# Analisis Cuantitativo en Finanzas

Manu Maurette, 2022

Clase 4: Árbol Binomial, limite, estrategias (boceto)

# Árbol Binomial (1/3)

- La idea ahora es que el precio de la acción pueda subir o bajar no solo una vez, sino un numero finito $m$ de veces en el intervalo $[0, T]$ cada $\delta t$ con $T = m\delta t$. Este modelo es:
  - Simple como para trabajar explícitamente
  - Ayuda para comprender la valuación de derivados y aproximar problemas mas realistas.

1. Se construye un árbol con los posibles valores del activo, dado un valor inicial de este.
2. Se analizar los posibles precios a tiempo $T$ y determinar la probabilidad de riesgo neutral.
3. Yendo para atrás por el árbol y, a partir de la relación anterior, se calculan los valores en cada nodo.

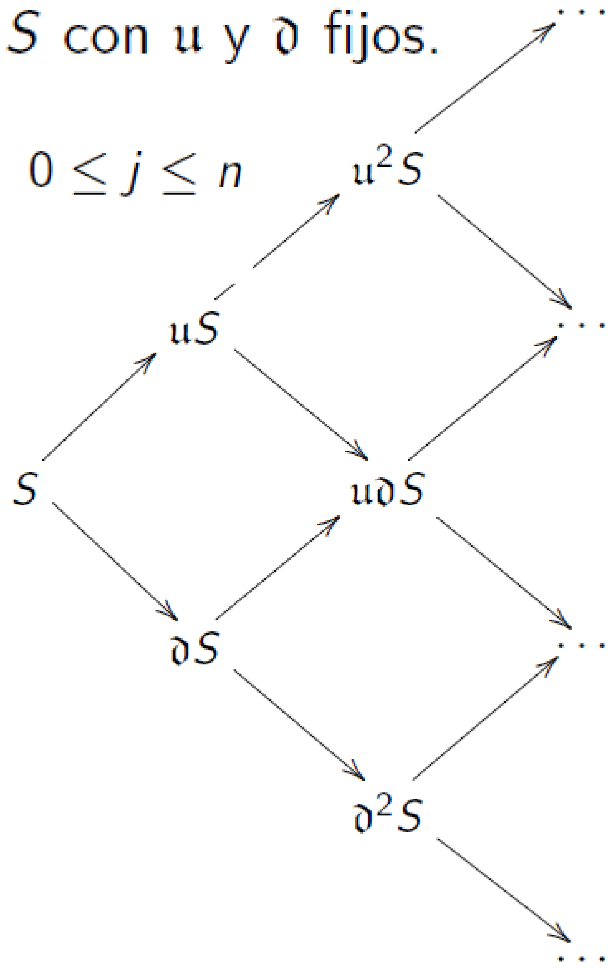
# Árbol Binomial (2/3)

Se toma en este modelo $S_u = \mathfrak{u}S$ y $S_d = \mathfrak{d}S$ con $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ fijos.

$$S_n^j = S_{\underbrace{uu\ldots u}_{j}\underbrace{dd\ldots d}_{n-j}} = S\mathfrak{u}^j\mathfrak{d}^{n-j} \qquad 0 \leq n \leq m \qquad 0 \leq j \leq n$$

**Notación**:

Tomaremos como factor de descuento $e^{-r\delta t}$, es decir un interés continuo. El árbol resulta entonces:



# Árbol Binomial (3/3)

Como vimos en el ejemplo, surge la siguiente formula recursiva:

$$\begin{cases} C_n^j = e^{-r\delta t}\left(qC_{n+1}^{j+1} + (1-q)C_{n+1}^{j}\right), 0 \leq n \leq m-1, 0 \leq j \leq n \\ C_m^j = \max\left(S_m^j - K, 0\right), 0 \leq j \leq m \end{cases}$$

Conociendo el *Payoff*, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, hasta llegar al $C_0^0 = C$.

Esta formula es la base del algoritmo de Árbol Binomial

# Bondades del árbol

**Comentario**

Conociendo el Payoff, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, para llegar al $V_0^0 = V$, el valor del contrato a tiempo inicial. En este punto ya tenemos un método para valuar derivados haciendo un algoritmo recursivo.

**Comentario**

También aquí se ve que este método es muy valioso también cuando hay posibilidad de ejercicio previo a $T$ (opciones americanas, por ejemplo) ya que en cada instante se tendrá el precio del derivado y con todos los datos se podrá elegir el momento conveniente de ejercer.

**Comentario**

También si hubiera barreras (opciones barrera), lo que significaría que el árbol no tendría ramas a partir de un punto.

# Ejercicio anticipado - Americanas

El modelo del árbol binomial nos permite muy fácilmente agregar la opcionalidad de ejercicio anticipado (Americanas).

En cada paso $t^*$del árbol habrá que decidir entre dos:

- (A) No ejercer y mantener: $C(t^*)|P(t^*)$
- (B) Ejercer y recibir: $(S(t^*) - K)\ |(K - S(t^*))$

La forma de decisión será simplemente evaluar cual de las posiciones tiene valor más alto:

$$C_n^j = \max\left(e^{-r\delta t}\left(qC_{n+1}^{j+1} + (1-q)C_{n+1}^j\right), S_n^j - K\right)$$

$$P_n^j = \max\left(e^{-r\delta t}\left(qP_{n+1}^{j+1} + (1-q)P_{n+1}^j\right), K - S_n^j\right)$$

# Fórmula recursiva – Caso General

Veamos un método recursivo para valuar cualquier derivado $V$ estilo europeo usando este modelo. Usemos la siguiente notación:

$$V_n^j = V_n(S_n^j) \qquad 0 \leq j \leq n \qquad 0 \leq n \leq m-1$$

$$V_m^j = F(S_m^j) \qquad 0 \leq j \leq n \qquad 0 \leq n \leq m-1$$

Donde $F(S_m^j)$ es el la función de payoff del derivado cuando el valor del activo es $S_m^j$. Debe verificarse entonces que

$$\begin{cases} V_n = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(V_{n+1}) & 0 \leq n \leq m-1 \\ V_m = F(S_m) & \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} V_n^j = e^{-r\delta t}(pV_{n+1}^{j+1} + (1-p)V_{n+1}^j) \qquad 0 \leq n \leq m-1 \qquad 0 \leq j \leq n \\ V_m^j = F(S_m^j) \qquad 0 \leq j \leq m \end{cases}$$

# Bondades del árbol

**Comentario**

Conociendo el Payoff, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, para llegar al $V_0^0 = V$, el valor del contrato a tiempo inicial. En este punto ya tenemos un método para valuar derivados haciendo un algoritmo recursivo.

**Comentario**

También aquí se ve que este método es muy valioso también cuando hay posibilidad de ejercicio previo a $T$ (opciones americanas, por ejemplo) ya que en cada instante se tendrá el precio del derivado y con todos los datos se podrá elegir el momento conveniente de ejercer.

**Comentario**

También si hubiera barreras (opciones barrera), lo que significaría que el árbol no tendría ramas a partir de un punto.

# Elección de parámetros para el algoritmo

Los de siempre:

- $S =$ precio del subyacente ; $\mathrm{T}$ =tiempo de expiración
- $\mathrm{K} =$ precio de ejercicio ; $\sigma$ =volatilidad
- $r$ =tasa libre de riesgo ; *div* = dividendo (tasa)

Modelo CRR (Cox Ross Rubinstein):

- $m$ =número de pasos del árbol
- $\delta t = T/m$
- $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$
- $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ ; $d = \frac{1}{u}$
- $q_{prob} = \frac{e^{(r-div)\delta t}-d}{u-d}$

Hay muchas otras formas de elección de parámetros. CRR y variantes de este son los más usados en la industria.

# Python

```
opcion_europea_bin
Def
    Calculador del precio de una opcion Europea con el modelo del Arbol Binomial (CRR)
Inputs
    - tipo : string - Tipo de contrato entre ["CALL","PUT"]
    - S : float - Spot price del activo
    - K : float - Strike price del contrato
    - T : float - Tiempo hasta la expiracion (en años)
    - r : float - Tasa 'libre de riesgo' (anualizada)
    - sigma : float - Volatilidad implicita (anualizada)
    - div : float - Tasa de dividendos continuos (anualizada)
    - pasos : int - Cantidad de pasos del arbol binomial
Outputs
    - precio_BIN: float - Precio del contrato
```

# Preguntas (Hull)

- [13.1] El precio de una acción es \$40. Se sabe que al final de 1 mes será \$42 o \$38. La tasa de interés libre de riesgo es del 8% anual Cuál es el valor de una opción *call* europea de 1 mes con *strike* \$39?
- [13.10] El precio de una acción es \$80. Se sabe que al final de 4 meses será \$75 o \$85. La tasa de interés libre de riesgo es del 5%. ¿Cuál es el valor de una opción *put* europea de 4 meses con un strike de \$80? Utilice argumentos de no arbitraje.
- [13.16] La volatilidad de una acción que no paga dividendos, cuyo precio es de \$78, es del 30%. La tasa libre de riesgo es del 3% anual para todos los vencimientos. Calcule los valores para $u$, $d$ y $q$ si se usa un paso de tiempo de 2 meses. ¿Cuál es el valor de una opción *call* europea de 4 meses con *strike* \$80 dado por un árbol binomial de dos pasos. Supongamos que un *trader* vende 1.000 opciones (10 contratos). ¿Qué posición en la acción es necesaria para cubrir la posición del *trader* en el momento de la operación?

# Fórmula cerrada – Caso general

Veamos que se puede llegar a una fórmula cerrada a partir de la recurrencia. Para esto, veamos al precio libre de arbitraje como el descuento esperado del derivado: El tiempo que separa el instante $m$ del $n$ es $(m-n)\delta t$, así que queda.

$$V_n^j = e^{-r\delta t(m-n)}\mathbb{E}(F(S_m)|S_n = S_n^j)$$

Desarrollando la esperanza condicional, contando todas los posibles casos:

$$V_n^j = e^{-r\delta t(m-n)}\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(S_m = S_m^k|S_n = S_n^j)F(S_m^k)$$

Calculemos ahora las $\mathbb{P}$ condicionales $\mathbb{P}(S_m = S_m^k|S_n = S_n^j)$

# Fórmula cerrada – Caso general

Esto significa contar el número de caminos que van de $S_n^j$ a $S_m^k$.

## Comentario

Como el precio del subyacente sube siempre con la misma probabilidad, no importa en qué momento lo hace, sino la cantidad de veces (análogamente con las bajas).

En esencia, entonces, la cantidad de caminos es el número de combinaciones de $k-j$ elementos en un conjunto de $m-n$ elementos. (Necesito $k-j$ subas en $m-n$ pasos). Esto no es otra cosa que $\binom{m-n}{k-j}$. La probabilidad buscada es aquella de una variable *multinomial*, cuya función de probabilidad puntual es:

$$\mathbb{P}(S_m = S_m^k | S_n = S_n^j) = \binom{m-n}{k-j} p^{k-j}(1-p)^{(m-n)-(j-k)}$$

# Fórmula cerrada – Caso general

Juntando todo, llegamos a la siguiente fórmula cerrada para $V_n^j$.

$$V_n^j = e^{-r\delta t(m-n)} \sum_{k=j}^{m} \binom{m-n+j}{k-j} p^{k-j}(1-p)^{(m-n)-(j-k)} F(S_m^k)$$

En particular, de aquí podemos sacar el valor inicial del derivado:

$$V = V_0^0 = e^{-r\delta tm} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} F(S_m^k)$$

**Obs:** El numero combinatorio $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$ involucre el calculo del factorial $m!$

El calculo del numero factorial es un problema computacional en si mismo (tiene un limite)

# El caso de la Call Europea

Consideremos ahora una opción call europea sobre el activo $S$ con strike price $K$ y tiempo de expiración $T$. Recordar que el payoff en este caso es

$$F(S_m) = \text{máx}\{S_m - K, 0\}$$

que $S_0^0 = S$, y notamos $C = V$. Entonces, usando (**??**), el resultado anterior:

$$C = e^{-r\delta tm} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \,\text{máx}\{S_m^k - K, 0\}$$

$$C = e^{-r\delta tm} \sum_{k=k_0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} (S\mathfrak{u}^k \mathfrak{d}^{m-k} - K)$$

En donde $k_0$ es el mínimo $k$ tal que $S\mathfrak{u}^k\mathfrak{d}^{m-k} > K$, ya que $S_m^k$ es creciente en $k$.

# Variación de Crecimiento

## Definición

Definamos la *variación de crecimiento* en el precio de un activo:

$$Y = \frac{1}{T} \ln \left( \frac{S_m}{S_0} \right)$$

donde $S_m$ es el precio de la acción a tiempo $T$ y $S_0$ el inicial.

## Comentario

Si se trata de un bono libre de riesgo con interés $r$, $Y = r$.

## Comentario

Notemos también que $Y$ depende de $m$ y que:

$$\frac{S_m}{S_0} = \frac{S_m S_{m-1} \dots S_1}{S_{m-1} S_{m-2} \dots S_0}$$

# Esperanza de la variación de crecimiento

Podemos entonces escribir la variación de crecimiento como:

$$Y = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln\left(\frac{S_j}{S_{j-1}}\right)$$

También, por cómo construimos el modelo, tenemos que

$$S_j = S_{j-1}H_j \Rightarrow \frac{S_j}{S_{j-1}} = H_j \qquad (1 \leq j \leq m)$$

con

$$H_j = \begin{cases} \mathfrak{u} \text{ con probabilidad } p \\ \mathfrak{d} \text{ con probabilidad } (1-p) \end{cases}, \mathbb{E}(\ln(H_j)) = p\ln(\mathfrak{u}) + (1-p)\ln(\mathfrak{d})$$

Como las $H_j$ son independientes, la esperanza separa la suma:

$$\mu = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}\ln(H_j)\right) = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}\mathbb{E}\left(\ln(H_j)\right)$$

# Varianza de la variación de crecimiento

Además están idénticamente distribuidas:

$$\mu = \frac{1}{T} m[\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p)]$$

Finalmente, como $T = m\delta t$, $\frac{1}{T}m = \frac{1}{\delta t}$, queda:

$$\mu = \frac{1}{\delta t}[\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p)] = \mathbb{E}(Y)$$

Calculemos ahora la varianza de $Y$.

$$Var(Y) = Var\left(\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}\ln(H_j)\right) = \frac{1}{T^2} m Var(H_1)$$

$$Var(Y) = \frac{1}{T\delta t}\left[(\ln^2(\mathfrak{u})p + \ln^2(\mathfrak{d})(1-p)) - (\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p))^2\right]$$

$$Var(Y) = \frac{1}{T\delta t}\ln^2\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}}\right)p(1-p)$$

# Volatilidad

## Definición

La volatilidad $\sigma$ de un activo es la desviación estándar de la variación de crecimiento del precio anualizada (cuando $T = 1$):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\delta t} \ln^2\left(\frac{u}{d}\right) p(1-p)}$$

## Comentario

Dado un activo, es posible estimar su volatilidad a partir de su historia. Una forma sencilla para aproximar la volatilidad de un activo es calcular el desvio estándar de los retornos $(r_i)$ medios:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(r_i - M)^2}{N}}$$

con $N$ la cantidad de observaciones y $M = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i$

# Elección de $u$ y $d$ (1/3)

Dada una volatilidad $\sigma$ fija, elijamos los parámetros $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$. Para esto hacemos:

$$\begin{cases} \mathfrak{u} = \mathfrak{u}' e^{r\delta t} \\ \mathfrak{d} = \mathfrak{d}' e^{r\delta t} \end{cases}$$

Recordar que en un período de tiempo $\delta t$

$$\mathbb{E}(S) = e^{r\delta t} S$$

Con lo cual:

$$\mathfrak{u}' p + \mathfrak{d}'(1-p) = 1$$

Definimos también un parámetro no negativo $\rho$ haciendo:

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{u}'}{\mathfrak{d}'} = e^{2\rho\sqrt{\delta t}}$$

# Elección de $u$ y $d$ (2/3)

Usando lo anterior y que $p$ es una probabilidad:

$$p(1-p) = \frac{\sigma^2}{4\rho^2}$$

Esta ecuación tiene sentido sólo cuando $\rho \geq \sigma$. Queda entonces:

$$p = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right)$$

Para obtener los valores de $\mathfrak{u}'$ y de $\mathfrak{d}'$ usamos:

$$p = \frac{e^{r\delta t} - \mathfrak{d}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{d}}, \quad p = \frac{1 - \mathfrak{d}'}{\mathfrak{u}' - \mathfrak{d}'}$$

# Elección de $u$ y $d$ (3/3)

Juntando todo, fijado un $\rho$ llegamos a:

$$\mathfrak{u}' = \frac{e^{\rho\sqrt{\delta t}}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}}, \qquad \mathfrak{d}' = \frac{e^{-\rho\sqrt{\delta t}}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}}$$

Volviendo para atrás, obtenemos los valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$:

$$\mathfrak{u} = \frac{e^{\rho\sqrt{\delta t}+r\delta t}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}} \qquad \mathfrak{d} = \frac{e^{-\rho\sqrt{\delta t}+r\delta t}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}}$$

**Comentario**

Dados $\delta t$ y $\sigma$, fijando un $\rho$, obtenemos distintos modelo consistentes con la tería. Al cambiar $\rho$ generamos árboles con distintas pendientes para las ramas.

# Elecciones comunes

Elecciones más comunes para $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ y para $\rho$:

1. Simétrica $\rho = \sigma$ Por lo cual $p = \frac{1}{2}$ y, usando lo anterior, los respectivos valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$.
2. $\mathfrak{u} = \frac{1}{\mathfrak{d}}$ Esta elección da como resultado un árbol binomial con una pendiente distinta a la elección anterior.
3. Dado un parámetro $\nu$:

$$\mathfrak{u} = e^{\sigma\sqrt{\delta t}+\nu\delta t}, \qquad \mathfrak{d} = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}+\nu\delta t}$$

Una explicación posible de esta elección es que se puede interpretar a $\nu$ como un retorno esperado *subjetivo* - asumiendo la probabilidad "subjetiva" $p = \frac{1}{2}$.

# El paso al límite del Árbol Binomial (1/4)

Ahora que conocemos los valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$, estudiemos ahora la variación de crecimiento esperada nuevamente. Reemplazando estos en la ecuación para la esperanza de la variación de crecimiento estudiada anteriormente:

$$E(Y) = \mu = r + \frac{\rho}{\sqrt{\delta t}}(p - (1 - p)) - \frac{1}{\delta t} \ln \left[ p e^{\rho\sqrt{\delta t}} + (1 - p) e^{-\rho\sqrt{\delta t}} \right]$$

**Comentario**

$\mu$ depende de la elección de $\rho$, sin embargo, el efecto de $\rho$ disminuye al refinar el árbol, es decir cuando $\delta t \to 0$.
De hecho, usando que $2p - 1 = \pm\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}$ obtenemos:

$$\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2 + \mathcal{O}((2p - 1)\rho^3\sqrt{\delta t})$$

# El paso al límite del Árbol Binomial (2/4)

Lo que dice que, en el límite, cuando $\delta t \ll T$ tenemos:

$$\mu \approx r - \frac{1}{2}\sigma^2$$

Recordemos que la variación de crecimiento es suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas:

$$Y = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln H_j$$

Ajustando los parámetros y sabiendo que tomamos $\delta t \ll T$, tenemos la esperanza y la varianza de $Y$:

$$E(Y) = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \qquad , \qquad Var(Y) = \frac{\sigma^2}{T}$$

# El paso al límite del Árbol Binomial (3/4)

Podemos afirmar, por el **Teorema Central del Límite** que, cuando $\delta t \longrightarrow 0$, es decir $m \longrightarrow \infty$, $Y$ tiende en distribución a una variable aleatoria Normal con media $r - \frac{\sigma^2}{2}$ y varianza $\frac{\sigma^2}{T}$:

$$Y \longrightarrow^{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right)$$

Recordemos cómo definimos a $Y$:

$$Y = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{S_m}{S_0}\right)$$

Si operamos un poco con este resultado:

$$e^Y = \left(\frac{S_m}{S_0}\right)^{\frac{1}{T}} \Rightarrow e^{TY} = \frac{S_m}{S_0} \Rightarrow S_m = S_0 e^{TY}$$

donde $Y$ tiende a una distribución Normal $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2, \frac{\sigma^2}{T}\right)$.

# El paso al límite del Árbol Binomial (4/4)

Desarrollando en el límite la variable $Y$ y reemplazando $S_T$ por $S_m$ como $S$ a tiempo $T$, nos queda:

$$S_T = S_0 e^{T\left[\sqrt{\frac{\sigma^2}{T}}Z+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]} \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

**Comentario**

Notar que el análisis previo puede hacerse para cualquier $t \in (0, T]$, con lo cual el precio del activo subyacente a tiempo $t$ tiene distribución *log-normal*, y se escribe:

$$S_t = S_0 e^{\sigma\sqrt{t}Z+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t} \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

**Comentario**

Este será el modelo para el activo cuando estudiemos el caso continuo

# Camino a Black-Scholes (1/2)

Ahora sea un derivado $V$ del tipo europeo con función de payoff $F(S)$ como vimos en repetidas ocasiones podemos decir que

$$V = e^{-rT}\mathbb{E}(F(S_m))$$

Usando la distribución del activo, por el Teorema Central del Límite (hay que pedirle al payoff que sea linealmente creciente) se tiene:

$$\lim_{\delta t \to 0} V = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(Se^{z\sigma\sqrt{T}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T})e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

Donde $S = S_0$ es el precio inicial del activo y se usó explícitamente la

función de distribución de la normal en el cálculo de la esperanza

# Camino a Black-Scholes (2/2)

Apliquemos el resultado anterior a una call europea. Supongamos una tasa de interés $r$, una volatilidad $\sigma$, un tiempo de expiración $T$ y un strike price $K$. La aproximación log-normal resulta:

$$C = e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}\left( S e^{z\sigma\sqrt{T} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K, 0 \right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$C = e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} S e^{z\sigma\sqrt{T} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - K e^{-rT} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

En dónde $-d_2$ es el $z$ tal que $e^{\sigma\sqrt{T}z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} = K$, es decir, a partir de cuando deja de ser nulo el integrando. Se puede obtener explícitamente:

$$-d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left( \frac{S e^{rT}}{K} \right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

# Fórmula de Black-Scholes

Haciendo el cambio de variables $u = z - \sigma\sqrt{T}$ en la primera integral y, usando propiedades de la normal obtenemos:

$$C = S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du - Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

Que podemos escribirla como la **fórmula de Black-Scholes**:

$$\boxed{C = SN(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)}$$

en donde:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \qquad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

# Estrategias de *Trading* con Opciones (1/2)

Las opciones pueden usarse para construir estrategias de *trading*:

- Las estrategias direccionales implican una expectativa sobre la dirección de los movimientos futuros del precio de las acciones.
- Las estrategias no direccionales (también conocidas como neutrales) no se basan en la dirección futura: el operador es indiferente si el precio de las acciones sube o baja.

Las estrategias direccionales se pueden dividir en dos subgrupos:

- estrategias alcistas (*bullish*): beneficio si el activo sube
- estrategias bajistas (*bearish*): beneficio si el activo baja

# Estrategias de *Trading* con Opciones (2/2)

Las estrategias no direccionales pueden ser divididas también en dos subgrupos:

- estrategias de **volatilidad** que se benefician si la acción tiene grandes movimientos de precios (entorno de alta volatilidad)
- estrategias **laterales** que se benefician si el precio de las acciones se mantiene estable (entorno de baja volatilidad).

Notación:

- $f_T$ = *PnL* - por convención $\boldsymbol{payoff + C - D}$ con ($C$ = Prima vendida - *Crédito*, $D$ = prima pagada - *Debito* **(Sin descontar)**
- $S_*/S^*$ = *Break-even* – cuando empiezo a obtener ganancia
- $P_{\max}(L_{\max})$ = Máxima ganancia (perdida), **ambas** $> \mathbf{0}$

# Una opción con su activo subyacente

Veremos las siguientes 4 estrategias. Si notamos $\mathbf{c}$ a un *call*, $\mathbf{p}$ a un *put* y $\boldsymbol{S}$ al activo subyacente

- *Call* cubierta (*coverded call* o *buy-write*): $-\mathbf{c}+\boldsymbol{S}$ [short **c**, long **S**]
- *Call* protectora (*married call o synthetic put):* $\mathbf{c}-\boldsymbol{S}$ [long **c**, short **S**]
- *Put* protectora (*married put o synthetic call):* $\mathbf{p}+\boldsymbol{S}$ [long **p**, long **S**]
- *Put cubierta* (*sell-write o* synthetic *call*): $-\mathbf{p}-\boldsymbol{S}$ [short **p**, short **S**]

# *Covered Call* – *Call* Cubierta

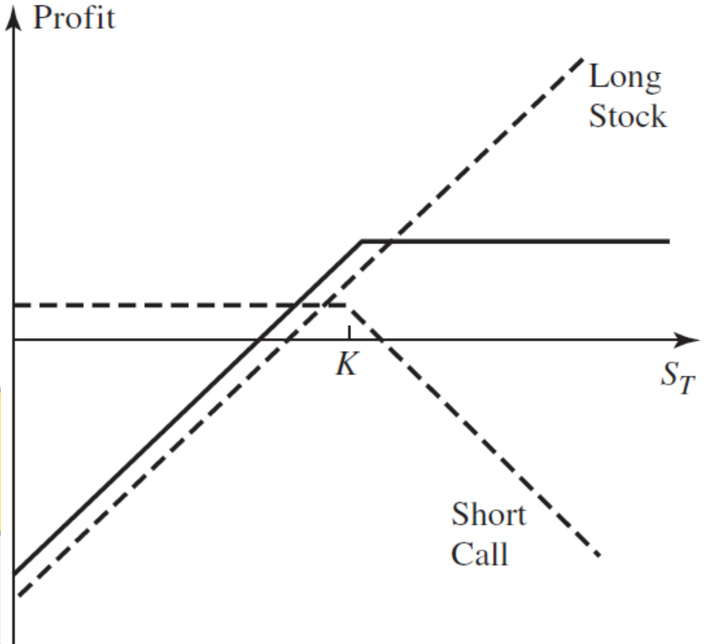
La estrategia consiste en comprar el activo y vender un *call* sobre el mismo. La posición *long* en el activo cubre al inversor en el caso de una suba del activo, que haría perder mucho valor al *call* vendido. Se dice *escribir una call cubierta*. Se **recibe una prima**

$$f_T = (S_T - S) - \max(S_T - K, 0) + C$$
$$S_* = S - C$$
$$P_{max} = K - S + C$$
$$L_{max} = S - C$$

**Estrategia**

$$CoveredCall = \mathbf{S} - \mathbf{c}$$

| $S_T$ | $S_T < S - C$ | $S - C < S_T < K$ | $S_T > K$ |
|---|---|---|---|
| PnL | $S_T - S + C$ | $S_T - S + C$ | $K - S + C$ |




Fuente: Hull – Fig 12.1 (a)

# *Protective Call* – *Call* Protectora

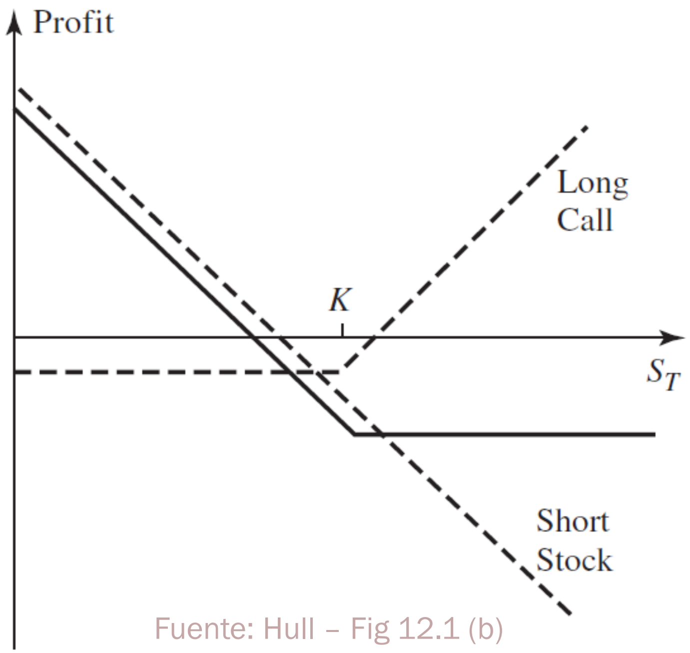
La estrategia consiste en comprar un *call* y vender el activo subyacente. La posición *long* en el *call* protege al inversor en el caso de una suba del activo. Además mantiene la posibilidad de ganancia ante la caída del mismo. Se paga una prima

$$f_T = \max(S_T - K, 0) - (S_T - S) - D$$
$$S_* = S - D$$
$$P_{max} = S - D$$
$$L_{max} = K - S + D$$

Estrategia

$$ProtectiveCall = \mathbf{c} - \mathbf{S}$$

| $S_T$ | $S_T < S - D$ | $S - D < S_T < K$ | $S_T > K$ |
|---|---|---|---|
| PnL | $S - S_T - D$ | $S - S_T - D$ | $S - K - D$ |




Fuente: Hull – Fig 12.1 (b)

# *Protective Put* – *Put* Protectora

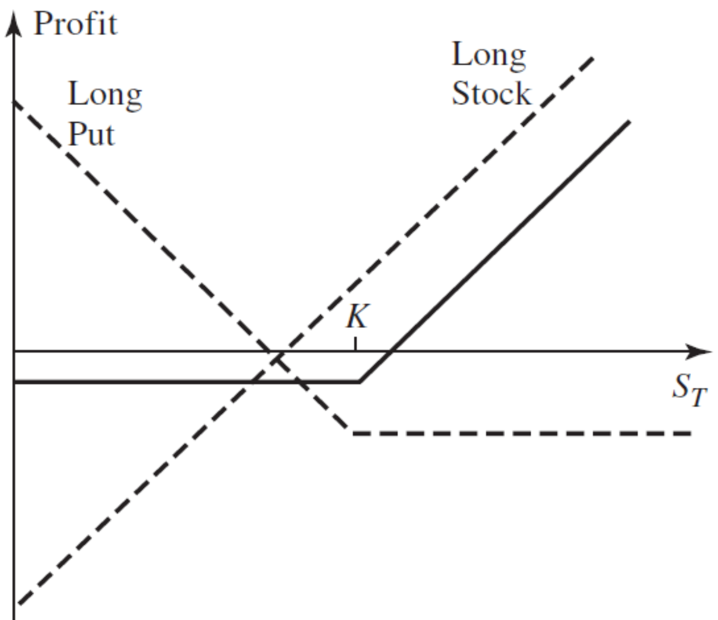
La estrategia consiste en comprar el activo y comprar un *put* sobre el mismo. La posición *long* en el *put* protege al inversor en el caso de una baja del activo, y permite beneficios ‘ilimitados’ si el activo sube. Se paga una prima

$$f_T = \max(K - S_T, 0) + (S_T - S) - D$$
$$S_* = S + D$$
$$P_{max} = ilimitado$$
$$L_{max} = S - K + D$$

Estrategia

$$ProtectivePut = \mathbf{p} + \mathbf{S}$$

| $S_T$ | $S_T < K$ | $K < S_T < S + D$ | $S_T > S + D$ |
|---|---|---|---|
| PnL | $K - S - D$ | $S_T - S - D$ | $S_T - S - D$ |




Fuente: Hull – Fig 12.1 (c)

# *Covered Put – Put* Cubierta

La estrategia consiste en vender el activo y a su vez vender un *put* sobre el mismo. La posición *short* en el activo cubre al inversor en el caso de una baja del activo, lo que haría subir mucho el valor del *put* vendido. Se recibe una prima

$f_T = -\max(K - S_T, 0) - (S_T - S) + C$

$S_* = S + C$

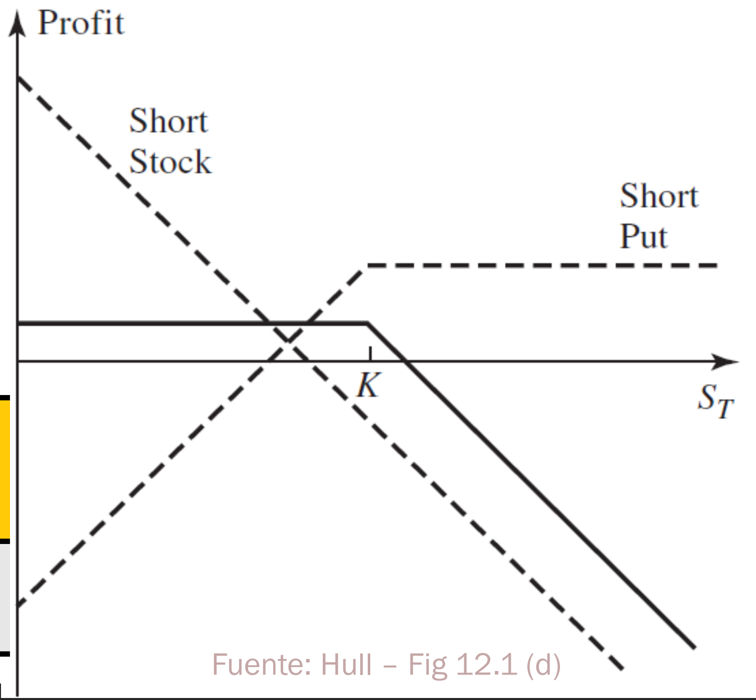
$P_{max} = S - K + C$

$L_{max} = ilimitado$

Estrategia

$CoveredPut = -\mathbf{p} - \mathbf{S}$

| $S_T$ | $S_T < K$ | $K < S_T < S + C$ | $S_T > S + C$ |
|---|---|---|---|
| PnL | $S - K + C$ | $S - S_T + C$ | $S - S_T + C$ |




Fuente: Hull – Fig 12.1 (d)

# Estrategias equivalentes

Notar que los gráficos de *PnL* de las 4 estrategias son equivalentes a los perfiles de *PnL de una short put, long put, long call, y short call*, respectivamente.

Esto se explica por la paridad *Put–Call* con dividendos (clase 7)

$$p + S = c + Ke^{-rT} + Div,$$

en donde $Div$ era el valor presente de los dividendos anticipados durante la vida de la opción.

La ecuación anterior muestra que una estrategia que consiste en una posición *long* en una *put* europea combinada con una posición *long* en el activo subyacente es equivalente a una posición *long* en una *call* europea mas un determianado *cash* $[Ke^{-rT} + Div]$.

Explica por que el *PnL* de la *put* protectora es igual al de un call.

# Estrategias de tipo *spread*

Las estrategias de tipo *spread* involucran tomar posición en dos o mas opciones del mismo tipo sobre un mismo activo subyacente. Veremos las siguientes:

- *Bull Spread* (alcista)
- *Bear Spread* (bajista)
- *Butterfly Spread* (no direccional*)
- *Calendar Spread* (direccional moderada)

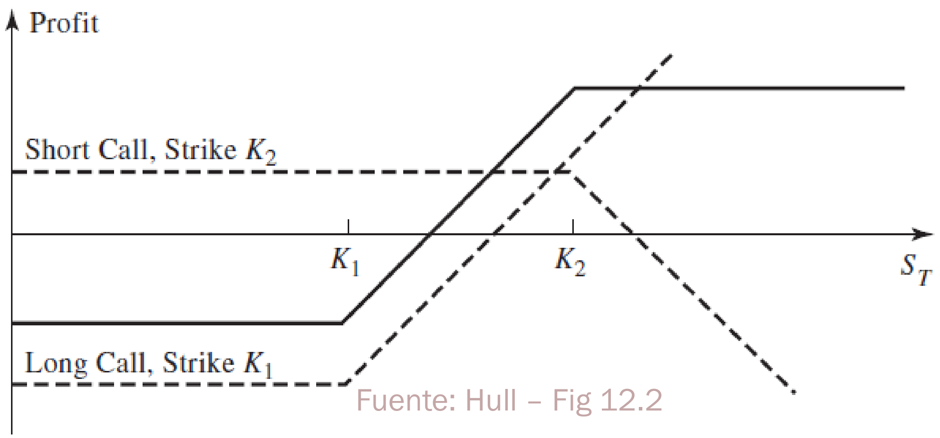
Notación

$a^+ \coloneqq \max(a, 0)\,;\,(S_T - K)^+ \coloneqq \max(S_T - K, 0)$

# *Bull Call Spread*

Se trata de un *spread* vertical que consiste en una posición *long* en una opción *call* ATM con un *strike* $K_1$, y una posición *short* en una opción *call* OTM con un *strike* mas alto $K_2$. La perspectiva del *trader* es alcista. Se paga

$$f_T = (S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ - D$$
$$S_* = K_1 + D$$
$$P_{max} = K_2 - K_1 - D$$
$$L_{max} = D$$



Fuente: Hull – Fig 12.2

Estrategia

$$BullCallSpread = \boldsymbol{c_1 - c_2}$$

| $S_T$ | $S_T < K_1$ | $K_1 < S_T < K_1 + D$ | $K_1 + D < S_T < K_2$ | $S_T > K_2$ |
|---|---|---|---|---|
| PnL | $-D$ | $S_T - K_1 - D$ | $S_T - K_1 - D$ | $K_2 - K_1 - D$ |

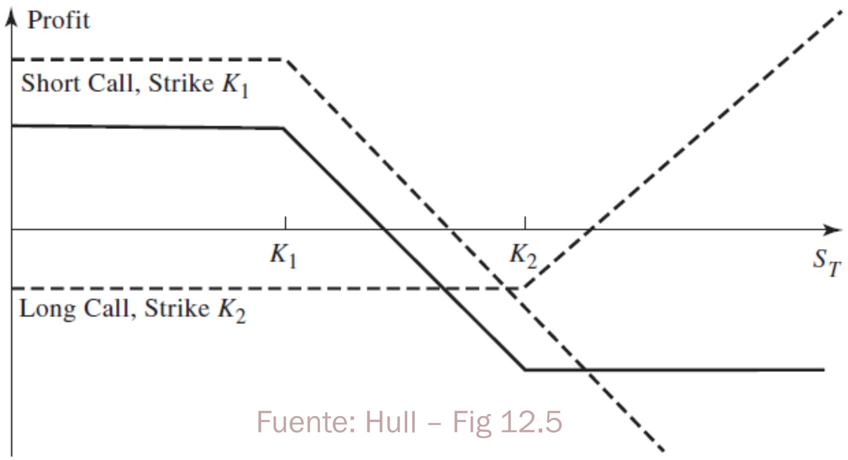
# *Bear Call Spread*

Se trata de un *spread* vertical que consiste en una posición *short* en una opción *call* OTM con un *strike* $K_1$, y una posición *long* en otra opción *call* OTM con un *strike* mas alto $K_2$. La perspectiva del *trader* es bajista. Se recibe

$$f_T = (S_T - K_2)^+ - (S_T - K_1)^+ + C$$
$$S_* = K_1 + C$$
$$P_{max} = C$$
$$L_{max} = K_2 - K_1 - C$$

Estrategia

$$BearCallSpread = \mathbf{c_2} - \mathbf{c_1}$$




Fuente: Hull – Fig 12.5

| $S_T$ | $S_T < K_1$ | $K_1 < S_T < K_1 + C$ | $K_1 + C < S_T < K_2$ | $S_T > K_2$ |
|---|---|---|---|---|
| PnL | $C$ | $S_T - K_1 + C$ | $S_T - K_1 + C$ | $K_2 - K_1 + C$ |

# *Call Butterfly Spread*

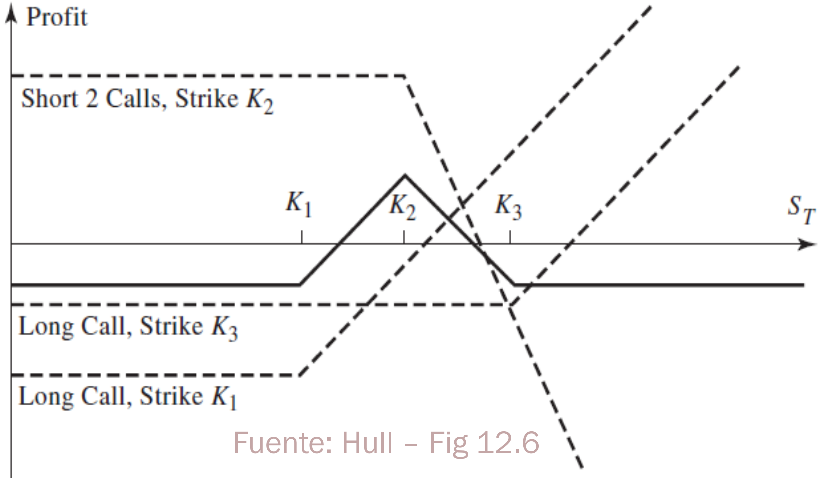
Se trata de un *spread* lateral que consiste en una posición *long* en una opción *call* ITM con un *strike* $K_1$, y una posición *short* en **dos** opciones *call* ATM con un *strike* $K_2$ y una posición *long* en una *call* OTM con *strike* $K_3$. $\mathbf{K_1 < K_2 < K_3}$ y $\mathbf{K_3 - K_2 = K_2 - K_1 = \kappa}$. **Se paga**

$$f_T = (S_T - K_1)^+ - 2(S_T - K_2)^+ + (S_T - K_3)^+ - D$$

$$S_* = K_1 + D \;/ S_* = K_3 - D$$

$$P_{max} = \kappa - D$$

$$L_{max} = D$$




Fuente: Hull – Fig 12.6

**Estrategia**

$$CallButterfly = \mathbf{c_1 - 2c_2 + c_3}$$

| $S_T$ | $S_T < K_1$ | $K_1 < S_T < K_1 + D$ | $K_1 + D < S_T < K_2$ | $K_2 < S_T < K_3 - D$ | $K_3 - D < S_T < K_3$ | $S_T > K_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| PnL | $-D$ | $S_T - K_1 - D$ | $S_T - K_1 - D$ | $K_3 - S_T - D$ | $K_3 - S_T - D$ | $-D$ |

# Estrategias combinadas

Las estrategias combinadas involucran tomar posición en dos o mas opciones combinando *puts* y *calls* sobre un mismo activo subyacente. Veremos las siguientes:

- *Forward* sintético
- *Combo*
- *Straddle* (no direccional) / *Strangle* (no direccional*)
- *Box Spread*

# *Forward* sintético

La estrategia consiste en comprar un *call* ATM y vender un *put* ATM sobre el mismo activo y la misma fecha de vencimiento. Replica un contrato forward a precio $K$ y vencimiento el de las opciones. Se paga o se recibe ($H$)

$$f_T = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ + H = S_T - K + H$$

$$S_* = K - H$$

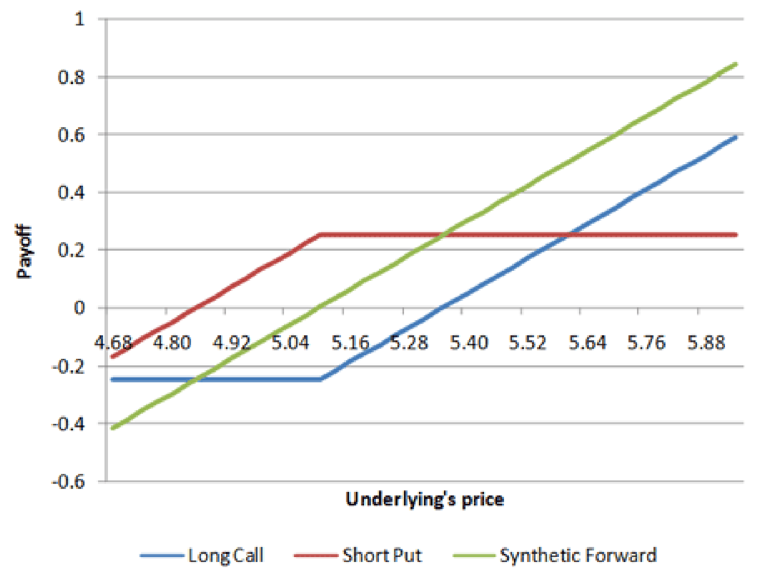
$$P_{max} = ilimitado$$

$$L_{max} = K - H$$

Estrategia

$$ForwardSintetico = \mathbf{c} - \mathbf{p}$$

| $S_T$ | $S_T < K - H$ | $K - H < S_T < K$ | $S_T > K$ |
|---|---|---|---|
| PnL | $S_T - K + H$ | $S_T - K + H$ | $S_T - K + H$ |



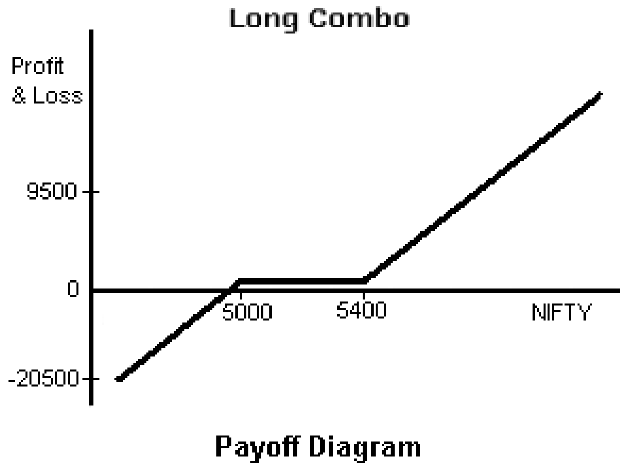

Fuente: https://financetrainingcourse.com/

# *Combo – Risk Reversal*

La estrategia consiste en comprar un *call* OTM de strike $K_2$ y vender un *put OTM con un strike menor,* $K_1$. La visión es alcista.

**Se paga o recibe ($\boldsymbol{H}$)**

$$f_T = (S_T - K_2)^+ - (K_1 - S_T)^+ + H$$
$$S_* = K_1 - H$$
$$P_{max} = ilimitado$$
$$L_{max} = K_1 - H$$




Fuente: https://www.chittorgarh.com/

**Estrategia**

$$Combo = \mathbf{c_2} - \mathbf{p_1}$$

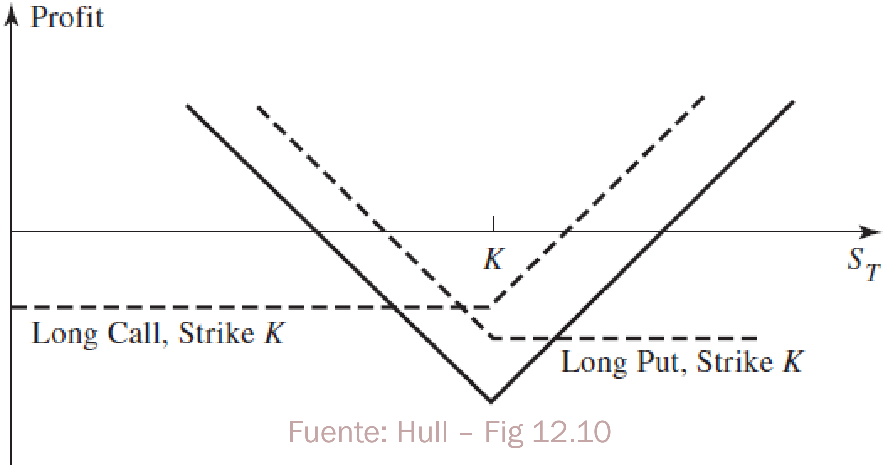
| $S_T$ | $S_T < K_1 - H$ | $K_1 - H < S_T < K_1$ | $K_1 - H < S_T < K_2$ | $S_T > K_2$ |
|---|---|---|---|---|
| *PnL* | $S_T - K_1 + H$ | $S_T - K_1 + H$ | $H$ | $S_T - K_2 + H$ |

# *Straddle*

Esta es una estrategia de volatilidad (no direccional) que consiste en comprar un *call* ATM y un *put* ATM con mismo strike $K$. Busco un movimiento grande del activo subyacente. Se paga

$f_T = (S_T - K)^+ + (K - S_T)^+ - D$
$S_* = K + D \,/ S_* = K - D$
$P_{max} = ilimitado$
$L_{max} = D$

Estrategia
$Straddle \ = \mathbf{c} + \mathbf{p}$



Fuente: Hull – Fig 12.10

| $S_T$ | $S_T < K - D$ | $K - D < S_T < K$ | $K < S_T < K + D$ | $S_T > K + D$ |
|---|---|---|---|---|
| PnL | $K - S_T - D$ | $K - S_T - D$ | $S_T - K - D$ | $S_T - K - D$ |

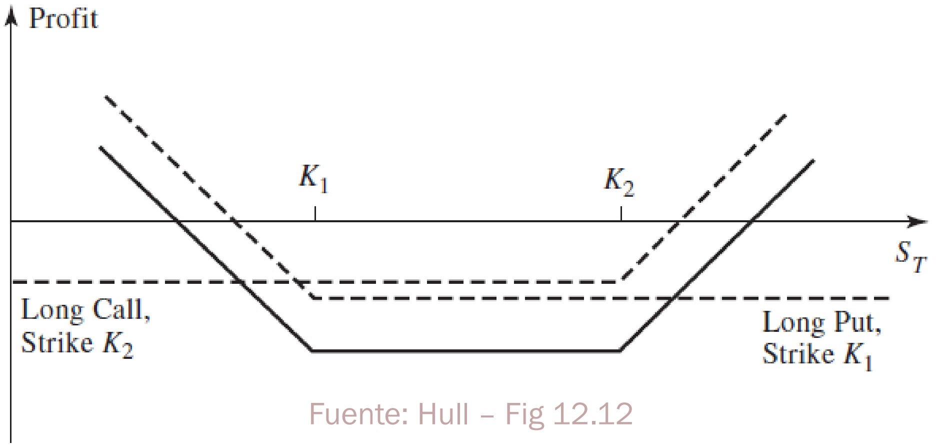
# *Strangle*

Esta es una estrategia de volatilidad (no direccional) que consiste en comprar un *call* OTM con *strike* $K_2$ y un *put* OTM con *strike* $K_1$, con $K_1 < K_2$. Busco gran movimiento de $S$. Más me alejo del ATM, más barato será. Se paga

$$f_T = (S_T - K_2)^+ + (K_1 - S_T)^+ - D$$
$$S_* = K_2 + D \;/ S_* = K_1 - D$$
$$P_{max} = ilimitado$$
$$L_{max} = D$$

Estrategia

$$Straddle \;= \mathbf{c_2} + \mathbf{p_1}$$



Fuente: Hull – Fig 12.12

| $S_T$ | $S_T < K_1 - D$ | $K_1 - D < S_T < K_1$ | $K_1 < S_T < K_2$ | $K_2 < S_T < K_2 + D$ | $S_T > K_2 + D$ |
|---|---|---|---|---|---|
| PnL | $K_1 - S_T - D$ | $K_1 - S_T - D$ | $-D$ | $S_T - K_2 - D$ | $S_T - K_2 - D$ |

# Escribir un *Straddle* o un *Strangle*

Ambas estrategias vistas recién se consideran *long*. Existen las respectivas versiones *short*. (Se recibe)

Escribir un *straddle* significa estar en la posición contraria. Resulta de vender un *call* y un *put* con mismo strike (ATM) y mismo vencimiento. Es una estrategia de mucho riesgo. Si el precio del subyacente permanece cerca del *strike* hay un beneficio, sin embargo la pérdida potencial ante un movimiento (en cualquier dirección!) es ilimitada*

Escribir un *strangle* puede ser apropiado para un inversor que estima que grandes movimientos del subyacente es poco probable. Al igual que con un *straddle*, la venta de un *strangle* es una estrategia muy riesgosa (algo menos que la del *straddle)*

# Estrategias con opciones

Hay estrategias para todos los gustos (ver Serur, Kakushadze, *151 Trading Strategies* por ejemplo):

Strap . . . . . . . . . . . . . . .
Strip . . . . . . . . . . . . . . .
Call ratio backspread . . . . . .
Put ratio backspread . . . . . .
Ratio call spread . . . . . . . . .
Ratio put spread . . . . . . . . .
Long call butterfly . . . . . . . .
rategy: Modified call butterfly . .
Long put butterfly . . . . . . . .
rategy: Modified put butterfly . .
Short call butterfly . . . . . . .
Short put butterfly . . . . . . .
"Long" iron butterfly . . . . . .
"Short" iron butterfly . . . . . .
Long call condor . . . . . . . . .
Long put condor . . . . . . . . .
Short call condor . . . . . . . . .
Short put condor . . . . . . . . .
Long iron condor . . . . . . . . .
Short iron condor . . . . . . . .
Long box . . . . . . . . . . . . .
Collar . . . . . . . . . . . . . . .
Bullish short seagull spread . . .
Bearish long seagull spread . . .
Bearish short seagull spread . .
Bullish long seagull spread . . .

Covered call . . . . . . . . .
Covered put . . . . . . . . .
Protective put . . . . . . . .
Protective call . . . . . . . .
Bull call spread . . . . . . .
Bull put spread . . . . . . .
Bear call spread . . . . . . .
Bear put spread . . . . . . .
Long synthetic forward . . .
Short synthetic forward . . .
Long combo . . . . . . . . .
Short combo . . . . . . . . .
Bull call ladder . . . . . . . .
Bull put ladder . . . . . . . .
Bear call ladder . . . . . . .
Bear put ladder . . . . . . .
Calendar call spread . . . . .
Calendar put spread . . . . .
Diagonal call spread . . . . .
Diagonal put spread . . . . .
Long straddle . . . . . . . .
Long strangle . . . . . . . . .
Long guts . . . . . . . . . . .
Short straddle . . . . . . . .
Short strangle . . . . . . . .
Short guts . . . . . . . . . .
Long call synthetic straddle .
Long put synthetic straddle .
Short call synthetic straddle
Short put synthetic straddle
Covered short straddle . . .
Covered short strangle . . . .

# Uso de estrategias en *brokers* - calculadora

Veamos como se utilizan en la operatoria

Sitio para calcular precios y perfiles de ganancia con estrategias:

https://www.optionsprofitcalculator.com/

Plataforma en un *Broker* de USA (paper-trading):

*Thinkorswim* de *Ameritrade*