Progetto reti

sistema a coda M/M/c

7 novembre 2023

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
- EX LABORE FRUCTUS -

Simone Acuti - 183843 - simone.acuti@edu.unife.it
Leonardo Lodi - 183845 - leonardo03.lodi@edu.unife.it
Marius Ceban - 187612 - marius.cebann@edu.unife.it

Indice

1 Obbiettivo

Questa relazione è stata scritta per completare l'insieme di elementi che costituiscono il progetto di reti di telecomunicazioni.

L'obbiettivo legato allo svolgimento di questo compito è quello di comprendere il comportamento del sistema a coda M/M/c.
Integrato al progetto deve essere presente un simulatore che descriva al meglio il comportamento del sistema stesso.

Sulla repository di GitHub presente al seguente link è presente un file di nome README.md che spiega nel dettaglio i passaggi da eseguire per poter provare il simulatore.

2 Sviluppo del simulatore M/M/c

Lo sviluppo del simulatore è avvenuto tramite Django, ovvero un framework open-source scritto in Python per lo sviluppo di applicazioni web. La peculiarità di questo framework è la possibilità di implementare diversi linguaggi contemporaneamente tra cui:

- Per la stesura della relazione è stato utilizzato LaTex.
- Le varie operazioni di calcolo presenti nel simulatore derivano dall'utilizzo di Python.
- Infine per la realizzazione dell'interfaccia grafica abbiamo utilizzato Javascript unito ad HTML e CSS..

3 Variabili e dati noti

I dati di interesse comune forniti sono i seguenti:

- La lettera c in questo sistema descrive il numero di servitori.
- Il tasso di servizio viene rappresentato da μ e descrive le utenze per ogni secondo [pkt/s].
- L'ultimo dato noto viene descritto dalla lettera λ e rappresenta il tasso di arrivi per ogni secondo [pkt/s].

Questi dati torneranno utili in seguito nella sezione dedicata ai cenni teorici e calcoli.

4 Calcoli e cenni teorici

Vediamo un caso generale relativo alla risoluzione di un sistema a coda M/M/c. Come è stato definito in precedenza il numero dei servitori è c, questo implica che il tasso di servizio può arrivare fino a cμ.

$$\begin{aligned} \lambda k &= \lambda \\ \mu_k &= min\{k\mu, c\mu\} \\ \rho &= \frac{\lambda}{\mu_{tot}} \end{aligned}$$

Da cui:

$$P_k = \begin{cases} P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu};\ k \leq c \\ \\ P_0 \prod_{i=0}^{c-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{j=c}^{k-1} \frac{\lambda}{c\mu};\ \mu > c \end{cases} \quad P_k = \begin{cases} P_0 \ (\frac{\lambda}{\mu})^k \frac{1}{k!};\ k \leq c \\ \\ P_0 \ (\frac{\lambda}{\mu})^k \frac{1}{c!c^{k-c}};\ k > c \end{cases}$$

$$E\{\lambda\}\ E\{T_x\} = \frac{\lambda}{\mu}$$

Con massimo tasso di smaltimento c, quindi:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

dove:

$$c\mu = \mu_{tot}$$

$$P_k = \begin{cases} P_0 \frac{(c\rho)^k}{k!};\ k \leq c \\ \\ P_0 \frac{(c\rho)^k}{c!\ c^{k-c}};\ k > c \end{cases} = \begin{cases} P_0 \frac{(c\rho)^k}{k!};\ k \leq c \\ \\ P_0 \frac{\rho^k\ c^c}{c!};\ k > c \end{cases}$$

$$P_0 = [\textstyle\sum_{k=0}^{c-1}(\frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1 - \rho})]^{-1} \qquad (P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k) = 1$$

Un pkt/ut va in coda se ce ne sono già c nel sistema che stanno occupando tutti i server.

$$\text{P\{queue\}} = \sum_{k=c}^{\infty} P_k = P_0 \frac{(c\ \rho)^c}{c!\ (1-\rho)} = \frac{\frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1 - \rho}}{\sum_{k=0}^{c-1}(\frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1 - \rho})}$$

Formula di C-Erlang $\rightarrow$ $C(c\ ,\ A) = \frac{\frac{A^c}{c!}\ \frac{1}{1\ -\ \frac{A}{c}}}{\sum_{k=0}^{c-1}(\frac{A^k}{k!}\ +\ \frac{A^c}{c!}\ \frac{1}{1\ -\ \frac{A}{c}})}$ P{queue} $=$ $C(c\ ,\ c\rho)\ [c\rho\ =\ \frac{1}{\mu}]$ dove c è il numero di server;

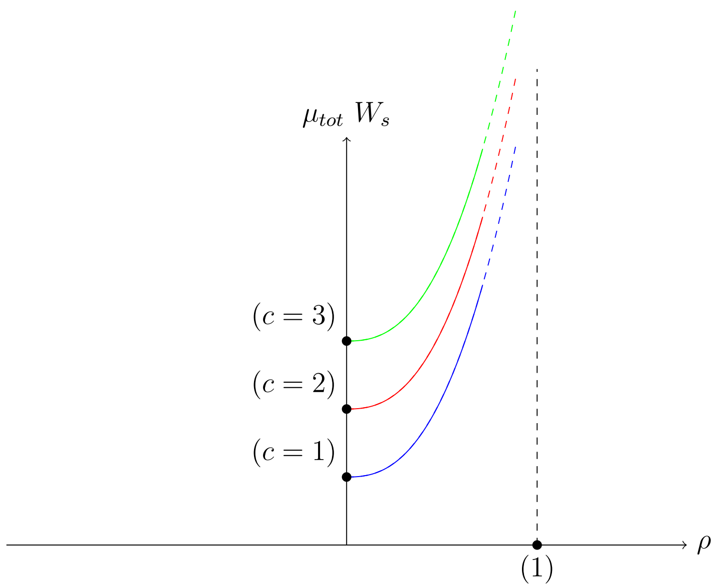
$$A\ =\ c\rho; \qquad\qquad C(c\ , A)\ =\ 0\ se\ \rho\ =\ 0.$$

$L_q\ =\ E\{q\}\ =\ \sum_{k=c}^{\infty}(k-c)\ P_k\ =\ C(c\ ,\ c\rho)\ \frac{\rho}{1-\rho}$
L_q rappresenta il numero medio di pkt/ut in coda.
$(k-c)$ rappresenta il numero di ut. in coda nello stato k.

$L_x\ =\ E\{x\}\ =\ c\rho\ \rightarrow$ numero medio di pky/ut. in servizio $(x\ =\ k-q)$.
$L_s\ =\ L_q\ +\ L_x\ =\ [\frac{C(c\ ,\ c\rho)}{1-\rho}\ +\ c]\ \rho$ $\rightarrow$ numero medio di pkt/ut. nel sistema.

$W_q\ =\ \frac{L_q}{E\{\lambda\}}\ =\ \frac{C(c\ ,\ c\rho)}{\mu_{tot}(1-\rho)}$

$W_s\ =\ \frac{L_s}{E\{\lambda\}}\ =\ \frac{C(c\ ,\ c\rho)\ +\ c(1-\rho)}{\mu_{tot}(1-\rho)}$



Osservazione: conviene un sistema con pochi server veloci rispetto ad uno con numerosi server lenti.