k)}(x)$, $k \geqslant 1$ та оцінити похибку.

Одна із ідей наступна: якщо функція $\varphi(x)$ наближує функцію $f(x)$ в певному розумінні (це може бути інтерполяційний поліном, сплайн), то покладають $f^{(k)}(x) \approx \varphi^{(k)}(x)$ у заданій точці x.

Побудова формул чисельного диференціювання. Найпростіші формули можна дістати за допомогою інтерполяційних формул. Якщо

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}(x)$$

інтерполяційний многочлен для функції $f(x)$, $l_{i,n}(x) = \dfrac{\omega_{n+1}}{(x - x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$ - фундаментальний інтерполяційний многочлен, то

$$f^{(k)}(x) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i),$$

$$L_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_{i,n}^{(k)}(x)$$

де $c_i = l_{i,n}^{(k)}(x)$.

Зауважимо, що задача чисельного диференціювання не є коректною в $C[a,b]$*, оскільки немає неперервної залежності норми похідної від норми функції. Проілюструємо це на прикладі.*

Нехай $f(x) \in C[a,b]$ *та* $\tilde{f}(x) \in C[a,b]$ *зв'язані співвідношенням*

$$\tilde{f}(x) = f(x) + n^{-1} sin(n^2(x-a)),$$

тоді

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |\frac{1}{n} sin(n^2(x-a))| \leqslant \frac{1}{n} \to 0,\ n\to\infty,$$

але

$$\|f'(x) - \tilde{f}'(x)\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |ncos(n^2(x-a))| \leqslant n \to \infty,\ n\to\infty.$$

Нехай $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f(x_0;x_1) + \cdots + (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})f(x_0;x_1;\ldots;x_n)$$

$$R_n(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)f(x;x_0;x_1;\ldots;x_n)$$

$$f^k(x) = P_n^k(x) + R_n^k(x),$$

де похідна від $R_n(x)$ за допомогою формули Лейбніца зображується так

$$R_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{(i)}(x; x_0; \ldots; x_n)\omega_{n+1}^{(k-i)}(x)$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Нехай функція $g(x) \in C^k[a, b]$. Тоді

$$g(x; x + \varepsilon, \ldots, x + q\varepsilon) = \frac{g^{(q)}(x_\varepsilon)}{q!},$$

де $x \leqslant x_\varepsilon \leqslant x + q\varepsilon$. Одержимо

$$g^{(q)} = q! \lim_{\varepsilon \to 0} g(x; x + \varepsilon, \ldots, x + q\varepsilon)$$

Отже за означенням розділеної різниці за краними вузлами

$$(f(x; x_0, \ldots; x_n))^{(q)} = q! \lim_{\varepsilon \to 0} f(x; x + \varepsilon, \ldots, x + q\varepsilon; x_0; \ldots; x_n) =$$

$$= q! f(\underbrace{x; \ldots; x}_{q+1}; x_0; \ldots; x_n)$$

$$R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!i!} i! f(x;\ldots;x;x_0;\ldots;x_n)\omega_{n+1}^{(k-i)}(x).$$

Виражаючи розділену різницю за допомогою похідної дістанемо

$$|R^{(k)}(x)| = |f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!(n+i+1)!} \max_{\xi\in[y_1,y_2]} |f^{(n+i+1)}(\xi)||\omega_{n+1}^{(k-i)}(x)|,$$

де $y_1 = \min(x, x_0, \ldots, x_n)$, $y_2 = \max(x, x_0, \ldots, x_n)$.

Розглянемо таке розміщення вузлів, при якому $x_i - x_{i-1} = O(h)$, $i = \overline{1,n}$. *Сітка вузлів згущається, якщо* $h \to 0$. *При фіксованому* n *величина* $\omega_{n+1}^{(j)}(x)$ *є сумою добутків, у кожному з яких* $n+1-j$ *множників порядку* $O(h)$ *кожен, а тому* $\omega_{n+1}^{(j)}(x) = O(h^{n+1-j})$. *Отже*

$$R_n^{(k)}(x) = f(x;x_0;\ldots;x_n)\omega_{n+1}^{(k)}(x) + O(h^{n+2-k}) = O(h^{n+1-k}).$$

Якщо точка x *така, що* $\omega_{n+1}^{(k)}(x) = 0$, *то порядок точності формули чисельного диференціювання збільшується на одиницю. Тому точки, в яких* $\omega_{n+1}^{(k)}(x) = 0$, *називають точками підвищеної точності.*

Теорема. Нехай $p = n+1-k$ *- парне, а вузли в* *формулі чисельного диференціювання вибрано так, що вони розміщені симетрично відносно точки x. Тоді x є однією з точок підвищеної точності.*

$$P_n(x) = f(x_0)+(x-x_0)f(x_0;x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0;x_1;x_2)+$$

$$+\cdots+(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})f(x_0;x_1;\ldots;x_n)$$

$$f'(x) \approx f(x_0;x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

$$f''(x) \approx 2f(x_0;x_1;x_2) = \frac{2}{x_1-x_0}\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(k)}(x) \approx k! f(x_0;x_1;\ldots;x_k) = k!\sum_{i=0}^{k} f(x_i)\prod_{j=0 j\neq i}^{k}(x_i-x_j)^{-1}$$

Неважко помітити, що мінімальна кількість вузлів, необхідна для обчислення k похідної, є $k+1$. Оскільки залишковий член $R_n^{(k)}(x)$ - це многочлен виду $\sum\prod(x-x_i)$ степеня $n+k-1$ відносно x, то кількість точок підвищення точності дорівнює $n+k-1$. В одночленній формулі для k похідної точка підвищеної точності визначається із умови

$$\sum_{i=0}^{k}(x - x_i) = 0,$$

звідки

$$x_i^{(1,k)} = \frac{x_0 + \cdots + x_k}{k+1}.$$

У цій точці на рівномірній сітці з кроком h *або на нерівномірній сітці такій, що* $x_i - x_{i-1} = O(h)$ *одночленна формула має похібку порядку* $O(h^2)$ *замість* $O(h)$.

Якщо $p = n + 1 - k > 2$*, то знайти точки підвищеної точності складно, за винятком окремого випадку, про який йдеться у теоремі.*

Теорема. Нехай $p = n + 1 - k$ *- парне, а вузли в формулі чисельного диференціювання обрано так, що вони розміщені симетрично відносно точки* x*. Тоді* x *є однією із точок підвищеної точності.*

Приклад. Для рівновіддалених вузлів маємо:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{2h} + O(h^2),$$

$$f''(x_1) = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} + O(h^2).$$

В той час

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} + O(h),$$

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} + O(h),$$

де $f_{\overline{x},1} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$ - ліва рінецева похідна,

$f_{x,1} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{h}$ - права рінецева похідна,

$f_{\overset{0}{x},1} = \dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{2h}$ - центральна різницева похідна.

<u>Метод невизначених коефіцієнтів</u>

Найчастіше цей метод застосовують в багатовимірних випадках, коли інтерполяційний поліном не завжди можна записати.

Функція $f(x)$ задана своїми значеннями $f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Похідну $f^{(k)}(x)$ шукаємо у вигляді

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i),$$

де c_i - невідомі сталі і вони обираються таким чином, щоб побудована формула була точною для багаточлена максимально високого степеня.

Нехай

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_i x^j.$$

Будемо вимагати, щоб формула чисельного диференціювання була точною для даного багаточлена. Отже

$$f^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j (x^j)^{(k)} = \sum_{i=0}^{n} c_i \left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j \right) /$$

Для того, щоб рівність виконувалась для будь-якого багаточлена степеня m, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти в правій та лівій частині при a_j були рівними. Оскільки

$$(x^j)^{(k)} = j(j-1)\cdots(j-k-1)x^{j-k},$$

то одержимо систему лінійних рівнянь відносно невідомих c_i

$$j(j-1)\cdots(j-k-1)x^{j-k} = \sum_{i=0}^{m} c_i x_i^j$$

x - точка, в якій обчислюємо k похідну. Якщо $m = n$, то число рівнянь дорівнює числу невідомих, визначник системи - визначник Вандермонда, тому він не дорівнює нулю. Таким чином, завжди можна побудувати формулу чисельного диференціювання з $n+1$ вузлом, що є точною для багаточлена степеня n.

Відмитимо, що при симетричному відносно x розташуванні вузлів, k парному, n - непарному та k непарному, n - парному формула чисельного диференціювання буде точною для поліномів на одиницю більшого степеня.

Приклад 1. Нехай функція $f(x)$ задана своїми значеннями $f(-h)$, $f(0)$, $f(h)$. Побудувати формулу *для обчислення $f'(0)$, що є точною для багаточленів другого степеня.*

Розв'язання. Формулу чисельного диференціювання шукаємо у вигляді

$$f'(0) \approx c_1 f(-h) + c_2 f(0) + c_3 f(h)$$

Складемо систему рівнянь.

Нехай $f(x) = 1$ - поліномі нульового степеня. Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо

$$0 = c_1 + c_2 + c_3.$$

Нехай $f(x) = x$ - поліномі першого степеня. Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо

$$1 = c_1(-h) + c_2 \cdot 0 + c_3(h).$$

Нехай $f(x) = x^2$ - поліномі другого степеня. Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо

$$0 = c_1(-h)^2 + c_2 \cdot 0^2 + c_3(h)^\cdot$$

Маємо систему:

$$0 = c_1 + c_2 + c_3,$$

$$1 = c_1(-h) + c_2 \cdot 0 + c_3(h),$$

$$0 = c_1(-h)^2 + c_2 \cdot 0^2 + c_3(h)^\cdot$$

Розв'язавши її, дістанемо

$$c_1 = -\frac{1}{2h},\ c_2 = 0,\ c_3 = \frac{1}{2h}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти у шукану формулу та отримаємо

$$f'(0) \approx \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$$

Приклад 2. Нехай функція $f(x)$ *задана своїми значеннями* $f(-h)$, $f(0)$, $f(h)$. *Побудувати формулу для обчислення* $f''(0)$, *що є точною для багаточленів другого степеня.*

Розв'язання. Формулу чисельного диференціювання шукаємо у вигляді

$$f''(0) \approx c_1 f(-h) + c_2 f(0) + c_3 f(h)$$

Складемо систему рівнянь.

Нехай $f(x) = 1$ *- поліномі нульового степеня. Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо*

$$0 = c_1 + c_2 + c_3.$$

Нехай $f(x) = x$ *- поліномі першого степеня. Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо*

$$0 = c_1(-h) + c_2 \cdot 0 + c_3(h).$$

Нехай $f(x) = x^2$ *- поліномі другого степеня.*

Підставимо дану функцію у шукану формулу. Одержимо

$$2 = c_1(-h)^2 + c_2 \cdot 0^2 + c_3(h)^{\cdot}$$

Маємо систему:

$$0 = c_1 + c_2 + c_3,$$

$$0 = c_1(-h) + c_2 \cdot 0 + c_3(h),$$

$$2 = c_1(-h)^2 + c_2 \cdot 0^2 + c_3(h)^{\cdot}$$

Розв'язавши її, дістанемо

$$c_1 = \frac{1}{h^2},\ c_2 = -\frac{2}{h^2},\ c_3 = \frac{1}{h^2}$$

Підставимо знайдені коефіцієнти у шукану формулу та отримаємо

$$f''(0) \approx \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}$$

Побудова формул чисельного диференціювання за допомогою розвинення в ряд

Проілюструємо даний метод на конкретному прикладі.

Нехай функція $f(x) \in C^5[a,b]$ задана своїми значеннями в точках x_{i-1}, x_{i+1}, т. т. задано $f(x_{i-1})$, $f(x_{i+1})$. Побудувати формулу чисельного диференціювання для знаходження $f'(x_i)$ та знайти порядок апроксимації.

Розв'язання. Для побудови формули чисельного диференціювання. розкладемо задані значення функції в околі точки, в якій потрібно знайти похідну. Нехай $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i+1} = h = cost$. *Маємо*

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i) + O(h^5)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x_i) + O(h^5)$$

Складаємо лінійну комбінацію останніх виразів таким чином, щоб одержати $f'(x_i)$ *за допомогою заданих значень. Маємо*

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2hf'(x_i) + 2\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_i) + O(h^5)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x_i) + O(h^4)$$

Порядок апроксимації $p = 2$.

Апостеріорні оцінки похибки

Метод Рунге-Ромберга

Загальна ідея методу: маємо деяку наближену формулу $\zeta(x, h)$ *для обчислення величини* $z(x)$ *за її значеннями* *на рівномірній сітці з кроком h, а залишковий член цієї формули визначається за формулою*

$$z(x) - \zeta(x,h) = \psi(x)h^p + O(h^{p+1}),$$

де $\psi(x)h^p$ - головний член похибки.

Наприклад, $z(x) = f'(x)$, $f(x)$ задана своїми значеннями функція.

Нехай $f(x) \in C^5[a,b]$,

$$\zeta(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f_{\overset{0}{x}}(x),$$

тоді

$$z(x) - \zeta(x,h) = f'(x) - f_{\overset{0}{x}}(x) =$$

$$= f'(x) - \left(\frac{f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)}{2h} - \right.$$

$$\left. - \frac{f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + O(h^5)}{2h} \right) =$$

$$= -\frac{h^2}{6}f^{(3)}(x) - \frac{h^4}{60}f^{(5)}(\xi),\ \xi \in [x-h, x+h].$$

Тут $p = 2$, $\psi(x) = -\frac{1}{6}f^{(3)}(x)$. Якщо скористатись тією ж самою наближеною формулою для обчислення $z(x)$, але використовуючи сітку з кроком rh, дістанемо

$$z(x) - \zeta(x, h) = \psi(x)(rh)^p + O((rh)^{p+1}).$$

Віднявши дві похибки дістанемо

$$\zeta(x, h) - \zeta(x, rh) = \psi(x)h^p(r^p - 1) + O(h^{p+1})$$

$$\psi(x)h^p = \frac{\zeta(x, h) - \zeta(x, rh)}{r^p - 1} + O(h^{p+1}).$$

Отже розрахунок на другій сітці дає змогу оцінити похибки на першій сітці з точністю до членів вищого порядку. Із формули

$$z(x) - \zeta(x, h) = \psi(x)h^p + O(h^{p+1}),$$

дістанемо

$$z(x) = \zeta(x, h) + \psi(x)h^p + O(h^{p+1}),$$

підставимо знайдене значення $\psi(x)h^p$ *і одержимо формулу*

$$z(x) = \zeta(x, h) + \frac{\zeta(x, h) - \zeta(x, rh)}{r^p - 1} + O(h^{p+1}),$$

яка дає результат з вищим порядком точності. Таке уточнення називають уточненням за Річардсоном.

Приклад. Нехай функція $y(x) = lgx$ *задана таблицею*

x	$y = lgx$
1	0.000
2	0.301
3	0.478
4	0.602
5	0.699

. Обчислити $y'(3)$.

Розв'язання. Нехай $h = 1$. Скориставшись формулою для ценральної розділеної різниці $\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f_{\substack{0\\x}}(x)$ дістанемо

$$y'(3) = \frac{y(4) - y(2)}{2 \cdot 1} \approx 0.151$$

Збільшемо крок вдвічі ($r = 2$), одержимо

$$y'(3) = \frac{y(5) - y(1)}{2 \cdot 2} \approx 0.175$$

Використовуючи уточнення Річардсона при $p = 2$

$$y'(3) \approx 0/143,$$

що на 2 відсотка відрізняється від шуканого значення $y'(3) = 0.145$.