Analisis Cuantitativo en Finanzas

Manu Maurette, 2022

Clase 4: Árbol Binomial, limite

Árbol Binomial (1/3)

- La idea ahora es que el precio de la acción pueda subir o bajar no solo una vez, sino un numero finito m de veces en el intervalo $[0, T]$ cada δt con $T = m\delta t$. Este modelo es:
  - Simple como para trabajar explícitamente
  - Ayuda para comprender la valuación de derivados y aproximar problemas mas realistas.

1. Se construye un árbol con los posibles valores del activo, dado un valor inicial de este.
2. Se analizar los posibles precios a tiempo T y determinar la probabilidad de riesgo neutral.
3. Yendo para atrás por el árbol y, a partir de la relación anterior, se calculan los valores en cada nodo.

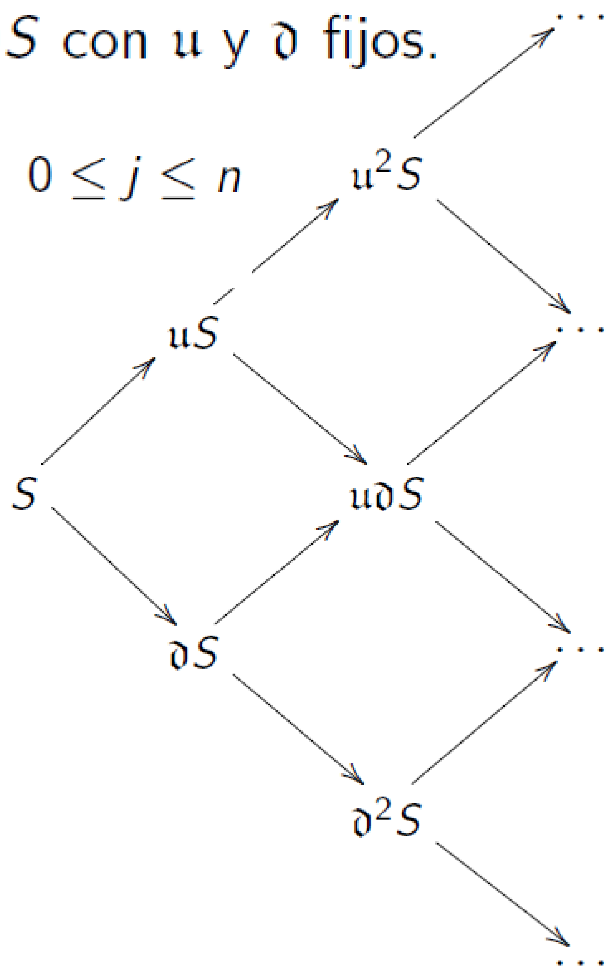
Árbol Binomial (2/3)

Se toma en este modelo $S_u = \mathfrak{u}S$ y $S_d = \mathfrak{d}S$ con $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ fijos.

$$S_n^j = S_{\underbrace{uu\ldots u}_{j}\underbrace{dd\ldots d}_{n-j}} = S\mathfrak{u}^j\mathfrak{d}^{n-j} \qquad 0 \leq n \leq m \qquad 0 \leq j \leq n$$

Notación:

Tomaremos como factor de descuento $e^{-r\delta t}$, es decir un interés continuo. El árbol resulta entonces:



Árbol Binomial (3/3)

Como vimos en el ejemplo, surge la siguiente formula recursiva:

$$\begin{cases} C_n^j = e^{-r\delta t}\left(qC_{n+1}^{j+1} + (1-q)C_{n+1}^j\right), 0 \leq n \leq m-1, 0 \leq j \leq n \\ C_m^j = \max\left(S_m^j - K, 0\right), 0 \leq j \leq m \end{cases}$$

Conociendo el *Payoff*, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, hasta llegar al $C_0^0 = C$.

Esta formula es la base del algoritmo de Árbol Binomial

Bondades del árbol

Comentario

Conociendo el Payoff, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, para llegar al $V_0^0 = V$, el valor del contrato a tiempo inicial. En este punto ya tenemos un método para valuar derivados haciendo un algoritmo recursivo.

Comentario

También aquí se ve que este método es muy valioso también cuando hay posibilidad de ejercicio previo a T (opciones americanas, por ejemplo) ya que en cada instante se tendrá el precio del derivado y con todos los datos se podrá elegir el momento conveniente de ejercer.

Comentario

También si hubiera barreras (opciones barrera), lo que significaría que el árbol no tendría ramas a partir de un punto.

Python

```
opcion_europea_bin
Def
    Calculador del precio de una opcion Europea con el modelo del Arbol Binomial (CRR)
Inputs
    - tipo : string - Tipo de contrato entre ["CALL","PUT"]
    - S : float - Spot price del activo
    - K : float - Strike price del contrato
    - T : float - Tiempo hasta la expiracion (en años)
    - r : float - Tasa 'libre de riesgo' (anualizada)
    - sigma : float - Volatilidad implicita (anualizada)
    - div : float - Tasa de dividendos continuos (anualizada)
    - pasos : int - Cantidad de pasos del arbol binomial
Outputs
    - precio_BIN: float - Precio del contrato
```

Ejercicio anticipado - Americanas

El modelo del árbol binomial nos permite muy fácilmente agregar la opcionalidad de ejercicio anticipado (Americanas).

En cada paso t^*del árbol habrá que decidir entre dos:

- (A) No ejercer y mantener: $C(t^*)|P(t^*)$
- (B) Ejercer y recibir: $(S(t^*) - K)\ |(K - S(t^*))$

La forma de decisión será simplemente evaluar cual de las posiciones tiene valor más alto:

$$C_n^j = \max\left(e^{-r\delta t}\left(qC_{n+1}^{j+1} + (1-q)C_{n+1}^j\right), S_n^j - K\right)$$

$$P_n^j = \max\left(e^{-r\delta t}\left(qP_{n+1}^{j+1} + (1-q)P_{n+1}^j\right), K - S_n^j\right)$$

Fórmula recursiva – Caso General

Veamos un método recursivo para valuar cualquier derivado V estilo europeo usando este modelo. Usemos la siguiente notación:

$$V_n^j = V_n(S_n^j) \qquad 0 \leq j \leq n \qquad 0 \leq n \leq m-1$$

$$V_m^j = F(S_m^j) \qquad 0 \leq j \leq n \qquad 0 \leq n \leq m-1$$

Donde $F(S_m^j)$ es el la función de payoff del derivado cuando el valor del activo es S_m^j. Debe verificarse entonces que

$$\begin{cases} V_n = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(V_{n+1}) & 0 \leq n \leq m-1 \\ V_m = F(S_m) \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} V_n^j = e^{-r\delta t}(pV_{n+1}^{j+1} + (1-p)V_{n+1}^j) \qquad 0 \leq n \leq m-1 \qquad 0 \leq j \leq n \\ V_m^j = F(S_m^j) \qquad 0 \leq j \leq m \end{cases}$$

Preguntas (Hull)

- [13.1] El precio de una acción es \$40. Se sabe que al final de 1 mes será \$42 o \$38. La tasa de interés libre de riesgo es del 8% anual Cuál es el valor de una opción *call* europea de 1 mes con *strike* \$39?
- [13.10] El precio de una acción es \$80. Se sabe que al final de 4 meses será \$75 o \$85. La tasa de interés libre de riesgo es del 5%. ¿Cuál es el valor de una opción *put* europea de 4 meses con un strike de \$80? Utilice argumentos de no arbitraje.
- [13.16] La volatilidad de una acción que no paga dividendos, cuyo precio es de \$78, es del 30%. La tasa libre de riesgo es del 3% anual para todos los vencimientos. Calcule los valores para u, d y q si se usa un paso de tiempo de 2 meses. ¿Cuál es el valor de una opción *call* europea de 4 meses con *strike* \$80 dado por un árbol binomial de dos pasos. Supongamos que un *trader* vende 1.000 opciones (10 contratos). ¿Qué posición en la acción es necesaria para cubrir la posición del *trader* en el momento de la operación?

Fórmula cerrada – Caso general

Veamos que se puede llegar a una fórmula cerrada a partir de la recurrencia. Para esto, veamos al precio libre de arbitraje como el descuento esperado del derivado: El tiempo que separa el instante m del n es $(m-n)\delta t$, así que queda.

$$V_n^j = e^{-r\delta t(m-n)}\mathbb{E}(F(S_m)|S_n = S_n^j)$$

Desarrollando la esperanza condicional, contando todas los posibles casos:

$$V_n^j = e^{-r\delta t(m-n)}\sum_{k=0}^{m}\mathbb{P}(S_m = S_m^k|S_n = S_n^j)F(S_m^k)$$

Calculemos ahora las $\mathbb{P}$ condicionales $\mathbb{P}(S_m = S_m^k|S_n = S_n^j)$

Fórmula cerrada – Caso general

Esto significa contar el número de caminos que van de S_n^j a S_m^k.

Comentario

Como el precio del subyacente sube siempre con la misma probabilidad, no importa en qué momento lo hace, sino la cantidad de veces (análogamente con las bajas).

En esencia, entonces, la cantidad de caminos es el número de combinaciones de $k-j$ elementos en un conjunto de $m-n$ elementos. (Necesito $k-j$ subas en $m-n$ pasos). Esto no es otra cosa que $\binom{m-n}{k-j}$. La probabilidad buscada es aquella de una variable *multinomial*, cuya función de probabilidad puntual es:

$$\mathbb{P}(S_m = S_m^k | S_n = S_n^j) = \binom{m-n}{k-j} p^{k-j}(1-p)^{(m-n)-(j-k)}$$

Fórmula cerrada – Caso general

Juntando todo, llegamos a la siguiente fórmula cerrada para V_n^j.

$$V_n^j = e^{-r\delta t(m-n)} \sum_{k=j}^{m} \binom{m-n+j}{k-j} p^{k-j}(1-p)^{(m-n)-(j-k)} F(S_m^k)$$

En particular, de aquí podemos sacar el valor inicial del derivado:

$$V = V_0^0 = e^{-r\delta tm} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} F(S_m^k)$$

Obs: El numero combinatorio $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$ involucre el calculo del factorial $m!$

El calculo del numero factorial es un problema computacional en si mismo (tiene un limite)

El caso de la Call Europea

Consideremos ahora una opción call europea sobre el activo S con strike price K y tiempo de expiración T. Recordar que el payoff en este caso es

$$F(S_m) = \text{máx}\{S_m - K, 0\}$$

que $S_0^0 = S$, y notamos $C = V$. Entonces, usando (**??**), el resultado anterior:

$$C = e^{-r\delta tm} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \text{máx}\{S_m^k - K, 0\}$$

$$C = e^{-r\delta tm} \sum_{k=k_0}^{m} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} (S\mathfrak{u}^k \mathfrak{d}^{m-k} - K)$$

En donde k_0 es el mínimo k tal que $S\mathfrak{u}^k\mathfrak{d}^{m-k} > K$, ya que S_m^k es creciente en k.

Elección de u y d (1/3)

Dada una volatilidad σ fija, elijamos los parámetros $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$. Para esto hacemos:

$$\begin{cases} \mathfrak{u} = \mathfrak{u}' e^{r\delta t} \\ \mathfrak{d} = \mathfrak{d}' e^{r\delta t} \end{cases}$$

Recordar que en un período de tiempo δt

$$\mathbb{E}(S) = e^{r\delta t} S$$

Con lo cual:

$$\mathfrak{u}' p + \mathfrak{d}'(1 - p) = 1$$

Definimos también un parámetro no negativo ρ haciendo:

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{u}'}{\mathfrak{d}'} = e^{2\rho\sqrt{\delta t}}$$

Elección de u y d (2/3)

Usando lo anterior y que p es una probabilidad:

$$p(1-p) = \frac{\sigma^2}{4\rho^2}$$

Esta ecuación tiene sentido sólo cuando $\rho \geq \sigma$. Queda entonces:

$$p = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right)$$

Para obtener los valores de $\mathfrak{u}'$ y de $\mathfrak{d}'$ usamos:

$$p = \frac{e^{r\delta t} - \mathfrak{d}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{d}}, \quad p = \frac{1 - \mathfrak{d}'}{\mathfrak{u}' - \mathfrak{d}'}$$

Elección de u y d (3/3)

Juntando todo, fijado un ρ llegamos a:

$$\mathfrak{u}' = \frac{e^{\rho\sqrt{\delta t}}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}}, \qquad \mathfrak{d}' = \frac{e^{-\rho\sqrt{\delta t}}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}}$$

Volviendo para atrás, obtenemos los valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$:

$$\mathfrak{u} = \frac{e^{\rho\sqrt{\delta t}+r\delta t}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}} \qquad \mathfrak{d} = \frac{e^{-\rho\sqrt{\delta t}+r\delta t}}{(1-p)e^{-\rho\sqrt{\delta t}} + pe^{\rho\sqrt{\delta t}}}$$

Comentario

Dados δt y σ, fijando un ρ, obtenemos distintos modelo consistentes con la tería. Al cambiar ρ generamos árboles con distintas pendientes para las ramas.

Elecciones comunes

Elecciones más comunes para $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ y para ρ:

1. Simétrica $\rho = \sigma$ Por lo cual $p = \frac{1}{2}$ y, usando lo anterior, los respectivos valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$.
2. $\mathfrak{u} = \frac{1}{\mathfrak{d}}$ Esta elección da como resultado un árbol binomial con una pendiente distinta a la elección anterior.
3. Dado un parámetro ν:

$$\mathfrak{u} = e^{\sigma\sqrt{\delta t}+\nu\delta t}, \qquad \mathfrak{d} = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}+\nu\delta t}$$

Una explicación posible de esta elección es que se puede interpretar a ν como un retorno esperado *subjetivo* - asumiendo la probabilidad "subjetiva" $p = \frac{1}{2}$.

Elección de parámetros para el algoritmo

Los de siempre:

- $S =$ precio del subyacente ; T =tiempo de expiración
- $\mathrm{K} =$ precio de ejercicio ; σ =volatilidad
- r =tasa libre de riesgo ; *div* = dividendo (tasa)

Modelo CRR (Cox Ross Rubinstein):

- m =número de pasos del árbol
- $\delta t = T/m$
- $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$
- $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$; $d = \frac{1}{u}$
- $q_{prob} = \frac{e^{(r-div)\delta t} - d}{u-d}$

Hay muchas otras formas de elección de parámetros. CRR y variantes de este son los más usados en la industria.

Variación de Crecimiento

Definición

Definamos la *variación de crecimiento* en el precio de un activo:

$$Y = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{S_m}{S_0} \right)$$

donde S_m es el precio de la acción a tiempo T y S_0 el inicial.

Comentario

Si se trata de un bono libre de riesgo con interés r, $Y = r$.

Comentario

Notemos también que Y depende de m y que:

$$\frac{S_m}{S_0} = \frac{S_m S_{m-1} \ldots S_1}{S_{m-1} S_{m-2} \ldots S_0}$$

Esperanza de la variación de crecimiento

Podemos entonces escribir la variación de crecimiento como:

$$Y = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{m} \ln \left(\frac{S_j}{S_{j-1}} \right)$$

También, por cómo construimos el modelo, tenemos que

$$S_j = S_{j-1} H_j \Rightarrow \frac{S_j}{S_{j-1}} = H_j \qquad (1 \leq j \leq m)$$

con

$$H_j = \begin{cases} \mathfrak{u} \text{ con probabilidad } p \\ \mathfrak{d} \text{ con probabilidad } (1-p) \end{cases}, \mathbb{E}(\ln(H_j)) = p \ln(\mathfrak{u}) + (1-p) \ln(\mathfrak{d})$$

Como las H_j son independientes, la esperanza separa la suma:

$$\mu = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{T} \sum_{j=1}^{m} \ln(H_j) \right) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E} \left(\ln(H_j) \right)$$

Varianza de la variación de crecimiento

Además están idénticamente distribuidas:

$$\mu = \frac{1}{T} m[\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p)]$$

Finalmente, como $T = m\delta t$, $\frac{1}{T}m = \frac{1}{\delta t}$, queda:

$$\mu = \frac{1}{\delta t}[\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p)] = \mathbb{E}(Y)$$

Calculemos ahora la varianza de Y.

$$Var(Y) = Var\left(\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m}\ln(H_j)\right) = \frac{1}{T^2} m Var(H_1)$$

$$Var(Y) = \frac{1}{T\delta t}\left[(\ln^2(\mathfrak{u})p + \ln^2(\mathfrak{d})(1-p)) - (\ln(\mathfrak{u})p + \ln(\mathfrak{d})(1-p))^2\right]$$

$$Var(Y) = \frac{1}{T\delta t}\ln^2\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{d}}\right)p(1-p)$$

Volatilidad (revisitada)

Definición

La volatilidad σ de un activo es la desviación estándar de la variación de crecimiento del precio anualizada (cuando $T = 1$):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\delta t} \ln^2\left(\frac{u}{d}\right) p(1-p)}$$

Comentario

Dado un activo, es posible estimar su volatilidad a partir de su historia. Una forma sencilla para aproximar la volatilidad de un activo es calcular el desvio estándar de los retornos (r_i) medios:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(r_i - M)^2}{N}}$$

con N la cantidad de observaciones y $M = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} r_i$

El paso al límite del Árbol Binomial (1/4)

Ahora que conocemos los valores de $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$, estudiemos ahora la variación de crecimiento esperada nuevamente. Reemplazando estos en la ecuación para la esperanza de la variación de crecimiento estudiada anteriormente:

$$E(Y) = \mu = r + \frac{\rho}{\sqrt{\delta t}}(p - (1-p)) - \frac{1}{\delta t} \ln \left[p e^{\rho\sqrt{\delta t}} + (1-p) e^{-\rho\sqrt{\delta t}} \right]$$

Comentario

μ depende de la elección de ρ, sin embargo, el efecto de ρ disminuye al refinar el árbol, es decir cuando $\delta t \to 0$.
De hecho, usando que $2p - 1 = \pm\sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\rho^2}}$ obtenemos:

$$\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2 + \mathcal{O}((2p-1)\rho^3\sqrt{\delta t})$$

El paso al límite del Árbol Binomial (2/4)

Lo que dice que, en el límite, cuando $\delta t \ll T$ tenemos:

$$\mu \approx r - \frac{1}{2}\sigma^2$$

Recordemos que la variación de crecimiento es suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas:

$$Y = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{m} \ln H_j$$

Ajustando los parámetros y sabiendo que tomamos $\delta t \ll T$, tenemos la esperanza y la varianza de Y:

$$E(Y) = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \quad , \quad Var(Y) = \frac{\sigma^2}{T}$$

El paso al límite del Árbol Binomial (3/4)

Podemos afirmar, por el **Teorema Central del Límite** que, cuando $\delta t \longrightarrow 0$, es decir $m \longrightarrow \infty$, Y tiende en distribución a una variable aleatoria Normal con media $r - \frac{\sigma^2}{2}$ y varianza $\frac{\sigma^2}{T}$:

$$Y \longrightarrow^{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right)$$

Recordemos cómo definimos a Y:

$$Y = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{S_m}{S_0}\right)$$

Si operamos un poco con este resultado:

$$e^Y = \left(\frac{S_m}{S_0}\right)^{\frac{1}{T}} \Rightarrow e^{TY} = \frac{S_m}{S_0} \Rightarrow S_m = S_0 e^{TY}$$

donde Y tiende a una distribución Normal $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2, \frac{\sigma^2}{T}\right)$.

El paso al límite del Árbol Binomial (4/4)

Desarrollando en el límite la variable Y y reemplazando S_T por S_m como S a tiempo T, nos queda:

$$S_T = S_0 e^{T\left[\sqrt{\frac{\sigma^2}{T}}Z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right]} \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Comentario

Notar que el análisis previo puede hacerse para cualquier $t \in (0, T]$, con lo cual el precio del activo subyacente a tiempo t tiene distribución *log-normal*, y se escribe:

$$S_t = S_0 e^{\sigma\sqrt{t}Z + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t} \qquad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Comentario

Este será el modelo para el activo cuando estudiemos el caso continuo

Camino a Black-Scholes (1/2)

Ahora sea un derivado V del tipo europeo con función de payoff $F(S)$ como vimos en repetidas ocasiones podemos decir que

$$V = e^{-rT}\mathbb{E}(F(S_m))$$

Usando la distribución del activo, por el Teorema Central del Límite (hay que pedirle al payoff que sea linealmente creciente) se tiene:

$$\lim_{\delta t \to 0} V = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(Se^{z\sigma\sqrt{T}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T})e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

Donde $S = S_0$ es el precio inicial del activo y se usó explícitamente la

función de distribución de la normal en el cálculo de la esperanza

Camino a Black-Scholes (2/2)

Apliquemos el resultado anterior a una call europea. Supongamos una tasa de interés r, una volatilidad σ, un tiempo de expiración T y un strike price K. La aproximación log-normal resulta:

$$C = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \text{máx}\left(Se^{z\sigma\sqrt{T}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K, 0\right) e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

$$C = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} Se^{z\sigma\sqrt{T}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz - Ke^{-rT}\int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

En dónde $-d_2$ es el z tal que $e^{\sigma\sqrt{T}z+(r-\frac{\sigma^2}{2})T} = K$, es decir, a partir de cuando deja de ser nulo el integrando. Se puede obtener explícitamente:

$$-d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

Fórmula de Black-Scholes

Haciendo el cambio de variables $u = z - \sigma\sqrt{T}$ en la primera integral y, usando propiedades de la normal obtenemos:

$$C = S_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{u^2}{2}} du - Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Que podemos escribirla como la **fórmula de Black-Scholes**:

$$\boxed{C = SN(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)}$$

en donde:

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \qquad d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Se^{rT}}{K}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$