Álgebra Lineal Computacional

Primer Cuatrimestre 2022

Trabajo Práctico N° 1.

El objetivo de este trabajo práctico es comparar el desempeño de algoritmos de descomposición de matrices para resolución de sistemas de ecuaciones lineales, implementándolos y aplicándolos a distintas matrices. Por esta razón, no está permitido utilizar los comandos `np.linalg.solve` ni `np.linalg.inv` para resolver las consignas.
Vamos a comparar el desempeño de la descomposición LU y la descomposición LDL^T, que es una forma alternativa a Cholesky para descomposición de matrices definidas positivas que no requiere el cálculo de raíces cuadradas.
Descomposición LDL^T Se llamam descomposición LDL^T de una matriz definida positiva $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a la descomposición $A = LDL^T$ con L triangular inferior con $l_{ii} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$ y D una matriz diagonal con valores positivos en la diagonal.
Esta descomposición es única, y la matrices L y D pueden calcularse mediante un algoritmo similar al visto para la descomposición de Cholesky en la clases prácticas.

Ejercicio 1. Deducir fórmulas para las coordenadas de L y D para el caso $n = 3$ tomando

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix},$$

Para el caso general se obtienen las siguientes fórmulas

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_{kk}$$
$$l_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} d_{kk} \right)$$

Ejercicio 2. Implementar un programa que dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ devuelva las dos matrices L y U de la descomposición $A = LU$. No es necesario implementar pivoteo. En caso de que aparezca un 0 en la diagonal en algún paso del algoritmo, imprimir un mensaje de error y devolver las matrices I_n y A.

Ejercicio 3. Implementar las funciones del Ejercicio 1 de la Práctica 3 para resolver sistemas de ecuaciones $Ly = b$ y $Ux = y$ suponiendo que las matrices L y U son triangulares inferior y superior respectivamente y no tienen 0's en la diagonal.

Ejercicio 4. Probar las funciones implementadas tomando una matriz $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ de números aleatorios y un vector $b \in \mathbb{R}^{10}$ de números aleatorios. Calcular la norma-1 del error $e = A\tilde{x} - b$ para $\tilde{x}$ la solución calculada.
Sugerencia: utilizar el comando `numpy.random.rand` para generar matrices y vectores aleatorios.

Ejercicio 5. Implementar un programa que reciba una matriz A definida positiva (simétrica) y devuelva las matrices L y D de la descomposición $A = LDL^T$.

Ejercicio 6. Implementar una función que dada una matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y un vector $b \in \mathbb{R}^n$, devuelva el vector x solución del sistema $Dx = b$.
Alternativamente, el programa puede recibir el vector $d \in \mathbb{R}^n$ con los valores de la diagonal de D, en lugar de la matriz D, lo que resulta en general más eficiente.

Ejercicio 7. Dada una matriz inversible $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que la matriz $Q = A^T A$ es una matriz definida positiva.
Sugerencia: probar que $x^T Mx > 0$ para todo $x \neq 0$.

Ejercicio 8. Probar la implementación realizada de la descomposición LDL^T para resolver un sistema $Qx = b$ tomando una matriz $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ de números aleatorios, $Q = A^T A$ y un vector $b \in \mathbb{R}^{10}$ de números aleatorios. Calcular la norma-1 del error $e = Q\tilde{x} - b$ para $\tilde{x}$ la solución calculada.

Ejercicio 9. Calcular la descomposición LU de la matriz Q. ¿Qué relación encuentra entre ambas descomposiciones?

En los siguientes ejercicios, queremos verificar que en general la resolución de sistemas dados por matrices definidas positivas son más estables que los sistemas generales.

Ejercicio 10. A partir de la matriz Q construida en el ejercicio 8, construir una matriz W intercambiando las columnas de Q colocando las primeras 5 columnas de Q al final. Es decir $W_i = Q_{i+5}$ para $1 \leq i \leq 5$ y $W_i = Q_{i-5}$ para $6 \leq i \leq 10$ (donde Q_i y W_i son las columnas de Q y W respectivamente).
Calcular la descomposición LU de W y utilizarla para resolver el sistema $Wx = b$. Calcular la norma-1 del error $e = W\tilde{x} - b$ para $\tilde{x}$ la solución calculada.
¿En cuál de los dos casos obtuvo menor norma del error?

Ejercicio 11. Calcular mediante comandos de Python la condición-1 de las matrices Q y W. ¿Qúé relación observa? ¿Cómo puede justificarlo?

Para obtener una conclusión mas confiable de los experimentos, repetimos el experimento 100 veces en matrices de mayor tamaño y calculamos la norma promedio de los errores.

Ejercicio 12. Repetir 100 veces el siguiente experimento.

1. Tomar una matriz $A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$ de números aleatorios y un vector $b \in \mathbb{R}^{100}$ de números aleatorios.
2. Tomar $Q = A^T A \in \mathbb{R}^{100\times 100}$.
3. Calcular la descomposición $Q = LDL^T$ y utilizarla para resolver el sistema $Qx = b$.
4. Calcular la norma-1 del error $e = Q\tilde{x} - b$ para $\tilde{x}$ la solución calculada.
5. Construir una matriz W a partir de Q con $W_i = Q_{i+50}$ para $1 \leq i \leq 50$ y $W_i = Q_{i-50}$ para $51 \leq i \leq 100$ (donde Q_i y W_i son las columnas de Q y W respectivamente).
6. Calcular la descomposición $W = LU$ y utilizarla para resolver el sistema $Wx = b$.
7. Calcular la norma-1 del error $e = W\tilde{x} - b$ para $\tilde{x}$ la solución calculada.

Calcular el error promedio en cada caso. Sugerencia: utilizar dos variables auxiliares `sumaQ` y `sumaW` y sumar en cada iteración la norma del error obtenido a la variable correspondiente.
¿En qué caso obtuvo un error promedio menor? ¿Coincide el resultado obtenido con lo esperado?