

带孔洞的多边形求交集算法

樊建华, 黄有群, 刘嘉敏

(沈阳工业大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110023)

摘 要: 为了快速准确地求出多边形之间的交集, 提出了一种求取带孔洞多边形交集的新算法. 把待求的有孔洞多边形分解为若干个实心多边形, 每步只对两个实心多边形进行交、并、差集运算, 不仅简化了多边形的数据结构, 而且还降低了运算的复杂度, 提高了运算速度.

关 键 词: 带孔洞的多边形; 交集算法; 多边形交集

中图分类号: TP 391. 72 文献标识码: A

在计算机的图形学中, 多边形求交集多用于多边形裁剪算法中. 在实际应用中, 人们常会遇到带孔洞的多边形求交集的复杂情况, 如在工程制图中带孔洞的重叠零件的消隐, 优化排料, GIS (地理信息系统) 的相交区域的面积计算等. 但目前的求交算法针对的都是不带孔洞的实心多边形, 只对两个多边形轮廓外环进行操作. 带孔洞的多边形由多环组成, 简单地将实心多边形的求交算法加以推广来同时处理多环是不可行的. 本文将带孔洞的多边形化简为简单多边形分别处理, 减少了运算的复杂性, 同时提高了算法的整体逻辑性. 本文的另一工作是改进和简化了对环的重交点的处理, 这是多边形求交集算法中最复杂的一部分.

1 实心多边形求交集的一般过程

在多边形的求交算法中, 一般把多边形的边界表示为环, 通过对环的处理来实现求交. 环是多边形顶点的有序集合. 对于有孔洞的多边形, 外环 (即外轮廓) 一般采用逆时针方向, 而内环 (孔洞边界) 则按顺时针方向. 交、并、差集的求取过程大致相同, 本文以求交集为例说明其具体过程.

交点是产生新边界的关键, 必须先求出多边形之间的所有交点, 并把每个交点按位置分别插入两个环中. 插入交点时除了说明交点的具体位置外, 还需指明该交点对另一环来说是入点还是出点这一信息, 出入点信息主要是根据交点对某一向量的特征值来判断的. 环中的相邻顶点定义

了多边形的一条有向边, 两环中的两条有向边如有交点, 其特征值由该两边的矢量积方向来定义. 如果矢量积运算结果与 Z 轴方向一致, 把交点的特征值取为 $+1$, 否则取为 -1 . 如平面上环 L_1 的边向量 $a = \{a_1, a_2\}$ 与环 L_2 的边向量 $b = \{b_1, b_2\}$ 有交点 S , 则 S 对向量 a 的特征值由 $a \times b$ 的结果即 $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ 的符号来定义, 而交点 S 对 b 的特征值由 $b \times a$ 的结果即 $(b_1 a_2 - b_2 a_1)$ 的符号来定义. 可见, 根据矢量积的概念, 一交点的特征值可以是符号相反的两数值之一.

在多边形求交算法中, 把相对另一环上边向量来说特征值为正的交点称为该环的入点, 特征值为负的点称为出点. 入点改变环的走向, 当遇到入点时, 跳到另一环上的相同点处, 沿另一环继续往下走. 为了避免繁琐的包容性测试, 求取新环的过程是从某一交点出发的. 下面举例说明实心多边形求取交集的一般过程. 图 1 中有两个多边形, 分别为 $S_1 = \{1\ 2\ 3\ 4\ 1\}$ 和 $S_2 = \{5\ 6\ 7\ 8\ 5\}$, 它们之间的交点为 A 和 B .

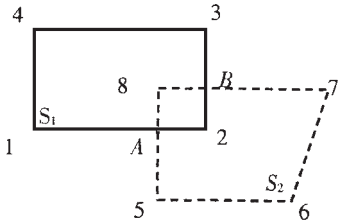


图 1 实心多边形的求交

交点 A 对环 S_1 有负特征值记为 $-A$, 对环 S_2 有正特征值记为 $+A$, 同样交点 B 对环 S_1 称为 $+B$, 对环 S_2 称为 $-B$. 把交点 A 、 B 插入两环后形成新环 $S'_1 = \{1 - A\ 2 + B\ 3\ 4\ 1\}$ 和环 $S'_2 = \{5\ 6\ 7$

收稿日期: 2000 - 12 - 28

作者简介: 樊建华 (1976 -), 女, 内蒙古丰镇人, 沈阳工业大学硕士生.

$-B8+A5\}$, A 、 B 前的符号分别代表 A 、 B 在两环中的特征值. 求交算法的实现过程如下:

从环 S_1 的交点中找一入点, 可知 $+B$ 满足条件. 由于该点的特征值为正, 此时应改变方向跳到环 S_2 上的相同点处, 按环 S_2 的方向走下去得到 $+B \rightarrow -B \rightarrow 8 \rightarrow +A$. 由于 $+A$ 在环 S_2 中且又是入点, 在此改变走向进入环 S_1 , 沿着环 S_1 往下走得到 $-A \rightarrow 2 \rightarrow +B$, $+B$ 是出发时的首点, 求交集过程结束, 所求的交集环为 $S_3 = \{B8A2\}$.

在多边形的求差集运算中, 由于 $A-B = A \cap \bar{B}$ 运算规则, B 环的方向取反后, 与求交集运算过程一样. 在多边形求并集运算中, 把参与运算的两多边形调整为顺时针方向, 按照上述的求交集算法步骤得出的是两多边形的并集.

2 有孔洞多边形求交运算的一般过程

带孔洞的多边形可以表示为一个外环和多个内环, 如果直接对多个环同时处理, 势必会使算法逻辑复杂、计算量大、异常情况难于处理等. 本文提出了一种新的思路, 将带孔洞多边形求交集的问题分解为每次只处理两个环的交、并、差集的多个步骤. 由于每步只处理两个实心多边形, 所以可以利用许多现有的算法和研究结果, 算法的整体逻辑和数据结构也比较简单.

有孔洞多边形的外环(表示多边形轮廓)采用逆时针方向, 内环(表示孔洞)采用顺时针方向, 可描述为如图 2 的数据结构, 其中内环标志位 Flag 的作用在以后说明.

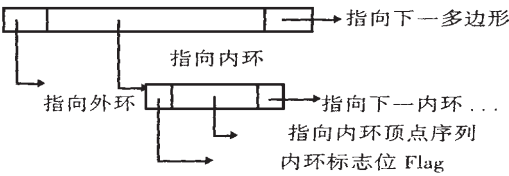


图 2 有孔洞多边形的数据结构

新算法的思路为: 先将两多边形 A 、 B 外环作交集运算, 求得的结果记入交集多边形 C 的数据结构中的外环, 记为 I . 再将 I 与 A 、 B 的各内环逐一求差集. 这里所说的求差集实际上包含三种情况, 如图 3 所示. ①内环 1 与环 I 有交点, 则按上述实心多边形求差集方法处理, 结果环 I 有所

改变. ②内环 2 位于环 I 外部, 不必处理. ③内环 3 位于环 I 内部, 求差集是指将内环 3 整个链入交集多边形的数据结构. 因此在求差集前, 要做包容性测试. 由于下面提到的原因, 求差集运算的结果还不是最终结果. 这里引入一内环标志位 Flag 来判断该内环的位置关系. 初始化 Flag 全为 True, 将作差集运算后的内环 1 和不被外环 I 所包围的内环 2 的 Flag 位全置为 False.

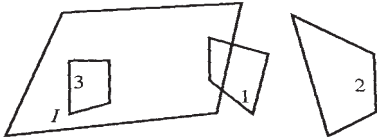


图 3 内环与交集外环 I 的三种关系

内环和交集外环 I 的相互关系随着算法的进展可能发生变化. 如图 4 的内环 3 起初与交集边界没有交点, 只需将其链入交集而不用进一步处理. 但当交集与内环 1 作差集形成新的交集边界后, 内环 3 又与新边界有交点, 需要进一步作差集运算.

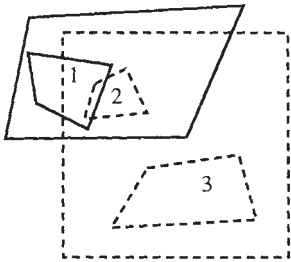


图 4 内环和交集外环的变化关系

为了处理这种情况, 引入一控制变量 Sign 来确定是否进行新一轮的内环位置判断, 当 Sign 的值为 True 时, 继续求与内环的差集, 否则意味着与内环不存在交点, 跳出循环, 结束差集运算.

有时位于多边形边界内的内环数目不只一个, 而且可能重叠, 如图 5 所示. 这种情况下, 对最后剩下的所有内环求并集, 把并集结果作为新多边形的内环. 由于是对内环求并集, 因此在前面把求并集的多边形描述为顺时针方向, 根据公式 $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$, 按照求交集算法对两环运算的结果正好是两内环并集的顺时针方向.

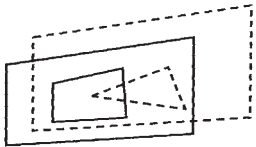


图 5 位于交集边界内的重叠内环

带孔洞多边形的求交集算法如下：

(1) 把多边形内环标志位 Flag 全部置为 True, 初始化 Sign = True；

(2) 求两多边形外环的所有交集,称之为 $P_1, P_2 \dots P_n$ ；

(3) 从 P_1 到 P_n 依次作如下运算；

(4) 判断 Sign 是否为 True,如为 True,则重置 Sign = False,执行下述步骤,否则跳到(8)；

(5) 判断是否存在 Flag = True 的内环,如不存再则转向(3)；

(6) 取一标志位 Flag = True 的内环,判断与外环 $P_i(i = 1, 2, \dots n)$ 是否存在交点；

(7) 如果存在交点,则计算 P_i 与该内环的差集,同时把求得的结果赋值给 P_i ,置 Flag = False, Sign = True; 否则作包容性测试,如果 P_i 不包含该内环,则将其 Flag 置为 False,转向(5)继续求差集；

(8) 把 Flag = True 的内环求并集得结果为 q ；

(9) 所求的多边形交集即为以 P_i 为外环,以 q 为内环的含孔洞多边形；

(10) 最后求得的交集多边形结果是以 $P_1, P_2, \dots P_n$ 为外环,以其相应内环为孔洞的多边形集。

3 结束语

求取带孔洞多边形的交集是实际应用中经常会遇到的问题。本文在原有的对实心多边形的求交算法上，提出了能够处理带有孔洞的多边形的复杂情况，通过每次只处理两个多边形的交、并、差集运算代替了对大量多边形的同时处理，降低了运算的复杂度。

参考文献：

[1] 何援军．计算机图形学算法和实践[M]．长沙: 湖南科学技术出版社, 1990.

[2] 孙家广, 杨常贵．计算机图形学[M]．北京: 清华大学出版社, 1994.

[3] 王志强．多边形的简单性、方向及内外点的判别算法[J]．计算机学报, 1998(2): 183 - 187.

[4] 王爱虎．简单多边形裁剪及交并计算的统一算法[J]．天津大学学报, 1997(7): 281 - 286.

Algorithm for intersection of polygons with holes

FAN Jian-hua, HUANG You-qun, LIU Jia-min
(School of Information Science and Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, China)

Abstract: In order to compute the intersection of polygons rapidly and correctly, this paper pus forward an algorithm for intersection of polygons with holes. The polygons with holes was decomposed into several solid polygons and each time two solid polygons were dealt with ,which not only decreases the computation complication, but also simplifies the data structure of polygon and improves the computation speed.

Key words: polygon with hole; intersection algorithm; intersection of polygon