Analisis Cuantitativo en Finanzas

Manu Maurette, 2022

Clase 2: Opciones (draft)

Derivados No Lineales

Por lo general, cualquier tipo de **opciones**

El valor de los productos evoluciona de forma no lineal con el valor de los subyacentes

OTC o en *exchanges*

La combinación de opciones puede conducir a estrategias específicas

Ejemplos: Opciones, convertibles, *warrants*, *callable bonds*

Opciones

Definición

Una opción es un contrato que le da al dueño el **derecho**, pero no la obligación, de negociar un activo predeterminado, llamado también el activo subyacente por un precio determinado, llamado también precio de ejercicio en un tiempo en el futuro, llamada la fecha de expiración.

Una opción *call* (de compra) da al dueño el derecho a comprar y una *put* (de venta), el derecho a vender.

Jerga en ingles – lenguaje en el que encontrarán la mayoría de la bib.:

Activo subyacente – *Underlying asset*

Precio de ejercicio – *Strike Price*

Fecha de expiración – *Expiry/Maturity*

¿Para qué se usan?

Es claro de la definición, que el comprador de opciones obtiene un riesgo limitado, ya que goza de un derecho y no una obligación. En cambio, el vendedor o emisor de la opción asume un compromiso que debe honrar si el poseedor de la opción lo requiere, y por lo tanto su riesgo es mucho mayor.

Algunos usos:

- Cobertura contra potenciales movimientos de precios
- Especulación, beneficio ante un movimiento del subyacente
- Apalancamiento y replicación de posiciones a través de sintéticos
- Múltiples estrategias combinando diversas opciones
- Arbitraje
- Opciones Reales (no financieras)

¿Para qué se usan?

Mas usos de opciones?

Ejemplos que conozcan de contratos con opcionalidad?

Incluso fuera de finanzas!

Ejercicio (1/2)

Hay dos principales tipos de ejercicio – es decir el momento en el cual el poseedor del derecho puede hacer uso del mismo (ejercer)

Europeo – Solamente se puede ejercer la opción en el vencimiento

Americano – Se puede ejercer la opción en todo momento

Hay otros tipos de ejercicio intermedios (Ejemplo: *Bermuda*)

Las opciones listadas en los mercados de *Equity, Commodities*:

Suelen* ser Americanas - es decir permiten el ejercicio temprano.

Ejercicio (2/2)

La operatoria en el ejercicio (temprano o a vencimiento) en BYMA :

3.3. Ejercicio y bloqueo de las Opciones

3.3.1. Los titulares podrán hacer uso del derecho que poseen a partir del día en que se liquida la prima y hasta el día inmediato anterior a la fecha de vencimiento, las posiciones abiertas en el último día, podrán ser ejercidas, en los horarios determinados en la Circular de Tabla de Horarios.
Para el último ejercicio posible, que se realiza con posterioridad al horario de rueda, deberán distribuirse indefectiblemente las posiciones no asignadas.

Los ejercicios deberán ser informados a BYMA a través de los medios especialmente habilitados para ello.

3.3.2 El ejercicio de la opción será atendido por una posición lanzadora escogida de acuerdo con el siguiente criterio:

- En opciones de compra: por sorteo entre posiciones cubiertas. Agotada la instancia precedente, por sorteo entre posiciones descubiertas.
- En opciones de venta: por sorteo entre las posiciones registradas.

La elección de posiciones lanzadas será ejecutada por un proceso informático que en forma secuencial y hasta satisfacer las necesidades de ejercicio, selecciona automáticamente y al azar entre el remanente de posiciones lanzadas sujetas a ejercicio.

Fuente: https://www.byma.com.ar/productos/opcionesp/

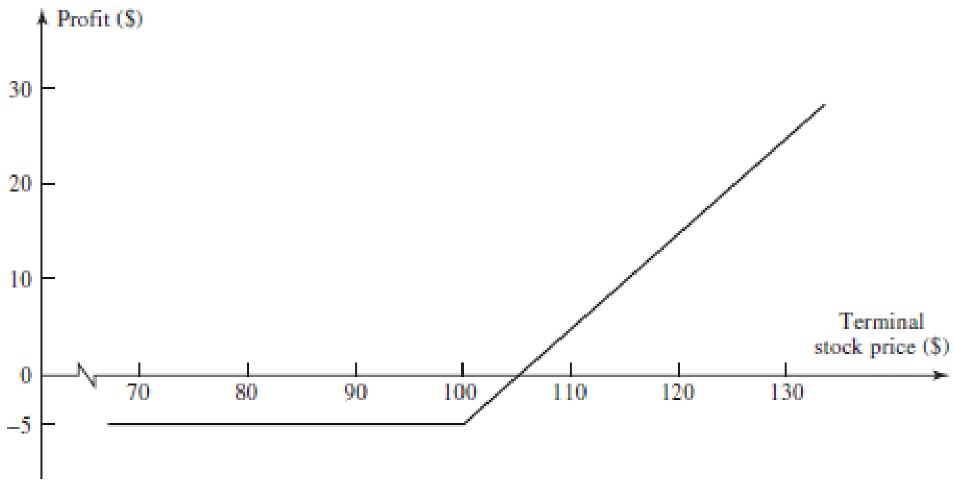
Posiciones de una opción

Apuesta\Posición	Comprado	Vendido
Al alza	*Long Call*	*Short Put*
A la baja	*Long Put*	*Short Call*

Pago\Recibo	Pago	Recibo
Máxima Perdida	Prima	!!!

Comprar un *Call* (*long call*)

Aquel que compra una opción *call* paga dinero *up-front.* Veamos el grafico de la ganancia del comprador de la *call* con respecto al precio final del activo subyacente:



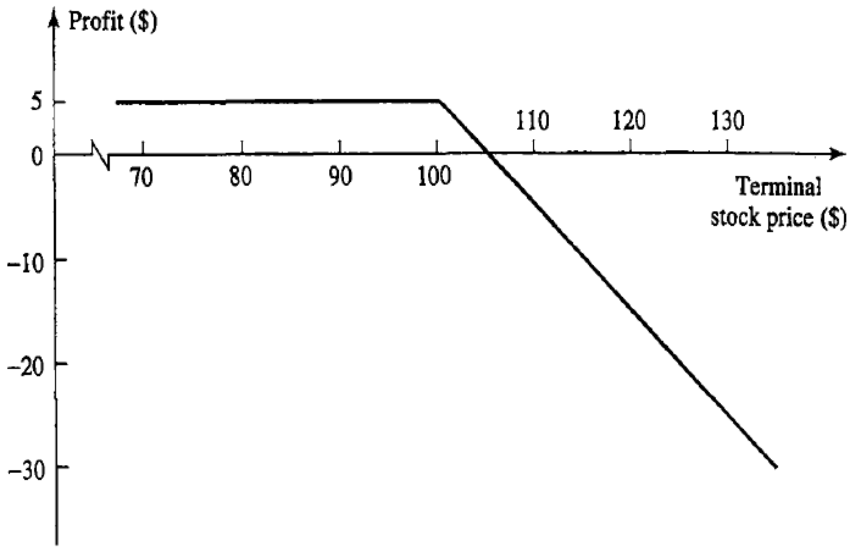
Fuente: Hull – Fig 10.1

Ganancia luego de escribir una opción europea *call* .
Precio de la opción = $5
Precio de ejercicio = $100

El comprador del *call* se beneficia con una suba del activo. *Notar que igual convendría ejercer en la zona $100-$105.*

Vender (escribir) un *Call* (*short call*)

Por ejemplo, el que escribió la opción recibe dinero *up-front*, pero tiene **potenciales riesgos**. Veamos el grafico de la ganancia del vendedor de la *call* (escritor) con respecto al precio final del activo subyacente:



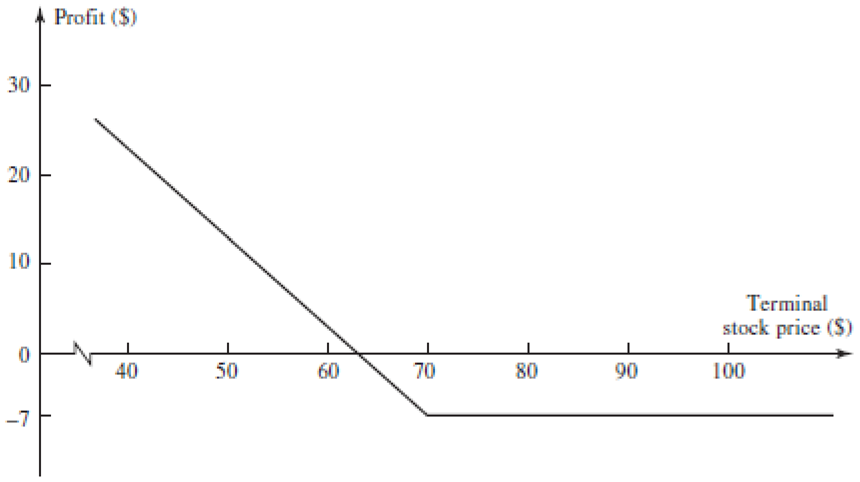
Fuente: Hull – Fig 10.3

Ganancia luego de escribir una opción europea *call* .
Precio de la opción = $5
Precio de ejercicio = $100

El vendedor del *call* se beneficia con una baja del activo (no le ejercen). De no estar cubierto, tendría una perdida grande si sube el activo.

Comprar un *put* (*long put*)

Quien compra una *put* Europea, paga dinero *up-front* Veamos el grafico de la ganancia del comprador de la *put* con respecto al precio final del activo



Fuente: Hull – Fig 10.2

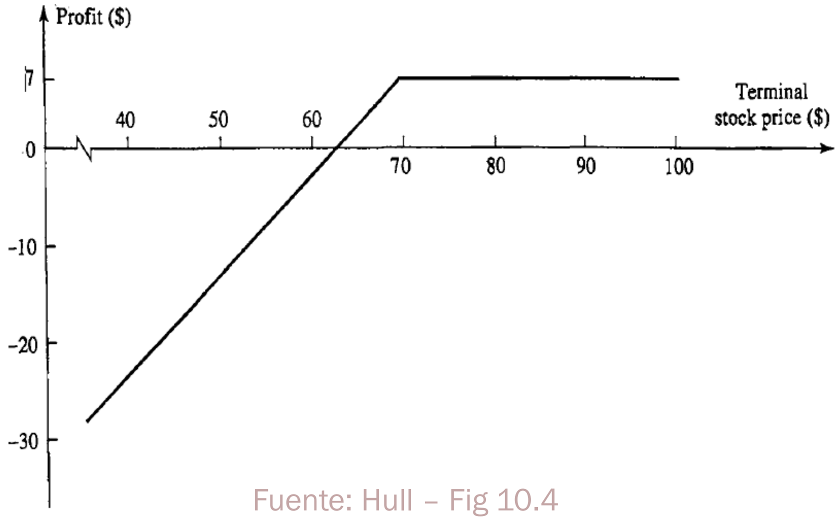
Ganancia luego de escribir una opción europea *put*.

Precio de la opción = $7
Precio de ejercicio = $70

El comprador del *put* se beneficia con una baja del activo y también ejercería entre $63 y $70.

Vender(escribir) un *put* (*short put*)

El escritor de una *put* Europea, en cambio también recibe dinero *up-front*, pero tiene potenciales riesgos. Veamos el grafico de la ganancia del vendedor de la *put* (escritor) con respecto al precio final del activo



Fuente: Hull – Fig 10.4

Ganancia luego de escribir una opción europea *put*.

Precio de la opción = \$7
Precio de ejercicio = \$70

El vendedor del *put* se beneficia con una suba del activo (no le ejercen). De no estar cubierto, tendría una perdida grande si baja el activo.

Payoffs (1/2)

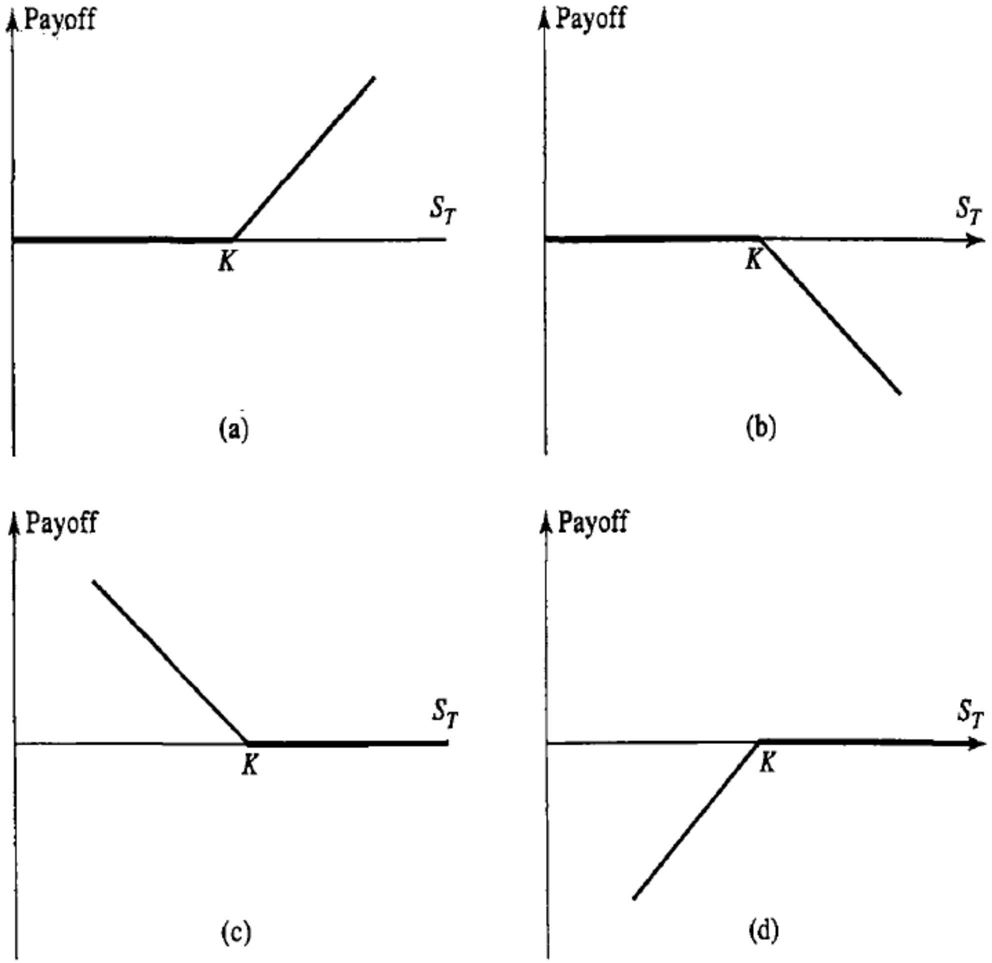
Veamos el *payoff* de cada una de las posiciones en una opción:

- *Long* en un *CALL*: $\max(S(T) - K, 0)$
- *Long* en un *PUT*: $\max(K - S(T), 0)$
- *Short* en un *CALL*: $-\max(S(T) - K, 0)$
- *Short* en un *PUT*: $-\max(K - S(T), 0)$

Veamos los gráficos de los 4 *payoffs*

Payoffs (2/2)

Veamos el *payoff* de cada una de estas posiciones (K es el *strike*) :



Fuente: Hull – Fig 10.5

a) *Long CALL*

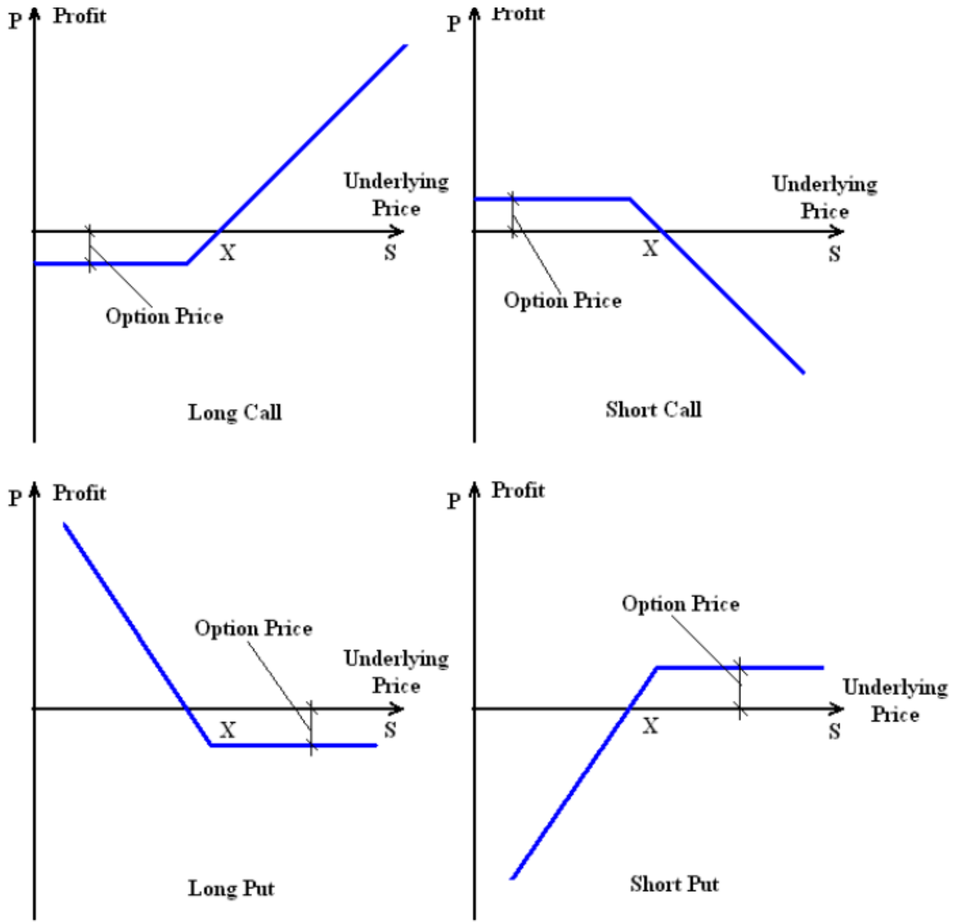
b) *Short CALL*

c) *Long PUT*

d) *Short PUT*

PnL

Repasemos por ultimo el *Profit & Loss* (ganancia) (aquí X es el



a) *Long CALL*

b) *Short CALL*

c) *Long PUT*

d) *Short PUT*

Valor Intrínseco de una Opción

- El valor intrínseco (*VI*) de una opción es la diferencia entre el precio del activo subyacente en el mercado y el precio de ejercicio
- El VI es siempre positivo. Si la diferencia entre precios es negativa, el VI es 0
- Al vencimiento, el VI es el valor de la opción (*payoff*)

- Ej: Para un *call long*: $VI_C(t) = \max(S(t) - K, 0)$

- Ej: Para un *put long*: $VI_P(t) = \max(K - S(t), 0)$

- Se habla también de valor temporal (o extrínseco) de la opción: $Prima = Valor\ intrínseco + Valor\ Temporal$

Grado de dinero (*Moneyness)* de una opción

El *moneyness* es una medida del grado en que un derivado financiero es probable que tenga un valor positivo en su fecha de expiración:

- En el dinero – *At the money* (*ATM*): si su precio de ejercicio (*strike price*), es el mismo que el precio del subyacente sobre el que la opción está basada

- Fuera del dinero – *Out of the money* (*OTM*): si no tiene valor intrínseco; Ej: una opción *call* para la que el precio del activo subyacente es menor que el precio de ejercicio de la opción.

- Dentro del dinero – *In the money* (*ITM*): si tiene valor intrínseco; Ej: una opción *call* para la que el precio del activo subyacente es mayor que el precio de ejercicio de la opción.

Opciones: Mercados

Mercados Organizados (*exchanges*)
- contratos estandarizados
- *trade* contra el mercado, que obliga a la colateralización
- riesgo de crédito casi nulo
- liquidez relativamente alta

Mercados OTC (*Over-the-Counter*)
- contratos no estandarizados
- *trade* bilateral, riesgo de la contraparte
- riesgo de crédito no nulo
- baja liquidez

Venta cubierta – Venta descubierta (*naked*)

- La venta cubierta es una típica forma de cubrir riesgo ante una posición en el mercado.

- El riesgo que se asume ante una venta descubierta es mucho mayor al de una venta cubierta.

- Muchos *brokers* no permiten la venta descubierta (a nivel minorista)

- Las opciones tienen costos de transacción (*fees*) que suelen ir en parte a las *clearing houses.*

- Los contratos suelen ser por 100 unidades del subyacente (lote)

Comentarios de la operatoria –margen (1/2)

- La prima de una opción NO* puede pagarse con margen.
- La venta descubierta implica la necesidad de margen y el potencial riesgo al *margin call*

Ejemplo de requerimientos de margen (CBOE):

Una opción desnuda es una opción que no se combina con una posición activo subyacente. El margen inicial y de mantenimiento requerido por el CBOE para una opción *call* descubierta es el mayor de los dos cálculos siguientes:

1) El 100% de los ingresos de la venta **más** el 20% del precio del activo subyacente precio **menos** la cantidad, si la hay, por el cual la opción está fuera del dinero.
2) El 100% de los ingresos de la venta **más** el 10% del precio del activo subyacente.

Comentarios de la operatoria –margen (2/2)

Para una opción *put* descubierta el margen es el mayor entre:
1) El 100% de los ingresos de la venta **más** el 20% del precio del activo subyacente **menos** la cantidad, si la hay, por el cual la opción está fuera del dinero.
2) El 100% de los ingresos de la opción **más** el 10% del precio de ejercicio.

El 20% en los cálculos anteriores se sustituye por un 15% para las opciones sobre índices, dado que un índice bursátil suele ser menos volátil que el precio de una acción.

Ej: Un inversor escribe una opción *call* descubierta sobre un activo. El precio de la opción es $5, el precio de ejercicio es $40, y el precio del activo subyacente es $38. El margen será el máximo entre:

- 100 x ($5 + $38x0.2 – $2) = **$1060**
- 100 x ($5 + $38x0.1) = $880

Obs1: 100x$38 = ***$3800*** *– es el valor nominal del contrato*

Obs2: Es dinámico: si subyacente=41, opción=6.5 margen= ***1470*** *(+50%)*

*si subyacente=35, opción=4 margen= max(600,**750**)*

¿Opciones sobre qué? (1/2)

El espectro de subyacentes que tienen opciones es similar a aquel del mercado e Futuros.

Opciones sobre acciones (*Equity*).

- Argentina: BYMA - https://www.byma.com.ar/opciones/
- USA: NYSE (hay otros) - https://www.nyse.com/products/options-equity

Opciones sobre *Commodities* (Ej: Soja, Maiz, Trigo, Oro)

- Argentina: Opciones ROFEX/MATBA – https://www.matbarofex.com.ar/producto/futuros-y-opciones-sobre-soja
- USA: CME (hay otros) –Ejemplo de Soja https://www.cmegroup.com/trading/agricultural/grain-and-oilseed/soybean_contractSpecs_options.html?optionProductId=321#optionProductId=321

¿Opciones sobre qué? (2/2)

El espectro de subyacentes que tienen opciones es similar a aquel del mercado e Futuros.

Opciones sobre FX

- USDARS - https://www.matbarofex.com.ar/producto/futuros-y-opciones-sobre-dolar
- GBP/USD (entre otros)- https://www.cmegroup.com/trading/fx/g10/british-pound_quotes_globex_options.html#optionProductId=8099&strikeRange=ATM

Opciones sobre Índices

- ROFEX20 - https://www.matbarofex.com.ar/producto/futuros-y-opciones-sobre-indice-rofex-20
- SPX - http://www.cboe.com/products/stock-index-options-spx-rut-msci-ftse/s-p-500-index-options/s-p-500-options-with-a-m-settlement-spx/spx-options-specs
- VIX - https://www.cboe.com/products/vix-index-volatility/vix-options-and-futures/vix-options

Opciones sobre *crypto* - https://www.deribit.com/pages/docs/options

Caso de Estudio 1 (1/4) Especulación

Supongamos que las **acciones de *Apple*** están a día de hoy a $200, y sabemos que en alrededor de tres meses va a sacar un nuevo *Iphone* y creemos que eso hará que suba el valor de sus acciones.

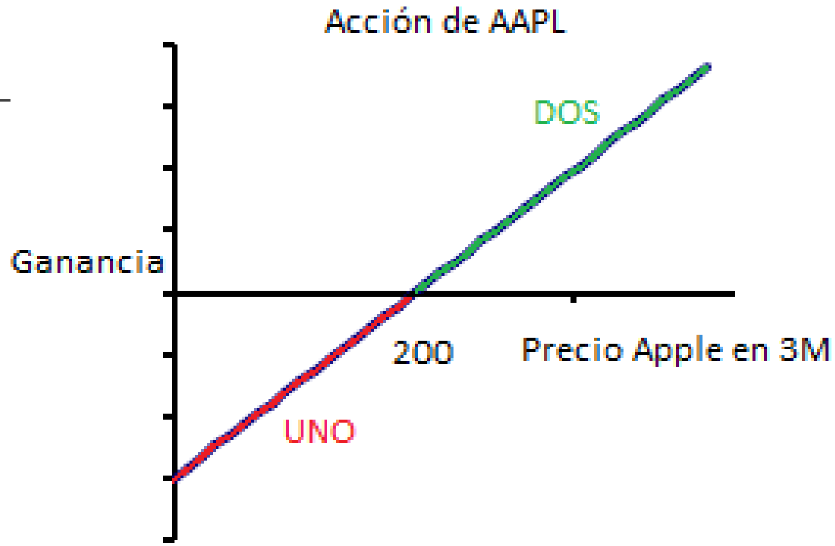
Inversión 1:

Podemos **por un lado** comprar la acción de AAPL a $200 hoy. En 3 meses pueden pasar los siguientes dos escenarios:

UNO: La acción está por debajo del precio de hoy PnL: PERDEMOS la diferencia entre $200 y el precio (SIN PISO, más que el 0!)

DOS: La acción está por encima del precio de hoy: PnL: GANAMOS la diferencia entre el precio y $200 (SIN TECHO)

Caso de Estudio 1 (2/4) Especulación



Puedo ganar mucho si la acción sube mucho

Puedo **perder mucho** si la acción baja mucho

Muchas veces no quisiera tan estar expuesto a una baja

Inversión 2:
Decidimos entonces comprar **opciones de compra con precio de ejercicio $210 a tres meses**, que en el mercado cuestan $12 c/u. Esto significa que de aquí a tres meses, **si nos conviene,** podremos ejercer la opción, y el vendedor nos entregará las acciones a $210.

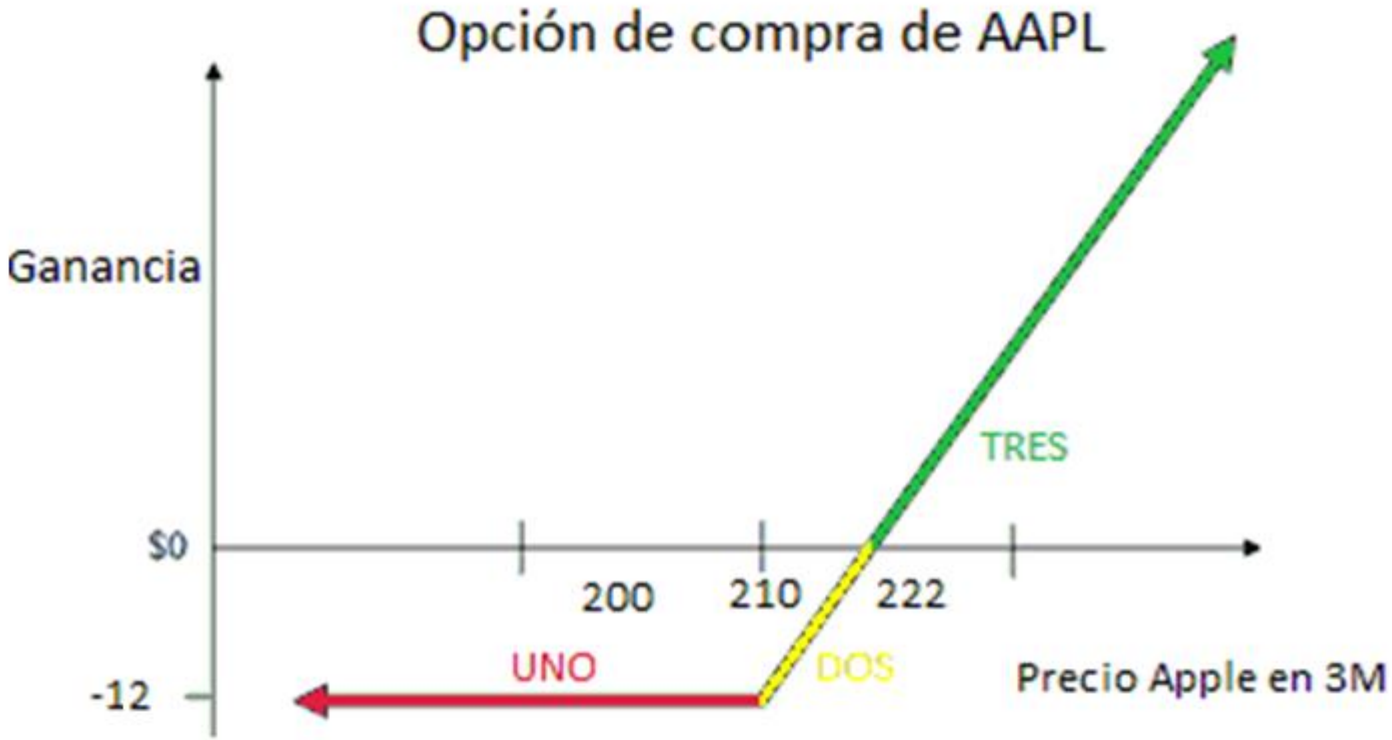
Caso de Estudio 1 (3/4) Especulación

UNO: Las acciones están por debajo del precio de ejercicio (210$), no ejerceremos la opción y perderemos la prima
PnL: PERDEMOS $12 (PISO)

DOS: Entre $210 y $222, reduciendo las pérdidas hasta 0. Sí ejercitaremos la opción ya que perderemos menos de los $12 de la prima.
PnL: PERDEMOS entre $0 y $12

TRES: A partir de $222 siempre ejercitaremos la opción y además empezaremos a tener beneficios. Si compramos a $210 más $12 de prima algo que cuesta $210, tenemos un beneficio/
PnL: GANAMOS la diferencia entre el precio y 222$ (SIN TECHO)

Caso de Estudio 1 (4/4) Especulación



En el ejemplo, el derecho ese costaba $12, pero encontrar el precio *justo* a ese derecho es un problema muy complejo matemático

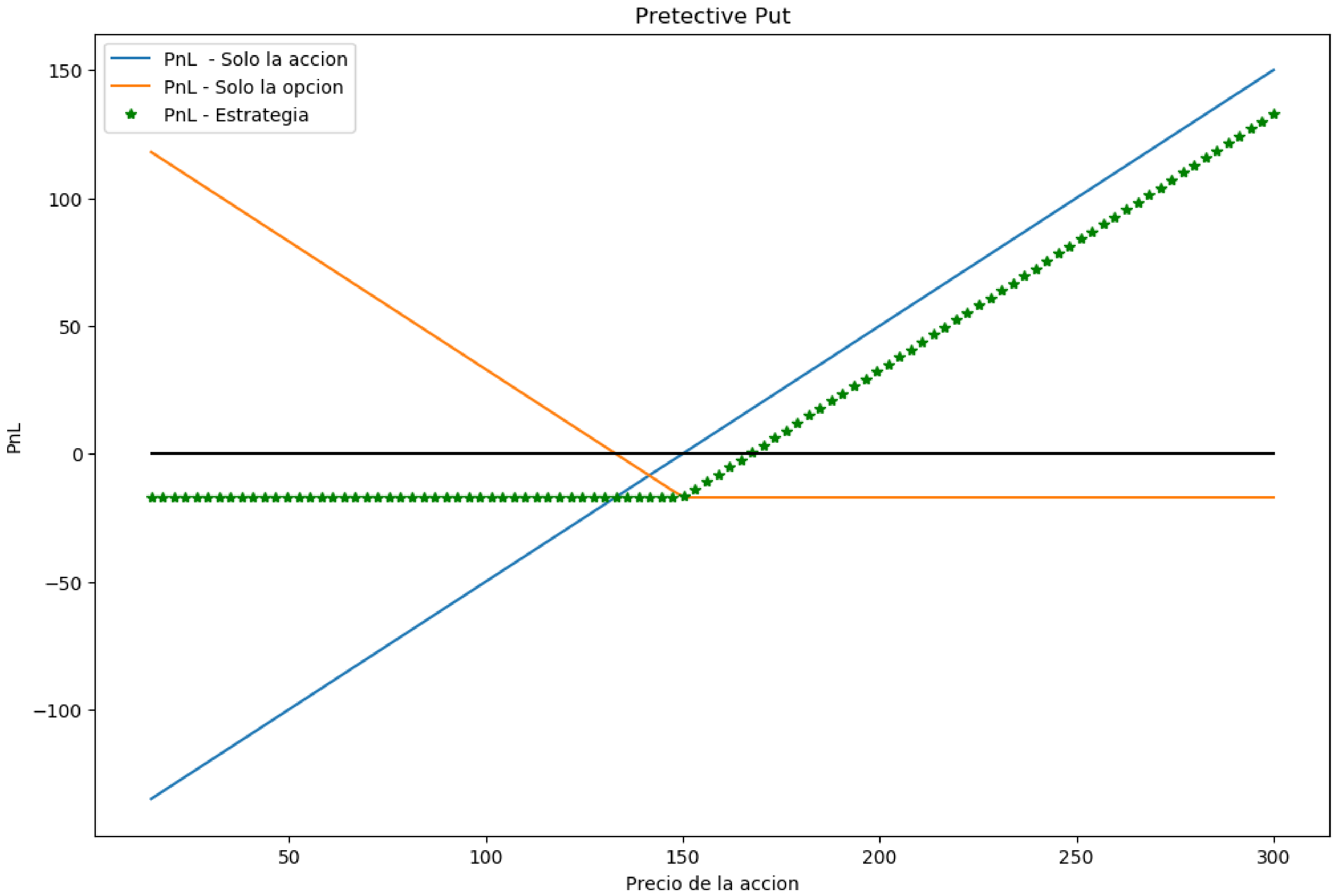
Caso de Estudio 2 (1/2) Cobertura

Put Protectora (*Protective Put*)

Un inversor compra una acción a un precio de $150 anticipando una suba. Para asegurarse de una eventual baja del activo, el inversor compra una opción *put* con el mismo strike, pagando para ello una prima.

El inversor compra protección ante la caída (riesgo) cediendo una potencial ganancia mayor

Caso de Estudio 2 (2/2) Cobertura



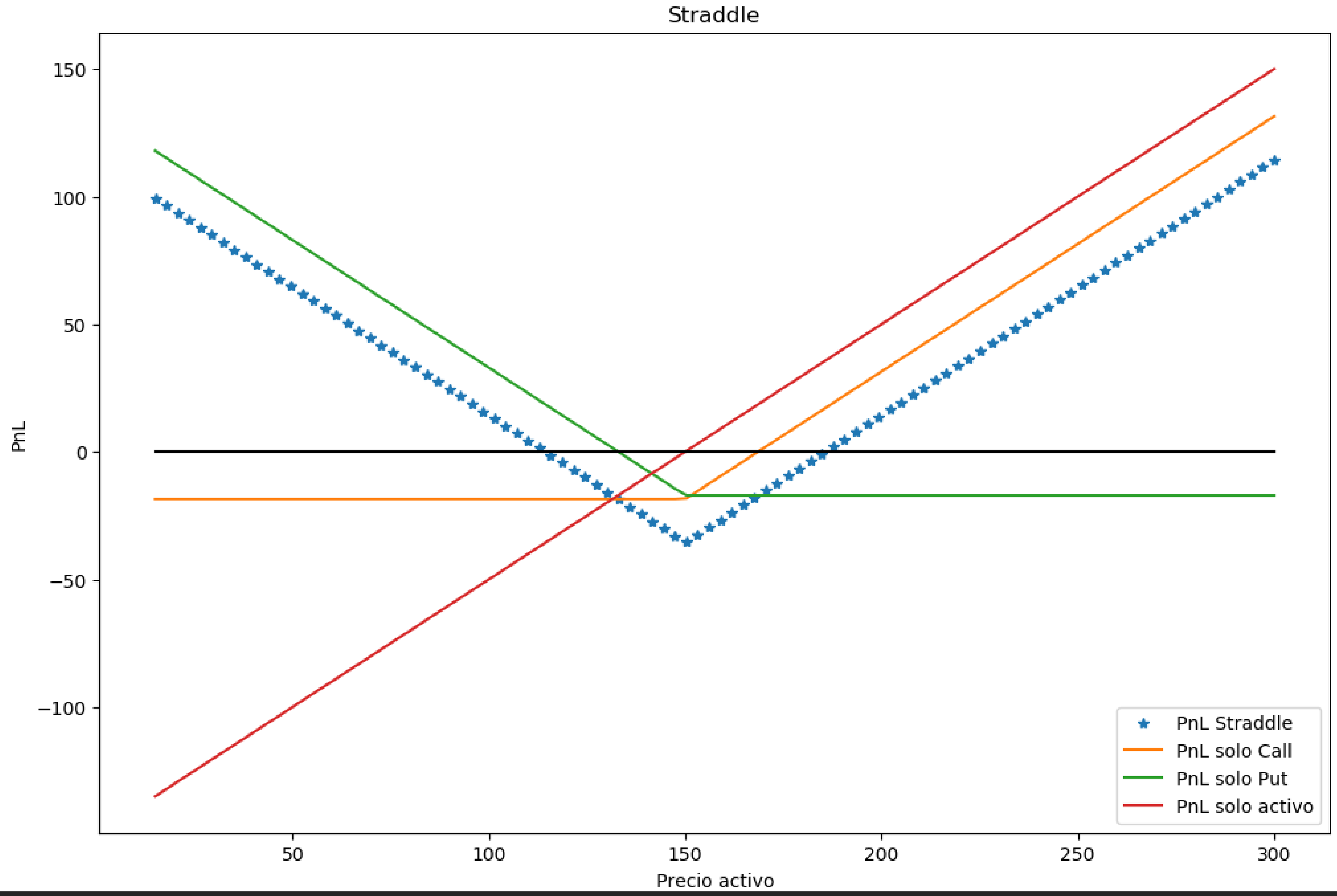
Caso de Estudio 3 (1/2) Comprar volatilidad

Straddle

Un inversor especula con un movimiento importante de un activo (Earnings, Elecciones, Anuncios, etc) pero no puede determinar en que dirección. Para eso compra una opción *call* y una opción *put* con el mismo precio de ejercicio- usualmente el precio del activo en el momento de la compra – es decir dos opciones ATM.

El inversor compra riesgo!

Caso de Estudio 3 (2/2) Comprar volatilidad



Precio de una Opción

El precio de mercado de una opción liquida negociada en un *Exchange* antes de expiración está determinado, como cualquier otro activo líquido, por oferta y demanda.

Cuando las opciones no son líquidas. Por ejemplo opciones muy OTM o muy ITM (*Deep* ITM, *Deep* OTM), el precio suele derivar de un modelo (Ej: Árboles Binomiales, Black-Scholes, etc).

La teoría formal detrás de la valuación de derivados se baja en la ausencia de arbitraje. Será crucial tenerlo en cuenta siempre.

Vamos a dedicarle una buena parte del curso a estudiar modelos de precios de prima de Opciones (clases 9 y 10).

El precio de una Opción **NO** depende de:

Tasa de crecimiento esperada del precio de la acción (μ)

Rendimiento del activo (α)

Comparación de rendimiento contra otros activos (β)

El precio de una opción será unívocamente determinado por la ausencia de arbitraje.

El precio de una Opción **SI** depende de: (1/2)

Del activo subyacente (1/2)

Precio *spot* (S) – de mercado

Del contrato propiamente dicho

Precio de ejercicio (K) (*strike*)

Tiempo a expiración (T) (*Time to Maturity*)

Tipo de contrato (Call o *Put*)

El precio de una Opción **SI** depende de: (2/2)

Del mercado

Tasa de interés libre de riesgo (r) (*Risk-free IR*) – no es trivial la decisión de cual tasa tomar. Usualmente se modela.

Del activo subyacente (2/2)

Tasa o estructura de pago de dividendos (q) – se suelen usar modelos de estimación teniendo en cuenta pagos pasados. [Los dejaremos de lado bastante…]

Del contrato + activo subyacente + mercado

Volatilidad implícita (σ) – un curso aparte!

Volatilidad Implícita (1/2)

- La visión del mercado de lo que podría pasar con el precio de un activo en el futuro.
- Se considera usualmente como un *proxy* al riesgo de mercado
- Es un factor determinante a la hora de buscar el precio de una opción
- No es lo mismo que la volatilidad histórica del subyacente - volatilidad realizada o volatilidad estadística, desvío estándar de los retornos de los últimos N días.
- Para cada K y T vamos a tener distintas volatilidades $\sigma(K,T)$

Volatilidad Implícita (2/2)

Por definición, la volatilidad implícita es aquella que al ponerla en un modelo de precio, se obtiene el precio de mercado.

Es decir, suponiendo que tengo un modelo de precio de opciones:

$$C(S_0, K, T, \sigma, r, q)$$

Si observo un precio C_M de mercado para una tupla (S_0, K, T, r, q), que son los parámetros 'conocidos' de una opción, entonces $\sigma_i$será la volatilidad σ: tal que se cumpla:

$$C(S_0, K, T, \sigma_i, r, q) = C_M$$

Esto se resuelve resolviendo una ecuación (no lineal)

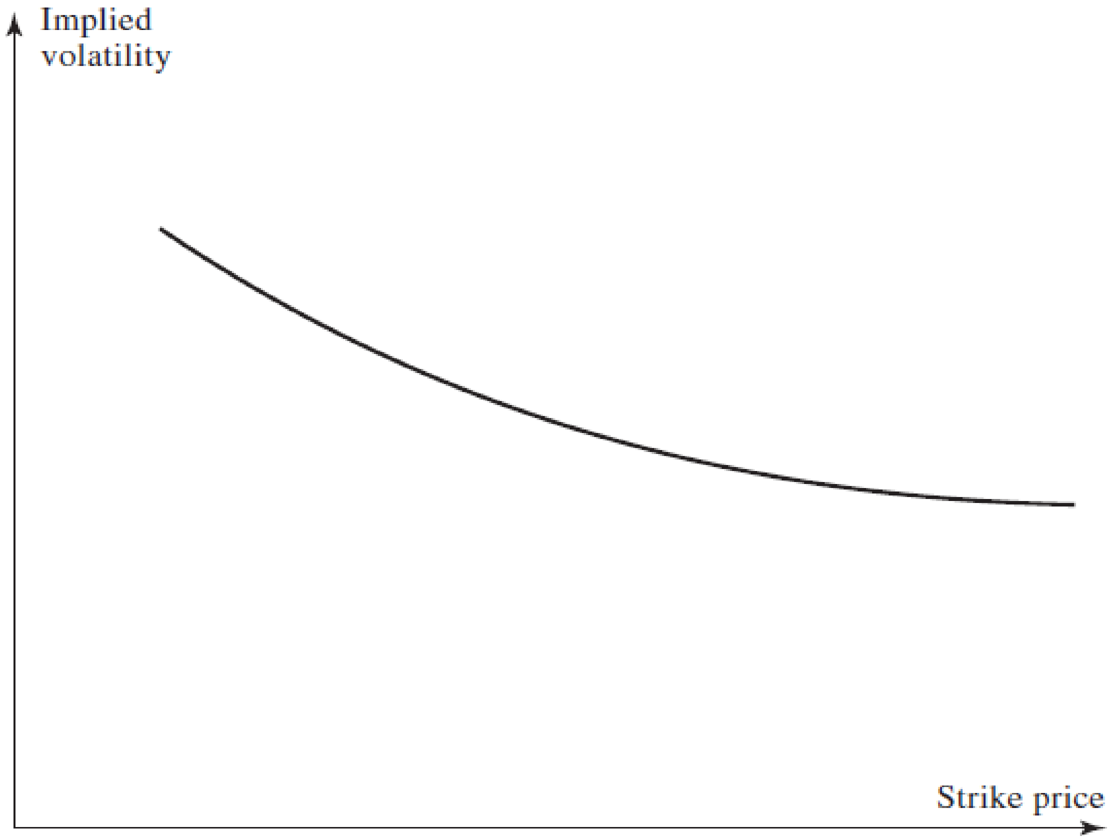
Sonrisa (sesgo) de volatilidad

- Antes del ***crash* de 1987** (*Black Monday*), se asumía **que la volatilidad implícita no dependía del *strike*** en opciones de *Equity*. O por lo pronto que la dependencia era muy baja.

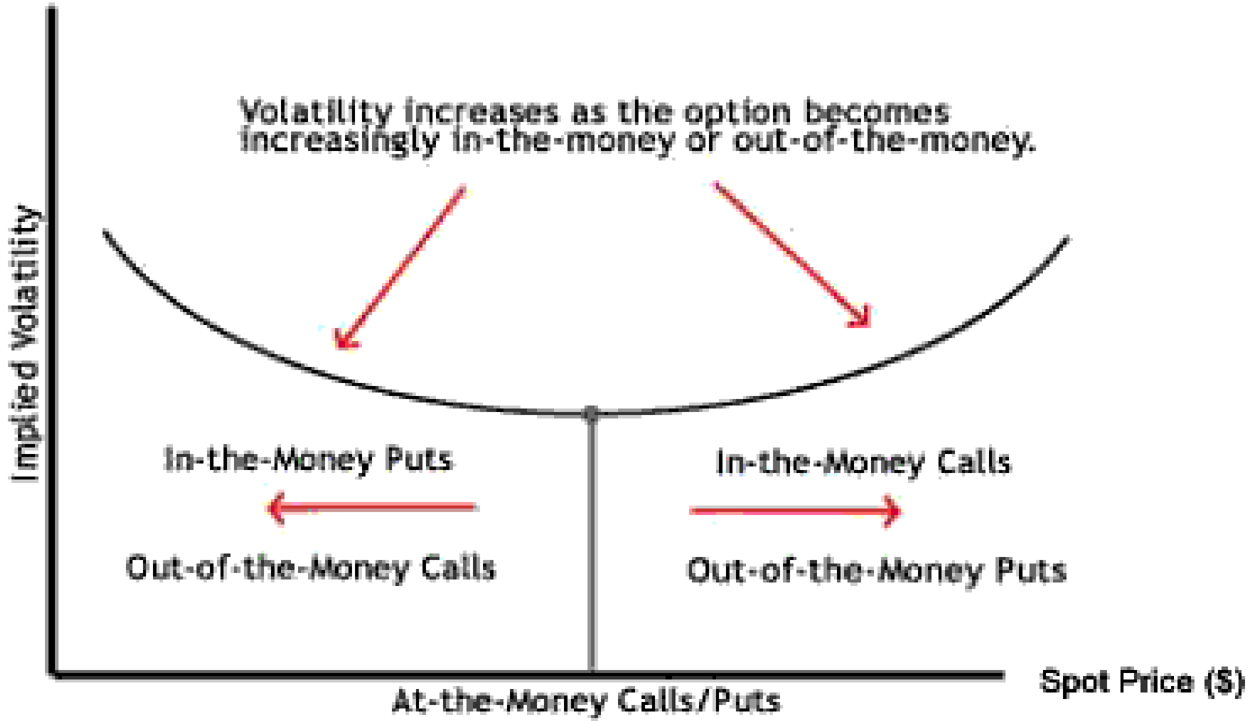
- Desde 1987, el **grafico de la volatilidad contra el strike** que se ve en el mercado tanto para acciones como para índices ha tenido la **forma general de una sonrisa (o mueca)**.

- La volatilidad utilizada para poner precio a una opción de *strike* bajo (un *call deep ITM o un put deep OTM)* es significativamente más alto que el utilizado para una opción de *strike* mas alto (un *call deep OTM* o un *put deep ITM*)

Sonrisa (sesgo) de volatilidad (2/2)

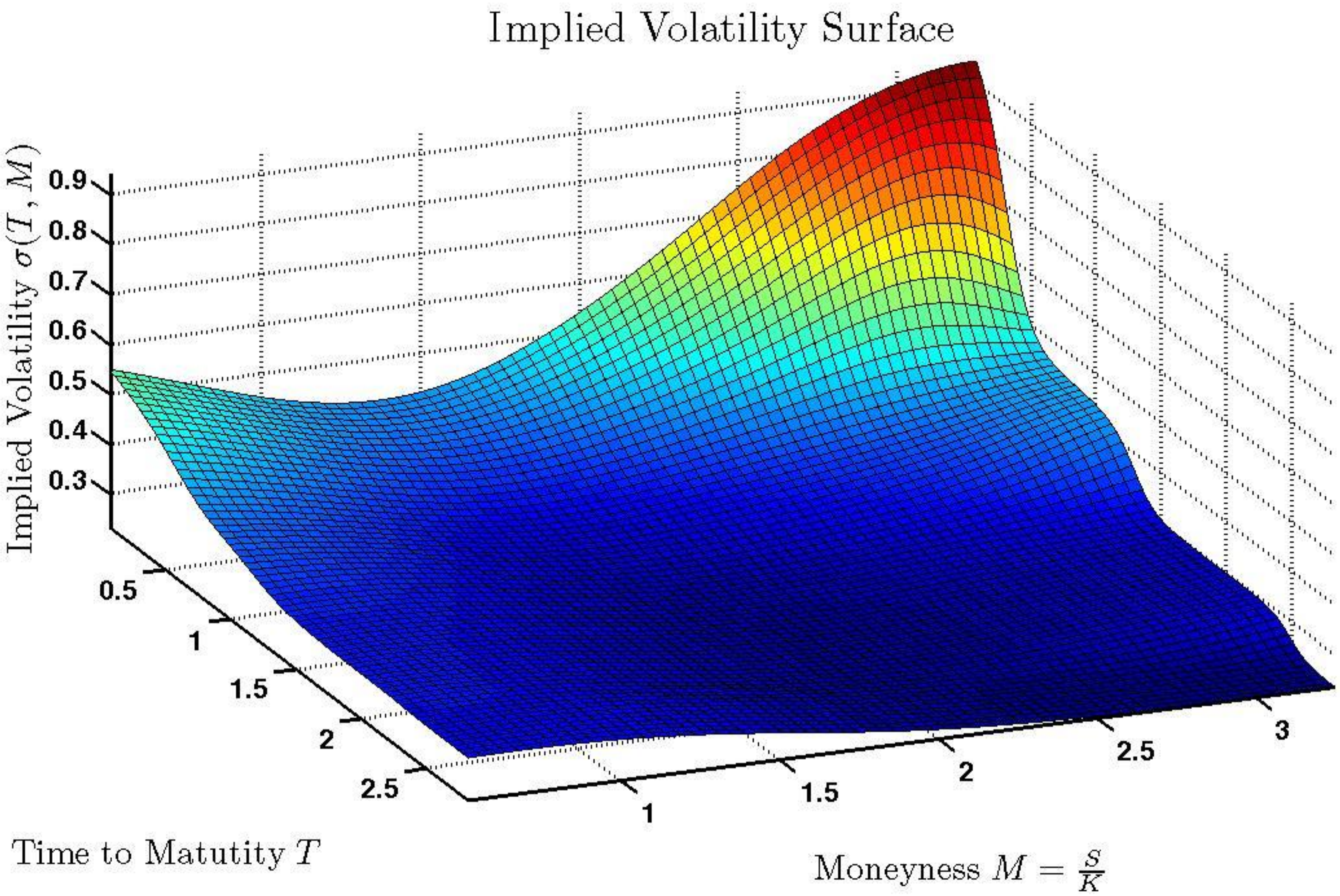


Fuente: Hull – Fig 20.3



Fuente: https://greeksoftinstitute.wordpress.com/2016/07/05/understanding-volatility-smile-skew/

Superficie de volatilidad



Fuente: https://medium.com/@xd529/three-typical-use-cases-of-the-implied-volatility-surface-a25d63edc86

Como varia el precio de una opción

Los precios de las opciones varían en cuanto haya movimientos en algunas de sus variables.

Pensemos por unos minutos como se podría ver afectado el precio de por ejemplo Un *Call* Europeo con subas en cada uno de los siguientes parámetros (*ceteris paribus* los demás)

- Precio *spot* (S)
- Precio de ejercicio (*K*)
- Tiempo a Expiración (*T*) (*Time to Maturity*)
- Volatilidad implícita (σ)
- Tasa de interés libre de riesgo (*r*) (*Risk-free IR*)
- Tasa de dividendos (*q*)
- El tipo de opción (Call-Put)

Sensibilidad del precio respecto a los parámetros

Opciones *Vanilla* Europeas		
Variable	*Call*	*Put*
S	+	−
K	−	+
T	?	?
σ	+	+
r	+	−
q	−	+

Opciones Americanas

- Una opción americana se define *casi* exactamente igual que una opción europea, con la diferencia que puede ser ejercida en cualquier momento de la vida de la opción.

- Notar que las denominaciones *americana* y *europea* nada tienen que ver con el origen de los activos. Es una nomenclatura para referirse al modo posible de ejercicio.

- Existen otras formas de ejercicio. Una bastante usada en el mundo de IR son las opciones de tipo bermuda, algo como un intermedio entre europeas y americanas – con fechas fijas en las que se puede ejercer.

Sensibilidad del precio respecto a los parámetros

	Europeas		Americanas	
Variable	C	P	C	P
S	+	−	+	−
K	−	+	−	+
T	?	?	+	+
σ	+	+	+	+
r	+	−	+	−
q	−	+	−	+

Cotas importantes en opciones - notación

- Usaremos la siguiente notación (Hull)

- S_0 := Precio actual del activo
- S_T := Precio del activo a tiempo T
- K := Precio de ejercicio
- T := Tiempo de expiración
- r := Tasa libre de riesgo
- C := Precio de una *call* americana
- P := Precio de una *put* americana
- c := Precio de una *call* europea
- p := Precio de una *put* europea

No arbitraje

Un resultado que vamos a usar mucho es el siguiente:

Si NO existen posibilidades de arbitraje, entonces:

- Si dos portafolios (A y B) valen lo mismo a vencimiento, es decir, tienen el mismo *payoff*.
- Entonces A y B valen lo mismo en toda la vida de los activos.

Matemáticamente:

$$P_A(T) = P_B(T) \rightarrow P_A(t) = P_B(t), \text{para todo } t$$

Cotas superiores (1/2)

No importa que pase, una opción *call* nunca puede valer más que el precio del activo subyacente

$$c \leq S_0; C \leq S_0$$

Si esto no sucediera, un arbitrador podría comprar una unidad del activo y vender una unidad de la opción y hacer ganancia sin riesgo.

Cotas superiores (2/2)

De la misma manera, una opción *put* nunca puede valer más que el precio de ejercicio

$$p \leq K; P \leq K$$

Para *put* europeas, a tiempo final la opción tampoco puede valer más que el ejercicio, trayendo el tiempo al origen obtenemos:

$$p \leq Ke^{-rT}$$

Cotas inferiores (1/2)

Una opción *call* europea que no paga dividendos, tiene la siguiente cota inferior:

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Construyamos dos portafolios:

Portafolio A: Una opción *call* europea y Ke^{-rT} unidades de dinero

Portafolio B: Una unidad del activo S

Veamos los *payoffs*:

$P_A(T) = \max(S(T) - K, 0) + K = \max(S(T), K)$, $P_B(T) = S(T)$

Con lo cual se tiene que $P_A(T) \geq P_B(T)$ lo que implica que la relación es cierta en todo tiempo, en particular al origen: $P_A(0) \geq P_B(0)$:

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0$$

Cotas inferiores (2/2)

Una opción *put* europea que no paga dividendos, tiene la siguiente cota inferior:

$$p \geq Ke^{-rT} - S_0$$

Construyamos dos portafolios:

Portafolio C: Una opción *put* europea y una unidad del activo *S*

Portafolio D: Ke^{-rT} unidades de dinero

Veamos los *payoffs*:

$P_{\mathrm{C}}(\mathrm{T}) = \max(K - S(T), 0) + S(T) = \max(S(T), K)$, $P_D(T) = K$

Con lo cual se tiene que $P_C(T) \geq P_D(T)$, entonces la relación es cierta en todo tiempo, en particular en 0: $P_C(0) \geq P_D(0)$:

$$p + S_0 \geq Ke^{-rT}$$

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (1/4)

Suponiendo conocido el precio de una Opción *call* Europea, veamos un argumento de no arbitraje para deducir el precio de un *put* Europeo (mismo *underlying*, *strike* y *maturity*)

Sean los siguientes dos portafolios:

- Portafolio A: Una *call* más K unidades de dinero (*money market*)

$$P_A = 1 \text{ x } c + K \text{ x } B$$

- Portafolio B: Una *put* más una unidad del activo subyacente

$$P_B = 1 \text{ x } p + 1 \text{ x } S$$

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (2/4)

Veamos el valor de los portafolios a tiempo final:

- $P_A(T) = \max(S(T) - K, 0) + K = \max(S(T), K)$
- $P_B(T) = \max(K - S(T), 0) + S_T = \max(K, S(T))$

Es decir, sus *payoffs* son idénticos:

$$P_A(T) = P_B(T)$$

El valor de los portafolios entonces tienen que ser idénticos en todo tiempo desde inicio hasta expiración.

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (3/4)

En particular, deben valer lo mismo al inicio. Veamos cuanto valen al inicio:

$$P_A(0) = c + Ke^{-rT}$$
$$P_B(0) = p + S_0$$

Igualándolos, dado que por no arbitraje deberían ser idénticos:

$$P_A(0) = c + Ke^{-rT} = p + S_0 = P_B(0)$$

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (4/4)

Es decir, se cumple que:

$$c - p = S_0 - Ke^{-rT}$$

Esta relación es conocida como la paridad *Put-Call*. Notar que es válida para todo momento de la vida de las opciones:

$$c(t) - p(t) = S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$

Esta relación es muy útil por ejemplo para:

- Construir *Put* sintética de no existir en el mercado
- Buscar Arbitrajes
- Calibrar/Validar modelos de precio

Relaciones entre Europeas y Americanas (1/2)

Dado que las opciones americanas tienen más *opcionalidad*… *derecho*, intuitivamente tenemos las siguientes dos relaciones:

(europea) $c \leq C$ *(americana)*

y

(europea) $p \leq P$ *(americana)*

Lo que NO es intuitivo, es que en el caso de las *call* que no paguen dividendos, también se puede ver que:

(europea) $c \geq C$ *(americana)*

Con lo cual, $c = C,$ y el precio de las dos opciones es idéntico

Es decir, NUNCA es óptimo ejercer la opción antes de vencimiento.

Call americano sin dividendos (1/2)

Veamos esto último:

"NUNCA es óptimo ejercer la *call* americana antes de vencimiento"

Ya vimos (Cotas Inferiores) que $c \geq S_0 - Ke^{-rT}$, como $C \geq c$:

$$C \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Asumiendo $r > 0$, lo anterior dice que siempre que $T > 0,$:

$$rT > 0 \rightarrow -rT < 0 \rightarrow e^{-rT} < 1 \rightarrow -e^{-rT} > -1 \rightarrow -Ke^{-rT} > -K$$

[vender] $C > S_0 - K$ *[ejercer]*

Put americano sin dividendos

El valor de ejercicio de una opción de venta es $K - S(T)$. En una opción *put* europea

---

Este valor no puede capturarse hasta el vencimiento.

Antes del vencimiento, el valor de la opción de venta europea será una función del valor presente de lo que este ejercicio genera: $e^{-r(T-t)}(K - S(t))$.

El *put* americano da acceso inmediato en cualquier momento a $K - S$, a través del ejercicio.

En ciertas circunstancias, especialmente en los posiciones muy Deep ITM, con el tiempo restante hasta la expiración, este diferencial en las condiciones de ejercicio puede dar al *put* americano un valor extra sobre el *put* europeo correspondiente, incluso en ausencia de dividendos.

Otras relaciones *PutCall*

- Americanas que no pagan dividendos:

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

- Europeas que pagan dividendos:

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

- Americanas que pagan dividendos:

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Opciones Exóticas (y no tanto) (1/2)

- Ejercicio:
  - Europea – Solo en tiempo de ejercicio
  - Bermuda – En tiempos predefinidos
  - Americana – En cualquier momento

- Dependen del camino:
  - Asiaticas: $Asia_C \; = \max(\sum w_i S(t_i) - K)\,, 0)$
  - Barreras: Se prenden o apagan cuando S toca valores predeterminados
  - Ventanas: Similares a las barreras pero se activin solo en tiempos determinados

Opciones Exóticas (y no tanto) (2/2)

- Baskets: Dependen de mas de un subyacente
- Spread: Dependen de la diferencia entre dos subyacentes

- Opciones sobre otro tipo de subyacente:
  - IRP: en bonos, en futuros de bonos, en swaps (*Swaptions)*
  - Commodities:
  - Indices
  - CDSs

Otras relaciones *PutCall* - Binarias

- Opciones Binarias-Digitales:

Una opción Binaria-Digital funciona de manera similar a una opción europea pero con los siguiente *payoff:*

$$CD_L\ (T) = I_{\{S(T)>K\}}$$
$$PD_L\ (T) = I_{\{S(T)<K\}}$$

Encontrar una relación de *PutCall* para este tipo de opciones

Modelos Matemáticos en Finanzas Cuantitativas

- Fórmulas Cerradas / Aproximaciones analíticas
- Modelos de árboles (*lattices*)
- Modelos de Ecuaciones Diferenciales
- Montecarlo
- Ad-hoc

Preguntas (Hull)

- [11.2] ¿Cuál es un límite inferior para el precio de una opción *call* a 4 meses en una acción que no paga dividendos cuando el precio de la acción es de $28, el *strike* es de $25, y la tasa de interés libre de riesgo es del 8% anual?
- [11.14] El precio de una *call* europea que expira en 6 meses y tiene un *strike* $30 es $2. El precio de la acción subyacente es $29, y se espera un dividendo de $0.50 en 2 meses y otra vez en 5 meses. Los tipos de interés (todos los vencimientos) son del 10%. ¿Cuál es el precio de un *put* que expira en 6 meses y tiene un *strike* de $30?
- [11.25] Supongamos que c_1, c_2 y c_3 son los precios de las opciones *call* europeas con *strikes* K_1, K_2 y K_3, resp., con $K_3 > K_2 > K_1$ y $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$. Todas las opciones tienen el mismo *maturity* Mostrar que $c_2 \leq \frac{c_1+c_3}{2}$