

# Progetto reti

## sistema a coda M/M/c

7 novembre 2023



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI FERRARA  
- EX LABORE FRUCTUS -

**Simone Acuti** - 183843 - [simone.acuti@edu.unife.it](mailto:simone.acuti@edu.unife.it)

**Leonardo Lodi** - 183845 - [leonardo03.lodi@edu.unife.it](mailto:leonardo03.lodi@edu.unife.it)

**Marius Ceban** - 187612 - [marius.cebann@edu.unife.it](mailto:marius.cebann@edu.unife.it)

## Indice

1	Obbiettivo	3
2	Sviluppo del simulatore M/M/c	3
3	Variabili e dati noti	3
4	Calcoli e cenni teorici	4
5	Grafico e conclusione	6

## 1 Obbiettivo

Questa relazione è stata scritta per completare l'insieme di elementi che costituiscono il progetto di reti di telecomunicazioni.

L'obbiettivo legato allo svolgimento di questo compito è quello di comprendere il comportamento del sistema a coda M/M/c.

Integrato al progetto deve essere presente un simulatore che descriva al meglio il comportamento del sistema stesso.

Sulla repository di GitHub presente al seguente link è presente un file di nome README.md che spiega nel dettaglio i passaggi da eseguire per poter provare il simulatore.

## 2 Sviluppo del simulatore M/M/c

Lo sviluppo del simulatore è avvenuto tramite Django, ovvero un framework open-source scritto in Python per lo sviluppo di applicazioni web. La peculiarità di questo framework è la possibilità di implementare diversi linguaggi contemporaneamente tra cui:

- Per la stesura della relazione è stato utilizzato LaTeX.
- Le varie operazioni di calcolo presenti nel simulatore derivano dall'utilizzo di Python.
- Infine per la realizzazione dell'interfaccia grafica abbiamo utilizzato Javascript unito ad HTML e CSS..

## 3 Variabili e dati noti

I dati di interesse comune forniti sono i seguenti:

- La lettera  $c$  in questo sistema descrive il numero di servitori.
- Il tasso di servizio viene rappresentato da  $\mu$  e descrive le utenze per ogni secondo [pkt/s].
- L'ultimo dato noto viene descritto dalla lettera  $\lambda$  e rappresenta il tasso di arrivi per ogni secondo [pkt/s].

Questi dati torneranno utili in seguito nella sezione dedicata ai cenni teorici e calcoli.

## 4 Calcoli e cenni teorici

Vediamo un caso generale relativo alla risoluzione di un sistema a coda M/M/c. In questo caso abbiamo un numero finito  $c$  di servitori, ovviamente maggiore di uno. Di conseguenza il tasso di servizio può arrivare fino a  $c\mu$ .

Il ritmo degli arrivi non dipende dallo stato.  $\rightarrow \lambda_k = \lambda$

Il ritmo di servizio invece dipende dallo stato.  $\rightarrow \mu_k = \min \{k\mu, c\mu\}$

$$P_k = \begin{cases} P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu}; & k \leq c \\ P_0 \prod_{i=0}^{c-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{j=c}^{k-1} \frac{\lambda}{c\mu}; & \mu > c \end{cases} \quad P_k = \begin{cases} P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}; & k \leq c \\ P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{c!c^{k-c}}; & k > c \end{cases}$$

$P_k$  = Probabilità di essere nello stato  $k$ .

$$E\{\lambda\} E\{T_x\} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$E\{\lambda\} \rightarrow$  Ritmo medio degli arrivi.

$E\{T_x\} \rightarrow$  Tempo medio di servizio.

Il fattore di utilizzo è  $\rho$  (rho)  $\rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu_{tot}}$

Con massimo tasso di smaltimento  $c$ , quindi:

$$c\mu = \mu_{tot}$$

Dove  $c\mu$  rappresenta il tasso complessivo di servizio, di conseguenza riferito a  $\mu_{tot}$ .

$$P_k = \begin{cases} P_0 \frac{(c\rho)^k}{k!}; & k \leq c \\ P_0 \frac{(c\rho)^k}{c! c^{k-c}}; & k > c \end{cases} = \begin{cases} P_0 \frac{(c\rho)^k}{k!}; & k \leq c \\ P_0 \frac{\rho^k c^c}{c!}; & k > c \end{cases}$$

$$P_0 = \left[ \sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1} \quad (P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k) = 1$$

Un pkt/ut va in coda se ce ne sono già  $c$  nel sistema che stanno occupando tutti i server.

$$P\{\text{queue}\} = \sum_{k=c}^{\infty} P_k = P_0 \frac{(c\rho)^c}{c! (1-\rho)} = \frac{\frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}}$$

$P\{\text{queue}\} = \text{Probabilità di entrare in coda.}$

Formula di C-Erlang  $\rightarrow C(c, A) = \frac{\frac{A^c}{c!} \frac{1}{1-\frac{A}{c}}}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^c}{c!} \frac{1}{1-\frac{A}{c}}}$

$P\{\text{queue}\} = C(c, c\rho) [c\rho = \frac{1}{\mu}]$   
Dove  $c \rightarrow \text{Numero di server.}$

$$A = c\rho; \quad C(c, A) = 0 \text{ se } \rho = 0.$$

$$L_q = E\{q\} = \sum_{k=c}^{\infty} (k-c) P_k = C(c, c\rho) \frac{\rho}{1-\rho}$$

$L_q \rightarrow \text{Rappresenta il numero medio di pkt/ut in coda.}$   
 $(k-c) \rightarrow \text{Rappresenta il numero di ut. in coda nello stato k.}$

$$L_x = E\{x\} = c\rho$$

$L_x \rightarrow \text{Numero medio di pky/ut. in servizio } (x = k - q).$

$$L_s = L_q + L_x = \left[ \frac{C(c, c\rho)}{1-\rho} + c \right] \rho$$

$L_s \rightarrow \text{Numero medio di pkt/ut. nel sistema.}$

Dalla relazione di Little:

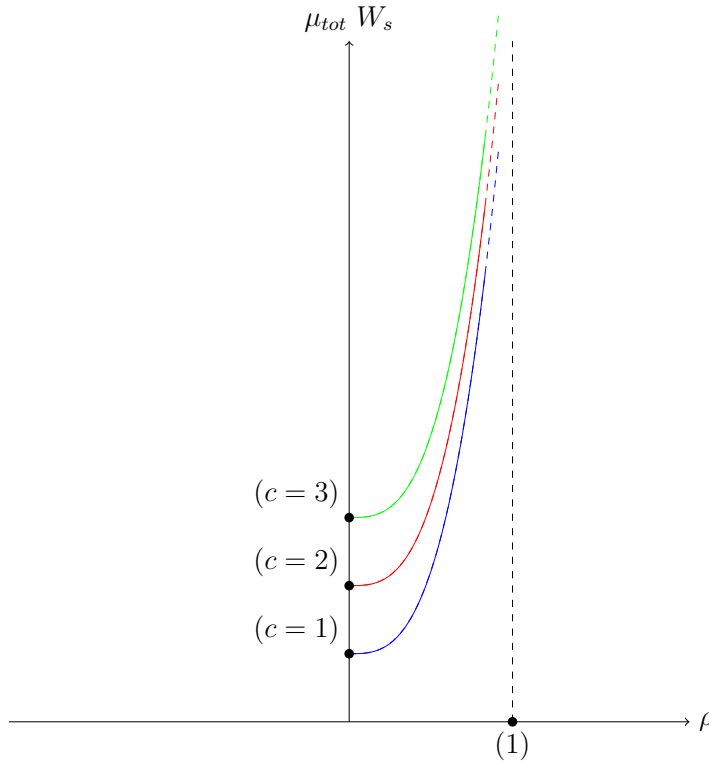
$$W_q = \frac{L_q}{E\{\lambda\}} = \frac{C(c, c\rho)}{\mu_{tot}(1-\rho)}$$

$$W_s = \frac{L_s}{E\{\lambda\}} = \frac{C(c, c\rho) + c(1-\rho)}{\mu_{tot}(1-\rho)}$$

## 5 Grafico e conclusione

Sull'asse delle ordinate inserisco il approssimativamente il valore della moltiplicazione fra  $\mu_{tot}$  e  $W_s$ .

Sull'asse delle ascisse inserisco il valore di  $\rho$ .



Se incremento ogni volta il valore di  $c$  di uno e lo inserisco nella formula di  $W_s$ , posso notare che gli andamenti hanno tutti un asintoto verticale che tende ad infinito per  $\rho$  che tende ad uno.

$$\mu_{tot} \cdot (W_s = \frac{L_s}{E\{\lambda\}} = \frac{C(c, c\rho) + c(1-\rho)}{\mu_{tot}(1-\rho)})$$

Se confrontiamo i risultati del nostro sistema M/M/c con un sistema M/M/1 dotato di un solo servitore, si può notare che dal punto di vista dell'attesa nel sistema convengono pochi servitori veloci rispetto a numerosi servitori lenti.