
Analisis Cuantitativo en Finanzas

Manu Maurette, 2022

Clase 7: Griegas, Diferencias Finitas

El Browniano Geométrico

El movimiento browniano geométrico que le da la dinámica al retorno del activo:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t); \quad S(0) = S_0$$

se puede expresar de la siguiente manera

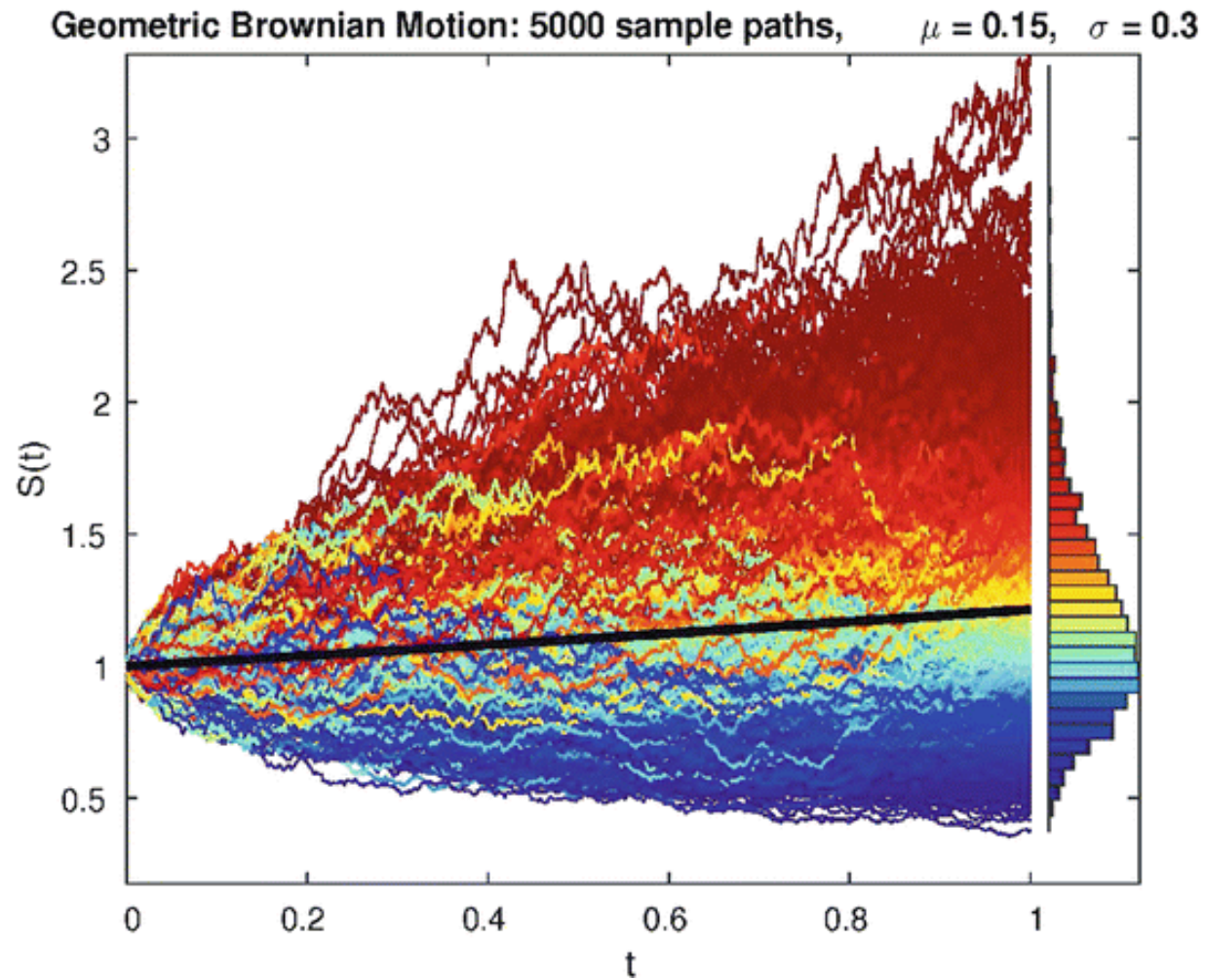
$$S(t) = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$$

Con $W(t)$ un M.B. y $W(t) = W(t) - W(0) \sim N(0, t) = \sqrt{t}N(0, 1)$

Con lo cual, a tiempo final, tenemos una expresión para $S(T)$

$$S(T) = S_0 e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z}, \text{ con } Z \sim N(0, 1).$$

Simulaciones de un Browniano Geometrico



Ecuación de Black Scholes

Recordemos la ecuación de Black Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC, \quad 0 < t \leq T, \quad S > 0$$

$$C(S, T) = (S - K)^+$$

De Black Scholes a la Ec. del Calor (1/3)

Black Scholes se puede transformar en la Ecuación del Calor:
Cambiando variables:

$$x = \ln \left(\frac{S}{K} \right), \tau = \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t), v(x, \tau) = \frac{C(S, t)}{K}$$

Llamando $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv & x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T \frac{\sigma^2}{2}] \\ v(x, 0) = \max\{e^x - 1, 0\} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

De Black Scholes a la Ec. del Calor (2/3)

Proponemos por último $v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$ con α y β dos parámetros a determinar:

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}) + ku$$

Se elige α y β para que se anulen u y $\frac{\partial u}{\partial x}$.

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \quad y \quad 0 = 2\alpha + (k-1)$$

De Black Scholes a la Ec. del Calor (3/3)

Tenemos entonces una ecuación para u :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con la condición inicial:

$$u(x, 0) = \max\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\} = u_0(x)$$

u cumple con la **ecuación del calor**, cuya solución está dada por:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{x-s}{4\tau}} ds$$

Solución de la Ec. del Calor (1/6)

Que es una convolución entre la condición inicial y la solución fundamental de la ecuación del calor, también llamada, *Núcleo de Poisson*.

Evaluemos esta integral haciendo el cambio $x' = \frac{(s-x)}{\sqrt{2\tau}}$, ($s = x'\sqrt{2\tau} + x$) queda entonces:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x'\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx'$$

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \max\{e^{\frac{1}{2}(k+1)(x'\sqrt{2\tau}+x)} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x'\sqrt{2\tau}+x)}, 0\} e^{-\frac{1}{2}x'^2} dx'$$

Solución de la Ec. del Calor (2/6)

Nos deshacemos del máximo:

$$e^{\frac{1}{2}(k+1)s} - e^{\frac{1}{2}(k-1)s} \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}(k+1)s} \geq e^{\frac{1}{2}(k-1)s} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(k+1)s \geq \frac{1}{2}(k-1)s \Leftrightarrow s \geq -s$$

Es decir, en nuestro caso, sí y solo sí $s \geq 0$. Por lo cual el integrando no va a ser nulo cuando $x'\sqrt{2\tau} + x \geq 0$, es decir, si $x' \geq \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$. La solución queda entonces:

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'} dx' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'} dx'$$

Una resta de dos integrales:

$$u(x, \tau) = I_1 - I_2$$

Solución de la Ec. del Calor (3/6)

Calculemos finalmente cada una de estas por separado. Empecemos por I_1 (El cálculo de I_2 será análogo). Primero sacamos del integrando el término que no depende de x' y juntamos las dos exponenciales:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+x'\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}x'} dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x'\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}x'} dx'$$

Completando cuadrado en el exponente tenemos:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(k+1)x} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau - \frac{1}{2}(x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dx'$$

Ahora, sacamos también el término que no depende de x' y llamamos

$$\rho = x' - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

Solución de la Ec. del Calor (4/6)

con lo cual, haciendo el cambio de variable nos queda:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho$$

Llamando

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$$

resulta:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1)$$

En donde $N(\cdot)$ es la función de probabilidad de la distribución Normal:

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

Solución de la Ec. del Calor (5/6)

El cálculo de I_2 es idéntico a aquel de I_1 , reemplazando $(k+1)$ por $(k-1)$ en todo el análisis. Es decir, resulta:

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)$$

$$d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}$$

Tenemos entonces una fórmula explícita para $u(x, \tau)$:

$$u(x, \tau) = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2) \quad (32)$$

Ahora habrá que volver a cambiar las variables para llegar a una expresión para $C(S, t)$. En primer lugar, teníamos que

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} u(x, \tau)$$

Solución de la Ec. del Calor (6/6)

Es decir, nos queda una expresión para $v(x, \tau)$:

$$v(x, \tau) = e^x N(d_1) - e^{-k\tau} N(d_2)$$

Ahora usamos que

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \quad v(x, \tau) = \frac{C(S, t)}{K} \quad k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

entonces llegamos a:

$$\frac{C(S, t)}{K} = e^{\ln\left(\frac{S}{K}\right)} N(d_1) - e^{-\frac{r}{\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)} \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_2)$$

La Fórmula de Black Scholes

Que, arreglándola un poco se transforma en la **fórmula de Black-Scholes**:

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (33)$$

Con:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (34)$$

Notar que es la misma fórmula a la que habíamos llegado en (3.6), lo que era de suponer. Además también notar que teniendo como datos la volatilidad σ y la tasa libre de riesgo r , el valor de C queda totalmente determinado:

$$C(S, t) = S \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\left(\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds - Ke^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\left(\frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

Las Griegas

- Las griegas son una herramienta vital en el manejo de riesgo. Miden la sensibilidad del valor de un portafolio a pequeños movimientos de un parámetro.
- Las griegas más comunes son las que provienen de las sensibilidades de:
 - spot
 - volatilidad
 - tiempo a expiración
 - Tasa
- Existen griegas de primer orden, de segundo orden y más
- La forma de calcularlas es dejar todas las variables fijas menos una y mover *infinitesimalmente* a la variable en cuestión.

Delta (1 / 3)

La Delta - Δ - mide la razón de cambio entre el precio de la opción con respecto al precio del activo subyacente S . Esto puede entenderse de la siguiente manera:

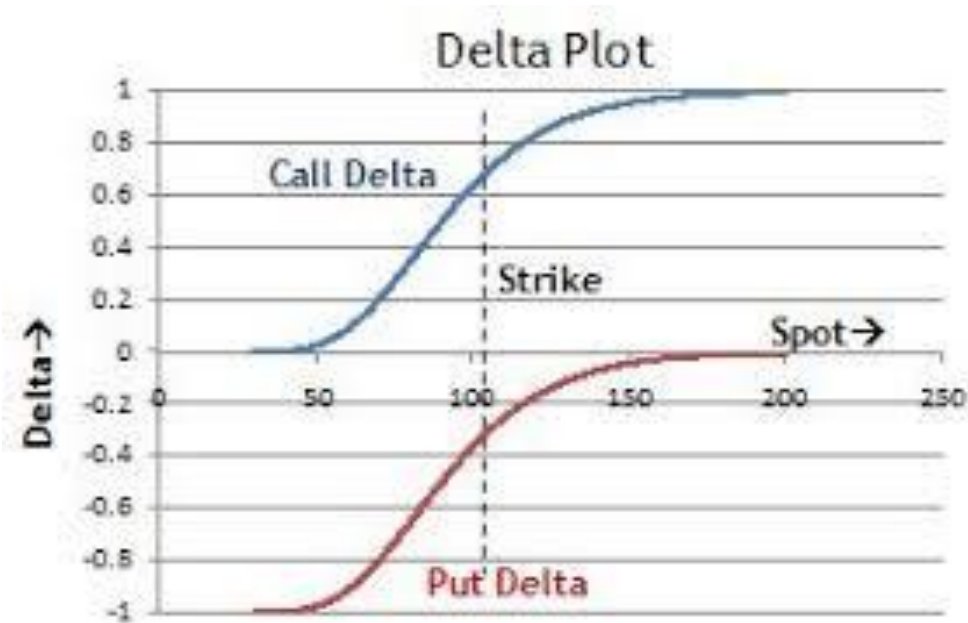
Si una opción tiene un $\Delta = 0.6$, implicaría que ante el cambio de \$1 en el precio del subyacente, el precio de la opción cambiaría un \$0.6.

Se **calcula** en general:

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \sim \frac{C(S + \$0.1) - C(S)}{(S + \$0.1) - S} = \frac{C(S + \$0.1) - C(S)}{\$0.1} \text{ con } \epsilon \text{ pequeño}$$

Recordar el $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$ en el modelo binomial!

Delta (2/3)



$$\Delta_C - \Delta_P = 1$$

- En Black Scholes:

$$\Delta_C = N(d^+)$$

$$\Delta_P = N(d^+) + 1$$

Delta (3/3)

MonitorTradeAnalyzeScanMarketWatchChartsToolsEducationHelpOnDemand

All ProductsForex TraderFutures TraderActive TraderPairs Trader

AAPLAPPLE INC COM203.06-5.37-2.58%B: 203.06A: 203.07ETBNASDAQCompany Profile

Underlying

Last X	Net Chng	Bid X	Ask X	Size	Volume	Open	High	Low
203.06 D	-5.37	203.06 Q	203.07 P	3 x 1	26,732,198	205.53	206.43	201.63

Trade Grid

Option ChainFilter: OffSpread: SingleLayout: Delta, Gamma, Theta, Vega

CALLS								Strikes: 10	PUTS							
Delta	Gam...	Theta	Vega	Bid X	Ask X	Exp	Strike	Bid X	Ask X	Delta	Gam...	Theta	Vega			
2 AUG 19 (0) 100 (Weeklys)								25.19% (±1.945)								
9 AUG 19 (7) 100 (Weeklys)								33.91% (±8.053)								
16 AUG 19 (14) 100								31.99% (±10.461)								
.82	.02	-.11	.11	11.85 E	11.95 E	16 AUG 19	192.5	1.68 P	1.70 P	-.21	.02	-.13	.12			
.76		-.13	.13	9.80 E	9.90 E	16 AUG 19	195	2.20 P	2.22 Q	-.26	.02	-.14	.13			
.69		-.14	.14	7.95 X	8.05 M	16 AUG 19	197.5	2.88 Z	2.91 M	-.32	.03	-.16	.15			
.62	.03	-.15	.16	6.25 M	6.35 E	16 AUG 19	200	3.70 M	3.80 X	-.39	.03	-.16	.16			
.53	.04	-.15	.16	4.75 M	4.85 X	16 AUG 19	202.5	4.75 E	4.85 X	-.47	.03	-.16	.16			
.44	.04	-.14	.16	3.50 M	3.60 X	16 AUG 19	205	6.00 E	6.10 M	-.55	.03	-.16	.16			
.35	.03	-.13	.15	2.51 E	2.54 D	16 AUG 19	207.5	7.50 E	7.60 M	-.62	.03	-.15	.16			
.27	.03	-.12	.14	1.72 P	1.74 Q	16 AUG 19	210	9.20 E	9.30 M	-.69	.03	-.14	.14			
.20	.03	-.10	.12	1.14 P	1.15 Q	16 AUG 19	212.5	11.15 E	11.25 E	-.75	.02	-.13	.13			
.14	.02	-.08	.09	.73 Z	.75 P	16 AUG 19	215	13.25 E	13.35 M	-.80	.02	-.12	.12			
23 AUG 19 (21) 100 (Weeklys)								31.40% (±12.466)								
30 AUG 19 (28) 100 (Weeklys)								30.82% (±14.069)								
6 SEP 19 (35) 100 (Weeklys)								29.89% (±15.217)								
13 SEP 19 (42) 100 (Weeklys)								28.78% (±16.024)								
20 SEP 19 (49) 100								30.13% (±18.111)								
18 OCT 19 (77) 100								28.66% (±21.568)								
15 NOV 19 (105) 100								28.54% (±25.1)								

Más griegas

- Gamma: El “*delta del delta*” o la razón de cambio con la que varía Delta con respecto al subyacente. Mide la curvatura, convexidad del derivado. Es un proxy para el riesgo del activo con respecto al subyacente. Tiene su máximo en ATM
- Vega: es la razón de cambio con el que cambia el precio del contrato de la opción al tener un cambio de 1% en la volatilidad. Vega es positivo para *puts* y *calls*, ya que un aumento de la volatilidad hace aumentar los valores de estos. Máximo en ATM.
- Theta: es la razón de cambio con la que se deprecia el valor del contrato de la opción por día a medida que transcurre el tiempo. Esta se escribe con signo negativo ya que se considera una pérdida de dinero a medida que pasa el tiempo.
- Rho: Muestra la sensibilidad del cambio en el valor del precio de una opción según varié las tasas de interés

Griegas en Black Scholes

	Call	Put
Delta; Δ	$N(d_1)$	$-N(-d_1)$
Theta; Θ	$\frac{-\sigma S N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} - rX e^{-r(T-t)} N(d_2)$	$\frac{-\sigma S N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + rX e^{-r(T-t)} N(-d_2)$
Gamma; Γ	$\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$	$\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}}$
Vega; ν	$S_0 N'(d_1) \sqrt{\tau}$	$S_0 N'(d_1) \sqrt{\tau}$
ρ	$\tau X e^{-r(\tau)} N(d_2)$	$-\tau X e^{-r(\tau)} N(-d_2)$

Donde: X es el precio de ejercicio (K), τ es el tiempo a vencimiento. $(T - t)$

Calculo de Griegas (diferencias finitas)

Como las griegas miden la sensibilidad del precio de la opción con respecto a un parámetro, las griegas terminan siendo las derivadas de la función de precio con respecto a los parámetros

$$\text{Delta: } \Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{C(S+\$0.1, K, T, r, \sigma, q) - C(S, K, T, r, \sigma, q)}{\$0.1}$$

$$\text{Gamma: } \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{C(S+\$0.1, K, T, r, \sigma, q) - 2C(S, K, T, r, \sigma, q) + C(S-\$0.1, K, T, r, \sigma, q)}{(\$0.1)^2}$$

$$\text{Vega: } v = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{C(S, K, T, r, \sigma+1\%, q) - C(S, K, T, r, \sigma, q)}{1\%}$$

$$\text{Theta: } \theta = \frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{C(S, K, T+1d, r, \sigma, q) - C(S, K, T, r, \sigma, q)}{1d}$$

$$\text{Rho: } \rho = \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{C(S, K, T, r+0.1\%, \sigma, q) - C(S, K, T, r, \sigma, q)}{0.1\%}$$

Como leer las Griegas

45.06		45.44	45.45	45.06		45.44	45.45
-1.53 (-3.28%)		Bid Size: 9	Ask Size: 24	-1.53 (-3.28%)		Bid Size: 9	Ask Size: 24

NIO 27 NOV 20 50 +2 
C 100 (Weeklys)

NIO 27 NOV 20 48 -2 
C 100 (Weeklys)

1.60		1.55	1.58	2.04		2.04	2.10
-2.08 (-56.52%)		Bid Size: 13	Ask Size: 3	-2.40 (-54.05%)		Bid Size: 5	Ask Size: 5

Trade Price:		P/L Day:	
Net Liq:		P/L Open:	
Delta:	65.1798	Gamma:	8.9528
Theta:	-29.5404	Vega:	5.4184

Trade Price:		P/L Day:	
Net Liq:		P/L Open:	
Delta:	-81.4725	Gamma:	-9.974
Theta:	30.9254	Vega:	-5.8367

20.47		20.20	20.35	20.47		20.20	20.35
3.25 (+18.87%)		Bid Size: 3	Ask Size: 7	3.25 (+18.87%)		Bid Size: 3	Ask Size: 7

JMIA 20 NOV 20 -2 
15 C 100 ITM

JMIA 18 DEC 20 +2 
15 C 100 ITM

5.42		5.40	5.60	6.06		6.00	6.20
3.07 (+130.64%)		Bid Size: 26	Ask Size: 364	2.57 (+73.64%)		Bid Size: 10	Ask Size: 55

Trade Price:		P/L Day:	
Net Liq:		P/L Open:	
Delta:	-186.2223	Gamma:	-5.8671
Theta:	17.9849	Vega:	-0.4892

Trade Price:		P/L Day:	
Net Liq:		P/L Open:	
Delta:	168.4991	Gamma:	6.3499
Theta:	-5.9099	Vega:	2.8554

Como leer las Griegas

Griegas Teórico

Calcular las griegas con diferencias finitas y graficarlas

Uso de Griegas

Elegir una de las opciones de la *slide anterior*, calcular sus griegas usando las formulas de la planilla anterior. Interpretar.

Que pasa con el precio de la opción si:

Pasa un día, el subyacente sube \$1 y la volatilidad baja 1%?

Explicacion de PnL

Por que cambia el precio de un derivado? Veamos por ejemplo una opción:

$$PnL = dC(hoy) = C(hoy) - C(ayer) = \frac{dC}{dt}$$

$$\frac{dC}{dt} (ayer = 0) = C_S(0) dS + C_\tau(0)d\tau + C_\sigma(0)d\sigma + \frac{1}{2} C_{SS}(0)dS^2 + \dots$$

$$Pnl = \Delta(0)(S(hoy) - S(0)) + \Theta + Vega(\sigma(hoy) - \sigma(0)) + \frac{1}{2} \Gamma(0)(S(hoy) - S(0))^2 + \dots$$

Ejercicio: Estudiar el PnL con datos históricos de opciones.

Diferencias finitas - PDEs

Recordemos que la estrategia de replicación nos llevo a que el precio del *Call* Europeo era la solución de la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC, \quad 0 < t \leq T, \quad S > 0$$

$$C(S, T) = (S - K)^+$$

O, en general:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Modelos de diferencias finitas para PDEs

La idea del método es discretizar las derivadas parciales basándonos en la expansión en la serie de Taylor cerca de los puntos de interés.

Para las derivadas con respecto a S usaremos en ambos casos diferencias centradas. Para la primera:

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S, t) = \frac{V(S + dS, t) - V(S - dS, t)}{2dS} + \mathcal{O}((dS)^2)$$

Para la segunda:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) = \frac{V(S + dS, t) - 2V(S, t) + V(S - dS, t)}{(dS)^2} + \mathcal{O}((dS)^2)$$

Modelos de diferencias finitas para PDEs

Como se trata de una ecuación *backward*, para aproximar la derivada con respecto al tiempo usaremos diferencias backward :

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S, t) = \frac{V(S, t) - V(S, t - dt)}{dt} + \mathcal{O}(dt)$$

Observar que $\mathcal{O}((dS)^2) = \mathcal{O}(dt)$, con lo cual las tres aproximaciones son del mismo orden.

Modelos de diferencias finitas para PDEs

El siguiente paso del método es discretizar el espacio $[0, +\infty) \times [0, T]$. Para eso, primero elijamos un S_{MAX} grande ya que no podremos discretizar el infinito y dividimos el eje de las S uniformemente en nodos que distan dS entre sí.

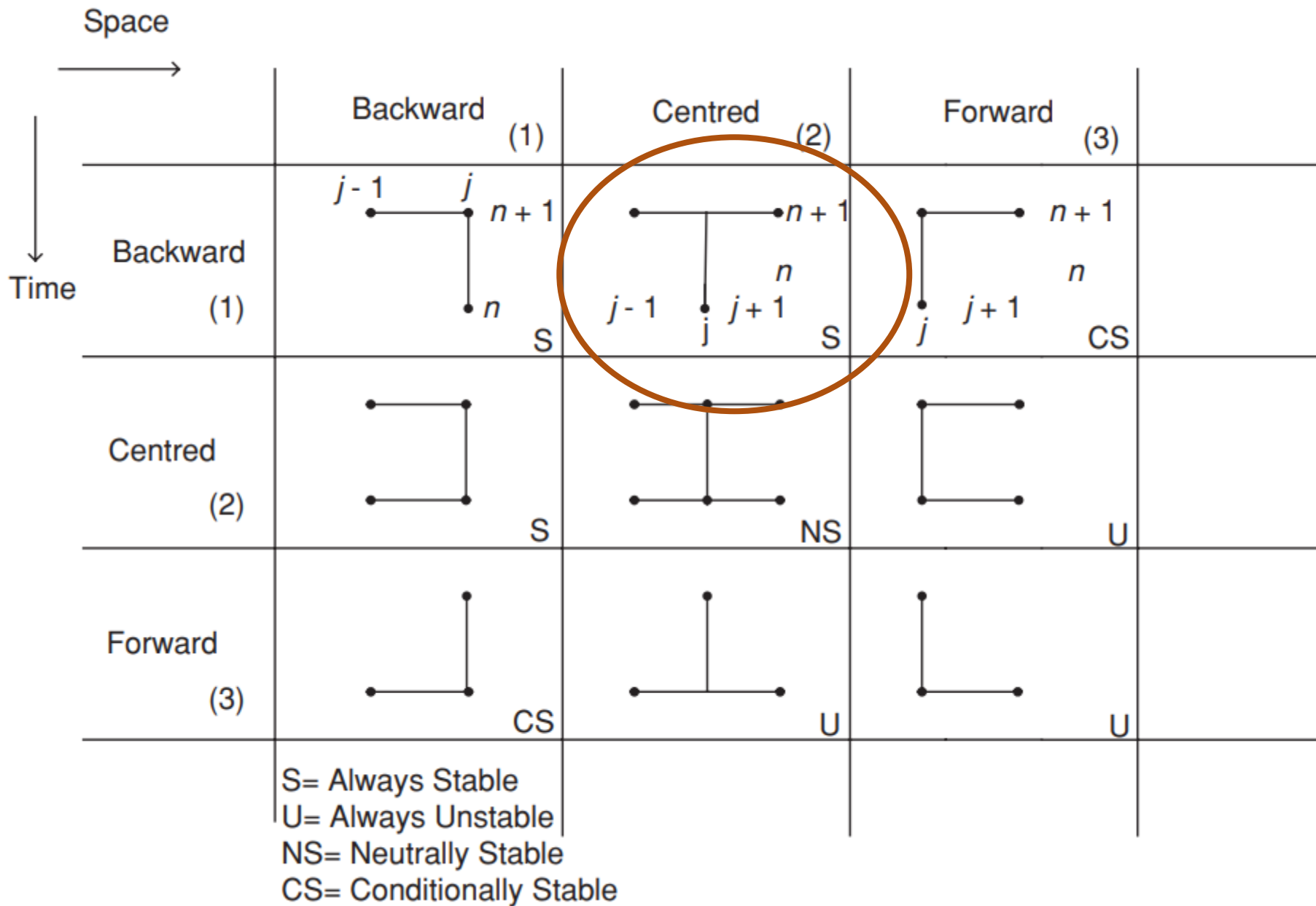
Lo mismo hacemos con el eje temporal, lo dividimos uniformemente en nodos que distan dt entre sí. Esto divide al plano (S, t) en una grilla uniforme con puntos de la forma (ndS, mdt) .

Nos concentramos entonces en el valor de $V(S, t)$ sólo en los puntos de la grilla. Escribimos:

$$V_n^m \simeq V(ndS, mdt) : 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M$$

Donde dS y dt es la distancia entre los nodos y tal que

$$dS N = S_{MAX} \text{ y } dt M = T$$



Modelos de diferencias finitas para PDEs

Aquí también necesitaremos condiciones de contorno y finales (ya que se trata de una ecuación backward). Las de contorno serán:

$$V_0^m = V_0(mdt) \quad V_N^m = V_{inf}(mdt)$$

Donde $V_0(t)$ es lo que vale la función en el 0 y $V_{inf}(t)$ es lo que vale en el límite en infinito. La condición final será:

$$V_n^M = F(ndS)$$

Modelos de diferencias finitas para PDEs

Donde $F(S)$ es el *payoff* del derivado. Con todo lo anterior no queda más que reemplazar cada cosa por lo que es:

$$\frac{V_n^m - V_n^{m-1}}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2(ndS)^2 + \frac{V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m}{(dS)^2} + r(ndS)\frac{V_{n+1}^m - V_{n-1}^m}{2dS} - rV_n^m + \mathcal{O}(dt) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Modelos de diferencias finitas para PDEs

Ahora nos olvidamos del error y aceptamos que la igualdad vale en sentido discreto, de aproximación. Despejamos V_{m-1} y simplificamos los dS :

$$V_n^{m-1} = V_n^m + dt \frac{1}{2} \sigma^2 n^2 (V_{n+1}^m - 2V_n^m + V_{n-1}^m) + dt \frac{rn}{2} (V_{n+1}^m - V_{n-1}^m) - dt r V_n^m$$

Agrupando los términos llegamos finalmente al esquema de diferencias finitas:

$$V_n^{m-1} = V_{n-1}^m \left(\frac{1}{2} \sigma^2 n^2 - \frac{1}{2} rn \right) dt + V_n^m \left(1 - (\sigma^2 n^2 + r) dt \right) + V_{n+1}^m \left(\frac{1}{2} \sigma^2 n^2 + \frac{1}{2} rn \right) dt$$

Modelos de diferencias finitas para PDEs

La ecuación vale para $1 \leq n \leq N - 1$ y para $1 \leq m \leq M$.

En el caso de un *Call*, para los V_0 y V_N tenemos las condiciones de contorno

$$V_0^m = 0 \quad \forall m ; \quad V_N^m = S_{MAX} \quad \forall m ;$$

Para V^M tenemos el payoff.

$$V_n^M = \max(0, S_n - K)$$

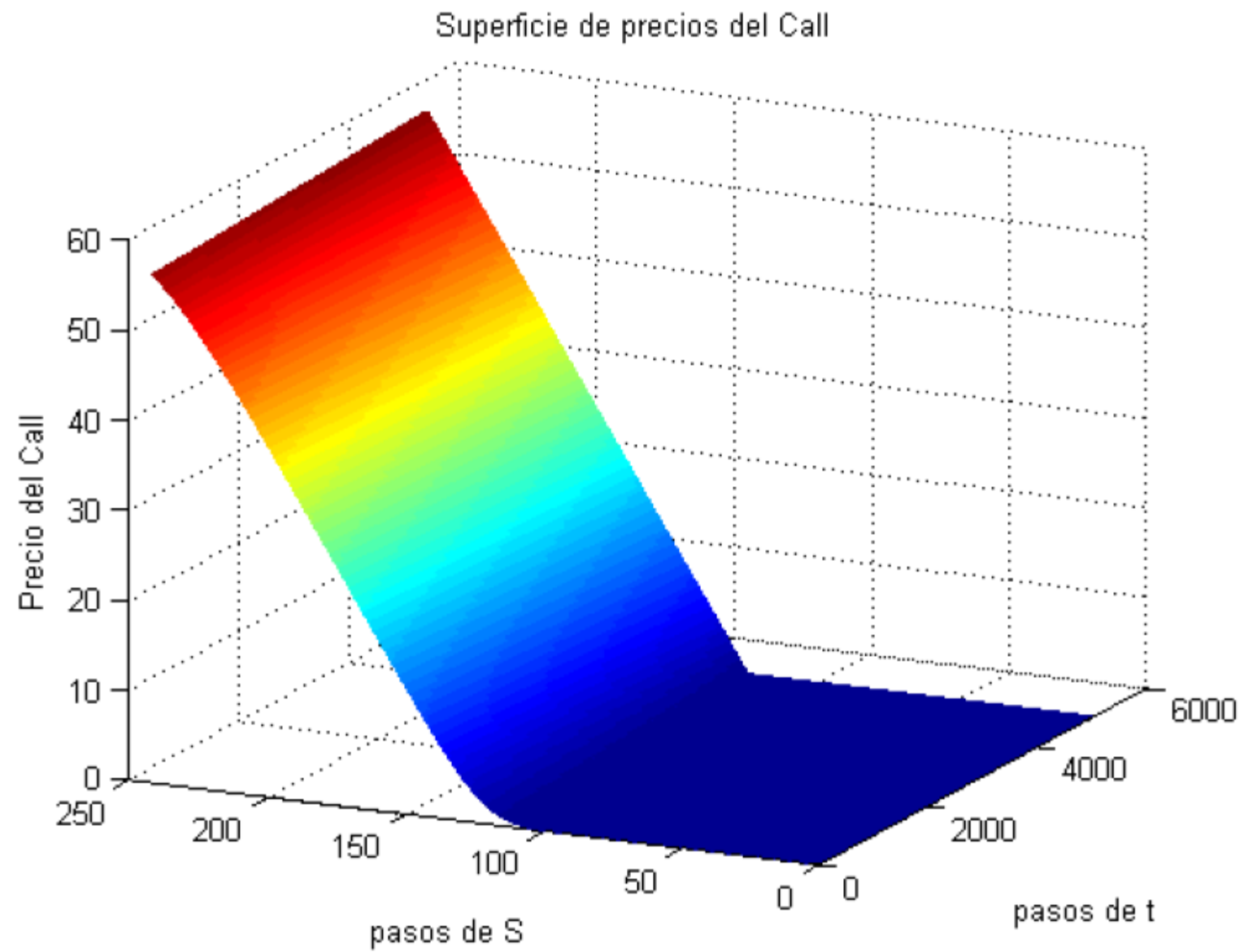
El esquema propuesto es un esquema explícito, ya que sólo involucra variables conocidas, es decir, que al momento de invocarlas en el algoritmo ya tienen asignado un valor.

$$V_n^{m-1} = V_{n-1}^m \left(\frac{1}{2} \sigma^2 n^2 - \frac{1}{2} r n \right) dt + V_n^m \left(1 - (\sigma^2 n^2 + r) dt \right) + V_{n+1}^m \left(\frac{1}{2} \sigma^2 n^2 + \frac{1}{2} r n \right) dt$$

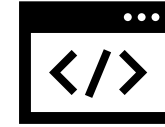
$$A = \begin{pmatrix} 1 - (\sigma^2 0^2 + r)dt & \frac{1}{2} dt(\sigma^2 1^2 - (r - \text{div})1) & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} dt(\sigma^2 0^2 + (r - \text{div})0) & 1 - (\sigma^2 1^2 + r)dt & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - (\sigma^2 (N-1)^2 + r)dt & \frac{1}{2} dt(\sigma^2 N^2 - (r - \text{div})N) \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} dt(\sigma^2 (N-1)^2 + (r - \text{div})(N-1)) & 1 - (\sigma^2 N^2 + r)dt \end{pmatrix}$$

$$V^{m-1} = A * V^m$$

Con el detalle de agregar las condiciones de contorno a la primera y ultima columna



Algoritmo Diferencias Finitas



`opcion_europea_fd`

`Def`

`Calculador del precio de una opcion Europea con el modelo de Diferencias Finitas (metodo explicito)`

`Inputs`

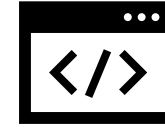
- `- tipo : string - Tipo de contrato entre ["CALL","PUT"]`
- `- S : float - Spot price del activo`
- `- K : float - Strike price del contrato`
- `- T : float - Tiempo hasta la expiracion (en años)`
- `- r : float - Tasa 'libre de riesgo' (anualizada)`
- `- sigma : float - Volatilidad implicita (anualizada)`
- `- div : float - Tasa de dividendos continuos (anualizada)`

`Outputs`

- `- precio_FD: float - Precio del contrato`

También esta la implementación en el caso Americano (misma lógica que en el Binomial)

Comparativa de modelos vistos



Modelo	Binomial
Pros	dependencia de caminos, barreras
Contras	sensibilidades

Modelo	Black Scholes analitico
Pros	Fórmula Cerrad, Velocidad, sensibilidades
Contras	No generalizable

Comparativa de modelos vistos

Modelo	Montecarlo
Pros	pocas hipotesis, casi todos los derivados
Contras	sensibilidades, tiempo

Modelo	Diferencias Finitas
Pros	cualquier Ec diff, toda la superficie
Contras	tiempo, estabilidad, error

QuantLib (1 / 2)

Por mi tema de trabajo de analisis cuantitativo para bancos de inversión de EEUU, me tope varias veces con quantlib quantlib.org

QuantLib es una libreria de finanzas cuantitativas OpenSource. Esta escrita en C++, puramente orientada a objetos. Existen wrappers en otros lenguajes como:

Python: quantlib-python-docs.readthedocs.io

R: cran.r-project.org/web/packages/RQuantLib

Excel: quantlib.org/quantlibxl/

Cabe aclarar que la versión mas completa es la de C++, dado que muchas veces pasa tiempo hasta que se adaptan a los otros lenguajes, y algunos módulos directamente se dejan de lado y no se adaptan. Se usa tanto en la industria como en la academia.

Disparadores para ejercicios, o TPs... (1 / 2)

- Market data de paginas/brokers que no hayamos trabajado:
 - TD Ameritrade / IBKR
 - Invertir online?
 - Rofex
 - Pagina de BYMA
 - ...
- Estudiar modelos de tasas de curvas para el mercado correpondiente e incorporar a los modelos. (idem dividendos)
- Superficie de Volatilidad – La idea es mapear todas las opciones con su volatilidad implicita y generar una function que para cualquier maturity T y cualquier strike K se obtenga la volatilidad $\sigma(K, T)$, desde ya eso podria darnos los precios Tambien $C(K, T)$

Disparadores para ejercicios, o TPs... (2/2)

- ‘mejorar’ los modelos vistos en clase:
 - Incorporando mayor manejo del calendario, convenciones de daycount
 - Mejorando la manera de obtener volatilidad de mercado
 - Optimizando la cantidad de pasos (binomial, DF, Montecarlo)
- Masterizar la libreria QuantLib y usarla como herramienta principal.
- Estudiar otro tipo de payoffs y estructuras y modelos para estos:
 - Barrera
 - Asiaticas
 - Baskets
- Estudiar particularidades en otros subyacentes:
 - FX
 - Commodities
 - Tasa
 - Credito