Análisis Cuantitativo en Finanzas

Manu Maurette

Profesor Invitado, Instituto de Cálculo, FCEN, UBA.

Junio de 2022

Repaso del clases anteriores

- Introducción a Derivados Financieros
- Opciones
- Árbol Binomial
- Paso al límite - BS
- Método de Montecarlo

Retorno de un activo

A partir de ahora pasaremos de modelos en los cuales los *securities* pueden tomar distintos valores en $0 = t_0, t_1, \cdots, t_N = T$ a modelos el los cuales pueden tomar distintos valores para cualquier valor $t \in [0, T]$. Es decir, modelos **continuos.**
Supongamos que a tiempo t el precio de un activo es $S(t)$, consideremos un lapso dt en el que el precio varía de $S(t) + dS(t)$.

Definición

En una inversión S, **la tasa de retorno** sobre un período $[t, t + dt]$ se define como:

$$ret = \frac{S(t + dt) - S(t)}{S(t)} = \frac{dS(t)}{S(t)}$$

Retorno de un activo -cont

Cómo se modelaría el retorno $dS(t)/S$:

- Una parte determinística, que da una contribución de μdt
- Una parte estocástica. Cambios aleatorios del activo, factores externos, noticias inesperadas: $\sigma\Phi$, con Φ normal

Por qué usaríamos este modelo??

Basta ver series históricas de precios de acciones para convencernos:

Plot del SPY en Yahoo Finances[LINK!]

Dinámica de un activo

Usaremos el siguiente modelo:

$$dS(t)/S == \mu dt + \sigma\Phi(t)$$

O equivalentemente, la dinámica para S

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)\Phi(t)$$

Llamaremos :

- **deriva** -*drift* a μ
- **volatilidad** a σ
- Φ es un componente estocático - en particular, Normal

La idea de este módulo es estudiar esta dinámica para modelar el precio de un activo y así poder valuar derivados.

Movimiento Browniano

Comentario

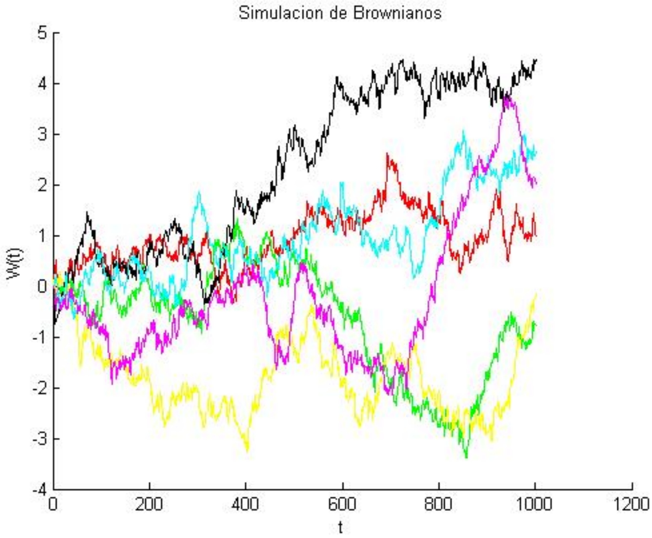
La notación que comenzaremos a usar es la siguiente:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

En donde $W(t)$ es un Movimiento Browniano.

El movimiento Browniano es un objeto matemático que vamos a estudiar en el transcurso de estas clases.

Simulaciones de un Browniano



Movimiento Browniano - Historia

1828 primer registro del fenómeno. El botánico Robert Brown reporta que granos de polen suspendidos en una cierta sustancia vistos a través de un microscopio, realizaban un movimiento irregular e inexplicable.

1900 Bachelier publica su tesis doctoral Teoría de la especulación, en la que ultiliza el movimiento browniano para modelar activos financieros, aunque su uso es poco riguroso.

1905 luego de muchas discusiones y formulaciones de muy diversas hipótesis acerca de su naturaleza, Einstein publica un trabajo que contribuye a explicar el movimiento como múltiples colisiones aleatorias de las moléculas del líquido con los granos de polen. Tal explicación se basa en la teoría cinética molecular de la materia.

1923 Norbert Wiener formaliza matemáticamente el movimiento browniano, siendo el primero en dar una construcción formal del mismo.

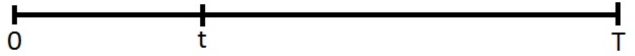
1943 Itô desarrolla el cálculo estocástico y la teoría de integrales estocásticas

1965 Samuelson agrega un ingrediente al modelo de Bachelier y propone que son en realidad los retornos de los activos, y no sus precios, los que siguen un movimiento browniano con drift

1973 Black y Scholes publican su tabajo sobre opciones, en el que asumiendo el modelo de Samuelson y ausencia de oportunidades de arbitraje, logran dar una fórmula cerrada para el precio justo de estos contratos. Junto con Merton, completan el marco coneptual vigente y con esto se consigue explicar la complejidad del mercado financiero con herramientas muy similares a la de la mecánica estadística

De acá en más... mucha Teoría...

Para formalizar este modelo deberemos *arremangarnos y encisuarnos un poco las manos* en la teoría de probabilidad moderna.



- Estamos a tiempo 0
- Un contrato finaliza a tiempo T
- Necesitamos tomar decisiones en $0 \leq t \leq T$

La información a tiempo t es **aleatoria**:

- ω es una posible evolución del mercado.
- Ω es el conjunto de todas las posibles evoluciones del mercado. El espacio muestral.

Un rato de formalismo, recuerden que soy matemático.

Definición

Una terna $(\Omega, \mathcal{U}, \mathbb{P})$ se llama un *espacio de probabilidad* si Ω es un conjunto cualquiera, $\mathcal{U}$ una σ-álgebra de conjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad en $\mathcal{U}$.

Definición

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ una función $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ se llama una *variable aleatoria n-dimensional* si para todo $B \in \mathcal{B}$, donde $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ se tiene

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{U}$$

se dice también que X es $\mathcal{U}$-medible.

Ejemplos

Ejemplo

- Tirar una moneda n veces y observar las secuencias de caras y secas.

  $$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_i = c, s \quad i = 1, \ldots, n\}$$

  Definimos X=número de caras obtenidas, o bien:

  $$X(\omega) = \#\{w_i = c, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

- Elegir un punto al azar en el intervalo $[0, 1]$, elevarlo al cuadrado y sumarle π. Tenemos entonces:

  $$\Omega = [0, 1] \qquad X(\omega) = \omega^2 + \pi$$

Función de distribución

Las variables aleatorias tienen asociada una importante función:

Definición

Dada una variable aleatoria X, se llama *función de distribución* a la función F_X o simplemente F definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Definición

Una variable aleatoria es *discreta* si toma un número a lo sumo numerable de valores, es decir, existe un conjunto a lo sumo numerable $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\Omega) \subset \{x_1, x_2, \ldots\}$. En este caso se define la *función de probabilidad puntual* p_X como

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) \quad i = 1, 2, \ldots$$

Función de distribución

Definición

Una variable aleatoria es *(absolutamente) continua* si existe una función $f_X \geq 0$ llamada *función de densidad de probabilidad* tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Está claro que no todas las variables aleatorias son o discretas o continuas, pero se puede demostrar que cualquiera es una suma de una continua y una discreta (otro cantar)

Comentario

En lenguaje de Teoría de la medida, la función de distribución se puede definir como:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} d\mathbb{P} = \mathbb{P}(X < x)$$

Esperanza

Definición

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}$$

Si el proceso es discreto:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Si el proceso es continuo:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) dx$$

Esperanza Condicional

Definición (Esperanza Condicional)

Sea $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria y $\mathcal{H}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. La **esperanza condicional** de X dado $\mathcal{H}$ es la función $\mathcal{H}-$medible $\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$ que satisface:

$$\int_H \mathbb{E}[X|\mathcal{H}](\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_H X(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \qquad \forall\, H \in \mathcal{H}$$

Comentario

La esperanza condicional es entonces, tomando la medida $\mathbb{Q}(A) = \int_A X d\mathbb{P}$

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$$

Radon-Nikodym

La derivada anterior proviene de:

Teorema (Radon-Nikodym - version Proba)

Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, *una medida* σ*-finita* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *y una medida con signo* σ*-finita* $\mathbb{Q} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *absolutamente continua con respecto a* $\mathbb{P}$, *entonces existe una única función medible* f *sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$ *que satisface:*

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f \, d\mathbb{Q} \ \text{ para todo } A \in \mathcal{F}$$

A f *se la denomina la derivada de Radon-Nikodym:*

$$f = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$$

Procesos Estocásticos

Definición

Una colección $X_t = X(t) = X_{t>0} = \{X(t) : t > 0\}$ de variables aleatorias se llama un *proceso estocástico*

Ejemplo

Consideremos una partícula en el origen de la recta. Cada segundo se mueve una unidad a la derecha o a la izquierda con la misma probabilidad. Es decir, pasa del estado (x, t) a $(x+1, t+1)$ o al $(x-1, t+1)$. Este es un ejemplo de un *paseo al azar*. El espacio sería:

$$\Omega_n = \{\omega = (\omega_1, ..., \omega_n) : w_i \in \{-n, -(n-1), ..., 0, ...(n-1), n\}\}$$

Podemos definir por ejemplo el proceso X_n, discreto, como el número de veces que la partícula vuelve al origen a tiempo t:

$$X_n = \#\{i : w_i = 0\}$$

Algunos Procesos Importantes

- **Procesos de Markov** Suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Esta condición se llama propiedad de Markov:

$$\mathbb{P}(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A | X_s)$$

- **Martingalas** El valor promedio del proceso en un tiempo futuro es el valor del proceso en su último momento observado. Esto es, se trata de una ley de movimiento aleatorio que es equilibrada o simétrica, pues en promedio el sistema no cambia del último momento observado.

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s, \qquad t > s$$

  F_s es el conjunto de toda la información hasta tiempo s. Se llama también **filtración**.

El Movimiento Browniano cumplirá estas dos propiedades.

Movimiento Browniano - Propiamente Dicho

Definición

Un Movimiento Browniano (o proceso de Wiener) $W(t)$ es un proceso estocástico tal que:

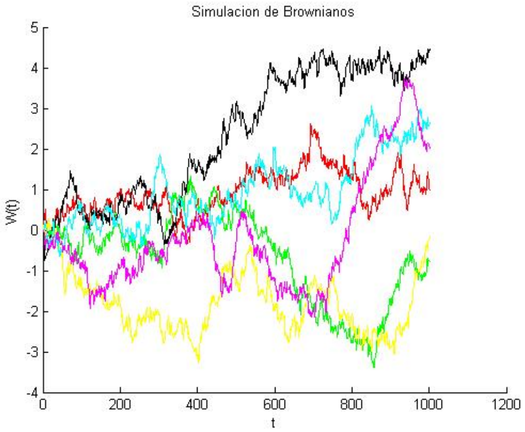
- $W(0) = 0$
- $W(t)$ es continuo - Las trayectorias son continuas.
- Para cualquier colección de instantes $s < t < u < v$, las variables $W(t) - W(s)$ y $W(v) - W(u)$ son independientes.
- Para cualquier colección de instantes $s < t$, la variable $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$

Comentario

Se puede probar la existencia de un Movimiento Browniano.

Comentario

El movimiento Browniano puede verse como límite, en probabilidad, de paseos al azar.



Algunas Propiedades

Sea $W(t)$ un M.B.:

- $\mathbb{E}(X(t)) = 0$, $Var(X(t)) = t$, $\mathbb{E}((W(t) - W(s))^2) = t - s$
- $Cov(W(t), W(s)) = \text{mín}(s, t)$
- $W(t)$ es de Markov y Gausiano
- $W(t)$ es Martingala
- $W(t)^2 - t$ es Martingala
- Para todo u, $e^{uW(t) - u^2 t/2}$ es Martingala.

Browniano Geométrico

Como vimos más temprano, el modelo que usaremos para un activo será el de Browniano Geométrico:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Se puede probar (Fórmula de Ito) que el MBG sigue:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

E.D.E

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias sirven para modelar a la dinámica de una trayectoria suave. Por ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dB(t) & = & rB(t)dt \\ B(0) & = & B_0 \end{array} \right.$$

Solución: $B(t) = B_0 e^{rt}$
Que pasa ahora, si lo que queremos modelar tiene un componente estocástico. Ejemplo de Ecuación Diferencia Estocástica:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dR(t) & = & \sigma dW(t) \\ R(0) & = & R_0 \end{array} \right.$$

En donde $dW(t)$ representaría $W(t+dt) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, dt)$.

Variación Cuadrática

Definición

Dada f una función, se define su **variación cuadrática** en $[0, t]$, como el siguiente límite:

$$[f, f](t) = \lim_{\|\Pi\|} \sum_{i=0}^{n} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2$$

en donde Π es una partición del $[0, t]$,
$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = t$.

Comentario

Si f es derivable con derivada acotada, $[f, f](t) = 0$.

Teorema

$$[W, W](t) = t \quad \sim \; dW^2 = dt$$

$dW^2 = dt$

Recordemos la aproximación de segundo orden en dos variables para una $f(t, S)$ [derivada total]:

$$df = f_t dt + f_S dS + f_{tt} dt^2 + 2 f_{tS} dt dS + f_{SS} dS^2 + \mathcal{O}(dt^3, dS^3, dt dS^2, dt^2 dS)$$

Ustedes reiteradas veces habrán cortado antes:

$$df = f_t dt + f_S dS,$$

suponiendo $dt^2 = dt dS = dS^2 = 0$. **Suele tener sentido** Pero nosotros tenemos que $dS^2 = \mathcal{O}(dt)$ y no es despreciable!

Se quiere una fórmula para diferenciar fórmulas de la forma $f(W(t))$ con W un Brownaino.

Teorema (Fórmula de Ito)

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt$$

Si ahora tengo $f = f(S(t), t)$*:*

$$df(t) = f_S dW(t) + f_t dt + \frac{1}{2}f_{SS}dt$$

Finalmente, veamos como cuaja todo esto en Finanzas.

La Ecuación de Black Scholes[LINK!]

Modelo de Black Scholes para Opciones Europeas

Definición

Una opción call europea sobre un activo es un contrato que le da el derecho a una de las partes a comprar dicho activo a un precio acordado y en una fecha estipulada.

Notación:

- S:= precio del activo.
- K:= precio de ejercicio.
- T:= tiempo de expiración (vencimiento)
- μ, σ:= deriva y volatilidad del activo
- $C(S, t)$:= valor de la opción.

Recordemos además el payoff:

$$C(S(T), T) = \text{máx}\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+$$

Supuestos de B-S

- **El precio del activo sigue un Browniano Geométrico**
- **La tasa de interés libre de riesgo r y la volatilidad σ del activo son constantes**
- **No hay costos de transacción asociados**
- **El activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción**
- **No hay posibilidad de arbitraje**.
- **La compra y venta del activo puede tomar lugar continuamente**.
- **La venta short es permitida y los activos son divisibles**.

Estrategia de replicación

Contamos con los siguientes productos a dispocicón:

- activo S
- opción C
- dinero (un bono libre de riesgo) B. **Money market**

La idea será [IGUAL QUE ANTES!]:
Replicar con S y C a B.
Es decir, armarse un portfolio libre de riesgo. Sea:

$$\Pi = \begin{cases} 1 & \text{unidad de } C \textit{ short} \\ \Delta & \text{unidades de } S \textit{ long} \end{cases}$$

con Δ a determinar:

$$\Pi = \Delta S - C$$

El porfolio *replicador*

Veamos lo que sabemos de este portfolio Π

- A tiempo final, su valor es:

$$\Pi(T) = \Delta S(T) - C(T) = \Delta S(T) - (S(T) - K)^+$$

- Busco que Π sea libre de riesgo:

$$d\Pi = r\Pi dt = r\Delta S dt - rC dt$$

- Por otro lado: la dinámica de Π es:

$$d\Pi = \Delta dS - dC = \Delta[\mu S dt + \sigma S dW] - dC$$

dC usando Ito

Quién es dC? Usando la fórmula de Ito para $C(S(t), t)$:

$$dC = C_S dS + C_t dt + \frac{1}{2}\left(C_{SS} dS^2 + 2C_{tS} dSdt + C_{tt} dt^2\right)$$

Usando que $dS = S\mu dt + S\sigma dW$ y olvidándonos de los términos de menor orden $dtdS$ y dt^2 queda:

$$dC = C_S[S\mu dt + S\sigma dW] + C_t dt + \frac{1}{2} C_{SS}[S\mu dt + S\sigma dW]^2$$

Notar que $[S\mu dt + S\sigma dW]^2 = S^2\sigma^2 dW^2 = S^2\sigma dt$.
Con lo cual tenemos:

$$dC = C_S S\mu dt + C_S S\sigma dW + C_t dt + \frac{1}{2} C_{SS} S^2 \sigma^2 dt$$

Π era libre de riesgo!

Tenemos entonces la dinámica de Π:

$$d\Pi = \Delta\mu S dt + \Delta\sigma S dW - C_S S\mu dt + C_S S\sigma dW + C_t dt + \frac{1}{2} C_{SS} S^2 \sigma^2 dt$$

reordenando los términos resulta:

$$d\Pi = \left(\Delta\mu S - C_t - C_S S\mu - \frac{1}{2} C_{SS} S^2 \sigma^2\right) dt + \left(\Delta\sigma S - \sigma S C_S\right) dW$$

Es en este momento donde recordamos que nuestro porfolio lo construimos para que sea libre de riesgo (no estocástico!).

$$\text{Tomamos } \Delta = C_S = \frac{\partial C}{\partial S}$$

Recordar el $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$ en el caso discreto.

La ecuación de Black Scholes

Juntando ahora las dos expresiones que teníamos para $d\Pi$:

$$d\Pi = r\Pi dt = (r\Delta S - rC)dt = rC_S S dt - rCdt$$

$$d\Pi = \left(-C_t - S^2\sigma^2\frac{1}{2}C_{SS}\right)dt$$

Obtenemos la Ecuación de Black Scholes:

Teorema

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC, \quad 0 < t \leq T, \quad S > 0$$

$$C(S,T) = (S-K)^+$$

B-S$\rightarrow$ Calor

Black Scholes se puede tranformar en la Ecuación del Calor:
Cambiando variables:

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), v(x,\tau) = \frac{C(S,t)}{K}$$

Llamando $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv & x \in \mathbb{R}, \tau \in (0, T\frac{\sigma^2}{2}] \\ v(x,0) = \text{máx}\{e^x - 1, 0\} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Proponemos por último $v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta r} u(x,\tau)$ con α y β dos parámetros a determinar:

B-S$\rightarrow$ Calor 2

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}) + ku$$

Se elige α y β para que se anulen u y $\frac{\partial u}{\partial x}$.

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \qquad y \qquad 0 = 2\alpha + (k-1)$$

Tenemos entonces una ecuación para u:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con la condición inicial:

$$u(x,0) = \text{máx}\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\} = u_0(x)$$

u cumple con la **ecuación del calor**, cuya solución está dada por:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{x-s}{4r}} ds$$

Fórmula de Black Scholes

Continuando por este camino, aunque no es el único!! se llega a:

Teorema (Fórmula de Black Scholes)

$$C(S,t) = SN(d^+) - Ke^{-r(T-t)}N(d^-)$$

Con:

$$d^+ = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_- = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Comentario (En $t = 0$)

Cuando $t = 0$, se obtiene el valor de la opción a tiempo inicial:

$$C(S) = SN(d^+) - Ke^{-rT)}N(d^-)$$

con los respectivos $d^+ y d^-$

Las Griegas

Definición

Las **Griegas** son cantidades que representan la sensibilidad del mercado de los instrumentos derivados.

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \qquad \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

$$vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \qquad \rho = \frac{\partial C}{\partial r}$$

$$\theta = \frac{\partial C}{\partial T} \qquad volga = \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}$$

Son hasta más importantes que el precio de un derivado! (Riesgo)