Progetto Reti di Tlc

sistema a coda M/M/c

8 novembre 2023

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

- EX LABORE FRUCTUS -

Simone Acuti - 183843 - simone.acuti@edu.unife.it
Leonardo Lodi - 183845 - leonardo03.lodi@edu.unife.it
Marius Ceban - 187612 - marius.cebann@edu.unife.it

1 Obbiettivo

Questa relazione è stata redatta per completare l'insieme di elementi che costituiscono il progetto di reti di telecomunicazioni.

L'obbiettivo legato allo svolgimento di questo compito è quello di comprendere il comportamento del sistema a coda M/M/c.
Integrato al progetto deve essere presente un simulatore che descriva al meglio il comportamento del sistema stesso.

Sulla repository di GitHub presente nel link in basso è reperibile un file di nome README.md che spiega nel dettaglio i passaggi da eseguire per poter provare il simulatore.

https://github.com/acuti03/progetto-reti

2 Sviluppo del simulatore M/M/c

Lo sviluppo del simulatore è avvenuto tramite Django, ovvero un framework open-source scritto in Python per lo sviluppo di applicazioni web. La peculiarità di questo framework è la possibilità di implementare diversi linguaggi contemporaneamente:

- Per la stesura della relazione è stato utilizzato LaTex.
- Le varie operazioni di calcolo presenti nel simulatore derivano dall'utilizzo di Python.
- Infine per la realizzazione dell'interfaccia grafica abbiamo utilizzato Javascript unito ad HTML e CSS.

3 Variabili e dati noti

I dati di interesse comune forniti sono i seguenti:

- La lettera c descrive il numero di servitori nel sistema.
- Il tasso di servizio viene rappresentato da μ e descrive le utenze per ogni secondo [pkt/s].
- La lettera λ rappresenta il tasso di arrivi per ogni secondo [pkt/s].

Questi dati torneranno utili in seguito nella sezione dedicata ai cenni teorici e calcoli.

4 Calcoli e cenni teorici

Vediamo un caso generale relativo alla risoluzione di un sistema a coda M/M/c. In questo caso abbiamo un numero finito c di servitori, ovviamente maggiore di uno. Di conseguenza il tasso di servizio può arrivare fino a $c\mu$.

Il ritmo degli arrivi non dipende dallo stato. $\rightarrow \lambda k \;=\; \lambda$

Il ritmo di servizio invece dipende dallo stato. $\rightarrow \mu_k \;=\; \min\,\{k\mu, c\mu\}$

$$P_k \;=\; \begin{cases} P_0\; \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu};\; k \leq c \\ \\ P_0\; \prod_{i=0}^{c-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu}\; \prod_{j=c}^{k-1} \frac{\lambda}{c\mu};\; \mu > c \end{cases} \quad P_k \;=\; \begin{cases} P_0\; (\frac{\lambda}{\mu})^k\; \frac{1}{k!};\; k \leq c \\ \\ P_0\; (\frac{\lambda}{\mu})^k\; \frac{1}{c!c^{k-c}};\; k > c \end{cases}$$

P_k = Probabilità di essere nello stato k.

$$E\{\lambda\}\; E\{T_x\} \;=\; \frac{\lambda}{\mu}$$

$E\{\lambda\} \rightarrow$ Ritmo medio degli arrivi.
$E\{T_x\} \rightarrow$ Tempo medio di servizio.

Il fattore di utilizzo è ρ (rho) $\rightarrow \rho \;=\; \frac{\lambda}{\mu_{tot}}$

Con massimo tasso di smaltimento c, quindi:

$$c\mu = \mu_{tot}$$

Dove $c\mu$ rappresenta il tasso complessivo di servizio, di conseguenza riferito a μ_{tot}.

$$P_k \;=\; \begin{cases} P_0\; \frac{(c\rho)^k}{k!};\; k \leq c \\ \\ P_0\; \frac{(c\rho)^k}{c!\; c^{k-c}};\; k > c \end{cases} \;=\; \begin{cases} P_0\; \frac{(c\rho)^k}{k!};\; k \leq c \\ \\ P_0\; \frac{\rho^k\; c^c}{c!};\; k > c \end{cases}$$

$$P_0 \;=\; [\textstyle\sum_{k=0}^{c-1}(\frac{(c\rho)^k}{k!} \;+\; \frac{(c\rho)^c}{c!}\; \frac{1}{1\;-\;\rho})]^{-1} \qquad (P_0 \;+\; \textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\; P_k) \;=\; 1$$

Un pkt/ut va in coda se ce ne sono già c nel sistema che stanno occupando tutti i server.

P{queue} $= \sum_{k=c}^{\infty} P_k = P_0 \frac{(c\ \rho)^c}{c!\ (1-\rho)} = \frac{\frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1\ -\ \rho}}{\sum_{k=0}^{c-1}(\frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1\ -\ \rho})}$
P{queue} = Probabilità di entrare in coda.

Formula di C-Erlang $\rightarrow C(c\ ,\ A) = \frac{\frac{A^c}{c!} \frac{1}{1\ -\ \frac{A}{c}}}{\sum_{k=0}^{c-1}(\frac{A^k}{k!} + \frac{A^c}{c!} \frac{1}{1\ -\ \frac{A}{c}})}$
P{queue} $= C(c\ ,\ c\rho)\ [c\rho = \frac{1}{\mu}]$
Dove $c \rightarrow$ Numero di server.

$$A = c\rho; \qquad\qquad C(c\ , A) = 0\ se\ \rho = 0.$$

$L_q = E\{q\} = \sum_{k=c}^{\infty}(k-c)\ P_k = C(c\ ,\ c\rho)\ \frac{\rho}{1-\rho}$
$L_q \rightarrow$ Rappresenta il numero medio di pkt/ut in coda.
$(k-c) \rightarrow$ Rappresenta il numero di ut. in coda nello stato k.

$L_x = E\{x\} = c\rho$
$L_x \rightarrow$ Numero medio di pky/ut. in servizio ($x = k-q$).

$L_s = L_q + L_x = [\frac{C(c\ ,\ c\rho)}{1-\rho} + c]\ \rho$
$L_s \rightarrow$ Numero medio di pkt/ut. nel sistema.

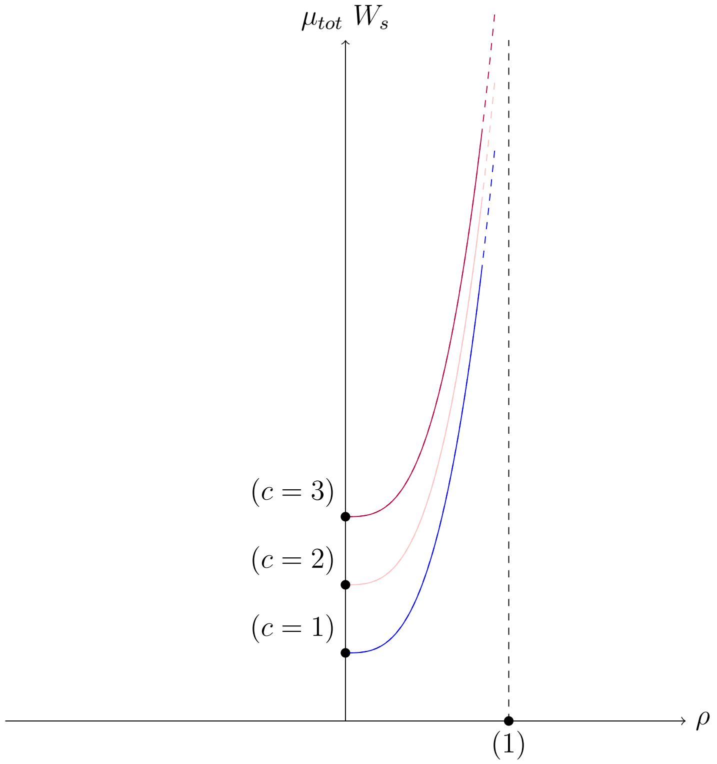
Dalla relazione di Little:

$W_q = \frac{L_q}{E\{\lambda\}} = \frac{C(c\ ,\ c\rho)}{\mu_{tot}(1-\rho)}$

$W_s = \frac{L_s}{E\{\lambda\}} = \frac{C(c\ ,\ c\rho)\ +\ c(1-\rho)}{\mu_{tot}(1-\rho)}$

5 Implementazione Grafica e Conclusione

Rappresentato come segue: sull'asse delle ordinate inserisco il approssimativamente il valore della moltiplicazione fra μ_{tot} e W_s, mentre sull'asse delle ascisse inserisco il valore di ρ.



Se incremento ogni volta di una singola unità il valore di c, ed inserisco questo dato nella formula di W_s, posso notare che gli andamenti hanno tutti un asintoto verticale che tende ad infinito per ρ che tende ad uno.

$\mu_{tot} \cdot (W_s = \frac{L_s}{E\{\lambda\}} = \frac{C(c\ ,\ c\rho)\ +\ c(1-\rho)}{\mu_{tot}(1-\rho)})$

Se confrontiamo i risultati del nostro sistema M/M/c con un sistema M/M/1 dotato di un solo servitore, si può notare che dal punto di vista dell'attesa nel sistema convengono pochi servitori veloci rispetto a numerosi servitori lenti.