Analisis Cuantitativo en Finanzas

Manu Maurette, 2022

Clase 3: Opciones (cont), Modelo Binomial (draft)

Como varia el precio de una opción

Los precios de las opciones varían en cuanto haya movimientos en algunas de sus variables.

Pensemos por unos minutos como se podría ver afectado el precio de por ejemplo Un *Call* Europeo con subas en cada uno de los siguientes parámetros (*ceteris paribus* los demás)

- ❑ Precio *spot* (S)
- ❑ Precio de ejercicio (*K*)
- ❑ Tiempo a Expiración (*T*) (*Time to Maturity*)
- ❑ Volatilidad implícita (σ)
- ❑ Tasa de interés libre de riesgo (*r*) (*Risk-free IR*)
- ❑ Tasa de dividendos (*q*)
- ❑ El tipo de opción (Call-Put)

Sensibilidad del precio respecto a los parámetros

Opciones *Vanilla* Europeas		
Variable	*Call*	*Put*
S	+	−
K	−	+
T	?	?
σ	+	+
r	+	−
q	−	+

Opciones Americanas

- Una opción americana se define *casi* exactamente igual que una opción europea, con la diferencia que puede ser ejercida en cualquier momento de la vida de la opción.

- Notar que las denominaciones *americana* y *europea* nada tienen que ver con el origen de los activos. Es una nomenclatura para referirse al modo posible de ejercicio.

- Existen otras formas de ejercicio. Una bastante usada en el mundo de IR son las opciones de tipo bermuda, algo como un intermedio entre europeas y americanas – con fechas fijas en las que se puede ejercer.

Sensibilidad del precio respecto a los parámetros

	Europeas		Americanas	
Variable	C	P	C	P
S	+	–	+	–
K	–	+	–	+
T	?	?	+	+
σ	+	+	+	+
r	+	–	+	–
q	–	+	–	+

Cotas importantes en opciones - notación

- Usaremos la siguiente notación (Hull)

- S_0 := Precio actual del activo
- S_T := Precio del activo a tiempo T
- K := Precio de ejercicio
- T := Tiempo de expiración
- r := Tasa libre de riesgo
- C := Precio de una *call* americana
- P := Precio de una *put* americana
- c := Precio de una *call* europea
- p := Precio de una *put* europea

No arbitraje

Un resultado que vamos a usar mucho es el siguiente:

Si NO existen posibilidades de arbitraje, entonces:

- Si dos portafolios (A y B) valen lo mismo a vencimiento, es decir, tienen el mismo *payoff*.
- Entonces A y B valen lo mismo en toda la vida de los activos.

Matemáticamente:

$$P_A(T) = P_B(T) \rightarrow P_A(t) = P_B(t), \text{para todo } t$$

Cotas superiores (1/2)

No importa que pase, una opción *call* nunca puede valer más que el precio del activo subyacente

$$c \leq S_0; C \leq S_0$$

Si esto no sucediera, un arbitrador podría comprar una unidad del activo y vender una unidad de la opción y hacer ganancia sin riesgo.

Cotas superiores (2/2)

De la misma manera, una opción *put* nunca puede valer más que el precio de ejercicio

$$p \leq K; P \leq K$$

Para *put* europeas, a tiempo final la opción tampoco puede valer más que el ejercicio, trayendo el tiempo al origen obtenemos:

$$p \leq Ke^{-rT}$$

Cotas inferiores (1/2)

Una opción *call* europea que no paga dividendos, tiene la siguiente cota inferior:

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}, es\ mas\text{: } (c(t) \geq S(t) - Ke^{-r(T-t)})$$

Construyamos dos portafolios:

Portafolio A: Una opción *call* europea y Ke^{-rT} unidades de dinero

Portafolio B: Una unidad del activo S

Veamos los *payoffs*:

$P_A(T) = \max(S(T) - K, 0) + K = \max(S(T), K)$, $P_B(T) = S(T)$

Con lo cual se tiene que $P_A(T) \geq P_B(T)$ lo que implica que la relación es cierta en todo tiempo, en particular al origen: $P_A(0) \geq P_B(0)$:

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0$$

Cotas inferiores (2/2)

Una opción *put* europea que no paga dividendos, tiene la siguiente cota inferior:

$$p \geq Ke^{-rT} - S_0$$

Construyamos dos portafolios:

Portafolio C: Una opción *put* europea y una unidad del activo *S*

Portafolio D: Ke^{-rT} unidades de dinero

Veamos los *payoffs*:

$P_{\mathrm{C}}(\mathrm{T}) = \max(K - S(T), 0) + S(T) = \max(S(T), K)$, $P_D(T) = K$

Con lo cual se tiene que $P_C(T) \geq P_D(T)$, entonces la relación es cierta en todo tiempo, en particular en 0: $P_C(0) \geq P_D(0)$:

$$p + S_0 \geq Ke^{-rT}$$

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (1/4)

Suponiendo conocido el precio de una Opción *call* Europea, veamos un argumento de no arbitraje para deducir el precio de un *put* Europeo (mismo *underlying*, *strike* y *maturity*)

Sean los siguientes dos portafolios:

- Portafolio A: Una *call* más K unidades de dinero (*money market*)

$$P_A = 1 \text{ x } c + K \text{ x } B$$

- Portafolio B: Una *put* más una unidad del activo subyacente

$$P_B = 1 \text{ x } p + 1 \text{ x } S$$

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (2/4)

Veamos el valor de los portafolios a tiempo final:

- $P_A(T) = \max(S(T) - K, 0) + K = \max(S(T), K)$
- $P_B(T) = \max(K - S(T), 0) + S_T = \max(K, S(T))$

Es decir, sus *payoffs* son idénticos:

$$P_A(T) = P_B(T)$$

El valor de los portafolios entonces tienen que ser idénticos en todo tiempo desde inicio hasta expiración.

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (3/4)

En particular, deben valer lo mismo al inicio. Veamos cuanto valen al inicio:

$$P_A(0) = c + Ke^{-rT}$$
$$P_B(0) = p + S_0$$

Igualándolos, dado que por no arbitraje deberían ser idénticos:

$$P_A(0) = c + Ke^{-rT} = p + S_0 = P_B(0)$$

No arbitraje – Paridad *Put-Call* (4/4)

Es decir, se cumple que:

$$c - p = S_0 - Ke^{-rT}$$

Esta relación es conocida como la paridad *Put-Call*. Notar que es válida para todo momento de la vida de las opciones:

$$c(t) - p(t) = S(t) - Ke^{-r(T-t)}$$

Esta relación es muy útil por ejemplo para:

- Construir *Put* sintética de no existir en el mercado
- Buscar Arbitrajes
- Calibrar/Validar modelos de precio

Relaciones entre Europeas y Americanas (1/2)

Dado que las opciones americanas tienen más *opcionalidad*… *derecho*, intuitivamente tenemos las siguientes dos relaciones:

(europea) $c \leq C$ *(americana)*

y

(europea) $p \leq P$ *(americana)*

Lo que NO es intuitivo, es que en el caso de las *call* que no paguen dividendos, también se puede ver que:

(europea) $c \geq C$ *(americana)*

Con lo cual, $c = C,$ y el precio de las dos opciones es idéntico

Es decir, NUNCA es óptimo ejercer la opción antes de vencimiento.

Call americano sin dividendos (1/2)

Veamos esto último:

"NUNCA es óptimo ejercer la *call* americana antes de vencimiento"

Ya vimos (Cotas Inferiores) que $c \geq S_0 - Ke^{-rT}$, como $C \geq c$:

$$C \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

Asumiendo $r > 0$, lo anterior dice que siempre que $0 < t < T,$:

$$r(T-t) > 0 \rightarrow -r(T-t) < 0 \rightarrow e^{-r(T-t)} < 1 \rightarrow -e^{-r(T-t)} > -1 \rightarrow -Ke^{-r(T-t)} > -K$$

$$[\text{vender}]\ C(t) > S(t) - K\ [\text{ejercer}]$$

Put americano sin dividendos

El valor de ejercicio de una opción de venta es $K - S(T)$. En una opción *put* europea

---

Este valor no puede capturarse hasta el vencimiento.

Antes del vencimiento, el valor de la opción de venta europea será una función del valor presente de lo que este ejercicio genera: $e^{-r(T-t)}(K - S(t))$.

El *put* americano da acceso inmediato en cualquier momento a $K - S$, a través del ejercicio.

En ciertas circunstancias, especialmente en los posiciones muy Deep ITM, con el tiempo restante hasta la expiración, este diferencial en las condiciones de ejercicio puede dar al *put* americano un valor extra sobre el *put* europeo correspondiente, incluso en ausencia de dividendos.

Otras relaciones *PutCall*

- Americanas que no pagan dividendos:

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

- Europeas que pagan dividendos:

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0$$

- Americanas que pagan dividendos:

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Opciones Exóticas (y no tanto) (1/2)

- Ejercicio:
  - Europea – Solo en tiempo de ejercicio
  - Bermuda – En tiempos predefinidos
  - Americana – En cualquier momento

- Dependen del camino:
  - Asiaticas: $Asia_C \ = \max(\sum w_i S(t_i) - K)\,, 0)$
  - Barreras: Se prenden o apagan cuando S toca valores predeterminados
  - Ventanas: Similares a las barreras pero se activin solo en tiempos determinados

Opciones Exóticas (y no tanto) (2/2)

- Baskets: Dependen de mas de un subyacente
- Spread: Dependen de la diferencia entre dos subyacentes

- Opciones sobre otro tipo de subyacente:

  - IRP: en bonos, en futuros de bonos, en swaps (*Swaptions)*
  - Commodities:
  - Indices
  - CDSs

Otras relaciones *PutCall* - Binarias

- Opciones Binarias-Digitales:

Una opción Binaria-Digital funciona de manera similar a una opción europea pero con los siguiente *payoff:*

$$CD_L\,(T) = I_{\{S(T)>K\}}$$
$$PD_L\,(T) = I_{\{S(T)<K\}}$$

Encontrar una relación de *PutCall* para este tipo de opciones

Modelos Matemáticos en Finanzas Cuantitativas

- Fórmulas Cerradas / Aproximaciones analíticas
- Modelos de árboles (*lattices*)
- Modelos de Ecuaciones Diferenciales
- Montecarlo
- Ad-hoc

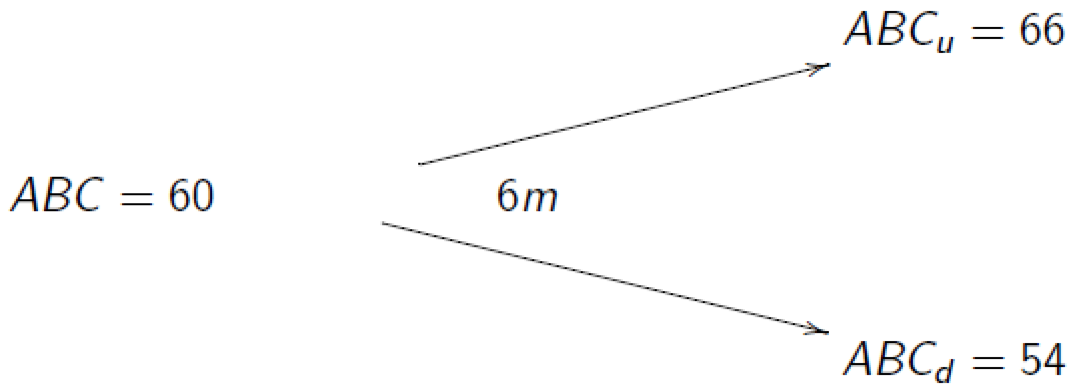
Preguntas (Hull)

- [11.2] ¿Cuál es un límite inferior para el precio de una opción *call* a 4 meses en una acción que no paga dividendos cuando el precio de la acción es de \$28, el *strike* es de \$25, y la tasa de interés libre de riesgo es del 8% anual?
- [11.14] El precio de una *call* europea que expira en 6 meses y tiene un *strike* \$30 es \$2. El precio de la acción subyacente es \$29, y se espera un dividendo de \$0.50 en 2 meses y otra vez en 5 meses. Los tipos de interés (todos los vencimientos) son del 10%. ¿Cuál es el precio de un *put* que expira en 6 meses y tiene un *strike* de \$30?
- [11.25] Supongamos que c_1, c_2 y c_3 son los precios de las opciones *call* europeas con *strikes* K_1, K_2 y K_3, resp., con $K_3 > K_2 > K_1$ y $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$. Todas las opciones tienen el mismo *maturity* Mostrar que $c_2 \leq \frac{c_1+c_3}{2}$

Modelo Binomial de un paso (1/3)

Veamos nuestro primer modelo para la valuación de un derivado financiero.

Ejemplo: Sea el activo *ABC* (acción de la compañía *ABC*), valuada hoy en \$60, supongamos un mundo en el que el activo en 6 meses, solo puede tomar dos precios, \$66 o \$54 (subir o bajar 10 %). Supongamos que se puede pedir prestado/prestar dinero a una tasa del 6% anual (tasa libre de riesgo). Queremos ponerle precio a la opción *cABC62*. La opción CALL, con strike de \$62, que vence en 6 meses



Modelo Binomial de un paso (2/3)

Notar que en un modelo de esta naturaleza, un activo de *moneymarket* se comportaría de la siguiente manera:

$$
\begin{tikzcd}
 & B \\
B\frac{1}{1+rT} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & B
\end{tikzcd}
$$

O equivalentemente

$$
\begin{tikzcd}
 & (1+rT)B \\
B \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & (1+rT)B
\end{tikzcd}
$$

Es decir, en cualquier caso obtengo el mismo resultado. NO hay presencia de riesgo, de aleatoriedad.

Modelo Binomial de un paso (3/3)

Veamos como se comportaría el precio del CALL a expiración:

$$cABC62_u = \text{máx}(66 - 62, 0) = 4$$

$$cABC62 = ?? \qquad \xrightarrow{6m}$$

$$cABC62_d = \text{máx}(54 - 62, 0) = 0$$

Comentario

Se puede probar que la ausencia de arbitraje equivale a:

$$S_d < S(1 + r) < S_u$$

En este ejemplo:

$$S_d = 54 < 60(1 + 0{,}03) = 61{,}8 < S_u = 66$$

Estrategia de replicación (1/3)

Contamos con los siguientes activos a disposición

- Activo S
- Opción C
- Dinero (prestar o pedir prestado) B – *moneymarket*

La idea es replicar a $\boldsymbol{B}$ con $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{C}$. Recordar que B es libre de riesgo

Sea:

$$\Pi = \begin{cases} 1 & \text{unidad de } C \textit{ short} \\ \Delta & \text{unidades de } S \textit{ long} \end{cases}$$

con Δ a determinar:

$$\Pi = \Delta S - C$$

Comentario

Para que el porftolio sea libre de riesgo, necesitamos que se comporte como el moneymarket, en particular $\Pi_d = \Pi_u$

Estrategia de replicación (2/3)

Haciendo algunas cuentas:

1 Hallar Δ tal que $\Pi_u = \Pi_d$ (libre de riesgo). Notar que

$$\Pi_u = \Delta S_u - C_u = \Delta 66 - 4$$

$$\Pi_d = \Delta S_d - C_d = \Delta 54 - 0$$

$$\Delta = \frac{4-0}{66-54} = \frac{1}{3}$$

Estrategia de replicación (3/3)

2 Ahora $\Pi = \frac{1}{3}S - C \Rightarrow \Pi(6m) = 18$. Pero es libre de riesgo:

$$\Pi(0) = \frac{1}{(1 + \frac{0{,}06}{2})}\Pi(6m) = \frac{1}{(1 + \frac{0{,}06}{2})}18$$

Con lo cual, $\Pi(0) = 17{,}47$
Obs, no es igual, aproximo con dos decimales

3 Despejo el valor del call $C(0) = 2{,}52$

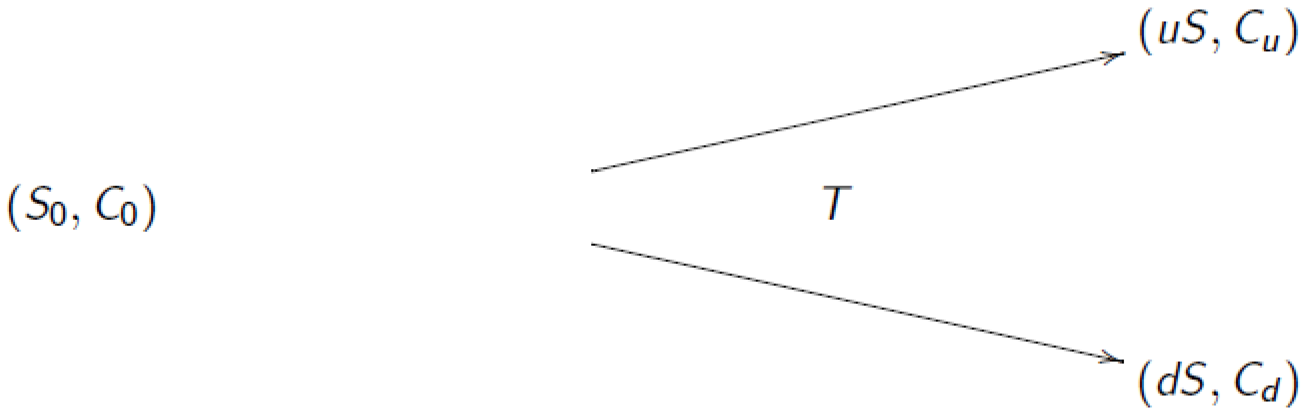
La prima de la opción *call* entonces es \$2.52

Modelo Binomial de un paso – caso general

Sea el activo S, valuado hoy en S_0, supongamos un mundo en el que el activo en un tiempo T, solo puede tomar dos precios:

$$Su = uS \; o \; Sd = dS.$$

Supongamos que se puede pedir prestado/prestar dinero a una tasa del $r\%$ anual (tasa libre de riesgo). Queremos ponerle precio a la opción C. La opción *call*, con *strike* de K, que vence en tiempo T.



Condición de no arbitraje (1/3)

Veamos que en este caso: Hay ausencia de arbitraje siempre y cuando se cumpla la condición

$$0 < d < 1 + r < u$$

Prueba

Supongamos que lo anterior NO sucede. Es decir, no se cumple alguna de las dos desigualdades (asumimos siempre valido que todos son mayores a 0).

Por ejemplo supongamos por un momento que $u > d > 1 + r$

La idea es construirnos un portafolio que genere arbitraje

Condición de no arbitraje (2/3)

Sea el portafolio

$$\Pi = 1S - S_0(1+r)B$$

Este portafolio se lee:

- Una unidad del activo *long*
- $S_0(1+r)$ unidades de dinero *short* (pido prestado al *moneymarket*)

A tiempo inicial, el portafolio tiene un valor de:

$$\Pi(0) = 1S(0) - S(0)(1+r)\frac{1}{1+r} = 0$$

Condición de no arbitraje (3/3)

En el caso de que el activo suba, a tiempo T:

$$\Pi_u(T) = 1uS(0) - S(0)(1+r) = S(0)(u-(1+r)) > 0$$

En el caso de que el activo baje, a tiempo T:

$$\Pi_d(T) = 1dS(0) - S(0)(1+r) = S(0)(d-(1+r)) > 0$$

En resumen: Empezamos con un portafolio Π con valor inicial 0 y en ambos casos (todas las posibilidades posibles en nuestro modelo), el portafolio tiene valor positivo. Eso implica la presencia de arbitraje!

$$d < u < 1 + r$$

Del mismo modo si se supone

Portafolio replicador

Siguiendo con el caso general, recordemos que buscamos el precio de del *call* C (es decir, C_0) Armemos el portfolio con una opción short y unidades del activo *long*:

$$\Pi = \begin{cases} \Delta \text{ acciones long} \\ 1 \text{ opción short} \end{cases}$$

Se puede ver (sin mucho trabajo) que $\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$. El **valor esperado** (comentario):

$$\Pi_d(T) = \Pi_u(T) = \mathbb{E}(\Pi(T)) = \Pi(1+r) \Rightarrow \Pi(0) = \frac{1}{(1+r)}\Pi_u$$

entonces:

$$\Delta S - C = \frac{1}{(1+r)}(\Delta S_u - C_u)$$

Despejando… (1/2)

Despejando C, nos queda:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left((1+r)\Delta S - \Delta S_u + C_u\right)$$

Reemplazando Δ:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left((1+r)\frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}S - \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}S_u + C_u\right)$$

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left(C_u\frac{S(1+r) - S_d}{S_u - S_d} + C_d\frac{S_u - S(1+r)}{S_u - S_d}\right)$$

Despejando… (2/2)

Se puede escribir entonces al valor del *call* como:

$$C = \frac{1}{(1+r)}\left(C_u q + C_d(1-q)\right) \ \text{con} \ q = \frac{S(1+r) - S_d}{S_u - S_d}$$

En este modelo recordar que $S_u = uS_0$ y $S_d = dS_0$, con lo cual

$$q = \frac{S_0(1+r) - dS_0}{uS_o - dS_0}$$

dividiendo numerador y denominador por S_0(distinto a 0!):

$$q = \frac{(1+r) - d}{u - d}$$

Descuento Continuo

Si consideramos una tasa de descuento continua:

$$\begin{tikzcd} & B \\ Be^{-rT} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & B \end{tikzcd}$$

Las únicas modificaciones del análisis son:

- Condición de no arbitraje: $0 < d < e^{rT} < u$
- Probabilidad de riesgo neutral: $q = \frac{e^{rT}-d}{u-d}$
- Valor del *call*:

$$C = e^{-rT}(qC_u + (1-q)C_d)$$

Probabilidad de Riesgo Neutral

Haciendo un análisis similar al anterior, resulta que:

$$q = \frac{e^{r\delta t} - \mathfrak{d}}{\mathfrak{u} - \mathfrak{d}}$$

Notar que q no depende de S, es decir, no depende del precio del activo sino que es intrínseco al activo, lo que es mas cercano a la realidad.

Comentario

La condición de no arbitraje para este modelo resulta:

$$0 < \mathfrak{d} < e^{r\delta t} < \mathfrak{u}$$

Que es esto de Riesgo Neutral?

Este concepto de probabilidad de que el activo suba es uno de los conceptos básicos en teoría de valuación:

- No solo con opciones! **Cualquier derivado**
- Es **independiente** al modelo usado. (*model-independent*)

Comentario

El mundo *Riesgo-Neutral* es un mundo en el cual los inversores no tienen ni aversión al riesgo, ni tampoco lo buscan.

Teorema (Teorema Fundamental de la Valuacion de Activos)

El precio de cualquier derivado se puede obtener descontando la esperanza del payoff, bajo la probabilidad de riesgo neutral.

$$V(0) = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[V(T)\right]$$

Árbol Binomial (1/3)

- La idea ahora es que el precio de la acción pueda subir o bajar no solo una vez, sino un numero finito m de veces en el intervalo $[0, T]$ cada δt con $T = m\delta t$. Este modelo es:
  - Simple como para trabajar explícitamente
  - Ayuda para comprender la valuación de derivados y aproximar problemas mas realistas.

1. Se construye un árbol con los posibles valores del activo, dado un valor inicial de este.
2. Se analizar los posibles precios a tiempo T y determinar la probabilidad de riesgo neutral.
3. Yendo para atrás por el árbol y, a partir de la relación anterior, se calculan los valores en cada nodo.

Árbol Binomial (2/3)

Se toma en este modelo $S_u = \mathfrak{u}S$ y $S_d = \mathfrak{d}S$ con $\mathfrak{u}$ y $\mathfrak{d}$ fijos.

$$S_n^j = S_{\underbrace{uu\ldots u}_{j}\underbrace{dd\ldots d}_{n-j}} = S\mathfrak{u}^j\mathfrak{d}^{n-j} \qquad 0 \leq n \leq m \qquad 0 \leq j \leq n$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \cdots \\
 & & \mathfrak{u}^2 S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \mathfrak{u}S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathfrak{u}\mathfrak{d}S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \mathfrak{d}S \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
 & & \mathfrak{d}^2 S \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Notación:

Tomaremos como factor de descuento $e^{-r\delta t}$, es decir un interés continuo. El árbol resulta entonces:

Árbol Binomial (3/3)

Como vimos en el ejemplo, surge la siguiente formula recursiva:

$$\begin{cases} C_n^j = e^{-r\delta t}\left(qC_{n+1}^{j+1} + (1-q)C_{n+1}^j\right), 0 \leq n \leq m-1, 0 \leq j \leq n \\ C_m^j = \max\left(S_m^j - K, 0\right), 0 \leq j \leq m \end{cases}$$

Conociendo el *Payoff*, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, hasta llegar al $C_0^0 = C$.

Esta formula es la base del algoritmo de Árbol Binomial

Bondades del árbol

Comentario

Conociendo el Payoff, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, para llegar al $V_0^0 = V$, el valor del contrato a tiempo inicial. En este punto ya tenemos un método para valuar derivados haciendo un algoritmo recursivo.

Comentario

También aquí se ve que este método es muy valioso también cuando hay posibilidad de ejercicio previo a T (opciones americanas, por ejemplo) ya que en cada instante se tendrá el precio del derivado y con todos los datos se podrá elegir el momento conveniente de ejercer.

Comentario

También si hubiera barreras (opciones barrera), lo que significaría que el árbol no tendría ramas a partir de un punto.

Ejercicio anticipado - Americanas

El modelo del árbol binomial nos permite muy fácilmente agregar la opcionalidad de ejercicio anticipado (Americanas).

En cada paso t^*del árbol habrá que decidir entre dos:

- (A) No ejercer y mantener: $C(t^*)|P(t^*)$
- (B) Ejercer y recibir: $(S(t^*) - K)\ |(K - S(t^*))$

La forma de decisión será simplemente evaluar cual de las posiciones tiene valor más alto:

$$C_n^j = \max\left(e^{-r\delta t}\left(qC_{n+1}^{j+1} + (1-q)C_{n+1}^j\right), S_n^j - K\right)$$

$$P_n^j = \max\left(e^{-r\delta t}\left(qP_{n+1}^{j+1} + (1-q)P_{n+1}^j\right), K - S_n^j\right)$$

Fórmula recursiva – Caso General

Veamos un método recursivo para valuar cualquier derivado V estilo europeo usando este modelo. Usemos la siguiente notación:

$$V_n^j = V_n(S_n^j) \qquad 0 \leq j \leq n \qquad 0 \leq n \leq m-1$$
$$V_m^j = F(S_m^j) \qquad 0 \leq j \leq n \qquad 0 \leq n \leq m-1$$

Donde $F(S_m^j)$ es el la función de payoff del derivado cuando el valor del activo es S_m^j. Debe verificarse entonces que

$$\begin{cases} V_n = e^{-r\delta t}\mathbb{E}(V_{n+1}) & 0 \leq n \leq m-1 \\ V_m = F(S_m) \end{cases}$$

es decir

$$\begin{cases} V_n^j = e^{-r\delta t}(pV_{n+1}^{j+1} + (1-p)V_{n+1}^j) \qquad 0 \leq n \leq m-1 \qquad 0 \leq j \leq n \\ V_m^j = F(S_m^j) \qquad 0 \leq j \leq m \end{cases}$$

Bondades del árbol

Comentario

Conociendo el Payoff, yendo para atrás en el árbol se pueden conocer todas los valores del derivado, para llegar al $V_0^0 = V$, el valor del contrato a tiempo inicial. En este punto ya tenemos un método para valuar derivados haciendo un algoritmo recursivo.

Comentario

También aquí se ve que este método es muy valioso también cuando hay posibilidad de ejercicio previo a T (opciones americanas, por ejemplo) ya que en cada instante se tendrá el precio del derivado y con todos los datos se podrá elegir el momento conveniente de ejercer.

Comentario

También si hubiera barreras (opciones barrera), lo que significaría que el árbol no tendría ramas a partir de un punto.

Elección de parámetros para el algoritmo

Los de siempre:

- $S =$ precio del subyacente ; T =tiempo de expiración
- $\mathrm{K} =$ precio de ejercicio ; σ =volatilidad
- r =tasa libre de riesgo ; *div* = dividendo (tasa)

Modelo CRR (Cox Ross Rubinstein):

- m =número de pasos del árbol
- $\delta t = T/m$
- $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$
- $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$; $d = \frac{1}{u}$
- $q_{prob} = \frac{e^{(r-div)\delta t}-d}{u-d}$

Hay muchas otras formas de elección de parámetros. CRR y variantes de este son los más usados en la industria.

Python

```
opcion_europea_bin
Def
    Calculador del precio de una opcion Europea con el modelo del Arbol Binomial (CRR)
Inputs
    - tipo : string - Tipo de contrato entre ["CALL","PUT"]
    - S : float - Spot price del activo
    - K : float - Strike price del contrato
    - T : float - Tiempo hasta la expiracion (en años)
    - r : float - Tasa 'libre de riesgo' (anualizada)
    - sigma : float - Volatilidad implicita (anualizada)
    - div : float - Tasa de dividendos continuos (anualizada)
    - pasos : int - Cantidad de pasos del arbol binomial
Outputs
    - precio_BIN: float - Precio del contrato
```

Preguntas (Hull)

- [13.1] El precio de una acción es \$40. Se sabe que al final de 1 mes será \$42 o \$38. La tasa de interés libre de riesgo es del 8% anual Cuál es el valor de una opción *call* europea de 1 mes con *strike* \$39?
- [13.10] El precio de una acción es \$80. Se sabe que al final de 4 meses será \$75 o \$85. La tasa de interés libre de riesgo es del 5%. ¿Cuál es el valor de una opción *put* europea de 4 meses con un strike de \$80? Utilice argumentos de no arbitraje.
- [13.16] La volatilidad de una acción que no paga dividendos, cuyo precio es de \$78, es del 30%. La tasa libre de riesgo es del 3% anual para todos los vencimientos. Calcule los valores para u, d y q si se usa un paso de tiempo de 2 meses. ¿Cuál es el valor de una opción *call* europea de 4 meses con *strike* \$80 dado por un árbol binomial de dos pasos. Supongamos que un *trader* vende 1.000 opciones (10 contratos). ¿Qué posición en la acción es necesaria para cubrir la posición del *trader* en el momento de la operación?