Dan Dăianu Andrei Eckstein

ALGEBRĂ ŞI GEOMETRIE

TEORIE ŞI APLICAŢII

Dan Dăianu Andrei Eckstein

ALGEBRĂ ŞI GEOMETRIE

TEORIE ŞI APLICAŢII

EDITURA MIRTON, TIMIŞOARA, 2015

CUPRINS

PREFAŢĂ

Cartea de faţă se adresează studenţilor de la facultăţile tehnice, cu precădere celor de la Automatică şi Calculatoare. Volumul acoperă programa primului semestru din primul an aferentă disciplinei ,,Algebră şi geometrie".

Despre subiect

Printre cele 4-6 discipline de matematică prevăzute în curricula universităţilor tehnice, Algebra liniară s-a impus treptat, mai cu seamă în ultima decadă, prin caracterul ei direct aplicativ, în special în Computer Science. Marile universităţi tehnice din lume şi-au adaptat programele la acestă situaţie, oferind spaţiu mai larg acestei discipline. La noi nu s-a făcut acest lucru. Cartea de faţă vine să suplinească - parţial, şi cu ajutorul celui care o studiază - această lacună: parcurgând-o **activ**, poţi ajunge mai repede la performanţă, fară ,,lecţii" suplimentare. Partea de geometrie este orientată în special pe nevoile studenţilor de la Ingineria sistemelor, Automatică şi Informatică.

Despre scop, stil şi conţinut

Este o carte ceva mai atipică. Este prima versiune a unui manual centrat pe tehnica învăţării prin exemple, cu puternic accent pe latura aplicativă a teoriei.

În ultima perioadă, de când învăţământul superior a devenit învăţământ de masă, partea de cabotinism din maniera de predare s-a extins până la cursurile scrise. Vedem, tot mai des, la profesori, altfel pe deplin onorabili, lungi pledoarii mai mult sau mai puţin matematice - marcate de expresii de genul ,,veşti bune, veşti proaste" - pentru o propoziţie care poate fi redată pe maximum trei rînduri şi ale cărei subtilităţi pot fi subliniate limpede într-un comentariu pe alte trei-patru rânduri. Sigur că *un student care vrea să înveţe, care vrea să înţeleagă, care vrea să fie rapid capabil să folosească propoziţia şi care nu are prea mult timp de pierdut*, preferă abordarea concisă. ***Cartea de faţă este dedicată acestui student.***

Fiecare dintre cele 11 capitole ale cărţii are o structură standard: conţine trei secţiuni mari - *Teorie, Probleme rezolvate şi Probleme propuse.*

Teoria este expusă succint, cu scurte motivaţii despre aplicabilitatea ei, iar demonstraţiile teoremelor şi propoziţiilor sunt preponderent lăsate la latitudinea utilizatorului. Doar câteva asemenea demonstraţii sunt oferite ca modele, suficiente pentru abordarea cu succes a celorlalte. În schimb sunt date o mulţime de observaţii şi exemple concrete de aplicare a teoriei.

Problemele rezolvate vin să întregească clasa exemplificărilor din *Teorie.* Sunt rezolvate principalele tipuri de probleme care apar în practică şi care sunt esenţiale pentru formarea abilităţilor personale de înţelegere a tematicilor care succed capitolul.

Problemele propuse sunt gândite ca un instrument necesar studentului pentru a-şi verifica şi consolida nivelul de învăţare, de înţelegere şi de integrare a cunoştinţelor parcurse în prealabil.

Despre o modalitate de învăţare

Am constatat că, mai ales în ultima vreme, absolvenţii de liceu care au ajuns studenţii *Politehnicii* nu stăpînesc o tehnică a *învăţării formative*, cea care te face să gândeşti corect, care face ca materia parcursă (la curs, la seminar, acasă ori la bibliotecă) să se integreze natural în sistemele de cunoştinţe şi de valori personale, şi, astfel, să permită studentului, mai apoi inginerului, să aplice creativ cele învăţate. Majoritatea studenţilor memorează mecanic - în cel mai bun caz! - materia predată, iar consecinţele acestei abordări sunt dezastruoase.

De aceea o să-mi permit să repet cele comunicate prin diverse canale unei minorităţi studenţeşti şi să dau cîteva sfaturi studentului pentru care am scris această carte, despre câteva tehnici optime de abordare a învăţării şi nu numai...

Scopurile predării

Cursul vorbit (*proiectat*) este o expunere a principalelor noţiuni pe care trebuie să le asimilezi pentru a putea accede la următoarele materii care se vor preda şi la tehnicile de rezolvare a problemelor care apar în practica inginerească. Niciun manual nu poate să înlocuiască complet o prelegere bună; un dascăl cu experienţă va sublinia capcanele teoriei şi modul în care teoria expusă trebuie să se integreze în arsenalul personal de cunoştinţe al unui inginer bun. Va pregăti terenul, prin observaţii şi exemple adecvate, pentru o abordare firească a tehnicilor de rezolvare a problemelor concrete. Şi va pregăti terenul pentru accesul mai facil la noţiunile care vor apărea.

Seminarul este o formă de aprofundare, detaliere şi diversificare a cunoştinţelor predate la curs. Un dascăl bun care conduce un seminar - în consonanţă cu studentul bun - va pretinde ca materia predată la curs să fie cunoscută. La seminar se vor discuta atunci doar acele probleme din curs ori din carte care nu au fost pe deplin înţelese ori nu au fost pe deplin ,,simţite". Apoi se vor rezolva şi comenta cât mai multe probleme. Dar cel mai bun seminar este acela care se ocupă doar de problemele cu ,,probleme": adică de problemele pe care studentul serios nu a reuşit să le rezolve singur acasă. În felul acesta studentul va absorbi maximum din ce i se oferă. Desigur, asta presupune ca studentul să fi parcurs etapele pe care trebuie să le parcurgă un student la o universitate serioasă.

Şi de aceea o să înşir câţiva dintre paşii pe care trebuie să îi parcurgă un student care doreşte să devină un inginer bun, într-o săptămână obişnuită de lucru, la o materie din programa de matematică.

Etapele învăţării

Etapa I - participarea activă la curs: urmăreşte cu atenţie maximă materia predată la curs realizând conexiuni cu celelalte cursuri şi luând notiţe bune. Aceste deziderate se pot realiza - de către un student debutant - doar după câteva săptămâni de practică intensă. Ai beneficiat optim de cursul predat dacă ai acumulat bine ceea ce s-a făcut până la cursul respectiv, ai reuşit să treci prin ,,procesorul" personal ceea ce se transmite de la tablă şi ai notat chestiunile importante transmise de profesor (dacă notezi doar ce scrie dascălul la tablă, notiţele tale nu vor avea nicio valoare!).

Etapa a II-a – pregătirea seminarului. Din notiţele luate la cursul vorbit extragi teoremele (fără demonstraţii), formulele, exemplele, observaţiile şi încerci o primă memorare - prin conexiuni - a acestui material; *fă-ţi un curs scurt, numai al tău!* Este bine să construieşti singur alte exemplificări pentru termenii noi. Reiei cu pixul, ori alt obiect de scris, toate exemplele şi problemele abordate la curs, ori personal construite, fără ajutoare suplimentare. Nu se poate acumula o materie fără a exersa singur problemele expuse. Apoi treci la rezolvarea personală a problemelor şi exerciţiilor ,,rezolvate" din cursul tipărit (ori cel online) - din *Teorie*, dar şi din *Probleme rezolvate*. Dacă nu reuşeşti să rezolvi singur o problemă, te uiţi la rezolvare, şi, după ce ai reuşit să o refaci singur, răspunde la întrebarea *de ce nu mi-a venit mie ideea?* Studentul mai ambiţios completează formularul de curs personal cu alte teoreme, formule ori exemple pe care le găseşte în *Teorie*. În sfârşit, rezolvi cât mai multe dintre *Problemele propuse* în aceste materiale. Pentru problemele pe care nu ai reuşit să le rezolvi singur, cere ajutor la seminar, la consultaţii, ori colegilor. Nu e nici o ruşine să nu ştii la început; ruşinea este să nu te lămureşti.

Etapa a III-a – pregătirea de performanţă. Dacă vrei mai mult, atunci ,,despică firul în patru". Citeşte, cu creionul în mână, fiecare demonstraţie şi încearcă să o reproduci cu propriile notaţii, cu propriile forţe. Dacă schimbarea notaţiilor te blochează, atunci subiectul de care te ocupi nu a fost înţeles în profunzime, a fost doar memorat. Ai modele de demonstraţii în textul scris; demonstrează cât mai multe dintre propoziţiile nedemonstrate acolo, demonstrează ,,problemele propuse" cu aspect teoretic. Rezolvă problemele mai dificile: cele marcate cu steluţă, cele date la concursurile de matematică locale şi naţionale, ori cele propuse pentru asemenea competiţii (vezi şi bibliografia de la sfârşitul acestei cărţi). Începi cu cele concepute pentru profilurile ,,neelectrice", apoi ,,atacă-le" pe celelalte. Dacă ai ajuns în această fază atunci toate uşile se vor deschide pentru tine.

Succes!

Timişoara, noiembrie 2014 Dan Dăianu

1 MATRICE. SISTEME LINIARE

Matricele sunt principalul instrument folosit în Algebra liniară. Ele sunt utilizate nu numai în matematică ci şi în majoritatea disciplinelor practice. De exemplu matricele joacă un rol central în tehnicile de criptare, în teoria jocurilor, şi, în general în economie, la motoarele de căutare pe Inernet, în grafica pe computer, în mecanica cuantică, în teoria stringurilor, etc.

Principalele probleme pe care le impune practica pentru matrice sunt legate de tehnicile de rezolvare a sistemelor mari - tehnici care impun, printre altele, transformări de ,,rarefiere” (formări de zerouri) asupra matricelor -, de tehnicile de inversare pentru matricele nesingulare, de tehnicile de calcul al determinanţilor ,,mari”, de tehnicile de descompunere în produse uşor manevrabile din punct de vedere computaţional şi de tehnicile de determinare a valorilor proprii pentru matricele pătratice, toate cu aplicaţii directe cu precădere în Computer Science.

Metodele cunoscute din liceu pentru rezolvarea acestor probleme sunt ineficiente, cel puţin din cauza volumului mare de calcule - volum care induce viteze de procesare extrem de reduse -, din cauza erorilor propagate şi din cauza volumului foarte mare de memorie necesară la executarea programelor aferente acestor metode.

Introducem aici noi procedee de determinare a rangului, de inversare a matricelor şi de rezolvare a sistemelor liniare, bazate pe tehnica transformărilor elementare. Încheiem capitolul cu metoda de factorizare LU inventată de Alain Turing utilă la calculul determinanţilor ,,mari”, la inversarea matricelor ,,mari” şi la rezolvarea sistemelor liniare ,,mari”.

Pentru a descrie tehnici mai nuanţate de utilizare a matricelor, va trebui să extindem cadrul de lucru la spaţiile vectoriale, aspect care va fi abordat în următoarele capitole.

În toate capitolele de algebră care urmează vom folosi noţiunile pe care le introducem în prezentul capitol.

A. TEORIE

1. Notaţii. Notăm cu $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ sau cu $K^{m\times n}$ mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane având elementele din corpul $(K,+,\cdot)$ (de regulă $K=\mathbb{R}$ - corpul numerelor reale, $K=\mathbb{C}$ - corpul numerelor complexe, ori $K=\mathbb{Z}_p$ - corpul claselor de resturi modulo p, unde p este un număr prim); despre o asemenea matrice spunem că este o *matrice de tip* $m\times n$. Matricele cu acelaşi număr de linii şi de coloane ($m=n$) se numesc *matrice pătratice.* În exemplele (exerciţiile) pe care le vom da, în lipsa altor precizări, corpul K este corpul numerelor reale.

2. Concatenări. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in K^{m \times n}$, mai scriem $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, ori, dacă nu este pericol de confuzie, $A = (a_{ij})$.
Atunci matricea considerată are descrierea tabelară

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

sau

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şi se poate exprima prin *concatenarea* (alăturarea) coloanelor sale astfel: notând cu

$$A_{:j} := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

matricea coloană formată cu elementele coloanei j a matricei A, atunci concatenarea matricelor $A_{:1}$, $A_{:2}, \dots,$ $A_{:n}$ reface matricea A :

$$A = (A_{:1} \mid A_{:2} \mid \dots \mid A_{:n});$$

analog se poate scrie matricea A prin alăturarea, pe coloană, a matricelor linie $A_{i:} := (a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in})$, unde $i = \overline{1,m}$.

3. Suma matricelor $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$ de tip $m \times n$ este o matrice de tip $m \times n$ notată $A + B$ al cărei element generic este $a_{ij} + b_{ij}$, (adică elementul de pe poziţia (i, j) al matricei sumă). De exemplu:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{bmatrix} \text{ şi}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

4. Înmulţirea matricei $A = (a_{ij})$ de tip $m \times n$ cu **scalarul** c (adică c este un element al corpului K) are ca ieşire matricea de tip $m \times n$ notată cA al cărei element generic este $c\,a_{ij}$. De exemplu:

$$\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \text{ şi } 3 \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 6,1 & 2,9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1,5 \\ 18,3 & 8,7 \end{bmatrix}.$$

Proprietăţi. Fie A, B şi C matrice de tip $m \times n$, iar c şi d scalari. Atunci:
a. $A + B = B + A$ - *comutativitatea adunării matricelor;*
b. $A + (B + C) = (A + B) + C$ - *asociativitatea adunării matricelor;*
c. $c\,(A + B) = cA \ + \ cB$ *şi* $(c + d)\,A \ = \ cA \ + \ dA$ - *legile distributivităţii înmulţirii matricelor cu scalari;*
d. $(cd)A = c\,(dA)$;
e. $1A = A$ - *elementul* $1 \in K$ *este ,,element neutru" pentru înmulţirea matricelor cu scalari.*

5. Transpusa matricei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ este o matrice, notată A^T, de tip $n \times m$ obţinută din A prin schimbarea liniilor cu coloanele (de la stânga la dreapta, de sus în jos). Deci transpusa (*matricea transpusă a matricei* A) este $A^T := (a'_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$, unde $a'_{ij} = a_{ji}$. Folosind concatenarea liniilor matricei A, putem scrie transpusa astfel: $A^T = (A_{1:} \mid A_{2:} \mid \ldots \mid A_{n:})$.

De exemplu:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Proprietăţi. *Pentru orice matrice* $A, B \in K^{m \times n}$ *şi* $C \in K^{n \times l}$
a. $\left(A^T\right)^T = A$;
b. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
c. $(AC)^T = C^T A^T$;
d. *pentru orice scalar* r, $(rA)^T = rA^T$;
e. *dacă* A *este o* ***matrice diagonală*** *(elementele care nu sunt pe diagonala principală sunt toate 0) atunci* $A = A^T$.

O matrice pătratică este **simetrică** dacă $A^T = A$.

6. Matrice nulă. Matrice unitate. Notăm cu $O_{m,n}$ (sau doar O dacă nu este pericol de confuzie) *matricea nulă*, adică o matrice de tip $m \times n$ având toate elementele nule (i.e. elementul neutru al grupului $(K^{m \times n}, +)$). Cu I_n (ori, uneori doar cu I) notăm *matricea unitate* de tip $n \times n$, adică

$$I_n = (\delta_{ij})\,, \text{ unde } \qquad \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \neq j \\ 1, & \text{dacă } i = j \end{cases}$$

este *simbolul lui Kronecker*. Prin urmare I_n este matricea care are pe diagonala principală doar 1, iar în rest 0 (*i.e.* I_n *este elementul neutru faţă de înmulţirea matricelor pătrate de tip* $n \times n$). Coloana j din matricea unitate va fi notată e_j, deci

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{iar prin concatenare}$$

$I_n = (e_1 \mid e_2 \mid \ldots \mid e_n)$.

Proprietăţi. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$.

a. *$O \in K^{m\times n}$ este **element neutru** faţă de adunarea matricelor din $K^{m\times n}$: $O + A = A + O = A$ pentru orice $A \in K^{m\times n}$;*

b. *matricea $(-1)A := -A$ este **elementul simetric** al elementului A (pentru adunarea matricelor): $A + (-A) = (-A) + A \ = \ O$;*

c. *$(\mathcal{M}_{m,n}(K), +)$ este un grup abelian.*

7. Matricea permutării $\pi \in S_n$. Reamintim că π este o bijecţie având domeniul şi codomeniul $\{1, 2, \ldots, n\}$; se mai notează tabelar astfel:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Matricea permutării $\pi \in S_n$ este de tip $n \times n$ şi este definită prin

$$P_\pi = (\delta_{i\pi^{-1}(j)}),$$

adică matricea P_π are pe linia i doar elementul de pe coloana $\pi(i)$ egal cu 1, în rest 0. Altfel spus, matricea permutării π se obţine din matricea unitate I_n schimbând liniile în raport cu π^{-1}: linia $\pi(i)$ din I_n devine linia i din P_π.

De exemplu, dacă $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, atunci matricea permutării π este

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Din *definiţia determinanţilor* (dacă $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ atunci $\det(A) := \sum\limits_{s\in S_n} \varepsilon(s) a_{1s(1)} a_{2s(2)} \cdot \ldots \cdot a_{ns(n)}$, unde $\varepsilon(s)$ înseamnă *signatura permutării s*) urmează că $\varepsilon(\pi) = \det(P_\pi)$.

În exemplul de mai sus signatura permutării π (*i.e.* $\varepsilon(\pi) = (-1)^{m(\pi)}$, unde $m(\pi)$ este numărul tuturor inversiunilor permutării π) este: $\varepsilon(\pi) = (-1)^2 = 1 = \det(P_\pi)$.

Din definiţia matricei permutării $\pi \in S_n$ rezultă că dacă $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, atunci *matricea $P_\pi x$ este matricea x în care liniile sunt permutate în raport cu π*, deci

$$P_\pi x = \begin{pmatrix} x_{\pi(1)} \\ x_{\pi(2)} \\ \vdots \\ x_{\pi(n)} \end{pmatrix}.$$

8. Înmulţirea matricelor. Dacă $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ iar $B = (b_{jk}) \in K^{n\times p}$ atunci *produsul matricelor* A şi B este o matrice de tip $m \times p$ obţinută prin tehnica înmulţirii ,,linie cu coloană", adică

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jp} \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jp} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & \dots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jp} \end{pmatrix} =$$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\Big)_{ik} = (AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid \dots \mid AB_{:p}).$$

De exemplu,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix},$$

iar

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

În particular, dacă $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$, atunci

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1A_{:1} + x_2A_{:2} + \dots + x_nA_{:n}.$$

De exemplu

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix}$$

şi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 12 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}.$$

Proprietăţi ale înmulţirii matricelor. *Fie A şi A' matrice de tip $m \times n$, B şi B' de tip $n \times k$ şi C de tip $k \times \ell$. Atunci:*

a. $(AB)\,C = A\,(BC)$ (**asociativitatea înmulţirii matricelor**);
b. $A\,(B + B') = AB + AB'$ (**distributivitatea la stânga a înmulţirii matricelor faţă de adunare**);
c. $(A + A')\,B = AB + A'B$ (**distributivitatea la dreapta a înmulţirii matricelor faţă de adunare**);
d. *pentru orice scalar r, $r\,(AB) = (rA)\,B = A\,(rB)$;*
e. *dacă $B = (B_{:1} \,|\, B_{:2} \,|\ldots|\, B_{:k})$, atunci $AB = (AB_{:1} \,|\, AB_{:2} \,|\ldots|\, AB_{:k})$;*
f. *dacă $\pi, \sigma \in S_n$, atunci $P_\pi^T P_\pi = I_n$, iar $P_\pi P_\sigma = P_{\sigma\pi}$;*
g. *dacă $\pi \in S_m$, atunci*

$$P_\pi A = (P_\pi A_{:1} \mid P_\pi A_{:2} \mid \ldots \mid P_\pi A_{:n}) =$$

$$= \left(a_{\pi(i)j}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} a_{\pi(1)1} & a_{\pi(1)2} & \cdots & a_{\pi(1)n} \\ a_{\pi(2)1} & a_{\pi(2)2} & \cdots & a_{\pi(2)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\pi(m)1} & a_{\pi(m)2} & \cdots & a_{\pi(m)n} \end{pmatrix}.$$

9. Inversa matricei pătratice A este o matrice B de acelaşi tip astfel încât: $AB = I = BA$. Inversa matricei A se notează cu A^{-1}. O matrice care admite inversă se numeşte *matrice inversabilă* sau *nesingulară*. O matrice care nu are inversă se numeşte *matrice singulară.*

Proprietăţi.
a. *Dacă $\pi \in S_n$, atunci $P_\pi^T = P_{\pi^{-1}} = P_\pi^{-1}$.*
b. *Matricea A este nesingulară dacă şi numai dacă* $\det(A) \neq 0$.
c. *Dacă A şi B sunt matrice pătratice pentru care $AB = I$, atunci $B = A^{-1}$ (şi $A = B^{-1}$).*
d. *Dacă A este matrice pătratică nesingulară şi $k \in \mathbb{N}^*$, atunci $A^{-k} := (A^{-1})^k = (A^k)^{-1}$ (unde $A^k := \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{de } k \text{ ori}}$).*

Exemplul 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

deci:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Exemplul 2.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 941 & 942 \\ 1256 & 1255 \end{pmatrix}$$

şi

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}^{-3} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1255}{2197} & \dfrac{942}{2197} \\ \dfrac{1256}{2197} & -\dfrac{941}{2197} \end{pmatrix}.$$

Se verifică imediat că $(\mathcal{M}_{n,n}(K), +, \cdot)$ *este un inel (necomutativ, în general) în care* I_n *este elementul neutru faţă de înmulţirea matricelor „$\cdot$".*

10. Un **sistem liniar** de m ecuaţii cu n necunoscute având coeficienţii a_{ij} din corpul K (la noi $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ori $\mathbb{Z}_p$):

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 \;+\; a_{12}x_2 \;+\; \ldots \;+\; a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 \;+\; a_{22}x_2 \;+\; \ldots \;+\; a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 \;+\; a_{m2}x_2 \;+\; \ldots \;+\; a_{mn}x_n = b_n \end{array}\right. \tag{1}$$

se poate scrie matriceal astfel:

$$Ax = b,$$

adică

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

unde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ este matricea coeficienţilor sistemului (1),

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$$

este matricea coloană a necunoscutelor, iar

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(K)$$

este matricea coloană a termenilor liberi. Un asemenea sistem poate fi *incompatibil*, i.e. mulţimea soluţiilor $\mathcal{S}$ este vidă ($\mathcal{S} = \varnothing$), *compatibil determinat, i.e.* sistemul are soluţie unică, sau *compatibil nedeterminat,* i.e. sistemul are mai multe soluţii (o infinitate în cazul $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$, o putere a lui p dacă $K = \mathbb{Z}_p$, p prim).

11. Teorema Kronecker-Capelli. *Sistemul* (1) *este compatibil dacă şi numai dacă* $rang(A) = rang(\overline{A})$, *unde* $\overline{A} = (A \mid b)$ *este* ***matricea extinsă*** *a matricei* A *(i.e. matricea* A *bordată (concatenată) cu coloana termenilor liberi* b*):*

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Reamintim că rangul unei matrice $A \in K^{m \times n}$ este cel mai mare ordin de determinant nenul care se poate construi din elementele de intersecţie a k linii şi k coloane ale matricei A, unde $k \in \{1, 2, \dots, \min(m, n)\}$.

12. Matrice triunghiulare. Un sistem de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

unde $a_{ii} \neq 0$ pentru orice i, se rezolvă prin *metoda substituţiei inverse* (i.e. obţinem x_n din ultima ecuaţie, apoi x_{n-1} din penultima etc.) şi are ca matrice o *matrice superior triunghiulară*, adică $a_{ij} = 0$, ori de câte ori $j < i$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}; \qquad (2)$$

dacă în plus coeficienţii a_{ii} au toţi valoarea 1 spunem că matricea este superior triunghiulară *diagonal unitară*.

Un sistem în care $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, n}$ de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{12}x_2 + a_{22}x_2 = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

se rezolvă prin *metoda substituţiei directe* iar matricea acestuia este *inferior triunghiulară*.

13. Matrice scară pe linii. Fie $S = (s_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ o matrice care îndeplineşte următoarele două condiţii:

a. *Dacă o linie este nulă, e.g.* $S_{i:} = (0\ 0\ \ldots\ 0)$, *atunci toate liniile de sub aceasta sunt nule, deci* $S_{k:} = (0\ 0\ \ldots\ 0)$, *pentru orice* $k \geq i$.

b. *Dacă primul element nenul de pe o linie* $S_{i:}$ *este* s_{ij} *atunci elementele de pe coloanele precedente inclusiv* $S_{:j}$ (*i.e.* $S_{:1}, S_{:2}, \ldots, S_{:j}$) *aflate sub linia* i *sunt nule* (i.e. $s_{\ell k} = 0$, *pentru orice* $\ell > i$ *şi* $k \leq j$).

Atunci matricea S se numeşte ***matrice scară pe linii;*** elementul s_{ij} (adică primul element nenul de pe o linie, dacă există) se numeşte ***pivot***.

Exemple. Matricea (2) este o matrice scară pe linii; de asemenea matricele

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sunt matrice scară pe linii, iar matricele

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 13 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nu sunt matrice scară pe linii.

Orice matrice diagonală este matrice scară pe linii. În particular, I_n *este o matrice scară pe linii.*

14. Transformări elementare. Fie sistemul liniar de m ecuaţii cu n necunoscute (1) cu mulţimea soluţiilor $\mathcal{S}$; notăm ecuaţia a i-a cu L_i , adică:

$$L_i \ : \ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ = b_i.$$

Un *sistem echivalent* cu sistemul (1) este un sistem liniar de m ecuaţii cu n necunoscute pentru care mulţimea soluţiilor este tot $\mathcal{S}$.

Numim *transformări elementare* (aferente sistemului (1)), următoarele acţiuni efectuate asupra sistemului (1):

a. interschimbarea a două ecuaţii: $L_i \leftrightarrow L_k$;

b. multiplicarea unei ecuaţii cu un scalar nenul $\lambda \in K$: $\lambda L_i \to L_i$;

c. multiplicarea unei ecuaţii cu un scalar $\lambda \in K$ şi adunarea rezultatului la altă ecuaţie: $\lambda L_i + L_k \to L_k$.

Desigur, *transformările elementare efectuate asupra unui sistem conduc la un sistem echivalent.*

Transformărilor elementare efectuate asupra unui sistem le corespund *transformările elementare* efectuate asupra matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ pe linii:
a. interschimbarea a două linii: $L_{i:} \leftrightarrow L_{k:}$ o numim *transformare de tip 1*;
b. multiplicarea unei linii cu un element nenul $\lambda \in K$: $\lambda L_{i:} \to L_{i:}$ - *transformare de tip 2*;
c. multiplicarea unei linii cu un element $\lambda \in K$ şi adunarea rezultatului la altă linie: $\lambda L_{i:} + L_{k:} \to L_{k:}$ - *transformare de tip 3.*

15. Metoda lui Gauss de rezolvare a unui sistemului (1): *efectuăm succesiv transformări elementare asupra matricei extinse a sistemului* (1) *până ajungem la o forma scară; din forma scară obţinem mulţimea soluţiilor* $\mathcal{S}$.

Metoda Gauss-Jordan presupune în plus faţă de metoda Gauss:
◦ *transformarea fiecărui pivot în* 1;
◦ *anularea succesivă a tuturor celorlalte elemente de pe coloana pivotului.*
Matricea astfel obţinută se numeşte ***matrice scară redusă.***

Notaţie. Fie A şi B două matrice. Vom scrie

$$A \sim B$$

dacă şi numai dacă matricele sunt de acelaşi tip şi una s-a obţinut din cealaltă prin transformări elementare pe linie.

Exemplul. 1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$ prin metoda Gauss.

Rezolvare. Ataşăm sistemului matricea sa extinsă

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array} \right)$$

şi efectuăm transformări elementare pe linii pentru a obţine o formă scară. Pentru a forma zerouri pe prima coloană alegem pivotul $a_{11} = 3$ (căci $a_{11} \neq 0$) şi efectuăm transformările $-2L_1 + L_2 \to L_2$ şi $-3L_1 + L_3 \to L_3$; obţinem matricea echivalentă

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right);$$

din ultimile două linii rezultă că $x_4 = 1$, iar din prima linie obţinem $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$. Deci sistemul nostru este compatibil (dublu) nedeterminat, iar mulţimea soluţiilor sale este $\mathcal{S} = \{(\alpha, \beta, 1 - 3\alpha - 4\beta, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Am considerat, implicit, $K = \mathbb{R}$. Dacă, în acelaşi exemplu luăm K corpul claselor de resturi modulo 2, deci parametrii $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$, atunci avem patru soluţii:
$\mathcal{S} = \{(0,0,1,1), (1,0,0,1), (0,1,1,1), (1,1,0,1)\}$.

Exemplul. 2. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$$

prin metoda Gauss-Jordan.

Rezolvare. Ataşăm sistemului matricea sa extinsă:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 6 & 5 & 2 & 21 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array} \right)$$

şi efectuăm transformări elementare pe linii pentru a obţine *forma scară redusă.* Pentru a obţine pivotul 1 pe prima linie putem să înmulţim linia a 5-a cu (-1) şi să adunăm rezultatul la prima linie, adică să efectuăm transformarea elementară: $-L_5 + L_1 \to L_1$:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 15 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 18 \end{array} \right),$$

ceea ce permite crearea de zerouri sub pivotul 1 al primei linii:

$$-3L_1 + L_2 \to L_2, -4L_1 + L_3 \to L_3, -L_2 + L_4 \to L_4, -7L_1 + L_5 \to L_5,$$

adică obţinem matricea echivalentă:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array} \right).$$

Asemănător procedăm cu celelalte coloane: pe coloana a II-a formăm un pivot 1 şi zerouri în rest, etc. De exemplu, cu
$-L_4 + L_1 \to L_1$, $2L_4 + L_2 \to L_2$:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -10 & 5 & 2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2L_2 + L_4 \to L_4 \\ 5L_4 + L_5 \to L_5 \\ 3L_4 + L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{c} -L_4 \leftrightarrow L_3 \\ -2L_3 + L_5 \to L_5 \\ L_4 + L_1 \to L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2L_4 + L_1 \to L_1 \\ -L_4 + L_2 \to L_2 \\ -2L_4 + L_3 \to L_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

deci mulţimea soluţiilor este formată dintr-un singur element (sistem compatibil determinat): $\mathcal{S} = \{(3, 0, -5, 11)\}$.

Următoarele proprietăţi ale matricelor, cărora li s-au aplicat transformări elementare pe linie - provenite din transformările similare efectuate asupra sistemelor sunt extrem de utile, printre altele, la *determinarea rangului* unei matrice, la *calculul inversei* unei matrice nesingulare şi la *rezolvarea sistemelor liniare.*

16. Proprietăţi induse de transformări elementare. *Fie A o matrice, S o forma scară a sa, iar S_0 forma scară redusă. Atunci:*

◦ *$rang(A) = rang(S) =$ numărul de pivoţi din S;*

◦ *forma scară S nu este, în general, unică, în schimb forma scară redusă S_0 este unică;*

◦ *dacă A este matrice pătratică, I este matricea unitate de acelaşi tip şi $(A \mid I) \sim (S_0 \mid I')$ atunci:*

· *dacă $S_0 = I$ rezultă că $I' = A^{-1}$, iar*

· *dacă $S_0 \neq I$ rezultă că matricea A este singulară.*

◦ *dacă A este matrice pătratică nesingulară de tip $n \times n$ şi B este o matrice de acelaşi tip, atunci $(A \mid B) \sim (I_n \mid C)$ dacă şi numai dacă $C = A^{-1}B$;*

◦ *transformările elementare asupra matricei A se exprimă matriceal cu ajutorul matricelor elementare de tip 1, 2 şi 3 ($P_{(i,k)}, E^i(\lambda)$, respectiv $E_{ik}(\lambda)$, inversabile, definite mai jos) astfel:*

· *pentru transformarea de tip 1: $L_{i:} \leftrightarrow L_{k:}$ noua matrice este produsul $P_{(i,k)}A$, unde $P_{(i,k)}$ este matricea transpoziţiei $(i,k) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & i \dots & k & \dots & n \\ 1 & 2 \dots & k \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$;*

desigur $P_{(i,k)}^{-1} = P_{(i,k)}$ deci **inversa unei transformări de tip 1 este o transformare de tip 1**;

· *pentru transformarea de tip 2: $\lambda L_{i:} \to L_{i:}$ noua matrice este produsul $E^i(\lambda)A$, unde cu $E^i(\lambda)$ am notat matricea unitate I având intrarea (i,i) modificată în λ (în* *loc de* 1*); cum* $(E^i(\lambda))^{-1} = E^i(\lambda^{-1})$*, urmează că* **inversa unei transformări de tip 2 este o transformare de tip 2**;

· *pentru transformarea de tip 3:* $\lambda L_{i:} + L_{k:} \to L_{k:}$*, noua matrice este produsul* $E_{ik}(\lambda)A$*, unde cu* $E_{ik}(\lambda)$ *am notat matricea unitate* I *având intrarea* (k,i) *modificată în* λ *(în loc de* 0*); deoarece* $(E_{ik}(\lambda))^{-1} = E_{ik}(-\lambda)$*, rezultă că* **inversa unei transformări de tip 3 este o transformare de tip 3**.

17. Determinarea rangului. Fie A o matrice pătratică. Efectuând transformări elementare pe linie, transformăm matricea A într-o matrice scară S. Atunci $rang\,(A) = rang\,(S)$, adică rangul este egal cu numărul de pivoţi din matricea S.

Exemplu. Să determinăm $rang\,(A)$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -3 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Scopul nostru este să obţinem, prin transformări elementare în matricea dată, o matrice scară; rangul va fi egal cu numărul de pivoţi din matricea scară. Vom efectua transformări elementare pornind de la linia a II-a, deoarece numerele de aici sunt mai mici, iar $a_{21} = 1$ este un pivot uşor de folosit. Efectuând transformările de tip 3: $-3L_2 + L_1 \to L_1$, $-L_2 + L_3 \to L_3$ şi $5L_2 + L_4 \to L_4$ obţinem

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 7 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 10 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

apoi, pentru transformările $L_1 \leftrightarrow L_2$, $-L_1 + L_3 \to L_3$, $2L_1 + L_4 \to L_4$ şi obţinem matricea scară S:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S.$$

Pivoţii fiind $s_{11} = 1$ şi $s_{22} = 7$ rezultă că numărul de pivoţi este 2. În consecinţă $rang\,(A) = rang\,(S) = 2$.

Observaţii. 1. Matricea scară redusă se poate obţine din orice formă intermediară (obţinută din matricea iniţială prin transformări elementare); în exemplul de mai sus, ea este

$$S_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & \frac{6}{7} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Deoarece rangul matricei A coincide cu rangul matricei transpuse A^T, putem, pentru determinarea rangului, să efectuăm şi ,,transformări elementare pe coloane" în A pentru a obţine numărul maxim posibil de zerouri; atunci $rang\,(A)$ va fi egal cu numărul de elemente nenule rămase.

18. Determinarea inversei. Calculul matricei $A^{-1}C$. Metoda Gauss-Jordan poate fi folosită şi pentru *calculul inversei* unei matrice pătratice $A \in K^{n\times n}$ nesingulare. Deoarece determinarea inversei B a unei matrice A revine la rezolvarea ecuaţiei matriceale $AB = I$, iar

$AB = (AB_{:1}\,|\,AB_{:2}\,|\ldots|\,AB_{:n})$,

avem de determinat coloanele $B_{:i}$ ale inversei din condiţia

$(AB_{:1}\,|\,AB_{:2}\,|\ldots|\,AB_{:n}) = (e_1 \mid e_2 \mid \ldots \mid e_n)$.

Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ avem de rezolvat sistemul $AB_{:i} = e_i$. Aşadar inversarea unei matrice revine la rezolvarea a n sisteme, însă toate cu aceeaşi matrice a sistemului, A. Aceste sisteme se rezolvă simultan. Considerăm aşadar matricea sistemului, extinsă simultan cu toate coloanele de termeni liberi care ne interesează. Am văzut în exemplele de mai sus că alegerea paşilor care trebuie efectuaţi pentru rezolvarea unui sistem nu depinde de coloana termenilor liberi, ci numai de matricea sistemului. Atunci rezolvarea sistemelor $AB_{:i} = e_i$ poate fi făcută simultan.

Sau, efectuând echivalenţa $(A|I_n) \sim (I_n|B)$ (forma scară redusă a unei matrice nesingulare este matricea unitate), rezultă că există matricele elementare $E_1, E_2, \ldots,$ $E_m \in K^{n\times n}$ astfel ca $I_n = E_m E_{m-1} \cdots E_1 A$. Cum matricele elementare sunt inversabile (cu inversele - matrice elementare de acelaşi tip), rezultă imediat că $A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_m^{-1}$ şi $B = E_m E_{m-1} \cdots E_1$.

Mai general, dacă $C \in K^{n\times n}$, atunci avem echivalenţa

$$(A|C) \sim \left(I_n|A^{-1}C\right).$$

Exemplu. Să calculăm inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Efectuăm transformări elementare asupra matricei

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

pentru a obţine matricea scară redusă. De exemplu, înmulţirea la stânga a matricei A cu $E_{13}\,(-1)$ corespunde transformării $-L_1 + L_3 \to L_3$, deci

$$(A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

analog, înmulţind cu $E_{23}(1)$, cu $E_{32}\left(-\frac{1}{2}\right)$, cu $E^3\left(\frac{1}{2}\right)$ şi cu $E_{21}(-1)$ avem, succesiv

$$(A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(I_3|A^{-1}\right).$$

Prin urmare $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. În plus, ştim că

$A^{-1} = E_{21}(-1)\, E^3\left(\frac{1}{2}\right) E_{32}\left(-\frac{1}{2}\right) E_{23}(1)\, E_{13}(-1)$.

19. Descompunerea *LU* a unei matrice pătratice. Spunem că matricea nesingulară $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ admite *factorizare (descompunere) LU* dacă există două matrice $L, U \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$, astfel ca $A = LU$, L fiind o matrice inferior triunghiulară diagonal unitară, iar U o matrice superior triunghiulară[1], i.e. L, respectiv U sunt de forma:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Proprietăţi. Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătratică nesingulară de tip $n \times n$.

∘ *Dacă A poate fi transformată într-o matrice scară U folosind doar matrice elementare de tip 3, de forma $E_{ij}(\lambda)$ cu $i < j$, atunci A admite descompunere LU. De fapt dacă* $U = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$ unde $E_1, \dots, E_k$ sunt matrice elementare de tip 3, de forma $E_{ij}(\lambda)$ *cu $i < j$, atunci $L = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$, iar $A = LU$.*

∘ *Dacă minorii principali $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ sunt nenuli, unde:*

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

atunci matricea A admite descompunere LU

∘ *Există două permutări $\pi, \sigma \in S_n$ astfel încât matricea $P_\pi A P_\sigma$ să admită descompunere LU.*

[1]Literele ,,L” şi ,,U” provin de la ,,Lower”, respectiv ,,Upper triangular matrix”.

Exemplu. Să se descompună în produs LU matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare. Încercăm să aplicăm doar transformari elementare de tip 3 asupra matricei A pâna la forma scară U. Formăm zerouri pe prima coloană folosind ca pivot elementul $a_{11} = 2$; aceasta înseamnă de fapt că înmulţim, la stânga, matricea A succesiv cu matricele elementare: $E_{12}(-\frac{3}{2})$, $E_{14}(-\frac{5}{2})$, apoi formăm zerouri pe a doua coloană folosind ca pivot elementul $a'_{22} = -\frac{1}{2}$, adică înmulţim la stânga cu matricele elementare $E_{23}(8)$ şi $E_{24}(-1)$ şi, în sfârşit, cu $E_{34}(\frac{2}{3})$; obţinem:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{-\dfrac{1}{2}} & -1 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 3 & \dfrac{5}{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & 23 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & -6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{46}{3} \end{pmatrix} = U.$$

Deci am obţinut

$$U = E_{34}(\tfrac{2}{3})E_{24}(-1)E_{23}(8)E_{14}(-\tfrac{5}{2})E_{12}(-\tfrac{3}{2})A,$$

sau, echivalent (aplicând formula $(E_{ik}(\lambda))^{-1} = E_{ik}(-\lambda)$),

$$A = \left(E_{34}(\tfrac{2}{3})E_{24}(-1)E_{23}(8)E_{14}(-\tfrac{5}{2})E_{12}(-\tfrac{3}{2})\right)^{-1}U =$$

$$= E_{12}(\tfrac{3}{2})E_{14}(\tfrac{5}{2})E_{23}(-8)E_{24}(1)E_{34}(-\tfrac{2}{3})U.$$

Luând

$$L = E_{12}(\tfrac{3}{2})E_{14}(\tfrac{5}{2})E_{23}(-8)E_{24}(1)E_{34}(-\tfrac{2}{3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \\ \dfrac{5}{2} & 1 & -\dfrac{2}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

rezultă descompunerea

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 1 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{46}{3} \end{pmatrix}.$$

B. PROBLEME REZOLVATE

1. Rezolvaţi sistemele de mai jos folosind metoda lui Gauss:

(a) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + z = 2 \\ 4x - y + 5z = 7 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 4x + 2y - z = 2 \\ 6x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = -11 \\ 5x + 6y = 2 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \\ 7x + 8y = 9 \end{cases}$.

Rezolvare.
(a) Vom folosi notaţia matriceală şi vom efectua operaţii asupra matricei extinse a sistemului: $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right)$. Deoarece $a_{11} = 1 \neq 0$, putem considera a_{11} drept pivot. Pentru a provoca zerouri dedesubtul pivotului, adunăm mai întâi la linia a doua prima linie înmulţă cu -2 (şi vom face 0 coeficientul lui x din ecuaţia a doua). Apoi vom aduna la linia a treia prima linie înmulţită cu -4, făcând astfel 0 şi coeficientul lui x din ecuaţia a treia. Avem succesiv:

$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & 3 \end{array}\right)$. Pe coloana a doua alegem pivot pe $a'_{22} = -4 \neq 0$. Pentru a face 0 coeficientul lui y din ecuaţia a treia (şi a obţine forma scară a matricei A), adunăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu $-\dfrac{9}{4}$. Obţinem

$A \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\dfrac{9}{4}} & 3 \end{array}\right)$. De aici se vede mai întâi că $\operatorname{rang} A = 3$ (numărul pivoţilor), că $z = \dfrac{4}{3}$, apoi, din ecuaţia a doua, $y = 1$ şi, înlocuind în prima ecuaţie, $x = \dfrac{1}{3}$. Aşadar sistemul este compatibil determinat şi are soluţia unică $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{1}{3}, 1, \dfrac{4}{3}\right)\right\}$.

(b) Procedăm la fel ca la exerciţiul precedent. Observăm însă că elementul din colţul din stânga-sus al matricei extinse $\overline{A}$ este $a_{11} = 0$, deci nu poate fi luat pe post de pivot. În acest caz, vom schimba ordinea ecuaţiilor astfel încât în colţul amintit să avem un element nenul. Schimbând între ele primele două linii ale matricei $\overline{A}$, obţinem

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Pentru a face 0 şi coeficientul lui x de pe linia a treia (cel de pe linia a doua este deja 0), vom aduna la cea de-a treia linie prima linie înmulţită cu -3. Atunci $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & -3 \end{array}\right)$. Alegem $a'_{22} = 1 \neq 0$ drept pivot. Pentru a face 0 coeficientul lui y din ecuaţia a treia, adunăm la ultima linie a matricei obţinute linia a doua înmulţită cu -3. Obţinem: $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-13} & -6 \end{array}\right)$. De aici se vede mai întâi că $\operatorname{rang} A = 3$, că $z = \dfrac{6}{13}$, apoi, din ecuaţia a doua, $y = \dfrac{1}{13}$ şi, înlocuind în prima ecuaţie, $x = \dfrac{15}{13}$. Aşadar sistemul este compatibil determinat şi are soluţia unică $\mathcal{S} = \left\{\left(\dfrac{15}{13}, \dfrac{1}{13}, \dfrac{6}{13}\right)\right\}$.

(c) Avem $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right)$. Alegem $a_{11} = 1 \neq 0$ pivot, adunăm la linia a doua prima linie înmulţită cu -2 şi adunăm la linia a treia prima linie înmulţită cu -5. Obţinem astfel zerouri sub primul pivot:

$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 10 & -2 \end{array}\right)$. Pe linia a doua alegem pivot elementul de pe coloana a doua: $a'_{22} = -3 \neq 0$. Adunăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu -2. Găsim că:

$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$. Am obţinut o formă scară cu doar doi pivoţi deci $\operatorname{rang} A = 2$. Ultima ecuaţie, $0 = -2$, ne arată că sistemul este incompatibil.

(d) Avem $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$. Alegem $a_{11} = 2 \neq 0$ pivot şi adunăm la linia a doua prima linie înmulţită cu -2, apoi adunăm la linia a treia prima linie înmulţită cu -3. Obţinem astfel zerouri sub primul pivot:

$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$. Alegem ca al doilea pivot elementul de pe linia 2, coloana 3, $a'_{23} = 1 \neq 0$. Adunăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu -5, şi obţinem că $\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Ultima ecuaţie, $0 = 0$, este satisfăcută întotdeauna. Din linia a doua rezultă $z = 0$. Apoi din prima ecuaţie găsim $x = \dfrac{1-y}{2}$. Sistemul este compatibil (simplu) nedeterminat şi are ca soluţii $\mathcal{S} = \left\{ \left(\dfrac{1-\alpha}{2}, \alpha, 0 \right) \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

(e) Cu notaţii matriceale, adunând la linia a doua prima linie înmulţită cu -2, obţinem imediat forma scară a matricei $\overline{A}$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & -6 \end{array}\right)$. De aici se vede că $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2$ (avem doi pivoţi) deci sistemul este compatibil nedeterminat. Din ecuaţia a doua obţinem $y = 2 - z$. Înlocuind în prima ecuaţie găsim $x = 1$. Aşadar mulţimea soluţiilor sistemului este $\mathcal{S} = \{(1, 2-\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(f) Alegem elementul din colţul din stânga sus al matriei extinse, $a_{11} = 1 \neq 0$, drept pivot. Adunând la linia a doua prima linie înmulţită cu -3 şi la linia a treia prima linie înmulţită cu -5, obţinem

$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c}\boxed{1} & 2 & 3\\ 3 & 4 & -11\\ 5 & 6 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\\ 0 & \boxed{-2} & -20\\ 0 & -4 & -13\end{array}\right)$. Alegem pivot acum elementul de pe linia a doua, coloana a doua a matricei obţinute: $a'_{22}=-2\neq 0$. Adunăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu -2 (pentru a produce 0 sub pivot). Obţinem că $\overline{A}\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\\ 0 & -2 & -20\\ 0 & 0 & 27\end{array}\right)$. Deoarece ultima linie se traduce în ecuaţia $0=27$, sistemul este incompatibil.

(g) Alegem elementul din colţul din stânga sus al matriei extinse, $a_{11}=1\neq 0$, drept pivot. Adunând la linia a doua prima linie înmulţită cu -4 şi la linia a treia prima linie înmulţită cu -7, obţinem

$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c}\boxed{1} & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\\ 0 & \boxed{-3} & -6\\ 0 & -6 & -12\end{array}\right)$. Alegem pivot acum elementul de pe linia a doua, coloana a doua a matricei obţinute: $a'_{22}=-3\neq 0$. Adunăm la linia a treia linia a doua înmulţită cu -2 (pentru a produce 0 sub pivot). Obţinem că $\overline{A}\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$. Deoarece ultima linie se traduce în ecuaţia $0=0$, sistemul este compatibil. Din ecuaţia a doua avem $y=2$, iar din prima ecuaţie, $x=-1$. Aşadar mulţimea soluţiilor sistemului este $\mathcal{S}=\{(-1,2)\}$.

2. Folosind metoda lui Gauss, calculaţi rangurile matricelor:

(a) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 5 & -6\\ 7 & -8 & 9\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3\\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5\\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n\\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n\end{pmatrix}$.

Rezolvare.

(a) rang $\begin{pmatrix}\boxed{1} & -2 & 3\\ -4 & 5 & -6\\ 7 & -8 & 9\end{pmatrix}\overset{4L_1+L_2\to L_2}{=\!=\!=\!=\!=}$ rang $\begin{pmatrix}\boxed{1} & -2 & 3\\ 0 & -3 & 6\\ 7 & -8 & 9\end{pmatrix}$

$$\xlongequal{-7L_1+L_3\to L_3} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 6 \\ 0 & 6 & -12 \end{pmatrix} \xlongequal{2L_2+L_3\to L_3}$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ Avem doi pivoţi, deci rangul căutat este 2.

(b) $$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xlongequal{-4L_1+L_2\to L_2}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -7 & -7 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xlongequal{-6L_1+L_3\to L_3}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -12 & -12 \end{pmatrix} \xlongequal{-1,5\, L_2+L_3\to L_3}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -3 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{3}{2}} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Avem trei pivoţi, deci rangul este 3.

(c) $$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \end{pmatrix} \xlongequal{-(n+1)L_1+L_2\to L_2}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & -n & -2n & \dots & -(n-1)n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \end{pmatrix} \xlongequal{-(2n+1)L_1+L_3\to L_3}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & \boxed{-n} & -2n & \dots & -(n-1)n \\ 0 & -2n & -4n & \dots & -2(n-1)n \end{pmatrix} \xlongequal{-2L_2+L_3\to L_3}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & \boxed{-n} & -2n & \dots & -(n-1)n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Avem doi pivoţi deci rangul este 2.

3. Determinaţi forma scară redusă pentru matricele de mai jos:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Rezolvare.

(a) Alegem pivot elementul din colţul din stânga-sus. Următoarea etapă ar fi să împărţim linia 1 cu a_{11} dar cum $a_{11} = 1$ acest lucru nu mai este necesar. Ca la metoda lui Gauss producem zerouri dedesubtul pivotului. $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{-2L_1+L_2\to L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Alegem acum pivot elementul de pe linia a doua, coloana a doua: $a'_{22} = -1 \neq 0$. Vom înmulţi linia a doua cu -1 pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obţinem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{-L_2\to L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Provocăm acum zerouri pe coloana a doua, nu numai sub pivot, ca la metoda lui Gauss, ci şi deasupra acestuia.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{-L_2+L_1\to L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{-L_2+L_3\to L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Alegem acum pivot elementul de pe linia a treia, coloana a treia a matricei obţinute. Împărţim linia pivotului cu pivotul pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obţinem:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} \end{pmatrix} \overset{-(1/4)L_3\to L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$. Acum provocăm zerouri pe coloana pivotului (coloana a treia):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \overset{3L_3+L_1\to L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \overset{-6L_3+L_2\to L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Din cele de mai sus rezultă că matricea este inversabilă. Vom vedea la exerciţiul următor cum, parcurgând exact aceleaşi etape, putem găsi inversa acestei matrice.

(b) $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{L_1+L_3\to L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{-2L_2+L_1\to L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\overset{-2L_2+L_3\to L_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ care este forma scară redusă a matricei din enunţ.

Deoarece ea este diferită de I_3 (sau, deoarece nu avem decât doi pivoţi, matricea din enunţ are rangul 2), deci nu este inversabilă.

(c) $$\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}\overset{-L_1+L_2\to L_2}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}\overset{-L_1+L_3\to L_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \boxed{1} & 2\\ 0 & 3 & 8\end{pmatrix}$$

$$\overset{-L_2+L_1\to L_1}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & \boxed{1} & 2\\ 0 & 3 & 8\end{pmatrix}\overset{-3L_2+L_3\to L_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & \boxed{2}\end{pmatrix}\overset{-1/2\,L_3\to L_3}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & \boxed{1}\end{pmatrix}\overset{L_3+L_1\to L_1}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & \boxed{1}\end{pmatrix}\overset{-2L_3+L_2\to L_2}{\sim} I_3,$$

deci matricea din enunţ este inversabilă.

(d) $$\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & -4\end{pmatrix}\overset{-2L_1+L_2\to L_2}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

$$\overset{-3L_1+L_3\to L_3}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 4 & -2\\ -1 & 1 & 0 & -4\end{pmatrix}\overset{L_1+L_4\to L_4}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -3\\ 0 & -3 & 4 & -2\\ 0 & 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\overset{-1/3\,L_2\to L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1\\ 0 & -3 & 4 & -2\\ 0 & 2 & -1 & -3\end{pmatrix}\overset{-L_2+L_1\to L_1}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1\\ 0 & -3 & 4 & -2\\ 0 & 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\overset{3L_2+L_3\to L_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -3\end{pmatrix}\overset{-2L_2+L_4\to L_4}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1\\ 0 & 0 & 1 & -5\end{pmatrix}$$

$$\overset{L_3+L_2\to L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1\\ 0 & 0 & 1 & -5\end{pmatrix}\overset{-L_3+L_4\to L_4}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-6}\end{pmatrix}$$

$$\underset{-1/6\,L_4\to L_4}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&\boxed{1}\end{pmatrix}\underset{-2L_4+L_2\to L_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&\boxed{1}\end{pmatrix}$$

$$\underset{-L_4+L_3\to L_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4,\ \text{deci matricea este inversabilă.}$$

4. Folosind metoda Gauss-Jordan, calculaţi inversele matricelor de mai jos:

(a) $\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&-1&1&-1\\3&0&1&1\\-1&1&0&-4\end{pmatrix}$.

Rezolvare.
(a) După cum am văzut în prezentarea teoretică, calcularea inversei matricei $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$ revine la rezolvarea a trei sisteme, anume a celor care au matricele extinse:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&1\\2&1&0&0\\0&1&2&0\end{array}\right),\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&0\\2&1&0&1\\0&1&2&0\end{array}\right)\ \text{şi}\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&3&0\\2&1&0&0\\0&1&2&1\end{array}\right).$$

Observăm că dacă am rezolva aceste sisteme cu Metoda Gauss-Jordan, am efectua pentru fiecare din ele exact aceleaşi operaţii pe care le-am văzut în exerciţiul precedent:
$-2L_1+L_2\to L_2,\ -L_2\to L_2,\ -L_2+L_1\to L_1,\ -L_2+L_3\to L_3,$
$-(1/4)L_3\to L_3,\ 3L_3+L_1\to L_1,\ -6L_3+L_2\to L_2.$
Această observaţie ne face să descoperim algortimul de inversare a unei matrice cu metoda Gauss-Jordan: în loc să rezolvăm succesiv aceste trei sisteme, considerăm matricea A extinsă <u>simultan</u> cu cele trei coloane de termeni liberi care ne interesează: e_1, e_2 şi e_3, adică considerăm matricea $(A \mid I_3)=$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right).$$

Prin succesiunea de transformări (pe care le-am folosit la exerciţiul 3.a)) $-2L_1+L_2\to L_2,\ -L_2\to L_2,\ -L_2+L_1\to L_1,\ -L_2+L_3\to L_3,$
$-(1/4)L_3\to L_3,\ 3L_3+L_1\to L_1,\ -6L_3+L_2\to L_2$ se ajunge la $(I_3 \mid A^{-1})$. Să reluăm paşii de mai sus şi să urmărim ce ,,păţeşte" matricea din dreapta.
Alegem pivot elementul din colţul din stânga-sus. Ca la metoda lui Gauss producem zerouri dedesubtul pivotului.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\xrightarrow{-2L_1+L_2 \to L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Alegem acum pivot elementul de pe linia a doua, coloana a doua: $a'_{22} \neq 0$. Vom înmulţi linia a doua cu -1 pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obţinem:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\xrightarrow{-L_2 \to L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Provocăm acum zerouri pe coloana a doua, nu numai sub pivot, ca la metoda lui Gauss, ci şi deasupra acestuia.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\xrightarrow{-L_2+L_1 \to L_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\xrightarrow{-L_2+L_3 \to L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Alegem acum pivot elementul de pe linia a treia, coloana a treia a matricei obţinute. Împărţim linia pivotului cu pivotul pentru a face pivotul să fie egal cu 1. Obţinem:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\xrightarrow{-\frac{1}{4}L_3 \to L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Acum provocăm zerouri pe coloana pivotului (coloana a treia):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \underset{\sim}{\xrightarrow{3L_3+L_1 \to L_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\xrightarrow{-6L_3+L_2 \to L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

În momentul în care am ajuns în stânga la matricea scară redusă a lui A algoritmul se încheie: dacă această formă scară redusă este I (ceea ce este cazul la acest exerciţiu), atunci matricea obţinută în dreapta barei este A^{-1}; în caz contrar, matricea nu este inversabilă.

Prin urmare, am obţinut că $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

C. PROBLEME PROPUSE

1. Concatenaţi următoarele matrice:

   (a) $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$,

   (b) $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}$,

   (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & -8 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}$;

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 13 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Fie $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ şi $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$.

   (a) Să se calculeze π^{-1}, σ^{-1}, $\pi\sigma$, $\sigma\pi$, $\pi^{-1}\sigma^{-1}$, $\sigma^{-1}\pi^{-1}$, $(\pi\sigma)^{-1}$ şi $(\sigma\pi)^{-1}$.

   (b) Să se calculeze numărul inversiunilor $m(\pi)$, $m(\sigma)$, precum şi signatura permutărilor date.

   (c) Să se determine matricele permutărilor de la punctul (a) şi determinanţii acestora.

   (d) Să se calculeze inversele matricelor de la punctul precedent.

   (e) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

i. Să se calculeze produsele $P_\pi A$, $P_\sigma A$, $P_{\sigma^2} A$ şi $P_{\sigma\pi^{-1}} A$.
ii. Să se determine toate produsele posibile dintre matricele determinate la punctul (c) şi matricea A.

Răspunsuri.
(a) $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,
$\pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\pi^{-1}\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$\sigma^{-1}\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $(\pi\sigma)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \sigma^{-1}\pi^{-1}$,
$(\sigma\pi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \pi^{-1}\sigma^{-1}$;
(b) $m(\pi) = 2$, $m(\sigma) = 2$, $\varepsilon(\pi) = \varepsilon(\sigma) = (-1)^2 = 1$;
(c) $P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\det P_\pi = \varepsilon(\pi) = 1$, $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma) = 1$,

$$P_{\pi^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det P_{\pi^{-1}} = 1,$$

$$P_{\sigma^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \det P_{\sigma^{-1}} = 1,$$

$$P_{\pi\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{(\pi\sigma)^{-1}} = P_{\sigma^{-1}\pi^{-1}}, \ \det P_{\pi\sigma} = 1,$$

$$P_{\sigma\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{(\sigma\pi)^{-1}} = P_{\pi^{-1}\sigma^{-1}}, \ \det P_{\sigma\pi} = 1,$$

(d) $P_\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_{\pi^{-1}}$

$P_\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{\sigma^{-1}};$

$(P_{\pi^{-1}})^{-1} = P_\pi$, $(P_{\sigma^{-1}})^{-1} = P_\sigma$, $(P_{\pi\sigma})^{-1} = P_{(\pi\sigma)^{-1}} = P_{\sigma^{-1}\pi^{-1}}$, $(P_{\sigma\pi})^{-1} = P_{(\sigma\pi)^{-1}} = P_{\pi^{-1}\sigma^{-1}}$;

(e) $P_\pi A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $P_\sigma A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P_{\sigma^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$P_{\sigma^2} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\sigma\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$P_{\sigma\pi^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{\sigma\pi^{-1}} A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

3. Arătaţi că

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. O *matrice Markov* este o matrice pătratică cu elemente reale (a_{ij}) unde $a_{ij} \in [0,1]$, iar suma elementelor de pe fiecare linie este egală cu 1. Arătaţi că produsul a două matrice Markov de acelaşi tip este o matrice Markov.

Soluţia 1: Dacă A şi B sunt matrice Markov de ordin n, atunci suma elementelor de pe linia j a produsului AB este

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot 1 = 1.$$

Soluţia 2: Fie U matricea cu n linii şi o coloană care are toate elementele egale cu 1. Se verifică uşor că o matrice pătrată A de ordinul n este matrice Markov dacă şi numai dacă $AU = U$. Dacă A şi B sunt matrice Markov de ordin n, atunci $(AB)U = A(BU) = AU = U$, deci AB este la rândul ei matrice Markov.

5. Fie $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$ şi $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Să se arate că $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. * *Urma* matricei $A \in K^{n\times n}$ este suma elementelor de pe diagonala principală şi se notează $tr(A)$. Dovediţi că pentru orice $A, B \in K^{n\times n}$
   (a) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
   (b) $tr(AB) = tr(BA)$.

7. Fie $A, B \in K^{n\times n}$ astfel încât $(A|I_n) \sim (I_n|B)$. Să se arate că $B = A^{-1}$.

8. Arătaţi că
   (a) $$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (b) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (c) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ în } \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}).$$
   (d) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Să se calculeze produsele $AB_{:1}$, $AB_{:2}$, $AB_{:3}$, $A_{1:}B$, $A_{2:}B$, $A_{3:}B$ şi $A_{4:}B$.

   (b) Să se determine matricele AB şi $(AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid AB_{:3})$.

   (c) Să se calculeze B^{-1} şi AB^{-1}.

   Răspunsuri.

   (a) $AB_{:1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$; $AB_{:2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $AB_{:3} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$;

   $A_{1:}B = (1 \quad 5 \quad -5)$; $A_{2:}B = (5 \quad -2 \quad -1)$; $A_{3:}B = (7 \quad 5 \quad -7)$; $A_{4:}B = (9 \quad 0 \quad -1)$;

   (b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 7 & 5 & -7 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $(AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid AB_{:3}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 7 & 5 & -7 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

   (c) $B^{-1} = -\dfrac{1}{12} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -8 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$;

   $AB^{-1} = -\dfrac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ -2 & -3 & -11 \end{pmatrix}$.

10. Să se arate că, dacă există produsul AB şi $B = (B_{:1} \mid B_{:2} \mid \dots \mid B_{:p})$, atunci $AB = (AB_{:1} \mid AB_{:2} \mid \dots \mid AB_{:p})$.

11. Arătaţi că dacă $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, n impar, verifică $A^T = -A$, atunci $\det A = 0$.

    Rezolvare.

    $\det A = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, de unde $\det A = 0$.

12. Se numeşte *matrice simetrică* o matrice cu proprietatea $A^T = A$.
(a) Arătaţi că $B \cdot B^T$ şi $B^T \cdot B$ sunt matrice simetrice, $\forall\, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$.
(b) Arătaţi că dacă o matrice simetrică este inversabilă atunci şi inversa ei este tot o matrice simetrică.
(c) Este adevărat că dacă A şi B sunt două matrice simetrice de acelaşi tip, atunci AB este tot o matrice simetrică? Justificaţi răspunsul.
Rezolvare.
(a) $(B \cdot B^T)^T = (B^T)^T \cdot B^T = B \cdot B^T$ şi analog cealaltă;
(b) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow (A \cdot A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I \Rightarrow (A^{-1})^T \cdot A^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = I$ deci $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$;
(c) Nu. De exemplu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sunt matrice simetrice, dar $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nu este o matrice simetrică.

13. Fie $A, B \in K^{n \times n}$ astfel încât $(A|B) \sim (I_n|C)$. Să se arate că $C = A^{-1}B$.

14. Determinaţi inversele matricelor:

(a) $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 12 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; (b) nu admite inversă;
(c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}$; (d) nu admite inversă.

15. Dovediţi că dacă π, $\sigma \in S_n$, atunci

(a) $P_\pi P_\sigma = P_{\sigma\pi}$.

(b) $P_\pi^T P_\pi = I_n$.

(c) $P_\pi^T = P_{\pi^{-1}} = P_\pi^{-1}$.

16. * Să se descrie în pseudocod algoritmii de aducere a unei matrice la forma scară, respectiv la forma scară redusă.

17. Să se determine o matrice scară şi matricea scară redusă pentru următoarele matrice şi să se precizeze rangul lor:

(a) $\begin{pmatrix} 11 & -4 & 3 & 0 \\ 10 & 1 & 2 & -9 \\ 9 & 2 & -4 & 13 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 33 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{53}{287} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{743}{287} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1185}{287} \end{pmatrix}$, 3;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 2; (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 4;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 152 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -151 \end{pmatrix}$, 5.

18. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Să se calculeze:

(a) A^{-1} şi $A^{-1}B^{-1}$, unde $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Să se calculeze produsele $P_{(1,3)}A$, $E_{13}(-1)A$ şi $E^2(\frac{1}{2})E_{23}(-\frac{1}{2})A$ (unde E cu diverşi indici desemnează matrice elementare).

(c) Să se rezolve sistemul $Ax = b$, unde $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri.

(a) $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^{-1}B^{-1} = \dfrac{1}{24}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$;

(b) $P_{(1,3)}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $E_{13}(-1)A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

$E^2(\frac{1}{2})E_{23}(-\frac{1}{2})A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; (c) $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

19. Fie $A \in K^{n\times n}$ şi $b \in K^{n\times 1}$ astfel încât $(A|b) \sim (I_n|c)$. Să se arate că dacă $x \in K^{n\times 1}$, atunci ecuaţia matriceală $Ax = b$ are soluţia $x = c$.

20. Să se rezolve prin metoda Gauss în $\mathbb{R}$ sistemele liniare ale căror matrice extinse sunt:

(a) $\begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri.
(a) $\mathcal{S}=\left\{\left(\alpha,\,\beta,\,2-\dfrac{27}{13}\,\alpha+\dfrac{9}{13}\,\beta,\,-1+\dfrac{3}{13}\,\alpha-\dfrac{1}{13}\,\beta\right)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$
(b) $\mathcal{S}=\left\{\left(\dfrac{-6+8\beta}{7},\,\dfrac{1-13\beta}{7},\,\dfrac{15-6\beta}{7},\,\beta\right)\mid\beta\in\mathbb{R}\right\}$
(c) $\mathcal{S}=\varnothing$.

21. * Să se descrie în pseudocod algoritmii de rezolvare a unui sistem liniar prin metoda Gauss, respectiv prin metoda Gauss-Jordan.

22. * Fie $(K,+,\cdot)$ un corp şi $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,2}(K)$ astfel încât $abcd\neq 0$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

    (a) există $\alpha\neq 0$ astfel încât $A_{:1}=\alpha A_{:2}$;
    (b) există $\beta\neq 0$ astfel încât $A_{1:}=\beta A_{2:}$.

23. * Să se arate că un sistem liniar cu coeficienţi reali nu poate să aibă exact două soluţii.
    Indicaţie. Arătaţi că dacă $x,\,x'\in\mathbb{R}^n$ sunt soluţii ale sistemului atunci şi $\dfrac{1}{2}\,(x+x')$ e soluţie a sistemului.

24. * Să se dea un exemplu de sistem liniar care admite exact două soluţii.
    Rezolvare: În $\mathbb{Z}_2$ sistemul $x+y=\widehat{0}$ are exact două soluţii.

25. Să se descompună în produs LU matricele:

    (a) $\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$
    (b) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$
    (c) $\begin{pmatrix}2 & 3 & -5\\ 4 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{12} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & \frac{83}{12} \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$.

22. * Să se descompună în produs PLU, unde P este matricea unei permutări, următoarele matrice.

(a) $\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$;

(e)*. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(f)*. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{7} & 1 & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 0 & -\frac{9}{7} & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{13} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{13}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{9}{5} & -1 & 1 & 0 \\ \frac{7}{5} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & -\frac{11}{5} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(matricea nu este inversabilă!).

26. * Dacă A si B sunt două matrice pătratice de acelaşi tip cu elemente reale atunci egalitatea $ABAB = O$ implică egalitatea $BABA = O$?

(Concursul ,,Putnam", 1990, A-5)

27. * Fie A o matrice nesingulară cu elemente dintr-un corp K. Să se arate ca există două permutări π, σ pentru care matricea $P_\pi A P_\sigma$ este decompozabilă LU.

28. * Fie $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ astfel încât să existe $x, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, x nenulă, pentru care $Ax = O$ şi $Ay = Bx$. Dacă A_i este matricea obţinută prin înlocuirea coloanei $A_{:i}$ cu coloana $B_{:i}$, să se arate că

$$\det(A_1) + \det(A_2) + \ldots + \det(A_n) = 0.$$

(Concursul ,,Traian Lalescu", 2009, etapa finală)

29. * Fie a, b, n numere naturale astfel ca $0 \leq a \leq b \leq n$ şi $0 \leq a + b - n$. Să se arate că pentru orice număr natural c cu proprietatea $a + b - n \leq c \leq a$ există două matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $\operatorname{rang} A = a$, $\operatorname{rang} B = b$ şi $\operatorname{rang}(AB) = c$.

(Concursul naţional studenţesc de matematică ,,Traian Lalescu", ediţia a 7-a, Timişoara, 21-23 mai 2014)

2 SPAŢII VECTORIALE

Este momentul să introducem o structură matematică fundamentală - cea de spaţiu vectorial - structură care oferă cadrul cel mai adecvat atât pentru algebra liniară, pentru geometrie, pentru analiza matematică, cât şi pentru aplicaţiile importante ale acestora.

Conceptul de spaţiu vectorial - un grup abelian ale cărui elemente se numesc vectori, vectori care, în plus, se pot înmulţi cu elemente ale unui corp numite scalari - este o abstractizare a nenumărate alte structuri uzuale.

De exemplu, în spaţiul vectorilor studiat în liceu, vectorii se pot aduna între ei (după regula paralelogramului; suma a doi vectori este un vector) şi se pot înmulţi cu scalari (produsul dintre un număr real şi un vector este un vector). Sau, matricele se pot aduna (suma a două matrice de un anumit tip este o matrice de acelaşi tip) şi se pot înmulţi cu scalari (produsul dintre un scalar şi o matrice este o matrice). Sau, polinoamele cu coeficienţi reali se pot aduna (suma a două polinoame este un polinom) şi se pot înmulţi cu scalari (produsul dintre un număr real şi un polinom este un polinom). Toate aceste exemple sunt generalizate în cele ce urmează.

Frumuseţea şi puterea unei asemene abstractizări este dată de larga aplicabilitate a rezultatelor pe care le vom stabili într-un asemenea cadru, şi de relativa lor simplitate. Teoria pe care o facem aici va fi aplicată peste tot în următoarele capitole.

A. TEORIE

1. **Definiţia spaţiului vectorial.**

   Fie $(V, +)$ un grup abelian şi $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ (de regulă $K = \mathbb{R}$ - corpul numerelor reale, $K = \mathbb{C}$ - corpul numerelor complexe, sau $K = \mathbb{Z}_p$, unde p este un număr prim - corpul claselor de resturi modulo p). Dacă

   $$K \times V \to V, \quad (\alpha, v) \longmapsto \alpha v$$

   este o operaţie care verifică axiomele:

   (a) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$,

   (b) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$,

   (c) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ şi

(d) $1v = v$, (unde 1 este elementul neutru faţă de înmulţirea din corpul K),

pentru orice $\alpha, \beta \in K$ şi pentru orice $v, w \in V$ spunem că *pe V s-a definit o structură de* ***spaţiu vectorial*** *(sau* ***liniar****) peste corpul K, sau că V este* ***spaţiu vectorial (liniar) peste corpul K.***

Folosim *terminologia şi notaţiile următoare*:

- elementele grupului V se numesc *vectori*;
- elementele corpului K se numesc *scalari*;
- operaţia $K \times V \to V, \quad (\alpha, v) \longmapsto \alpha v$ o numim *înmulţirea scalarilor cu vectori*;
- spunem că operaţia de adunare a vectorilor este o *operaţie internă* (deoarece suma a doi vectori este un vector);
- spunem că operaţia de înmulţire a scalarilor cu vectori este o *operaţie externă* (adică pentru orice element α al corpului K şi pentru orice element v al grupului V s-a definit produsul $\alpha v \in V$, sau, produsul dintre un scalar şi un vector este un vector);
- în lipsa altor precizări notăm cu θ elementul neutru al grupului $(V, +)$ (adică *vectorul nul*), *cu* $-v$ simetricul (opusul) vectorului v, cu 0 elementul neutru (*scalarul nul*) al grupului $(K, +)$, iar cu 1 elementul neutru al grupului $(K^*, \cdot)$, unde $K^* := K \setminus \{0\}$;
- notaţia V/K indică faptul că V este spaţiu liniar peste corpul K;
- când $K = \mathbb{R}$ spunem că V/K este *spaţiu vectorial real*, iar când $K = \mathbb{C}$ spunem că V/K este *spaţiu vectorial complex;*
- un spaţiu liniar format cu un singur vector (vectorul nul!) se numeşte *spaţiu trivial.*

Câteva proprietăţi elementare pe care le folosim frecvent sunt demonstrate mai jos.

Proprietatea 2.1.1. *Fie V/K un spaţiu vectorial, $\alpha \in K$ şi $v \in V$. Atunci:*

(a) $0v = \theta$ *, adică produsul dintre scalarul nul şi un vector oarecare este vectorul nul;*

(b) $\alpha\theta = \theta$*, adică produsul dintre un scalar oarecare şi vectorul nul este vectorul nul;*

(c) $(-1)v = -v$*, adică produsul dintre scalarul -1 şi vectorul v este opusul vectorului v;*

(d) $\alpha v = \theta \Rightarrow \alpha = 0$ *sau* $v = \theta$*, adică produsul dintre un scalar şi un vector este nul dacă şi numai dacă scalarul este nul sau vectorul din produs este nul;*

(e) *Dacă* $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ *şi* $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ *atunci* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n \in V$.
Un vector de forma

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ *se numeşte* ***combinaţie liniară*** *a vectorilor* $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Demonstraţie. Folosim axiomele spaţiului liniar.

(a) $0v = (0+0)\,v = 0v + 0v$, de unde obţinem $0v = \theta$.

(b) $\alpha\theta = \alpha\,(\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta$, de unde obţinem imediat $\alpha\theta = \theta$.

(c) $\theta = 0v = (1-1)\,v = 1v + (-1)\,v = v + (-1)\,v$, de unde obţinem imediat că $(-1)\,v = -v$.

(d) Presupunem că $\alpha v = \theta$ şi că $\alpha \neq 0$. Atunci $\alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}\theta = \theta$, deci $\left(\alpha^{-1}\alpha\right) v = \theta$, adică $v = \theta$.

(e) Se demonstrează prin inducţie matematică.

2. **Exemple de spaţii vectoriale**.

(a) *Mulţimea vectorilor legaţi*, având acelaşi punct de aplicaţie, notat O, din spaţiul fizic $\mathcal{S}$, adică $V = \{\overrightarrow{OA} \mid A \in \mathcal{S}\}$, studiaţi la fizică este un spaţiu liniar peste corpul numerelor reale. La matematică aţi studiat numai vectori în plan. În spaţiu, adunarea vectorilor $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ se defineşte ca şi în plan ţinând cont de faptul că punctele O, A, B sunt coplanare, iar adunarea vectorilor necoliniari este definită prin regula paralelogramului (sau a triunghiului).

(b) *Spaţiul aritmetic* $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$, unde $\mathbb{R}^n$ este mulţimea n-uplurilor de numere reale, i.e.

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

(notaţia consacrată în Computer Science pentru n-uplul $x \in \mathbb{R}^n$ este cea din $\mathbb{R}^{n\times 1} := \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; de aceea vom scrie uneori şi noi, prin abuz de notaţie, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$); adunarea vectorilor şi înmulţirea cu scalari sunt definite prin

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

respectiv

$$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1,\, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ şi pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$. Mai general:

(c) *Spaţiul* K^n/K, unde $(K,+,\cdot)$ este un corp comutativ; într-adevăr,

$$K^n := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in K\}$$

cu operaţiile, internă şi externă, definite ca la spaţiul aritmetic, adică
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2, \ldots, x_n + \; y_n)$ şi
$\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) := (\alpha x_1,\, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$
pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in K^n$ şi orice $\alpha \in K$, este un spaţiu liniar peste corpul K.
În particular, pentru corpul $K = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, obţinem spaţiul vectorial al n-uplurilor de elemente din $\mathbb{Z}_2$ - numite *şiruri de n biţi* (ori „*stringuri*" *de n biţi*)

$$\mathbb{Z}_2^n = \{b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \,|\, b_i \in \mathbb{Z}_2,\, i = \overline{1, n}\};$$

suma şirurilor $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ este şirul
$b + c = (b_1 \oplus c_1,\, b_2 \oplus c_2, \ldots, b_n \oplus c_n)$,
unde „$\oplus$" este adunarea modulo 2 (operaţia XOR între biţi):
$0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1,\ 1 \oplus 1 = 0 + 0 = 0,$
iar şirul $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$ este vectorul nul; produsul scalarului $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ cu şirul $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ este
$\alpha b = (\alpha \cdot b_1,\, \alpha \cdot b_2, \ldots, \alpha \cdot b_n)$, unde pe componente am folosit înmulţirea modulo 2 : $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ şi $1 \cdot 1 = 1$.

(d) Dacă A este o mulţime, iar $(K,+,\cdot)$ este un corp comutativ, atunci *mulţimea*

$$\mathcal{F}(A) = \{\, f : A \to K \;|\; f \text{ este funcţie}\}$$

admite o structură de spaţiu vectorial peste K relativ la adunarea funcţiilor din $\mathcal{F}(A)$ (pentru $f, g \in \mathcal{F}(A)$ suma $f + g \in \mathcal{F}(A)$ este definită punctual prin

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in A,$$

respectiv, înmulţirea cu scalari - pentru $f \in \mathcal{F}(A)$ şi $\alpha \in K$ produsul $\alpha f \in \mathcal{F}(A)$ se defineşte prin

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ \forall x \in A.$$

În electronică se studiază *spaţiul vectorial real al semnalelor în timp continuu* $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{R}$ şi *spaţiul vectorial complex al semnalelor în timp continuu* $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{C}$, unde $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ este, de regulă, un interval de numere reale.

Dacă impunem ca $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}$ atunci $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{R}$, respectiv $\mathcal{F}(\mathcal{T})/\mathbb{C}$ este spaţiu vectorial real, respectiv complex de *semnale discrete*.

Dacă $T = \mathbb{N}$, $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ este spaţiul şirurilor de elemente din K.

(e) Dacă A este o mulţime de numere reale atunci *mulţimea*

$$\mathcal{C}^0(A) = \{ f : A \to \mathbb{R} \mid \ f \text{ este funcţie continuă} \}$$

înzestrată cu operaţiile de adunare a funcţiilor, respectiv, de înmulţire a acestora cu numere reale (adică operaţiile din $\mathcal{F}(A)/\mathbb{R}$) este spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

(f) *Mulţimea matricelor* $K^{m\times n}$, unde $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ, devine un spaţiu liniar relativ la operaţiile de adunare a matricelor (operaţia internă) şi de înmulţire a acestora cu elemente din K (operaţia externă).

(g) Fie $A \in K^{m\times n}$, unde $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ. *Mulţimea* $Null(A)$ a soluţiilor sistemului liniar şi omogen $Ax = 0$ înzestrată cu cu operaţiile din spaţiul $K^{n\times 1}/K$ este un spaţiu vectorial peste corpul K.

3. **Subspaţii vectoriale.**

Aşa cum s-a analizat la grupuri noţiunea de subgrup, la inele noţiunea de subinel, ori la corpuri noţiunea de subcorp - şi aici, în cazul spaţiilor vectoriale, ne punem problema: *în ce condiţii o submulţime S a unui spaţiu liniar V/K, este, la rândul ei, un spaţiu vectorial peste corpul K relativ la restricţiile operaţiilor, internă, respectiv, externă.*

Definiţia 2.3.1. Fie V/K un spaţiu liniar şi S o submulţime a sa. Dacă $(S, +)$ este subgrup al grupului $(V, +)$, iar

$$\alpha v \in S \ \ \forall\, \alpha \in K \ \text{ şi } \ v \in S$$

spunem că S este *subspaţiu vectorial (liniar)* al spaţiului V; indicăm faptul că S este subspaţiu vectorial al spaţiului V prin *notaţia* $S \leq V$.

Exemplul 2.(e) arată că mulţimea funcţiilor continue pe mulţimea A, privită ca submulţime în $\mathcal{F}(A)$ este spaţiu vectorial relativ la operaţiile din spaţiul $\mathcal{F}(A)/\mathbb{R}$, deci, cu notaţia introdusă, avem $C^0(A) \leq \mathcal{F}(A)$.

Exemplul 2.(g) arată că, în spaţiul $K^{n\times 1}/K$, avem $Null(A) \leq K^{n\times 1}$; $Null(A)$ se numeşte *spaţiul nul al matricei* A, iar ecuaţiile sistemului $Ax = 0$, (unde $x \in K^{n\times 1}$) se numesc *ecuaţiile spaţiului* $Null(A)$.

Propoziţia 2.3.1. *Fie S o submulţime nevidă din spaţiul V/K. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) $S \leq V$;

(b) *pentru orice vectori $u, v \in S$ şi pentru orice scalar $\alpha \in K$ avem $u + v \in S$ şi $\alpha u \in S$;*

(c) *pentru orice vectori $u, v \in S$ şi pentru orice scalari $\alpha, \beta \in K$ avem $\alpha u + \beta v \in S$.*

Aplicând inductiv afirmaţia (c) din propoziţia de mai sus, rezultă că o *submulţime S a unui spaţiu vectorial V este subspaţiu dacă şi numai dacă orice combinaţie liniară de vectori din S rămâne în S.*

Exerciţiul 1. Să arătăm că

$$S := \left\{ A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in \mathbb{R},\ a+2b=c \right\} \leq \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Folosim propoziţia de mai sus (punctul (c)). Considerăm doi vectori arbitrari $A(a,b,c),\ A(a',b',c') \in S$ şi doi scalari arbitrari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. În combinaţia liniară
$\alpha A(a,b,c) + \beta A(a',b',c') = A(\alpha a, \alpha b, \alpha c) + A(\beta a', \beta b', \beta c') =$
$= A(\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b', \alpha c + \beta c')$
avem, conform ipotezei,
$\alpha c + \beta c' = \alpha(a+2b) + \beta(a'+2b') = \alpha a + \beta a' + 2(\alpha b + \beta b'),$
ceea ce indică faptul că $\alpha A(a,b,c) + \beta A(a',b',c') \in S$. Prin urmare S este subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$.

4. **Exemple de subspaţii vectoriale**.

(a) Dacă θ este vectorul nul din spaţiul V/K atunci $\{\theta\} \leq V$; subspaţiul $\{\theta\}$ se numeşte *subspaţiul nul* al spaţiului V. De asemenea $V \leq V$. Subspaţiile $\{\theta\}$ şi V se numesc *subspaţii triviale* ale spaţiului V. Un subspaţiu S diferit de subspaţiile triviale se numeşte *subspaţiu propriu.*

Subspaţiul S de la Exerciţiul 1 este un subspaţiu propriu al spaţiului $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$.

(b) Fie V spaţiul vectorial al vectorilor legaţi de origine în spaţiul 3D. Mulţimea S a vectorilor situaţi în planul xOy este un subspaţiu vectorial al lui V. Mai mult, totalitatea vectorilor din V aflaţi într-un plan ce conţine originea este subspaţiu al lui V.

(c) *Spaţiul C al şirurilor convergente* de numere reale este un subspaţiu în spaţiul şirurilor de numere reale $\mathcal{F}(\mathbb{N})$. Într-adevăr, suma a două şiruri convergente este un şir convergent, iar produsul cu un scalar al unui şir convergent este tot un şir convergent. Spaţiul şirurilor de numere reale care tind la 0 este şi el un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{F}(\mathbb{N})$, dar şi al lui C, aceasta deoarece $x_n \longrightarrow 0,\ y_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \alpha x_n + \beta y_n \longrightarrow 0$ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(d) Dacă $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$, unde V este spaţiu vectorial peste corpul K, *mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale vectorilor din S notată* $span(S)$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului V (deci $span(S) \leq V$) numit *subspaţiul generat de sistemul de vectori S*. Dacă $span(S) = V$, atunci S se numeşte *sistem de generatori pentru spaţiul V*.

(e) În particular, dacă $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sunt coloanele matricei $A = [c_1|\ldots|c_n] \in K^{m\times n}$, subspaţiul $span(c_1,\ldots,c_n)$ al lui spaţiului $K^{m\times 1}/K$ îl numim *subspaţiul coloanelor matricei* A şi îl vom nota $Col(A)$.

Cu matricea A de mai sus definim patru subspaţii vectoriale:

i. spaţiul nul al matricei A, adică $Null(A) \leq K^{n\times 1}$,
ii. spaţiul generat de liniile sale $Lin(A) := Col(A^T) \leq K^{n\times 1}$,
iii. spaţiul nul al matricei transpuse $Null(A^T) \leq K^{m\times 1}$ şi
iv. spaţiul coloanelor $Col(A) \leq K^{m\times 1}$.

Aceste patru subspaţii se mai numesc cele patru *(sub)spaţii fundamentale definite de matricea A.*

(f) Fie U şi W două subspaţii vectoriale ale spaţiului V/K. Atunci:

i. $U \cap W \leq V$, adică *intersecţia a două subspaţii este subspaţiu;*
ii. $U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\} \leq V$. Subspaţiul $U + W$ se numeşte *suma subspaţiilor U şi W*. Analog se defineşte suma mai multor subspaţii.
iii. Dacă suma subspaţiilor U şi W are proprietatea:

$$\forall v \in U + W \quad \exists! u \in U \text{ şi } \exists!\ w \in W \text{ astfel încât } \ v = u + w,$$

atunci notăm suma $U + W$ cu

$$U + W := U \oplus W$$

şi numim această mulţime *suma directă* a subspaţiilor U şi W. Dacă $V = U \oplus W$ spunem că U şi W sunt *subspaţii suplementare.* (Simbolul $\exists!$ este o prescurtare a sintagmei *,,există şi este unic(ă)”*). Mai general:
iv. Dacă $U_1, U_2, \ldots, U_m \leq V$, atunci suma subspaţiilor $U_1, U_2, \ldots, U_m$ este subspaţiu, adică

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_m := U \leq V;$$

dacă, în plus, $\forall v \in U\ \exists!\ u_i \in U_i,\ i = \overline{1,m}$ astfel încât $v = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$, subspaţiul U se numeşte *suma directă* a subspaţiilor $U_1, U_2, \ldots, U_m$ şi scriem

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m := \bigoplus_{i=1}^{m} U_i.$$

Exerciţiul 2. Fie $A(a, b, c) \in S$, unde S este subspaţiul de la Exerciţiul 1. Deoarece

$$A(a, b, c) = A(a, b, a + 2b) = aA(1, 0, 1) + bA(0, 1, 2)$$

rezultă că

$$S = span\big(A(1, 0, 1), A(0, 1, 2)\big).$$

Tehnica de obţinere a unui sistem de generatori pentru subspaţiul S - numită *parametrizare* (am utilizat legătura dintre parametrii a, b şi scalarul $c = a + 2b$) - va fi folosită adesea în cele ce urmează.

Mai mult, observăm că

$$S = span\big(A(1,0,1)\big) + span\big(A(0,1,2)\big),$$

iar dacă

$$A(a,b,c) \in span\big(A(1,0,1)\big) + span\big(A(0,1,2)\big)$$

atunci $A(a,0,a) \in span\big(A(1,0,1)\big)$, respectiv $A(0,b,2b) \in span\big(A(0,1,2)\big)$ sunt unicele matrice din $span\big(A(1,0,1)\big)$ respectiv $span\big(A(0,1,2)\big)$ pentru care $A(a,b,c) = A(a,0,a)+A(0,b,2b)$. În consecinţă S este suma directă a subspaţiilor $span\big(A(1,0,1)\big)$ şi $span\big(A(0,1,2)\big)$.

De fapt avem

$$span\big(A(1,0,1)\big) \cap span\big(A(0,1,2)\big) = \left\{\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

condiţie care asigură faptul că $span\big(A(1,0,1)\big)$ şi $span\big(A(0,1,2)\big)$ sunt subspaţii suplementare pentru spaţiul vectorial S.

În general are loc următoarea caracterizare a sumelor directe.

Propoziţia 2.4.1. *Fie $U_1, U_2, \ldots, U_m$ subspaţii vectoriale ale spaţiului V/K. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) $U_1 + U_2 + \ldots + U_m = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$;

(b) $U_i \cap (U_1 + U_2 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_m) = \{\theta\}$, *pentru* $i = \overline{1,m}$.

5. **Dependenţă şi independenţă liniară.**

Definiţia 2.5.1. Fie V/K un spaţiu vectorial.

(a) Vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ sunt *liniar dependenţi* dacă există n scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \theta; \qquad (*)$$

în acest caz mai spunem că mulţimea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este un *sistem de vectori liniar dependenţi* (sau că $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este un *sistem liniar dependent*), iar relaţia $(*)$ este o *relaţie de dependenţă liniară* (pentru vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$); dacă, de exemplu, am determinat scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, cu $\alpha_1 \neq 0$, care satisfac relaţia $(*)$ atunci

$$v_1 = -\alpha_1^{-1}(\alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n)$$

este de asemenea o *relaţie de dependenţă liniară;*
cu alte cuvinte, vectorii $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ sunt liniar dependenţi dacă (măcar) unul dintre vectorii $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ se scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi (faptul că în relaţia de dependenţă liniară $(*)$ măcar unul dintre coeficienţii α_i este nenul, ne permite să scriem vectorul corespunzător ca o combinaţie liniară a celorlalţi).

(b) vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sunt *liniar independenţi* dacă nu sunt liniar dependenţi, i.e. are loc implicaţia

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \theta, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0;$$

mai spunem, în acest caz, că $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este un *sistem de vectori liniar independenţi* (sau *sistem liniar independent*).

Altfel spus: considerăm în spaţiul V/K ecuaţia $(*)$ de necunoscute $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$.

- *Dacă ecuaţia admite soluţii nebanale, atunci $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este un sistem de vectori liniar dependenţi.*
- *Dacă ecuaţia admite doar soluţia banală, atunci $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este un sistem de vectori liniar independenţi.*

Observaţia 2.5.1. *Orice sistem de vectori care conţine vectorul nul este un sistem liniar dependent.*

Exemplul 2.5.1. În spaţiul vectorial al vectorilor legaţi din plan, doi vectori nenuli u şi v vor fi liniar independenţi dacă şi numai dacă sunt necoliniari, căci relaţia de dependenţa liniară $u = \alpha v$ implică faptul că ei sunt coliniari. În schimb trei vectori legaţi din plan u, v, w vor fi întotdeauna liniar dependenţi pentru că putem găsi αu coliniar cu u şi βv coliniar cu v astfel încât w să fie diagonala paralelogramului construit pe αu şi βv.

Exerciţiul 3. Fie $v_1 = (1, 1, 2),\ v_2 = (1, -2, -1),\ v_3 = (2, 3, \alpha)$ trei vectori din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.
Să analizăm dependenţa/independenţa sistemului $S = \{v_1, v_2, v_3\}$.
Conform definiţiei, considerăm, în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, ecuaţia

$$x v_1 + y v_2 + z v_3 = \theta, \qquad (1)$$

unde $\theta = (0, 0, 0)$ şi necunoscutele sunt scalarii $x, y, z \in \mathbb{R}$; trebuie să aflăm dacă ecuaţia are doar soluţia banală $x = y = z = 0$ (ceea ce indică liniar independenţa vectorilor v_1, v_2, v_3) sau are mai multe soluţii (ceea ce înseamnă dependenţa liniară a sistemului $S = \{v_1, v_2, v_3\}$). Deoarece

$(1) \Leftrightarrow (x, x, 2x) + (y, -2y, -y) + (2z, 3z, \alpha z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+y+2z,\, x-2y+3z,\, 2x-y+\alpha z) = (0,0,0)$,
rezultă că relaţia (1) este echivalentă cu sistemul liniar omogen:

$$\begin{cases} x + \ \ y + 2z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - \ \ y + \alpha z = 0 \end{cases} . \qquad (2)$$

Conform teoriei sistemelor liniare şi omogene, problema noastră este acum să determinăm rangul matricei sistemului:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

matrice care se obţine prin concatenarea coloanelor v_1^T, v_2^T, v_3^T. Avem două posibilităţi:

- dacă rangul este 3, sistemul este compatibil determinat, i.e. unica soluţie este $x = y = z = 0$ (soluţia banală), caz în care S este un sistem de vectori liniar independent;
- dacă rangul este mai mic decât 3, sistemul admite şi soluţii nebanale, deci S este un sistem de vectori liniar dependent, iar o relaţie de dependenţă liniară se poate determina cu ajutorul matricei scară reduse. (O relaţie de dependenţă liniară este dată de scrierea relaţiei $xv_1 + yv_2 + zv_3 = \theta$, cu (x, y, z) o soluţie nebanală a sistemului (2). O asemenea soluţie se poate obţine rezolvând sistemul (2), de exemplu, cu metoda lui Gauss-Jordan.)

Cu transformările elementare pe linii $-L_1 + L_2 \to L_2$ şi $-L_1 - L_2 + L_3 \to L_3$ obţinem

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 5 \end{pmatrix};$$

matricea obţinută are forma scară, furnizează rangul ($rang(A)$ = numărul pivoţilor) şi, implicit, tranşează natura sistemului S :

- dacă $\alpha \neq 5$ atunci $rang(A) = 3$, deci S este liniar independent;
- dacă $\alpha = 5$ atunci $rang(A) = 2$, deci S este liniar dependent; în acest caz, continuând cu transformările elementare $-\frac{1}{3}L_2 \to L_2$ şi $-L_2 + L_1 \to L_1$ obţinem forma scară redusă a matricei A

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \dfrac{7}{3} \\ 0 & \boxed{1} & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

observăm că a treia coloană se poate exprima ca o combinaţie liniară a coloanelor care conţin pivoţii:

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

observăm că şi în matricea A coloana a III-a se poate exprima ca o combinaţie liniară a primelor două coloane folosind de asemenea coeficienţii $\frac{7}{3}$, respectiv $-\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_3 = \frac{7}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2,$$

adică am obţinut o relaţie de dependenţă liniară a vectorilor daţi.

Observaţia 2.5.2. Aici am folosit o proprietate importantă a formei scară redusă: *forma scară redusă păstrează combinaţiile liniare de coloane ale unei matrice*. Mai precis, *o* coloană a unei matrice A se poate scrie ca o combinaţie liniară de alte coloane ale matricei dacă şi numai dacă aceeaşi combinaţie liniară are loc şi între coloanele de pe aceleaşi poziţii ale formei scară redusă S_A^0 a matricei A. Tehnica utilizată în acest exerciţiu este aplicabilă în K^n/K şi o sintetizăm în criteriul următor.

6. **Criteriul practic de dependenţă** în K^n/K.
Vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m \in K^n$ sunt liniar dependenţi dacă şi numai dacă rangul matricei $A = (v_1^T \mid v_2^T \mid \ldots \mid v_m^T)$ este diferit de m; mai mult, deoarece transformările elementare pe linie conservă rangul şi relaţiile de dependenţă liniară, dacă S_A este forma scară redusă a matricei A, rezultă că:

   (a) *dacă numărul de pivoţi din S_A coincide cu numărul de vectori, m, atunci vectorii sunt liniar independenţi;*

   (b) *dacă numărul r de pivoţi din matricea S_A este diferit de numărul vectorilor (adică $r \neq m$), atunci vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sunt liniar dependenţi; în cazul în care vectorul nul nu este printre vectorii daţi, atunci*

      i. *poziţiile pivoţilor sunt $(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (r, j_r)$;*

      ii. *vectorii $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r}$ sunt liniar indepedenţi;*

      iii. *ceilalţi vectori sunt combinaţii liniare ale vectorilor $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_r}$, combinaţii care se citesc din coloanele matricei S_A; de exemplu, dacă în matricea S_A avem coloana $S_{:j} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0, \ldots, 0)^T$ (cu $j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$), atunci $v_j = \alpha_1 v_{j_1} + \alpha_2 v_{j_2} + \ldots + \alpha_r v_{j_r}$.*

Exerciţiul 4. Fie $v_1 = (1,1,2,1)$, $v_2 = (1,-2,-1,2)$, $v_3 = (1,1,0,0)$, $v_4 = (0,1,1,0)$, $v_5 = (0,0,1,1)$ vectori în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$.

(a) Să se arate că $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ este sistem de vectori liniar dependenţi.

(b) Să se determine numărul maxim m de vectori liniar independenţi din mulţimea M şi să se indice o submulţime $M_m \subset M$ de m astfel de vectori.

(c) Este M_m unica submulţime de m vectori liniar independenţi din M?

(d) Să se exprime vectorii din $M \setminus M_m$ ca şi combinaţii liniare ale vectorilor din M_m. Sunt unice aceste exprimări?

Rezolvare. Folosim criteriul practic. Pentru aceasta formăm matricea A prin concatenarea matricelor coloană corespunzătoare vectorilor daţi, urmând să o aducem la forma scară redusă; pentru că urmărim să obţinem o matrice superior triunghiulară, vom concatena vectorii daţi într-o ordine care ne uşurează prelucrarea prin transformări elementare. De exemplu, formăm matricea

$$A = (v_3^T \mid v_4^T \mid v_5^T \mid v_1^T \mid v_2^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Deoarece rangul matricei A este mai mic decât 5 rezultă că $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ este sistem de vectori liniar dependenţi.

(b) Pentru a determina numărul m aducem A la forma scară redusă; obţinem

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Forma scară redusă are 4 pivoţi, deci rangul matricei A este 4, iar $m = 4$. Pivoţii se găsesc pe primele patru coloane, prin urmare am obţinut submulţimea maximală de vectori liniar independenţi $M_4 = \{v_3, v_4, v_5, v_1\}$.

(c) De exemplu, matricea

$$(v_2^T \mid v_4^T \mid v_5^T \mid v_1^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

are, de asemenea, rangul egal cu 4; rezultă că şi submulţimea $\{v_1, v_2, v_4, v_5\} \neq M_4$ e formată din patru vectori liniar independenţi.

(d) Deoarece în forma scară redusă coloana a cincea se poate exprima în funcţie de celelalte coloane:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} -3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obţinem, corespunzător, exprimarea ultimei coloane din matricea A în funcţie de primele patru coloane, deci $v_2 = v_3 - 3v_4 + 2v_5$. Exprimarea lui v_2 este unică; într-adevăr dacă $v_2 = \alpha v_3 + \beta v_4 + \gamma v_5 + \delta v_1$, (cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$) urmează că $\alpha v_3 + \beta v_4 + \gamma v_5 + \delta v_1 = v_3 - 3v_4 + 2v_5$, sau echivalent, $(\alpha - 1)v_3 + (\beta + 3)v_4 + (\gamma - 2)v_5 + \delta v_1 = \theta$; dar vectorii v_1, v_3, v_4, v_5 sunt liniar independenţi şi, în consecinţă, scalarii care intervin în combinaţie sunt toţi nuli, adică $\alpha = 1, \beta = -3, \gamma = 2$ şi $\delta = 0$.

Observaţie. Corpul scalarilor este esenţial în stabilirea liniar independenţiei, după cum putem vedea din exemplul de mai jos.

Exerciţiul 5. Studiaţi liniar independenţa vectorilor $v_1 = 1$ şi $v_2 = i$ în spaţiile vectoriale $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}/\mathbb{C}$.
Rezolvare. În $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ liniar independenţa revine la a studia dacă $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ implică $\alpha = \beta = 0$. Egalând părţile reale, apoi pe cele imaginare în egalitatea de numere complexe $\alpha + i\beta = 0$ se obţine $\alpha = \beta = 0$, deci $1, i$ sunt liniar independenţi.
În $\mathbb{C}/\mathbb{C}$ liniar independenţa revine la la a studia dacă $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ implică $\alpha = \beta = 0$. Acest lucru nu se întâmplă: de exemplu $\alpha = -i,\ \beta = 1$ stabilesc relaţia de dependenţă liniară $v_2 = i \cdot v_1$. Prin urmare, în acest spaţiu vectorial, vectorii v_1, v_2 nu sunt liniar independenţi.

7. Baze. Caracterizări.

Definiţia 2.7.1. *Spunem că sistemul ordonat de vectori* $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$ *este* ***bază pentru spaţiul*** V/K *dacă*

(a) *sistemul* B *este liniar independent;*

(b) B *este sistem de generatori (i.e.* $span(B) = V$*).*

Exemple 2.7.1.

(a) În spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ mulţimea

$$\{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 0, 1)\}$$

este o bază numită *baza canonică.*

(b) Mai general, în spaţiul K^n/K mulţimea

$$\{(1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,0,\dots,0,1)\}$$

este o bază numită *baza canonică* (ca de obicei, 1 este elementul neutru al grupului abelian $(K^* = K \setminus \{0\}, \cdot)$.

(c) În spaţiul $K^{m\times n}/K$ mulţimea $B = \left\{e_{ij} \mid i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right\}$ unde

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots,\ e_{1n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\dots,\ e_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\dots,\ e_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

este o bază numită *baza canonică.*

(d) În spaţiul funcţiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu n, $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$, mulţimea

$$\left\{1, x, x^2, \dots, x^n\right\}$$

este o bază numită *baza canonică.*

Exerciţiul 5. La Exerciţiul 1 am văzut că

$$S = \left\{A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R}, a + 2b = c\right\}$$

este un subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})/\mathbb{R}$; la Exerciţiul 2 am constatat (folosind tehnica parametrizării) că vectorii $A(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(0,1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ generează spaţiul S. Deoarece

$$span\big(A(1,0,1)\big) \cap span\big(A(0,1,2)\big) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

rezultă că cei doi vectori sunt liniar independenţi. În consecinţă mulţimea $\{A(1,0,1), A(0,1,2)\}$ este o bază pentru spaţiul S.

Propoziţia 2.7.1. *Fie V/K un spaţiu vectorial şi $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$ o bază a sa.*

(a) *Orice vector* $v \in V$ *se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară a vectorilor (ordonaţi, după indicii* $1, 2, \ldots$*) din bază, i.e. există şi sunt unici scalarii* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ *astfel încât* $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$*; scalarii* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *se numesc* ***coordonatele vectorului*** v *în baza* B.

(b) *Orice altă bază a spaţiului* V/K *are acelaşi număr de vectori.*

Definiţia 2.7.2. *Numărul vectorilor dintr-o bază a spaţiului* V/K *se numeşte* ***dimensiunea spaţiului*** *vectorial* V/K*; vom scrie* $\dim(V) = n$. Dacă V este spaţiul nul atunci $\dim(V) = 0$.

Există spaţii care conţin un număr infinit de vectori liniar independenţi (i.e. există n vectori liniar independenţi oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$).
De exemplu vectorii $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ sunt liniar independenţi în spaţiul real al tuturor polinoamelor cu coeficienţi reali pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Obiectul Algebrei liniare este studiul spaţiilor finit dimensionale.

Exemple 2.7.2. Ţinând cont de bazele canonice prezentate mai sus rezultă că:

(a) dimensiunea spaţiului $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ este n;

(b) dimensiunea spaţiului K^n/K este n;

(c) dimensiunea spaţiului $K^{m\times n}/K$ este nm;

(d) dimensiunea spaţiului $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$ este $n + 1$;

(e) în $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ baza canonică este $\{1, i\}$, deci $\dim(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = 2$;

(f) spaţiul vectorilor din plan are baza canonică $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$, deci dimensiunea acestuia este 2.

La Exerciţiul 5 am arătat de fapt că $\dim(S) = 2$.

Teorema 2.7.1. *Fie* V/K *un spaţiu vectorial şi* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V$ *un sistem de vectori. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) *sistemul* B *este o bază pentru spaţiul* V/K*;*

(b) B *este un* ***sistem maximal de vectori liniar independenţi****, adică sistemul* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, u\}$ *este liniar dependent, oricare ar fi vectorul* $u \in V$*;*

(c) *orice vector* $v \in V$ *se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară a vectorilor din sistemul* B.

8. **Schimbări de baze**

Am văzut că într-un spaţiu vectorial există, în general, mai multe baze (dintre exemplele date doar $\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2$ are o singură bază). Răspundem aici la întrebarea: *care este legătura dintre coordonatele unui vector relativ la două baze?*

Fie $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ şi $B'=\{e'_1,e'_2,\ldots,e'_n\}$ două baze în spaţiul V/K. Exprimăm vectorii bazei B' în baza B : există şi sunt unici scalarii $a_{ij}\in K$ asfel ca $e'_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$ pentru orice $j\in\{1,\ldots,n\}$, adică

$$\begin{cases} e'_1=a_{11}e_1+a_{21}e_2+\ldots+a_{n1}e_n\\ e'_2=a_{12}e_1+a_{22}e_2+\ldots+a_{n2}e_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ e'_n=a_{1n}e_1+a_{2n}e_2+\ldots+a_{nn}e_n\end{cases}.$$

Definiţia 2.8.1. Matricea $T_{BB'}:=(a_{ij})\in K^{n\times n}$ se numeste *matricea de trecere* de la baza B la baza B'.

Prin urmare matricea de trecere este

$$T_{BB'}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix};$$

ea are pe coloane coordonatele vectorilor $e'_1,e'_2,\ldots,e'_n$ din ,,baza nouă" B' - în această ordine - în ,,baza veche" B. Matriceal avem

$$\begin{pmatrix} e'_1\\ e'_2\\ \vdots\\ e'_n\end{pmatrix}=T^T_{BB'}\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}.$$

Analog construim matricea de trecere, $T_{B'B}$, de la baza B' la baza B şi avem relaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}=T^T_{B'B}\begin{pmatrix} e'_1\\ e'_2\\ \vdots\\ e'_n\end{pmatrix}.$$

Din cele două relaţii matriceale obţinem

$$\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}=T^T_{B'B}T^T_{BB'}\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}\text{ şi }\begin{pmatrix} e'_1\\ e'_2\\ \vdots\\ e'_n\end{pmatrix}=T^T_{BB'}T^T_{B'B}\begin{pmatrix} e'_1\\ e'_2\\ \vdots\\ e'_n\end{pmatrix}.$$

Cum matricea de trecere $T_{BB}=T_{B'B'}=I_n$, iar exprimarea într-o bază este unică, rezultă că $T^T_{B'B}T^T_{BB'}=I_n=T^T_{BB'}T^T_{B'B}$, ori

$$T_{B'B}T_{BB'}=T_{BB'}T_{B'B}=I_n,$$

adică cele două matrice de trecere sunt inversabile şi

$$T^{-1}_{B'B}=T_{BB'}.$$

Dacă $B'' = \{e_1'', e_2'', \ldots, e_n''\}$ este o altă bază în spaţiul V/K atunci

$$\begin{pmatrix} e_1'' \\ e_2'' \\ \vdots \\ e_n'' \end{pmatrix} = T^T_{B'B''} \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} = T^T_{B'B''} T^T_{BB'} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

şi

$$\begin{pmatrix} e_1'' \\ e_2'' \\ \vdots \\ e_n'' \end{pmatrix} = T^T_{BB''} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

deci $T^T_{BB''} = T^T_{B'B''} T^T_{BB'} = (T_{BB'} T_{B'B''})^T$. Prin urmare

$$T_{BB''} = T_{BB'} T_{B'B''}.$$

Fie acum $v \in V$ un vector arbitrar. Conform teoremei precedente, v se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară a vectorilor din baza B şi, de asemenea, ca o combinaţie liniară unică a vectorilor din B'. Prin urmare există şi sunt unici scalarii $x_1, \ldots, x_n$ şi $x_1', \ldots, x_n'$ astfel ca

$$v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n = x_1' e_1' + \ldots + x_n' e_n'.$$

Deoarece $e_j' = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ pentru orice $j \in \{1, \ldots, n\}$, folosind cele două exprimări ale lui v, avem

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' \right) e_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j' \right) e_1 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j' \right) e_n,$$

adică $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j'$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Matriceal obţinem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Să notăm cu v_B respectiv cu $v_{B'}$ matricele coloană ale coordonatelor în cele două baze, adică

$$v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ şi } v_{B'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Atunci relaţia obţinută poate fi scrisă pe scurt

$$v_B = T_{BB'} v_{B'}, \text{ sau, echivalent } v_{B'} = T_{BB'}^{-1} v_B.$$

Am obţinut următorul rezultat.

Teorema 2.8.1. *Fie B, B' şi B'' baze în spaţiul V/K. Atunci matricea de trecere de la baza B la baza B' este inversabilă şi inversa ei este matricea de trecere de la baza B' la baza B, adică*

$$T_{BB'}^{-1} = T_{B'B}.$$

Între matricele de trecere ale celor trei baze avem legătura următoare:

$$T_{BB''} = T_{BB'} T_{B'B''}.$$

Dacă $v \in V$ iar v_B este matricea coloană a coordonatelor vectorului v în baza B şi $v_{B'}$ este matricea coloană a coordonatelor vectorului v în baza B' atunci

$$v_{B'} = T_{BB'}^{-1} v_B.$$

Exemplul 2.8.1. Să considerăm bazele $B = \left\{1 + X, X + X^2, X^2 + 1\right\}$, $B' = \left\{1, X - 1, X^2 - 1\right\}$ şi B_c din spaţiul $\mathbb{R}_2[X]/\mathbb{R}$, unde B_c este baza canonică (verificaţi că sunt într-adevăr baze!). Ne propunem să determinăm

(a) $T_{B_c B}$ şi T_{BB_c};
(b) $T_{B_c B'}$ şi $T_{B'B_c}$;
(c) $T_{BB'}$;
(d) coordonatele vectorului $f = 1 + X + X^2$ în bazele B şi B'.

Rezolvare. (*a*) Deoarece $B_c = \left\{1, X, X^2\right\}$ urmează că, în baza canonică, vectorul $1 + X$ are coordonatele $1, 1, 0$, vectorul $X + X^2$ are coordonatele $0, 1, 1$ iar vectorul $X^2 + 1$ are coordonatele $1, 0, 1$. Prin urmare matricea de trecere de la baza canonică la baza B este

$$T_{B_c B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cum $T_{BB_c} = T_{B_c B}^{-1}$ şi

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

rezultă că $T_{BB_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) Analog $T_{B_cB'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $T_{B'B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Folosim din nou teorema precedentă. Avem

$$T_{BB'} = T_{BB_c}T_{B_cB'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Cu notaţiile din teorema precedentă avem

$$f_B = T_{BB_c} \cdot f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

deci coordonatele vectorului f în baza B sunt $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Similar

$$f_{B'} = T_{B'B_c} \cdot f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

deci coordonatele vectorului f în baza B' sunt $3, 1, 1$.

B. PROBLEME REZOLVATE

1. Folosind definiţia, să se arate că vectorii

$$u_1 = (1, 1, 2),\ u_2 = (2, 1, 1),\ u_3 = (-1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$$

sunt liniar independenţi.
Rezolvare. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \theta$. Înlocuind, avem că relaţia e echivalentă cu

$$\alpha_1(1, 1, 2) + \alpha_2(2, 1, 1) + \alpha_3(-1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

şi făcând operaţiile în membrul stâng, cu

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

ceea ce ne conduce la sistemul omogen

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ \ = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} ;$$

matricea sistemului are determinantul $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$, deci sistemul omogen admite doar soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, aşadar vectorii u_1, u_2, u_3 sunt liniar independenţi.

2. Folosind criteriul practic, să se arate că

$$S = \{u_1 = (1, 2, 0),\ u_2 = (1, 2, 3),\ u_3 = (0, 1, 1)\}$$

este un sistem liniar independent de vectori din $\mathbb{R}^3$.
Rezolvare. Construim matricea

$$A = [u_1^T | u_2^T | u_3^T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculăm $\det(A) = -3 \neq 0$, deci conform criteriului practic, avem că S reprezintă un sistem liniar independent de vectori din $\mathbb{R}^3$.

3. Sistemul

$$\begin{aligned} A \;=\; & \{u_1 = (1, -2, 1), u_2 = (-1, 2, -1), u_1 = (2, 1, 7), u_4 = (1, 1, 4), \\ & u_5 = (-1, 2, -1)\} \end{aligned}$$

este un sistem liniar dependent de vectori din $\mathbb{R}^3$. Cum putem justifica acest lucru fără calcule? Să se extragă un subsistem $S' \subset S$, liniar independent.
Rezolvare. Concatenăm cei cinci vectori pentru a construi matricea $A = [u_1^T | u_2^T | u_3^T | u_4^T | u_5^T]$. Cum matricea A are numai trei linii, $rang(A) \leq 3$, deci vectorii din S nu pot fi liniar independenţi.

Prin operaţii pe linie, avem

$$A \xrightarrow{2L_1+L_2 \to L_2;\ -L_1+L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_3 \to L_3}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_A.$$

În S_A, coloanele cu pivoţi sunt prima şi cea de-a treia, deci $S' = \{u_1, u_3\}$ reprezintă subsistemul căutat.

4. Să se arate că

$$\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

reprezintă un sistem liniar independent de vectori din $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Rezolvare. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = O_2$, adică

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Făcând calculele în membrul stâng şi identificând elementele vom avea că relaţia de mai sus e echivalentă cu sistemul omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \phantom{{}+\alpha_4} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \phantom{{}+\alpha_3+\alpha_4} = 0 \\ \alpha_1 \phantom{{}+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} = 0 \end{cases}.$$

Sistemul fiind superior triunghiular, admite soluţie unică soluţia banală $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, deci $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ reprezintă un sistem liniar independent de vectori din $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

5. Să se arate că sistemul de vectori liniar independent S din problema 2 reprezintă o bază în $\mathbb{R}^3$ şi să se calculeze coordonatele vectorului $v = (-1, 1, 1)$ relative la baza S.
Rezolvare. Din problema a doua ştim că vectorii sunt liniar independenţi. Dar cum $Card(S) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, avem că formează un sistem liniar independent maximal, cu alte cuvinte formează o bază în $\mathbb{R}^3$.

Coordonatele pe care le căutăm sunt $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = v$. Dar înlocuind vectorii, această combinaţie liniară ne conduce la sistemul compatibil determinat

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \qquad = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \qquad 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Rezovându-l, găsim $x_1 = -1/3,\ x_2 = -2/3,\ x_3 = 3$

Alternativ, am fi putut calcula coordonatele construind matricea $A = [u_1^T|u_2^T|u_3^T|v]$. Forma ei scară redusă $S_A^0 = [c_1|c_2|c_3|c_4]$ ar fi avut pivoţi pe primele trei coloane, iar c_4 s-ar fi scris combinaţie liniară de acestea $c_4 = x_1c_1+x_2c_2+x_3c_3$. Apoi am fi folosit faptul că forma scară redusă păstrează combinaţiile liniare de coloane ale unei matrice.

6. Să se arate că polinoamele Bernstein[2] de grad doi

$$B_2^k(t) = C_2^k t^k (1-t)^{2-k}, \quad k = 0, 1, 2$$

formează o bază în $\mathbb{R}_2[t]$ şi să se calculeze coordonatele polinomului $p(t) = 3 + 2t + t^2$ relative la această bază.
Rezolvare. Explicităm cele trei polinoame şi găsim

$$B_2^0(t) = 1 - 2t + t^2,\ B_2^1(t) = 2t - 2t^2,\ B_2^2(t) = t^2.$$

Fie $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha_0 B_2^0(t)+\alpha_1 B_2^1(t)+\alpha_2 B_2^2(t) = \theta$, sau explicitând, $\alpha_0(1-2t+t^2)+\alpha_1(2t-2t^2)+\alpha_2 t^2 = 0$. După ce desfacem parantezele, grupăm monoamele de acelaşi grad şi identificăm coeficienţii în cei doi membri, relaţia va fi echivalentă cu

$$\begin{cases} \alpha_0 - 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_0 + 2\alpha_1 \qquad = 0 \\ \alpha_0 \qquad\qquad = 0 \end{cases}.$$

Sistemul omogen fiind superior triunghiular va avea soluţie unică, mai precis doar soluţia banală $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Astfel, cele trei polinoame sunt liniar independente.

Pe de altă parte, în spaţiul vectorial $\mathbb{R}_2[t]$ avem baza canonică $\mathcal{B} = \{e_1(t) = 1,\ e_2(t) = t,\ e_3(t) = t^2\}$, deci $\mathbb{R}_2[t]$ are dimensiunea trei, valoare care coincide cu cardinalul mulţimii celor trei polinoame Bernstein. Adică acestea formează o bază.

[2] aceste polinoame se folosesc pentru a defini curbele Bezier. Toate fonturile sunt desenate din arce de curbe Bezier, mai mult, softurile de proiectare de tip CAD folosesc astfel de curbe.

Coordonatele pe care le căutăm sunt $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_0 B_2^0(t) + x_1 B_2^1(t) + x_2 B_2^2(t) = p(t)$. După ce explicităm polinoamele şi identificăm coeficienţii ca înainte, ajungem la sistemul de ecuaţii

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x_0 & -2x_1 & +x_2 & = 1 \\ -2x_0 & +2x_1 & & = 2 \\ x_0 & & & = 3 \end{array}\right. .$$

de unde găsim $x_0 = 3,\ x_1 = 4,\ x_2 = 6$.

7. Să se determine câte o bază în cele patru spaţii fundamentale ale lui $\mathbb{R}^2$ definite de matricea:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Rezolvare. a) Aducem la forma scară redusă matricea A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = S_A^0 = [c_1|c_2]$$

şi matricea A^T

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{-2L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A^T}^0 = [c_1'|c_2'].$$

Matricea S_A^0 are pivot pe coloana c_1, deci prima coloană a matricei A reprezintă un sistem liniar independent, astfel $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (0,1)^T\}$ este o bază în $Col(A)$.

Matricea $S_{A^T}^0$ are pivot pe coloana c_2', deci a doua coloană a matricei A^T reprezintă un sistem liniar independent, astfel $\mathcal{B}_1' = \{u_1' = (1,2)^T\}$ este o bază în $Lin(A) = Col(A^T)$.

Pentru $Null(A)$ observăm că un vector $u = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$,
$u \in Null(A^T) = Null(S_A^0)$ dacă şi numai dacă

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

Relaţia de mai sus reprezintă un sistem de o ecuaţie cu două necunoscute cu matrice de rang 1. x_1 va fi necunoscută principală şi $x_2 = \alpha$ necunoscută secundară. Obţinem $x_1 = -2\alpha$ şi deci $u \in Null(A) \iff u = (-2\alpha, \alpha)^T = \alpha(-2,1)^T$. Adică un vector u aparţine spaţiului $Null(A)$ dacă şi numai dacă se scrie ca o combinaţie liniară de vectorul $v_1 = (-2,1)^T$. Deci $Null(A) =$

$span(v_1)$. Dar un sistem format dintr-un singur vector nenul este un sistem liniar independent şi astfel $\mathcal{B}_2 = \{v_1 = (-2,1)^T\}$ reprezintă o bază în $Null(A)$.

Pentru $Null(A^T)$ observăm că un vector $u = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$,
$u \in Null(A^T) = Null(S^0_{A^T})$ dacă şi numai dacă

$$x_2 = 0$$

Adică $u \in Null(A^T) \iff u = (\alpha, 0)^T = \alpha(1,0)^T$. Adică un vector u aparţine spaţiului $Null(A^T)$ dacă şi numai dacă se scrie combinaţie liniară de vectorul $v_1' = (1,0)^T$. Deci $Null(A^T) = span(v_1')$. Dar un sistem format dintr-un singur vector nenul este un sistem liniar independent şi astfel $\mathcal{B}_2' = \{v_1' = (1,0)^T\}$ reprezintă o bază în $Null(A^T)$.

8. Prin operaţii pe linie, matricea

$$A = [u_1|u_2|u_3|u_4|u_5] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

se transformă în matricea

$$B = [c_1|c_2|c_3|c_4|c_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

În ce spaţiu vectorial este $Col(A)$ subspaţiu? Dar $Null(A)$? Să se determine câte o bază în aceste subspaţii.
Rezolvare. $Col(A)$ este generat de coloanele matricei A şi cum fiecare coloană e vector din $\mathbb{R}^{4\times 1}$ înseamnă că $Col(A)$ e un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Pe de altă parte, $Null(A)$ reprezintă mulţimea soluţiilor sistemului omogen scris matriceal $Ax = 0$. Matricea A, având cinci coloane, sistemul omogen va avea cinci necunoscute, deci va fi subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^{5\times 1}$.

Întrucât matricea B este o matrice scară redusă şi a fost obţinută din A prin operaţii elementare pe linie, înseamnă că este chiar forma scară redusă a matricei A. În B pivoţii se găsesc pe coloanele c_1 şi c_2, deci în A coloanele u_1 şi u_2 sunt liniar independente, celelalte putându-se scrie combinaţie liniară de ele. Astfel, o bază în $Col(A) = span(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ este $\mathcal{B} = \{u_1 = (1,-2,1,2)^T,\ u_2 = (2,-4,1,3)^T\}$.

Pentru că B este forma scară redusă a matricei A, sistemul omogen $Ax = 0$ are aceleaşi soluţii cu sistemul $Bx = 0$ dar al doilea e mai uşor de rezolvat. Deoarece în matricea B pivoţii sunt pe coloanele c_1 şi c_2, vom lua x_1 şi x_2 necunoscute principale, iar necunoscutele secundare le notăm cu parametri după cum urmează: $x_3 = \alpha, x_4 = \beta, x_5 = \gamma$. Înlocuind în sistem, avem

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + \alpha + 3\beta + 5\gamma = 0 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad - \beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

deci $x_1 = -\alpha - 3\beta - 5\gamma,\ x_2 = \beta + 3\gamma$.
Astfel, un vector $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T \in Null(B) = Null(A)$ dacă şi numai dacă

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha - 3\beta - 5\gamma \\ \beta + 3\gamma \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

iar notând $v_1 = [-1, 0, 1, 0, 0]^T, v_2 = [-3, 1, 0, 1, 0]^T, v_3 = [-5, 3, 0, 0, 1]^T$, relaţia de mai sus ne spune că $Null(B) = span(v_1, v_2, v_3)$. În plus, aceşti vectori sunt liniar independenţi şi astfel $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ reprezintă o bază în $Null(A)$.

9. Construiţi o matrice A pentru care $u = (1, 2, 3)^T \in Null(A)$.
Rezolvare. $u \in Null(A) \iff Au = 0$ şi înmulţirea se poate efectua doar dacă matricea A are trei coloane. Pentru simplitate, vom căuta o matrice linie, $A = [x\ \ y\ \ z] \in \mathbb{R}^{1\times 3}$. Avem că

$$Au = 0 \iff x + 2y + 3z = 0$$

iar ultima relaţie este un sistem de o ecuaţie cu trei necunoscute. Rangul matricei sistemul e 1, deci luăm x necunoscută principală iar necunoscutele secundare le notăm $y = \alpha$, $z = \beta$. Găsim $x = -2\alpha - 3\beta$ şi, de exemplu pentru $\alpha = \beta = 1$, vom avea $x = -5$, $y = 1$, $z = 1$, deci matricea $A = [-5\ \ 1\ \ 1]$.
Mai simplu, puteam lua $A = [0\ \ 0\ \ 0]$ sau orice matrice nulă cu 3 coloane.

10. Construiţi o matrice A pentru care $Col(A) = span(u = (1, 1, 2)^T)$ şi $Lin(A) = span(v = (1, 5))$
Rezolvare. Evident, căutăm o matrice cu trei linii şi două coloane c_1, c_2. Pentru că $c_1, c_2 \in span(u = (1, 1, 2)^T)$, cele două coloane sunt de forma $c_1 = \alpha(1, 1, 2)^T, c_2 = \beta(1, 1, 2)^T$. Astfel

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \\ 2\alpha & 2\beta \end{bmatrix};$$

dar cele trei linii trebuie să fie elemente din $span(1, 5)$, adică fiecare linie să fie multiplu de acest vector; atunci $\beta = 5\alpha$. Dacă, de exemplu, alegem $\alpha = 1$, obţinem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

11. Să se găsească ecuaţiile subspaţiului $S = span(u_1 = (1,1,2), u_2 = (-1,1,2))$ al lui $\mathbb{R}^2$.
Rezolvare. Fie $v = (x_1, x_2, x_3)$ un vector oarecare din $\mathbb{R}^3$. Construim matricea $A = [u_1^T | u_2^T | v]$ şi o aducem la forma scară:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 2 & x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1+L_2 \to L_2;\ -2L_1+L_3 \to L_3}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & x_1 \\ 0 & \boxed{2} & -x_1+x_2 \\ 0 & 4 & -2x_1+x_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2L_2+L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & x_1 \\ 0 & \boxed{2} & -x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -2x_2+x_3 \end{bmatrix} = S_A.$$

Ultima coloană din S_A se poate scrie combinaţie liniară de primele două dacă şi numai dacă nu conţine pivot, adică dacă $-2x_2 + x_3 = 0$. Dar aceasta e şi condiţia ca ultima coloană din A să se poată scrie combinaţie liniară de primele două, deci condiţia ca $v \in span(u_1, u_2)$.
Aşadar $S = \{v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_2 + x_3 = 0\}$.

12. În $\mathbb{R}^{2\times 2}$, mulţimea S a matricelor de rang unu este subspaţiu?
Rezolvare. Răspunsul este negativ.
Matricile $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ şi $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ au $rang(A) = rang(B) = 1$; dar $rang(A+B) = rang(I_2) = 2 \neq 1$, deci există combinaţii liniare de elemente din S care nu dau un element din S, aşadar S nu este subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

13. Să se determine dimensiunea subspaţiului vectorial

$$S = \{v = [a,\ b+2c,\ a+b+2c]^T \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

al lui $\mathbb{R}^{3\times 1}$.
Rezolvare. Observăm că $v = a[1,0,1]^T + b[0,1,1]^T + c[0,2,2]^T$ deci
$S = span(u_1 = [1,0,1]^T,\ u_2 = [0,1,1]^T,\ u_3 = [0,2,2]^T)$.
Dar u_2 şi u_3 nu sunt liniar independenţi, pentru că $u_3 = 2u_2$. O bază în S va fi $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$, aşadar $\dim(S) = 2$.

C. PROBLEME PROPUSE

1. Arătaţi că într-un spaţiu vectorial:

(a) există un singur vector nul;

(b) oricare vector are un unic vector opus.

2. Fie F un corp. Arătaţi că F este un spaţiu vectorial peste F. Care este dimensiunea acestuia?

3. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ se dau vectorii $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 1, 1)$, $w = (0, 9, 8)$.

   (a) Scrieţi baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

   (b) Exprimaţi vectorii daţi în baza canonică.

   (c) Determinaţi coordonatele vectorilor daţi în baza canonică.

   (d) Determinaţi vectorul $\widetilde{v} = 3v + 5u - w$; stabiliţi dacă următoarele sisteme de vectori sunt baze pentru spaţiul V :

      i. $\{u, v, w\}$;

      ii. $\{u, v, w, \widetilde{v}\}$;

      iii. $\{u, v, \widetilde{v}\}$;

      iv. $\{\theta, w, \widetilde{v}\}$;

      v. $\{v, w, \widetilde{v}\}$.

4. Să se arate că mulţimea matricelor cu elemente din corpul K, $K^{m\times n}$, este un spaţiu vectorial peste corpul K, faţă de operaţia (internă) de adunare a matricelor, respectiv, faţă de operaţia (externă) de înmulţire a matricelor cu scalari.

5. Să se arate că următoarele mulţimi se pot înzestra cu o structură de spaţiu liniar peste corpul numerelor reale:

   (a) $\{\,(a, 0, b + c, a + b + c)|\; a, b, c \in \mathbb{R}\,\}$

   (b) $\{\,(a, -c, -b + c + d, a + b + c + d)|\; a, b, c, d \in \mathbb{R}\,\}$.

6. În spaţiul $\mathbb{R}^{3\times 1}/\mathbb{R}$ considerăm vectorii $v_1 = (9, 0, 1)^T$, $v_2 = (2, 2, 1)^T$, $v_3 = (0, 2, 1)^T$, $v_4 = (1, 1, 1)^T$.

   (a) Să se scrie combinaţia liniară $v = v_1 + 2(-13, 0, 1)^T + v_2 - v_3 + v_4$.

   (b) Să se determine coordonatele vectorilor consideraţi în baza canonică.

   (c) Să se determine rangul matricei $A = (v_1 \mid v_2 \mid v_3 \mid v_4)$.

   (d) Sunt vectorii consideraţi liniar independenţi?

   (e) Să se determine cel mai mare $n \leq 4$ pentru care multimea $\left\{v_i : i = \overline{1, n}\right\}$ este liniar independentă.

(f) Să se determine mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale vectorilor

i. v_1, v_2, v_3, v_4.

ii. $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

7. Să se arate că vectorii notaţi $v_1, v_2, \ldots$ formează o bază într-un spaţiu aritmetic, apoi determinaţi coordonatele vectorului v în baza respectivă:

(a) $v_1 = (1,1,1),\ v_2 = (1,1,2),\ v_3 = (1,2,3);\ v = (6,9,14)$.

(b) $v_1 = (2,1,-3),\ v_2 = (3,2,-5),\ v_3 = (1,-1,1);\ v = (6,2,-7)$.

(c) $v_1 = (1,2,-1,-2,),\ v_2 = (2,3,0,-1),\ v_3 = (1,2,1,4)$,
$v_4 = (1,3,-1,0);\ v = (7,14,-1,2)$.

Răspunsuri. (a). $1,2,3$; (b). $1,1,1$; (c). $0,2,1,2$.

8. Să se arate că vectorii notaţi $v_1, v_2, \ldots$, respectiv $v_1', v_2', \ldots$, formează baze într-un spaţiu aritmetic; exprimaţi vectorii $v_1, v_2, \ldots$ în cele două baze.

(a) $v_1 = (8,3,1),\ v_2 = (0,-1,13),\ v_3 = (5,2,5)$;
$v_1' = (3,1,4),\ v_2' = (5,2,1),\ v_3' = (1,1,-6)$.

(b) $v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (1,2,1,1),\ v_3 = (1,1,2,1),\ v_4 = (1,3,2,3)$;
$v_1' = (1,0,3,3),\ v_2' = (-2,-3,-5,-4),\ v_3' = (2,2,5,4)$,
$v_4' = (2,2,5,5)$.

Răspunsuri.

(a) $v_1 = -2v_1' + 3v_2' - v_3',\ v_2 = 2v_1' - v_2' - v_3',\ v_3 = 3v_1' - v_2' + v_3'$;

(b) $v_1 = -3v_1' + 3v_2' + 3v_3' + 2v_4',\ v_2 = -3v_1' + 2v_2' + 2v_3' + 2v_4'$,
$v_3 = -v_1' + v_2' + 2v_3',\ v_4 = -v_1' - v_2' - 2v_3' + 2v_4'$.

9. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorul v să se poată exprima ca o combinaţie liniară a celorlalţi vectori daţi:

(a) $v = (7,-2,\lambda),\ v_1 = (2,3,5),\ v_2 = (3,7,8),\ v_3 = (1,-6,1)$;

(b) $v = (9,12,\lambda),\ v_1 = (3,4,2),\ v_2 = (6,8,7)$.

(c) $v = (9,15,\lambda),\ v_1 = (3,4,2),\ v_2 = (6,8,7)$.

(d) $v = (12,\lambda,9),\ v_1 = (3,4,2),\ v_2 = (6,8,7)$.

Răspunsuri. (a). $\lambda = 15$; (b). $\lambda \in \mathbb{R}$; (c). $\lambda \in \varnothing$; (d). $\lambda = 16$.

10. * Fie V/K un spaţiu liniar de dimensiune $n \geq 0$. Se ştie că, în general, într-un asemenea spaţiu există mai multe baze.

(a) Să se arate că pentru $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$ şi $n \geq 1$ spaţiul V are o infinitate de baze.

(b) Să se dea câte un exemplu de spaţiu vectorial care are exact $1, 2, 3$, respectiv 4 baze.

11. Determinaţi dimensiunile următoarelor spaţii vectoriale:

(a) $\{(0, 0, 0)\}$

(b) $\{\,(a, a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\,\}$

(c) $\{\,(a,\ 0,\ b + c,\ a + b + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\,\}$

(d) $\{\,(a,\ -c,\ -b + c + d,\ a + b + c + d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\,\}$.

(e) $\{\,(0,\ a + c,\ c + d,\ a + b + c + d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\,\}$.

Răspusuri. (a). 0; (b). 1; (c). 2; (d). 4; (d). 3.

12. Să se găsească câte o bază în fiecare din cele patru spaţii fundamentale ale matricei

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Să se determine matricea de trecere de la baza B la baza B' şi inversa ei unde:

(a) $B = \{(1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)\}$, $B' = \{(3, 1, 4), (5, 2, 1), (1, 1, -6)\}$;

(b) $B' = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 3)\}$,
$B = \{(1, 0, 3, 3), (-2, -3. - 5, -4), (2, 2, 5, 4), (2, 2, 5, 5)\}$.

14. Să se stabilească dimensiunea spaţiului $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$ (spaţiul funcţiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu n), să se determine coordonatele vectorilor 1, $(x - a)$, $(x - a)^2$, $\ldots$, $(x - a)^n$ în baza canonică, să se arate că vectorii 1, $(x - a)$, $(x - a)^2$, $\ldots$, $(x - a)^n$ formează o bază în $\mathbb{R}_n[x]/\mathbb{R}$, apoi să se scrie matricele de trecere dintre cele două baze.

15. Să se arate că în spaţiul $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$ sistemul de vectori

(a) $\mathcal{B} = \left\{1, 2x, 2x^2, 2x^3\right\}$ este o bază, iar coordonatele vectorului $x + x^2$ sunt $(0, 1/2, 1/2, 0)$;

(b) $\mathcal{B}' = \left\{1 + x, 1 - x, x + x^2, x + x^3\right\}$ este o bază, iar coordonatele vectorului $x + x^2$ sunt $(0, 0, 1, 0)$.

(c) $\mathcal{B}'' = \{B_3^k(x) = C_3^k x^k (1-x)^{3-k},\ k = 0,1,2,3\}$ este o bază, iar coordonatele vectorului $x + x^2$ sunt $(0, 1/3, 1, 2)$.

16. * Să se arate că următorul sistem de vectori (în ce spaţiu poate fi considerat?) este liniar independent:

$$\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx\}.$$

17. Stabiliţi care dintre următoarele mulţimi de vectori este subspaţiu al unui spaţiu vectorial real adecvat:

(a) vectorii unui spaţiu liniar n dimensional care au coordonatele numere întregi;

(b) vectorii legaţi cu acelaşi punct de aplicaţie, originea O, din spaţiul fizic:

i. care au extremităţile pe axele de coordonate;

ii. care au extremităţile pe o dreaptă dată;

iii. ale căror extremităţi nu sunt pe o dreaptă dată;

iv. care au extremităţile în primul cadran;

(c) vectorii din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ ale căror coordonate verifică ecuaţia $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$;

(d) vectorii din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ ale căror coordonate verifică ecuaţia $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$;

(e) vectorii din $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ care sunt combinaţii liniare ale unor vectori daţi.

Răspunsuri. (a). nu; (b).i. nu; ii. da, dacă şi numai dacă dreapta trece prin origine; iii. nu; iv. nu; (c). da; (d). nu, (e). da.

18. Fie $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un sistem de vectori din spaţiul vectorial V/K. Arătaţi că $\mathit{span}\,(S) \leq V$ şi că $\dim(\mathit{span}\,(S)) \leq \dim(V)$.

19. Enumeraţi toate subspaţiile spaţiului vectorilor din spaţiu.

Răspuns. Tot spaţiul; mulţimea vectorilor dintr-un plan care trece prin origine; mulţimea vectorilor de pe o dreaptă care trece prin origine; mulţimea formată din vectorul nul.

20. Descrieţi subspaţiile generate de vectorii indicaţi precizând spaţiul aritmetic în care se lucrează şi stabiliţi dimensiunea lor:

(a) 1;

(b) $(1,1), (2,2)$;

(c) $(1,2),(2,1)$;

(d) $(10,0,-10),(21,1,1),(11,1,11)$.

Răspunsuri. (a). $\mathbb{R}, 1$ (b). $\{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, 1$ (c). $\mathbb{R}^2, 2$;
(d). $\{(10\alpha + 21\beta, \beta, \beta - 10\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, 2$.

21. Fie $\mathcal{M}_{n,n}(K)/K$. Arătaţi că mulţimea matricelor diagonală formează un subspaţiu liniar; care este dimensiunea acestuia?

22. În spaţiul funcţiilor reale peste corpul $\mathbb{R}$ analizaţi dimensiunea subspaţiului generat de vectorii

    (a) $\sin x$;

    (b) $\sin x$, $\sin^2 x$;

    (c) $\sin x$, $\sin^2 x$, $\ldots$, $\sin^n x$.

23. Determinaţi câte o bază pentru:

    (a) subspaţiul $\left\{ ax^2 + bx + c \,\middle|\, a + b = c \right\}$ al spaţiului $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$;

    (b) subspaţiul matricelor de tip 2×2 de forma $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (verificaţi, în prealabil că este subspaţiu);

    (c) subspaţiul matricelor din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ care au primele două coloane nule.

24. Determinaţi câte o bază pentru subspaţiile polinoamelor $p \in \mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$ având proprietatea:

    (a) $p(1) = 0$;

    (b) $p(1) = 0$ şi $p(2) = 0$;

    (c) $p(1) = 0$, $p(2) = 0$ şi $p(3) = 0$;

    (d) $p(0) = 0$, $p(1) = 0$, $p(2) = 0$ şi $p(3) = 0$.

25. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$. Să se determine câte o bază pentru:

    (a) spaţiul generat de liniile sale;

    (b) spaţiul $Col\,(A)$ generat de coloanele sale;

    (c) $Null(A)$.

Răspusuri. De exemplu:

(a) $\{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\}$

(b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$

(c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-5\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$

26. Fie V mulţimea matricelor de tip 4×4 a căror matrice scară redusă are ultima linie nulă. Este V un subspaţiu în $\mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$?

27. Fie W/K un spaţiu vectorial , U şi V două subspaţii, iar $B_U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, respectiv $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_\ell\}$ baze ale acestora.

   (a) Să se arate că mulţimea $U \cap V$ este subspaţiu al spaţiului W.
   (b) Să se arate că mulţimea $U + V := \{u + v \mid u \in U,\ v \in V\}$ este subspaţiu al spaţiului W.
   (c) Să se arate că dacă $U \subset V$ şi $k = \ell$, atunci $U = V$.
   (d) * Determinaţi dimensiunea subspaţiului $U + V$ şi indicaţi o procedură concretă de obţinere a unei baze.

   Indicaţie. O bază pentru $U + V$ este formată dintr-o submulţime maximală de vectori liniar independenţi ai mulţimii $\{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_\ell\}$.

28. * Determinaţi câte o bază pentru suma, respectiv intersecţia subspaţiilor generate de mulţimile de vectori v_1, v_2, v_3 şi v_1', v_2', v_3':

   (a) $v_1 = (1, 2, 1),\ v_2 = (1, 1, -1),\ v_3 = (1, 3, 3);$
   $v_1' = (2, 3, -1),\ v_2' = (1, 2, 2),\ v_3' = (1, 1, -3).$
   (b) $v_1 = (1, 1, 0, 0),\ v_2 = (0, 1, 1, 0),\ v_3 = (0, 0, 1, 1);$
   $v_1' = (1, 0, 1, 0),\ v_2' = (0, 2, 1, 1),\ v_3' = (1, 2, 1, 2).$

   Răspusuri. (a). de exemplu, pentru sumă $\{v_1, v_2, v_1'\}$, iar pentru intersecţie $\{v\}$, unde $v = 2v_1 + v_2 = v_1' + v_3' = (3, 5, 1)$. (b). de exemplu, pentru sumă $\{v_1, v_2, v_3, v_1'\}$, iar pentru intersecţie $\{v_1'', v_2''\}$, unde $v_1'' = v_1 + v_2 + v_3 = v_1' + v_2' = (1, 2, 2, 1)$ şi $v_2'' = 2v_1 + 2v_3 = v_1' + v_3' = (2, 2, 2, 2)$.

29. Arătaţi că matricele $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ formează o bază în subspaţiul $\mathbb{R}_S^{2\times 2}$ al matricelor simetrice din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Relaţia

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{2b}{2} \\ \frac{2c}{2} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{2b+c-c}{2} \\ \frac{2c+b-b}{2} & d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & \frac{b+c}{2} + \frac{b-c}{2} \\ \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ne arată că orice matrice 2×2 se poate descompune în suma dintre o matrice simetrică şi una antisimetrică (adică o matrice A cu proprietatea că $A^T = -A$). Fie $\mathbb{R}_A^{2\times 2}$ mulţimea matricelor antisimetrice de tip 2×2. Să se arate că:

(a) $\mathbb{R}_A^{2\times 2}$ este subspaţiu unidimensional al spaţiului liniar $\mathbb{R}^{2\times 2}$;

(b) $\mathbb{R}_S^{2\times 2}$ este subspaţiu tridimensional al spaţiului liniar $\mathbb{R}^{2\times 2}$;

(c) $\mathbb{R}^{2\times 2} = \mathbb{R}_S^{2\times 2} \oplus \mathbb{R}_A^{2\times 2}$.

Să se generalizeze propoziţiile precedente pentru matrice pătratice de ordin n cu elemente reale. Dacă înlocuim corpul numerelor reale cu $\mathbb{Z}_2$, afirmaţile (a) - (c) rămân adevărate?

30. Care e subspaţiul vectorial al lui $\mathbb{R}^{2\times 2}$ generat de matricele cu elemente pozitive?
Răspuns. $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

31. * Un vector v din spaţiul $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ are în baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se dea o condiţie necesară şi suficientă pentru ca să existe o bază $B' \subset \mathbb{R}^n$ în care v să aibă coordonatele $1, 0, 0, \ldots, 0$ şi să se indice o procedură de construcţie a acestei baze.

3 APLICAŢII LINIARE

Morfismele - de grupuri, de inele, etc. - sunt funcţii compatibile cu structura - de grup, inel, etc. Similar morfismelor de grupuri ori de inele, definim noţiunea de aplicaţie liniară ca funcţie între două spaţii vectoriale peste acelaşi corp, compatibilă cu cele două operaţii: cea internă (adunarea vectorilor) şi cea externă (înmulţirea vectorilor cu scalari).

A. TEORIE

3.1. Definiţia aplicaţiei liniare

Peste tot în cele ce urmează V şi W sunt două spaţii vectoriale peste acelaşi corp K.

Definiţia 3.1.1. Definiţia aplicaţiei liniare. *O funcţie $L : V \to W$ care satisface condiţiile*

i. $L(u+v) = L(u) + L(v)$ *pentru orice* $u, v \in V$ (adică L este **aditivă**)

ii. $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ *pentru orice* $u \in V$ *şi orice* $\alpha \in K$ (adică L este **omogenă**)

se numeşte ***aplicaţie liniară (sau transformare liniară).*** *Notăm mulţimea aplicaţiilor liniare definite pe V cu valori în W cu $\mathcal{L}(V, W)$.*
Dacă $V = W$, atunci aplicaţia liniară L se numeşte ***operator liniar*** *sau* ***endomorfism***. *Notăm cu $\mathcal{L}(V)$ mulţimea operatorilor liniari ai spaţiului V.*

Axioma (i) din această definiţie implică faptul că dacă $L \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci L este morfism între grupurile $(V, +)$ şi $(W, +)$. În consecinţă L transformă vectorul nul în vectorul nul şi simetricul unui vector în simetricul imaginii acestuia, adică:

Propoziţia 3.1.1. *Dacă* $L \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci

- $L(\theta_V) = \theta_W$
- $L(-v) = -L(v)$, $\forall v \in V$.

Exemplul 3.1.1. *Aplicaţia nulă* $\theta : V \to W$, $\theta(v) := \theta_W$ este o aplicaţie liniară.

Exemplul 3.1.2. *Aplicaţia identică* id_V este o aplicaţie liniară. (Reamintim că $id_V = \mathbf{1}_V : V \to V$, $id_V(v) = v$).

Exemplul 3.1.3. Dacă $L \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci $L'(v) := -L(v)$ defineşte o aplicaţie liniară, adică $L' \in \mathcal{L}(V, W)$.

Exemplul 3.1.4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a. Dacă $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, notând $a := f(1)$ avem $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b. Dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) = ax$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ atunci $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Prin urmare $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *dacă şi numai dacă există* $a \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $f(x) = ax$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 3.1.5. Funcţia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definită prin

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

este o aplicaţie liniară (aici $V = \mathbb{R}^3, W = \mathbb{R}^2$ şi $K = \mathbb{R}$).
Într-adevăr, dacă $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (x_1', x_2', x_3') \in \mathbb{R}^3$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ avem, ţinând cont de expresia analitică a funcţiei L şi de definiţia operaţiilor din $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$:
$L(x+y) = L(x_1+x_1', x_2+x_2', x_3+x_3') = (x_1 + x_1' - x_2 - x_2', x_2 + x_2' - x_3 - x_3')$
$= (x_1 - x_2, x_2 - x_3) + (x_1' - x_2', x_2' - x_3') = L(x) + L(y)$ şi
$L(\alpha x) = L(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_1 - \alpha x_2, \alpha x_2 - \alpha x_3) = \alpha(x_1 - x_2, x_2 - x_3) = \alpha L(x)$;
prin urmare $L \in \mathcal{L}(V, W)$.

O funcţie $L : V \to W$ este o aplicaţie liniară dacă şi numai dacă ea conservă combinaţiile liniare. Următoarea propoziţie dă condiţii necesare şi suficiente de liniaritate folosind această echivalenţă şi, în consecinţă, oferă definiţii alternative pentru aplicaţiile liniare.

Propoziţia 3.1.2. *Fie* $L : V \to W$ *o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

(a) $L \in \mathcal{L}(V, W)$

(b) $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$

(c) $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \cdots + \alpha_n L(v_n)$
$\forall v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, $\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplul 3.1.6. Fie $L \in \mathcal{L}(V, W)$ şi $S \subset V$. Să arătăm că $L(span(S)) = span(L(S))$

1. Arătăm întâi că $L(span(S)) \subset L(span(S))$. Fie $w \in L(span(S))$.
   Atunci există $v \in span(S)$ astfel încât $L(v) = w$. Dar $v \in span(S)$, deci există $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât
   $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. Prin urmare
   $w = L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \cdots + \alpha_n L(v_n) \in span(L(S))$ şi incluziunea este demonstrată.

2. Rămâne să arătăm incluziunea inversă. Fie, pentru aceasta,
   $w \in span(L(S))$. Atunci există $w_1, w_2, \ldots, w_n \in L(S)$ şi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ astfel încât $w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n$. Cum $w_1, w_2, \ldots, w_n \in L(S)$ înseamnă că există $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$ astfel încât $w_1 = L(v_1), \ldots, w_n = L(v_n)$, deci
   $w = \alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2) + \cdots + \alpha_n L(v_n) =$
   $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) \in L(span(S))$. Prin urmare am dovedit că $span(L(S)) \subset L(span(S))$ şi egalitatea este demonstrată.

O aplicaţie liniară transformă subspaţii în subspaţii, după cum rezultă din următoarea propoziţie.

Propoziţia 3.1.3. *Fie* $L \in \mathcal{L}(V, W)$ *şi* $U \leq V$. *Atunci* $L(U) \leq W$.

Aplicaţiile liniare din $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ au o expresie analitică simplă. Următoarea afirmaţie extinde modelul dat de Exemplul 3.1.4.

Propoziţia 3.1.4. *Funcţia* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este o aplicaţie liniară (a spaţiului* $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ *în spaţiul* $\mathbb{R}/\mathbb{R}$*) dacă şi numai dacă există* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Între aplicaţiile liniare şi matrice există o strânsă legătură. Fie L aplicaţia liniară definită în Exemplul 3.1.5. Putem da expresia analitică a funcţiei L matriceal astfel: notând $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ avem $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$, sau, echivalent $Ax^T = (L(x))^T$. În general:

Propoziţia 3.1.5. *Dacă* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *şi* $x \in \mathbb{R}^n$, *atunci* $L(x) := \left(Ax^T\right)^T$ *defineşte* $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Exemplul 3.1.7. Să răspundem la întrebarea: *care dintre următoarele aplicaţii este liniară?*

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := (x + y,\ x - a - 1)$, $a \in \mathbb{R}$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := \left(x + y,\ x - ay^2\right)$, $a \in \mathbb{R}$.

Soluţie.

1. Să presupunem că $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Cum $f(0,0) = (0,0)$ rezultă că $(0, -a-1) = (0,0)$, deci o condiţie necesară de liniaritate este $a = -1$.

Să verificăm dacă această condiţie este şi suficientă, adică să vedem dacă $f(x,y) := (x+y, x)$ defineşte o aplicaţie liniară. Luând $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avem $A(x,y)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} = (x+y, x)^T$; confom propoziţiei precedente rezultă că $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. *În consecinţă $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dacă şi numai dacă $a = -1$.* Arătaţi suficienţa condiţiei găsite şi direct, prin definiţie.

2. Să presupunem iar că $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Atunci $f(-x,-y) = -f(x,y)$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, de unde obţinem că $-x - ay^2 = -x + ay^2$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Prin urmare o condiţie necesară de liniaritate este $a = 0$. Suficienţa condiţiei rezultă din punctul 1. În consecinţă $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ *dacă şi numai dacă $a = 0$.*

Exemplul 3.1.8. Dacă $n > 1$, aplicaţia de derivare $d : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definită prin $d(f) := f'$ este liniară.

Exemplul 3.1.9. Fie $C^0[a,b]$ spaţiul (real) al funcţiilor continue pe intervalul $[a,b]$ şi $I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$, pentru orice $f \in C^0[a,b]$. Atunci $I \in \mathcal{L}(C^0[a,b], \mathbb{R})$.

Exemplul 3.1.10. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Aplicaţia $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - numită *proiecţia de indice i* (sau *proiecţia a i-a*) definită prin $dx_i(x_1, x_2, \dots, x_n) := x_i$ este liniară.

Exemplul 3.1.11. *O aplicaţie liniară este complet determinată de acţiunea sa asupra vectorilor dintr-o bază.* Să verificăm această afirmaţie. Presupunem că $f \in \mathcal{L}(V, W)$, că $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ este o bază în V şi că se cunosc imaginile vectorilor din această bază: $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2, \dots,$ $f(v_n) = w_n$. Fie acum $v \in V$. Atunci există scalarii (unici) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ astfel ca $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. Dar f este liniară, deci $f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n$; prin urmare vectorul imagine $f(v)$ este şi el cunoscut.

Compusa a două transformări liniare este o transformare liniară.

Propoziţia 3.1.6. *Fie $f \in \mathcal{L}(U, V)$ şi $g \in \mathcal{L}(V, W)$. Atunci $g \circ f \in \mathcal{L}(U, W)$.*

Mulţimea transformărilor liniare dintre două spaţii vectoriale (peste acelaşi corp) poate fi dotată cu o structură naturală de spaţiu liniar.

Propoziţia 3.1.7. a. *Dacă $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci $L_1 + L_2 \in \mathcal{L}(V, W)$, unde $(L_1 + L_2)(v) := L_1(v) + L_2(v)$;*

b. *Dacă $L \in \mathcal{L}(V, W)$ şi $\alpha \in K$ atunci $\alpha L \in \mathcal{L}(V, W)$, unde $(\alpha L)(v) := \alpha L(v)$;*

c. $\mathcal{L}(V,W)$ *este un spaţiu vectorial peste corpul* K *în raport cu operaţiile definite mai sus.*

d. *Dacă* $\dim V = n$ *şi* $\dim W = m$ *atunci* $\dim \mathcal{L}(V,W) = m \cdot n$.

O aplicaţie liniară bijectivă stabileşte, în esenţă, că spaţiile vectoriale între care operează această transformare ,,coincid" structural.

Definiţia 3.1.2. Definiţia izomorfismului. *O funcţie* $f : V \to W$ *se numeşte* ***izomorfism*** *dacă ea este liniară şi bijectivă. Dacă o asemenea funcţie există spunem că spaţiile* V *şi* W *sunt izomorfe şi scriem* $V \cong W$*. Dacă* $f \in \mathcal{L}(V)$ *este izomorfism spunem că operatorul f este un* ***automorfism*** *(al spaţiului* V*).*

Exemplul 3.1.12. Să arătăm că spaţiile reale $\mathbb{R}_n[x]$ şi $\mathbb{R}^{n+1}$ sunt izomorfe. Este suficient să definim acţiunea unei aplicaţii liniare bijective între vectorii bazelor canonice: $f(1) := e_1, f(x) := e_2, f\left(x^2\right) := e_3, \ldots, f(x^n) := e_{n+1}$ (vezi Exemplul 3.1.11). Atunci $f(a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n) := a_0 e_1 + a_1 e_2 + ... + a_n e_{n+1}$ defineşte un izomorfism $\mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$. Expresia analitică a inversei acestei transformări este definită prin $f^{-1}(e_1) = 1$, $f^{-1}(e_2) = x, \ldots,$ $f^{-1}(e_{n+1}) = x^n$.

Exemplul 3.1.13. Să arătăm că *două spaţii vectoriale peste acelaşi corp sunt izomorfe dacă şi numai dacă ele au aceeaşi dimensiune.*

1. Fie $f : V \to W$ este izomorfism şi $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază în V. Pentru a arăta că $\dim V = \dim W$ este suficient să arătăm că
$B_W := \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ este bază în W.

1.1. Arătăm că B_W este un sistem de vectori liniar independent. Presupunem că avem o combinaţie liniară nula a vectorilor din B_W :

$$\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = \theta_W.$$

Folosind liniaritatea aplicaţiei f avem de aici:

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = f(\theta_V).$$

Cum f este injectivă rezultă că

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \theta_V.$$

Dar B_V este bază în V, deci $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. În consecinţă B_W este sistem de vectori liniar independent.

1.2. Arătăm că B_W este un sistem de generatori în B_W. Fie $w \in W$. Cum f este surjectivă, rezultă că există $v \in V$ astfel ca $f(v) = w$. Atunci există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ astfel ca $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, deci

$$w = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \cdots + \alpha_n f(v_n),$$

adică w este combinaţie liniară a vectorilor din B_W.

2. Să presupunem acum că $\dim V = \dim W = n$. Fie $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază în V şi $B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ o bază în W. Ca în exemplul precedent se arată că $f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2, \ldots, f(v_n) = w_n$ definesc un izomorfism între cele două spaţii. De aceea $V \cong W$.

Exemplul 3.1.14. Conform propoziţiei precedente, dacă V_n este un spaţiu real (de dimensiune n) atunci $V \cong \mathbb{R}^n$. Să construim un izomorfism între cele două spaţii. Fie $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază în V_n şi $B_c = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^n$. Fie (vezi Exemplul 3.1.11) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ un vector din V_n. Definim

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) := \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Se verifică imediat că $f \in \mathcal{L}(V_n, \mathbb{R}^n)$. Analog, dacă $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ este un vector arbitrar din $\mathbb{R}^n$ definim

$$g(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) := \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Deoarece $f \circ g = id_{\mathbb{R}^n}$ iar $g \circ f = id_{V_n}$ rezultă că f este bijectivă iar inversa sa este aplicaţia liniară g.

Propoziţia 3.1.8. *Dacă $U \cong V$ şi $V \cong W$ atunci $U \cong W$.*

3.2. Subspaţii asociate aplicaţiilor liniare

Aplicaţiei liniare de la Exemplul 3.1.5 îi putem asocia mulţimea tuturor vectorilor din domeniu a căror imagine este vectorul nul:
$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid L(x_1, x_2, x_3) = (0,0)\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\} = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$
Acesta este un subspaţiu important al domeniului de definiţie: *nucleul aplicaţiei L.*

Definiţia 3.2.1. Definiţia nucleului. Fie $L \in \mathcal{L}(V, W)$. Mulţimea

$$\ker L := \{v \in V \mid L(v) = \theta_W\}$$

se numeste *nucleul aplicaţiei liniare L.*

Nucleul unei aplicaţii liniare este subspaţiu al domeniului de definiţie.

Propoziţia 3.2.1. *Dacă $L \in \mathcal{L}(V, W)$ atunci* $\ker L \le V$.
Dimensiunea nucleului aplicaţiei liniare L se numeşte ***defectul*** *acestei aplicaţii.*

Exemplul 3.2.1. Dacă L este aplicaţia definită la Exemplul 3.1.5, atunci $\dim\ker L = 1$. Într-adevăr, cum $L(x_1, x_2, x_3) := (x_1 - x_2, x_2 - x_3,)$ avem succesiv:
$L(x_1, x_2, x_3) = (0,0) \Leftrightarrow (x_1 - x_2, x_2 - x_3) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3.$

Deci

$\ker L = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x\,(1,1,1) \mid x \in \mathbb{R}\} = span\,\{(1,1,1)\}$,
iar $\{(1,1,1)\}$ este o bază pentru $\ker L$. Prin urmare $\dim \ker L = 1$.

Reamintim că dacă $f : A \to B$ este o funcţie, atunci ***imaginea*** *s*a este $\operatorname{Im} f = f\,(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A : f\,(a) = b\}$. Imaginea unei aplicaţii liniare este un subspaţiu al codomeniului său.

Propoziţia 3.2.2. *Dacă* $L \in \mathcal{L}\,(V,W)$ *atunci* $\operatorname{Im} L \leq W$. *Dimensiunea imaginii aplicaţiei* L *se numeşte* ***rangul*** *acestei aplicaţii.*

Exemplul 3.2.2. Dacă L este aplicaţia definită la Exemplul 3.1.5, atunci $\dim \operatorname{Im} L = 2$. Într-adevăr, cum $L\,(x_1,x_2,x_3) := (x_1 - x_2, x_2 - x_3,)$, imaginea este
$\operatorname{Im} L = \{(x_1 - x_2, x_2 - x_3,) \mid x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\} =$
$=\{x_1\,(1,0) + x_2\,(-1,1) + x_3\,(0,-1)\} = span\,\{(1,0)\,,(-1,1)\,,(0,-1)\}$.
Prin urmare $\{(1,0)\,,(-1,1)\}$ este o bază a imaginii, deci $\dim \operatorname{Im} L = 2$, şi, în consecinţă, $\operatorname{Im} L = \mathbb{R}^2$.

Din exemplele 3.2.1 şi 3.2.2 observăm că dimensiunea domeniului de definiţie al aplicaţiei L este suma dintre defectul şi rangul acestei transformări liniare. Proprietatea este valabilă pentru orice aplicaţie liniară.

Teorema 3.2.1. Teorema dimensiunii. Dacă $L \in \mathcal{L}\,(V,W)$ *atunci* $\dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L = \dim V$.

Exemplul 3.2.3. Fie $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2\right), f(x,y,z) := (x+y+z, x-z)$. Să determinăm $\dim \ker f$ şi $\dim \operatorname{Im} f$.
Deoarece
$\ker f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x+y+z, x-z) = (0,0)\right\} =$
$= \left\{(x,-2x,x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = span\,((1,-1,1))$,
rezultă că $\dim \ker f = 1$. Din teorema precedentă decurge imediat că $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2$.
Mai mult, cum $\operatorname{Im} f \leq \mathbb{R}^2$ şi $\dim \operatorname{Im} f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, rezultă că $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, adică f este surjectivă.

Propoziţia 3.2.3. *Fie* $L \in \mathcal{L}\,(V,W)$. *Atunci*

a. *L este injectivă dacă şi numai dacă* $\ker L = \{\theta_V\}$.

b. $V \cong W$ *dacă şi numai dacă* $\exists f \in \mathcal{L}\,(V,W)$ *astfel încît* $\ker f = \{\theta_V\}$ *şi* $\operatorname{Im} f = W$.

3.3. Matricea unei aplicaţii liniare

Am văzut că între spaţiile între $\mathbb{R}^{m\times n}$ şi $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ există o legătură (vezi Propoziţia 3.1.5). Aprofundăm această legătură esenţială dintre matrice şi aplicaţiile liniare.

Definitie 3.3.1. Matricea unei aplicaţii liniare. Fie $V/K, W/K$ două spaţii vectoriale, $f \in \mathcal{L}(V, W)$, $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ o bază în V şi $B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ o bază în W. Ştim că expresia analitică a transformării f este perfect determinată de acţiunea acesteia pe B_V. De aceea vom ataşa aplicaţiei f o *matrice care are pe coloane coordonatele vectorilor* $f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)$ în baza B_W, adică o matrice cu m linii şi n coloane din $K^{m\times n}$. Prin urmare există şi sunt unici scalarii $a_{ij} \in K$ astfel încât

$$\begin{cases} f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_1 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{cases}$$

Matricea

$$f_{B_V B_W} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

se numeşte ***matricea transformării liniare*** f ***în perechea de baze*** B_V, B_W. Dacă $f \in \mathcal{L}(V)$, prin ***matricea operatorului*** f în baza B_V înţelegem matricea $f_{B_V} := f_{B_V B_V}$.

Expresia analitică a unei transformări liniare f se poate exprima elegant matriceal folosind matricea aplicaţiei f *într-o pereche de baze.*

Propoziţia 3.3.1. *Fie $f \in \mathcal{L}(V, W)$ şi $f_{B_V B_W}$ matricea ei în perechea de baze B_V, B_W. Dacă $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \in V$ şi $f(v) = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_mw_m$ atunci*

$$f(v)_{B_W} = f_{B_V B_W} \cdot v_{B_V}$$

unde $v_{B_V} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *şi* $f(v)_{B_W} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$.

Exemplul 3.3.1. Fie aplicaţia $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2), f(x, y, z) := (x+y+z, x-z)$ de la Exemplul 3.2.3. Să construim matricea sa în perechea de baze canonice $B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$, $B' = \{e_1' = (1,0), e_2' = (0,1)\}$. Deoarece

$$f(e_1) = (1,1) = (1,0) + (0,1) = 1 \cdot e_1' + 1 \cdot e_2'$$

$$f(e_2) = (1,0) = 1 \cdot e_1' + 0 \cdot e_2'$$
$$f(e_3) = (1,-1) = (1,0) - (0,1) = 1 \cdot e_1' - 1 \cdot e_2'$$

înseamnă că
$$f_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să verificăm expresia analitică matriceală dată în propoziţia precedentă. Dacă $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ atunci $v_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Deoarece $f(v) = (x+y+z)\, e_1' + (x-z)\, e_2'$, avem $f(v)_{B'} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \end{pmatrix} = f_{BB'}.v_B$.

Să mai remarcăm faptul că rangul aplicaţiei f coincide cu rangul matricei $f_{BB'}$:

$$\operatorname{rang}(f_{BB'}) = \dim \operatorname{Im} f.$$

De asemenea defectul aplicaţiei coincide cu dimensiunea subspaţiului nul al matricei aplicaţiei f:
$$\dim Null\,(f_{BB'}) = \dim \ker f.$$

Aceaste egalităţi sunt valabile pentru orice aplicaţie liniară.

Propoziţia 3.3.2. *Fie $f \in \mathcal{L}(V,W)$ şi $f_{B_V B_W}$ matricea ei în perechea de baze B_V, B_W. Atunci rangul aplicaţiei f coincide cu rangul matricei $f_{B_V B_W}$, iar defectul aplicaţiei f coincide cu* $\dim Null\,(f_{B_V B_W})$.

Exemplul 3.3.2. Să determinăm defectul şi rangul aplicaţiei

$$f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^2\right),\ f(c + bx + ax^2) := (a+b+c,\ c-a).$$

Deoarece matricea aplicaţiei f în perechea de baze canonice $B = \left\{1, x, x^2\right\}$ $B' = \{(1,0),(0,1)\}$ este $f_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, din Exemplul 3.3.1 rezultă că rangul aplicaţiei este egal cu 2, iar defectul ei este egal cu 1 (vezi şi Exemplul 3.1.13).

Matricea compusei a două aplicaţii liniare coincide cu produsul matricelor celor două transformări liniare.

Propoziţia 3.3.3. ***Matricea compusei şi matricea inversei.*** *Fie $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ şi $g \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$, B_1 o bază în V_1, B_2 o bază în V_2 şi B_3 o bază în V_3. Atunci*

$$(g \circ f)_{B_1 B_3} = g_{B_2 B_3} \cdot f_{B_1 B_2}.$$

Dacă f este izomorfism, atunci matricea $f_{B_1 B_2}$ este inversabilă şi

$$f^{-1}_{B_2 B_1} = (f_{B_1 B_2})^{-1}.$$

Propoziţia 3.3.4. ***Schimbarea bazelor.*** *Fie $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, B_1, B_1' două baze în V_1 şi B_2, B_2' două baze în V_2. Atunci*

$$f_{B_1' B_2'} = T^{-1}_{B_2 B_2'} \cdot f_{B_1 B_2} \cdot T_{B_1 B_1'}$$

unde $T_{B_1 B_1'}$ este matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_1', iar $T_{B_2 B_2'}$ este matricea de trecere de la baza B_2 la baza B_2'.

Exemplul 3.3.3. Să se determine matricea aplicaţiei (de la Exemplul 3.3.1) $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right), f(x,y,z) := (x+y+z, x-z)$ în perechea de baze $B_1 = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,0,1)$ $\{w_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\}$.

Vom folosi rezultatul de la Exemplul 3.3.1 şi propoziţia precedentă. Cum matricea de trecere de baza canonică B din $\mathbb{R}^3$ la baza B_1 este

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea de trecere de baza canonică B' din $\mathbb{R}^2$ la baza B_2 este

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

rezultă că

$$f_{B_1 B_2} = T_2^{-1} f_{BB'} T_1 = T_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T_2^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru ultimul produs aplicăm tehnica transformărilor elementare pe linie:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1 \end{array}\right).$$

Prin urmare $f_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$.

B. PROBLEME REZOLVATE

1. Stabiliţi care din funcţiile de mai jos sunt aplicaţii liniare:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x - y,\ 2x + 7y,\ 2x + 1)$

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x,\ x^2)$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - 2y,\ x + 3y + 2z,\ 0)$.

Soluţie.
(a) O aplicaţie liniară $f : V \longrightarrow W$ satisface relaţia $f(\theta_V) = \theta_W$. Deoarece $f(0, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$, f nu este liniară.
(b) $f(ax) = (2ax, a^2x^2)$, pe când $af(x) = (2ax, ax^2)$; aşadar, pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}$, $f(ax) \neq af(x)$, deci f nu este liniară.
(c) Avem de verificat că $f(x + x',\ y + y',\ z + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$ şi $f(ax, ay, az) = af(x, y, z)$, $\forall\, (x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$.
• $f(x+x',\ y+y',\ z+z') = \big((x+x') - 2(y+y'),\ (x+x') + 3(y+y') + 2(z+z'),\ 0\big) = (x - 2y + x' - 2y',\ x + 3y + 2z + x' + 3y' + 2z',\ 0) = (x - 2y,\ x + 3y + 2z,\ 0) + (x' - 2y',\ x' + 3y' + 2z',\ 0) = f(x, y, z) + f(x', y', z')$
• $f(ax, ay, az) = (ax - 2ay,\ ax + 3ay + 2az,\ 0) = a(x - 2y,\ x + 3y + 2z,\ 0) = af(x, y, z)$.

2. Determinaţi forma generală a unei aplicaţii liniare
(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, (b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, (c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.
Soluţie.
(a) Notând $f(1) = a$, avem $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = ax$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Reciproc, se verifică imediat că toate funcţiile de forma $f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R}$, sunt liniare.
(b) Notând $f(1, 0) = a$ şi $f(0, 1) = b$, avem $f(x, y) = f\big(x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1)\big) = x \cdot f(1, 0) + y \cdot f(0, 1) = ax + by$. Reciproc, se verifică imediat că toate funcţiile de forma $f(x, y) = ax + by,\ a, b \in \mathbb{R}$, sunt liniare.
(c) Notând $f(1) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, avem $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot (a, b) = (ax, bx)$. Reciproc, se verifică imediat că toate funcţiile de forma $f(x) = (ax, bx),\ a, b \in \mathbb{R}$, sunt liniare.

3. Arătaţi că dacă $f, g : V_1/K \longrightarrow V_2/K$ sunt aplicaţii liniare, iar dacă $\alpha, \beta \in K$, atunci şi $\alpha f + \beta g$ este aplicaţie liniară.
Soluţie.
Fie $x, y \in V_1$ şi $a, b \in K$, arbitrare. Atunci $(\alpha f + \beta g)(ax + by) = \alpha f(ax + by) + \beta g(ax + by) = \alpha\big(af(x) + bf(y)\big) + \beta\big(ag(x) + bg(y)\big) = a\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big) + b\big(\alpha f(y) + \beta g(y)\big) = a\big(\alpha f + \beta g\big)(x) + b\big(\alpha f + \beta g\big)(y)$, ceea ce arată că $\alpha f + \beta g$ este liniară.

4. Fie V_1/K, V_2/K şi V_3/K trei spaţii vectoriale şi $f : V_1 \longrightarrow V_2$ şi $g : V_2 \longrightarrow V_3$ două aplicaţii liniare. Arătaţi că $g \circ f : V_1 \longrightarrow V_3$ este o aplicaţie liniară.
Soluţie.
Fie $x, y \in V_1$ şi $a, b \in K$, arbitrare. Atunci $(g \circ f)(ax + by) = g\big(f(ax + by)\big) = g\big(af(x) + bf(y)\big) = ag\big(f(x)\big) + bg\big(f(y)\big) = a(g \circ f)(x) + b(g \circ f)(y)$, deci $g \circ f$ este liniară.

5. Determinaţi expresia analitică a aplicaţiei liniare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dacă
(a) $f(1,0) = (1,2)$ şi $f(0,1) = (-1,2)$;
(b) $f(1,1) = (2,3)$ şi $f(3,1) = (4,5)$.
Soluţie.
(a) Pentru a determina $f(x,y)$ pornind de la valorile lui f pe vectorii bazei canonice, folosim scrierea lui (x,y) în baza canonică: $(x,y) = x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)$. Astfel, $f(x,y) = f\big(x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)\big) = x \cdot f(1,0) + y \cdot f(0,1) = x \cdot (1,2) + y \cdot (-1,2) = (x-y,\, 2x+2y)$.
(b) Pentru a determina $f(x,y)$ pornind de la valorile lui f pe vectorii bazei formate cu vectorii $(1,1)$ şi $(3,1)$, folosim scrierea lui (x,y) în această bază. Fie $(x,y) = a(1,1) + b(3,1)$, adică $(x,y) = (a+3b,\, a+b)$. Rezolvând acest sistem (cu necunoscutele a,b), obţinem $a = \dfrac{3y-x}{2}$ şi $b = \dfrac{x-y}{2}$. Folosind această scriere, avem $f(x,y) = f\left(\dfrac{3y-x}{2} \cdot (1,1) + \dfrac{x-y}{2} \cdot (3,1)\right) = \dfrac{3y-x}{2} \cdot f(1,1) + \dfrac{x-y}{2} \cdot f(3,1) = \dfrac{3y-x}{2} \cdot (2,3) + \dfrac{x-y}{2} \cdot (4,5) =$
$\left(\dfrac{3y-x}{2} \cdot 2 + \dfrac{x-y}{2} \cdot 4,\ \dfrac{3y-x}{2} \cdot 3 + \dfrac{x-y}{2} \cdot 5\right) = (x+y,\, x+2y)$.

6. Scrieţi matricea aplicaţiei liniare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+2y,\, x+y-z)$ relativ la bazele B_1 şi B_2, dacă:
(a) $B_1 = \{(1,2,0),\ (1,0,0),\ (1,2,3)\}$, $B_2 = \{(1,0),\ (0,1)\}$;
(b) $B_1 = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$, $B_2 = \{(1,2),\ (1,0)\}$.
Soluţie.
(a) Calculăm valorile lui f pe vectorii bazei B_1: $f(1,2,0) = (5,3)$, $f(1,0,0) = (1,1)$, $f(1,2,3) = (5,0)$. Apoi exprimăm aceşti vectori în baza B_2: $(5,3) = 5\cdot(1,0)+3\cdot(0,1)$, $(1,1) = 1\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)$, $(5,0) = 5\cdot(1,0)+0\cdot(0,1)$.
Matricea lui f relativ la bazele B_1, B_2 este $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(b) Calculăm valorile lui f pe vectorii bazei B_1: $f(1,0,0) = (1,1)$, $f(0,1,0) = (2,1)$, $f(0,0,1) = (0,-1)$. Apoi exprimăm aceşti vectori în baza B_2: $(1,1) = a \cdot (1,2) + b \cdot (1,0)$ implică $a = b = \dfrac{1}{2}$; $(2,1) = c \cdot (1,2) + d \cdot (1,0)$ implică $c = \dfrac{1}{2}$, $d = \dfrac{3}{2}$; $(0,-1) = e \cdot (1,2) + g \cdot (1,0)$ implică $e = -\dfrac{1}{2}$, $g = \dfrac{1}{2}$.
Matricea lui f relativ la bazele B_1, B_2 este $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

7. Pentru fiecare din aplicaţiile liniare de mai jos, calculaţi $\ker f$ şi deduceţi dacă f este injectivă, apoi dacă f este surjectivă.
(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$, $f(a,b) = (a-b)X - (a+b)$
(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(a,b) = (a+b, a+2b, a+3b)$
(c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(a,b,c) = (a+b, a+c)$

(d) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(aX^2 + bX + c) = (a - b,\, b - c,\, c - a)$.
Soluţie.
(a) $\ker f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a - b)X - (a + b) = 0\}$. Atenţie, este vorba de o egalitate de polinoame, nu de o ecuaţie. Două polinoame sunt egale dacă au aceiaşi coeficienţi, deci $\ker f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a - b = 0,\ a + b = 0\}$. Rezolvând acest (banal) sistem, obţinem $a = b = 0$, deci $\ker f = \{(0, 0)\}$ ceea ce arată că f este injectivă. Deoarece $\dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f = \dim\mathbb{R}^2$, deducem că $\dim\operatorname{Im} f = 2$. Cum $\operatorname{Im} f$ este un subspaţiu de dimensiune 2 al lui $\mathbb{R}_1[X]$ care este un spaţiu de dimensiune 2, rezultă că $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_1[X]$, deci f este şi surjectivă, adică f este un izomorfism.
(b) $\ker f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid f(a, b) = (0, 0, 0)\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid (a + b,\, a + 2b,\, a + 3b) = (0, 0, 0)\}$. Obţinem, ca de obicei, un sistem liniar şi omogen. De astă dată sistemul are 3 ecuaţii şi două necunoscute, a şi b. Găsim imediat că $a = b = 0$ este unica soluţie a acestui sistem, deci $\ker f = \{(0, 0)\}$ ceea ce arată că f este injectivă. Deoarece $\dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f = \dim\mathbb{R}^2$, deducem că $\dim\operatorname{Im} f = 2 < 3 = \dim\mathbb{R}^3$, deci f nu este surjectivă.
(c) $\ker f = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid f(a, b, c) = (0, 0)\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (a + b, a + c) = (0, 0)\}$. Ajungem din nou la un sistem liniar şi omogen, de astă dată cu două ecuaţii şi trei necunoscute: $a + b = 0$, $a + c = 0$. Mulţimea soluţiilor acestui sistem este $\ker f = \{(m, -m, -m) \mid m \in \mathbb{R}\} = span(1, -1, -1)$, deci $\dim\ker f = 1$. Deducem mai intâi că f nu este injectivă. Apoi, deoarece $\dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f = \dim\mathbb{R}^3$, deducem că $\dim\operatorname{Im} f = 2 = \dim\mathbb{R}^2$, deci f este surjectivă.
(d) $\ker f = \{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid f(aX^2 + bX + c) = (0, 0, 0)\} =$
$\{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid (a - b,\ b - c,\ c - a) = (0, 0, 0)\} =$
$\{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid a - b = 0,\ b - c = 0,\ c - a = 0\} =$
$\{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \mid a = b = c\} =$
$\{mX^2 + mX + m \in \mathbb{R}_2[X] \mid m \in \mathbb{R}\} = span(X^2 + X + 1)$,
deci $\dim\ker f = 1$ (aşadar f nu este injectivă). Din $\dim\ker f + \dim\operatorname{Im} f = \dim\mathbb{R}_2[X]$ deducem că $\dim\operatorname{Im} f = 2 < 3 = \dim\mathbb{R}^3$, deci f nu este nici injectivă şi nici surjectivă.

8. Stabiliţi dacă aplicaţiile liniare definite mai jos sunt sau nu izomorfisme.
(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$, $f(a, b) = (a + b)X^2 - aX - b$;
(b) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a - b & b - c \\ c - d & d - a \end{pmatrix}$;
(c) $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(aX^2 + bX + c) = (a, a + b, a + b + c)$.
Soluţie.
(a) Faptul că f nu este izomorfism se poate demonstra în foarte multe feluri:
- $\dim\mathbb{R}^2 = 2 \neq 3 = \dim\mathbb{R}_2[X]$, deci între cele două spaţii nu poate exista niciun izomorfism
- f nu este surjectivă deoarece în imagine sunt numai polinoame care au suma coeficienţilor 0.
(b) Deoarece $\dim\mathbb{R}^4 = 4 = \dim\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, f este injectivă dacă şi numai dacă ea este surjectivă. Pentru a studia injectivitatea, sau surjectivitatea, putem

calcula $\ker f$ (respectiv $\operatorname{Im} f$). În cazul de faţă, ar fi mai simplu să observăm că $f(1,1,1,1) = O_2 = f(0,0,0,0)$, deci f nu este injectivă, prin urmare f nu este izomorfism. În lipsa unei asemenea observaţii putem calcula $ker\, f = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid f(a,b,c,d) = O_2\} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a-b = b-c = c-d = d-a = 0\} = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = b = c = d\} = \{(t,t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\} \neq \{(0,0,0,0)\}$, deci f nu este injectivă; alternativ, se poate determina $\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \mid u+v+w+x = 0 \right\} \neq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, deci f nu este nici surjectivă.
(c) Deoarece $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, pentru a demonstra că f este izomorfism este suficient să arătăm că f este injectivă, adică $\ker f = \{0\}$. Avem $f(aX^2 + bX + c) = (0,0,0) \Leftrightarrow (a, a+b, a+b+c) = (0,0,0) \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Leftrightarrow aX^2 + bX + c \equiv 0$ adică $\ker f = \{0\}$. Aşadar f este injectivă, deci bijectivă, adică izomorfism.

C. PROBLEME PROPUSE

1. Dovediţi că următoarele aplicaţii sunt liniare.

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) := (x+y,\ x-y,\ 0)\,;$
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) := (x+y+z,\ x-y)\,;$
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) := (x+y+z,\ x-y,\ x+z)\,.$

2. Dovediţi că următoarele aplicaţii nu sunt liniare.

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) := \big(x^2+y,\ x-y,\ 0\big)\,;$
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) := (x+y+z,\ xy)\,;$
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) := (yz,\ xy,\ xz)\,.$

3. Demonstraţi Propoziţia 3.1.1.

4. Care dintre următoarele funcţii sunt aplicaţii liniare?

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}$;
   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$, unde $a \in \mathbb{R}$;
   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a$, unde $a \in \mathbb{R}$;
   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$;
   (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x - y$;
   (f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x - y^2$;
   (g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x - y + 1$;

(h) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=ax+by+c$, unde, $a,b,c\in\mathbb{R}$;

(i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=(x,2x)$;

(j) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=(ax+b,cx+d)$, unde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$;

(k) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(x,y,a+y)$, unde $a\in\mathbb{R}$.

(l) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $f(x,y)=(\sin x,\cos y,y)$.

Răspuns. (a) da, $\forall\, a\in\mathbb{R}$; (b) pentru $a=0$; (c) pentru $a=0$; (d) pentru $b=0$; (e) da; (f) nu; (g) nu; (h) pentru $c=0$; (i) da; (j) pentru $b=d=0$; (k) pentru $a=0$; (l) nu.

5. Dovediţi că următoarele aplicaţii sunt liniare.

(a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^{3\times 2},\;\; f(x,y):=\begin{pmatrix} x & 3y\\ -x & 0\\ 2y & x\end{pmatrix}$;

(b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^{2\times 2},\;\; f(x,y,z):=\begin{pmatrix} x & x+z\\ z-3y & x-y\end{pmatrix}$;

(c) $f:\mathbb{R}^{3\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 3},\;\; f(A):=A^T$;

(d) $f:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_4[x],\;\; f(p):=q$, unde $q(x):=p\left(x^2\right)$;

(e) $f:\mathbb{R}_4[x]\to\mathbb{R}_2[x],\;\; f(p):=p''$.

6. Dovediţi că următoarele aplicaţii nu sunt liniare.

(a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^{3\times 2},\;\; f(x,y):=\begin{pmatrix} x & 3y\\ -x & 0\\ 2y & xy\end{pmatrix}$;

(b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^{2\times 2},\;\; f(x,y,z):=\begin{pmatrix} x & x+z\\ z-3y & x-y+1\end{pmatrix}$;

(c) $f:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2},\;\; f(A):=A^2$.

(d) $f:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_4[x],\;\; f(p):=p^2$;

(e) $f:\mathbb{R}_4[x]\to\mathbb{R}_2[x],\;\; f(p):=p'''\cdot p'''$.

7. Să se determine expresia analitică a aplicaţiei liniare $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ şi numerele m,n cunoscând că matricea aplicaţiei în perechea de baze canonice este:

(a) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

8. Demonstraţi Propoziţia 3.1.6.

9. Să se determine matricea aplicaţiei liniare $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ şi numerele m, n cunoscând că expresia analitică în perechea de baze canonice este:

   (a) $f(x) = 3x$;

   (b) $f(x) = (3x, -x)$;

   (c) $f(x, y) = 3x - y$;

   (d) $f(x, y) = (3x - y, x)$;

   (e) $f(x, y) = (3x - y, x, 2y)$;

   (f) $f(x, y, z) = (3x - y, x + z)$;

   (g) $f(x, y, z) = (3x - y, x + z, x + y + z)$.

10. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x - y,\ y,\ 2x + y)$. Să se arate că această funcţie este aplicaţie liniară, apoi să se determine nucleul şi imaginea sa.

    Răspuns. $\{(0,0)\}; \{(a - b,\, b,\, 2a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

11. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - y,\ y - z,\ z - x)$. Să se arate că $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ şi să se determine defectul şi rangul aplicaţiei f.

    Răspuns. 1, respectiv 2.

12. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x - y,\ y,\ 2x + y)$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $g(x, y, z) = (x - y,\ 2x + y,\ y + z,\ x - z)$ şi B_2, B_3, B_4 bazele canonice ale spaţiilor $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$. Să se determine matricea

    (a) aplicaţiei f în perechea de baze B_2, B_3;

    (b) aplicaţiei g în perechea de baze B_3, B_4;

    (c) aplicaţiei $g \circ f$ în perechea de baze B_2, B_4;

    (d) aplicaţiei $g \circ f$ în perechea de baze $\{(1,1), (1,-1)\}$, $\{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1)\, (1,0,0,1)\}$.

13. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x + y, y + az, z + bx)$. Să se arate că această funcţie este aplicaţie liniară, apoi să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât defectul ei să fie 1.

    Răspuns. $ab + 1 = 0$

14. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & y & z \end{pmatrix}$.

(a) Să se arate că aplicaţia definită este liniară.

(b) Să se determine o bază a imaginii aplicaţiei f.

(c) Să se calculeze defectul acestei aplicaţii.

(d) Să se scrie matricea aplicaţiei în bazele canonice.

(e) În baza canonică din $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ interschimbăm primii doi vectori, iar în baza canonică din $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ înlocuim al doilea vector cu suma primilor doi. Care este matricea aplicaţiei f în noile baze?

Răspuns. (b). $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; (c). 0;

(d). $[f]=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; (e). $[f]_{B_1'B_2'}=E_{21}(-1)[f]P_{(1,2)}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

15. Fie $f : V \to W$ o aplicaţie liniară. Să se arate că:

(a) $\ker f \leq V$;

(b) $\operatorname{Im} f \leq W$;

(c) $f(U) \leq \operatorname{Im} f$ pentru orice $U \leq V$.

16. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine constanta a astfel încât funcţia f să fie izomorfism.

Răspuns. $a \in \mathbb{R}^*$.

17. Este aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y, x+y)$ un automorfism al spaţiului $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$?

Răspuns. Da, deoarece defectul aplicaţiei este nul.

18. Să se determine constantele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât aplicaţia liniară $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (ax + b, cx + d)$

(a) să fie izomorfism;

(b) să aibă, în bazele canonice, matricea $\begin{pmatrix}1\\13\end{pmatrix}$.

Răspuns. (a) $a, b, c, d \in \varnothing$. (b) $a = 1, b = 0, c = 13, d = 0$.

19. Fie V_1/K si V_2/K două spaţii vectoriale. Arătaţi că $\mathcal{L}(V_1, V_2) \simeq K^{n\times m}$, unde $n := \dim(V_1)$ si $m := \dim(V_2)$.

20. Să se determine constantele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât aplicaţia liniară $f : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, $f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix}ax & by\\cz & dt\end{pmatrix}$

(a) să fie izomorfism;

(b) să aibă, în bazele canonice, matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Răspuns. (a) $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$; (b) $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$.

21. Demonstraţi Propoziţia 3.1.7.

22. Să se determine constantele $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât operatorul liniar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ să fie automorfism, apoi să se determine matricea acestuia în baza canonică .
Răspuns. $ad \neq bc$; $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

23. Arătaţi că există un singur operator liniar al spaţiului real tridimensional care asigură următoarele transformări (vectorii sunt daţi prin coordonatele lor într-o anumită bază):
$(2, 3, 5) \mapsto (1, 1, 1)$, $(0, 1, 2) \mapsto (1, 1, -1)$, $(1, 0, 0) \mapsto (2, 1, 2)$;
determinaţi matricea operatorului în baza în care sunt date coordonatele vectorilor.
Răspuns. $\begin{pmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

24. Să se determine dimensiunea spaţiului $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})/\mathbb{R}$.

25. Să se dea un câte exemplu de aplicaţie liniară $L \in \mathcal{L}\left(\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}\right)$

    (a) care să fie izomorfism;

    (b) care să nu fie izomorfism.

26. Demonstraţi Propoziţia 3.1.8.

27. Să se determine dimensiunea spaţiului $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})/\mathbb{R}$.

28. Să se dea un câte exemplu de aplicaţie liniară $L \in \mathcal{L}\left(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \mathbb{R}_1[x]\right)$

    (a) care să fie izomorfism;

    (b) care să nu fie izomorfism.

29. Studiaţi dacă $f(x, y, z) := \begin{cases} (x, y), & \text{dacă } z = 13x - y \\ (0, 0), & \text{dacă } z \neq 13x - y \end{cases}$ defineşte o aplicaţie liniară $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

30. Se ştie că o aplicaţie liniară între spaţiile vectoriale $\mathbb{R}_2[x]/\mathbb{R}$ şi $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$ realizează transformările: $1 \mapsto 1 + x$, $x \mapsto 1 + 2x$, $x^2 \mapsto 1 + x^3$.

(a) În ce se transformă vectorul $1 - 13x + 23x^2$?

(b) Care este matricea acestei aplicaţii în bazele canonice?

(c) Determinaţi rangul acestei aplicaţii liniare.

31. Demonstraţi Propoziţia 3.3.2.

32. Fie $B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ şi
$B' = \left\{ e_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ baze în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$, iar $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ astfel încât $f(e_1) = e_1' - e_2'$, $f(e_2) = e_2'$, $f(e_3) = -e_1' + e_2'$.

    (a) Să se scrie matricea aplicaţiei f în perechea de baze B, B'.

    (b) Să se determine $f(e_1 - e_2 + e_3)$.

    (c) Să se calculeze defectul aplicaţiei f.

    (d) Să se scrie matricea aplicaţiei în bazele canonice.

33. Fie W/K şi V/K două spaţii vectoriale. Să se arate că spaţiile date sunt izomorfe dacă şi numai dacă ele au aceaşi dimensiune.

34. * Fie $V_1, V_2, \ldots, V_n$ şi W spaţii vectoriale peste corpul K, $V = V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ spaţiul produs şi $f : V \to W$ o funcţie. Arătaţi că $f \in \mathcal{L}(V, W)$ dacă şi numai dacă există $f_1 \in \mathcal{L}(V_1, W), \ldots, f_n \in \mathcal{L}(V_n, W)$ astfel încât $f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = f_1(v_1) + f_2(v_2) + \cdots + f_n(v_n)$.

35. * Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care există $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_n[x])$ a cărei matrice în bazele canonice este matricea unitate.

36. * Fie f o aplicaţie liniară. Să se arate că funcţia f este injectivă dacă şi numai dacă nucleul său este subspaţiul nul.

37. * O aplicaţie liniară între două spaţii reale are matricea $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Să se determine numerele pozitive a, b, c astfel ca aplicaţia să nu fie surjectivă.

    Răspuns. $a = b = c \in (0, \infty)$.

38. * Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $f(x, y) = (x - ay,\ y - ax,\ y - x)$. Să se determine $a \in \mathbb{N}$ şi $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ astfel încât $g \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}$ şi $g(1, 0, 0) = g(1, 1, 0) \in \mathbb{N}^2$.

    Răspuns. $a = 0$, $g(x, y, z) := (x,\ x + z)$.

39. * Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ şi $f \circ g = h$, unde $g(x, y) = (x + y,\ x - y)$ şi $h(x, y) = (2x,\ 2y,\ 3x + y)$. Să se determine matricea aplicaţiei f în perechea de baze $B = \{(-3, 7),\ (1, -2)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1),\ (1, -1, 1),\ (1, 1, -1)\}$.

4 VALORI PROPRII ŞI VECTORI PROPRII

Problematica pe care o abordăm în acest capitol are aplicaţii în cele mai diverse domenii. Folosim valori şi vectori proprii pentru optimizarea sistemelor mari, în ierarhizarea paginilor web, în orice analiză de reţele (electrice, de calculatoare, sociale, neuronale, etc.), ori pentru determinarea pragului de infectare a unui sistem.

Dar, probabil, cele mai importante aplicaţii ale acestor concepte sunt în rezolvarea problemelor de echilibru pentru ecuaţii de forma $Ax = y$, unde A este o matrice pătratică, în conexiune cu problemele de dinamică pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale de forma $\dfrac{dX}{dt} = AX$; soluţia unui astfel de sistem - care de regulă nu poate fi determinată prin metoda eliminării -, oscilează în funcţie de timpul t.

O bună soluţionare a unor asemenea probleme se bazează pe *determinarea unor scalari λ şi a unor matrice coloană nenule x astfel ca $Ax = \lambda x$.* Aceasta este problema centrală pe care o abordăm în cele ce urmează, iar rezolvarea ei este esenţial legată de depistarea de tehnici simple de calcul al puterilor A^2, A^3, $A^4, \ldots, A^m$ ale matricei A.

A. TEORIE

4.1. Operatori. Problema diagonalizării

Un răspuns parţial la problema calculului matricei A^m este dat de metoda diagonalizării.

*Peste tot în cele ce urmează V este un spaţiu vectorial peste corpul $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, iar $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ şi $B' = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ sunt două baze în acest spaţiu. Reamintim că o funcţie liniară $L : V \to V$ se numeşte **operator liniar** (al spaţiului V), iar mulţimea operatorilor liniari ai spaţiului V o notăm cu $\mathcal{L}(V)$ (în loc de $\mathcal{L}(V, V)$). Numim **matrice a operatorului** L în baza B şi o notăm L_B matricea pătratică a aplicaţiei L în perechea de baze B, B, i.e. $L_B := L_{BB}$. Un operator liniar şi bijectiv al spaţiului V se numeşte **automorfism** (al spaţiului V).*

Un subspaţiu W al spaţiului vectorial V se numeşte **subspaţiu invariant** al lui T (sau **subspaţiu T-invariant**) dacă $T(W) \subseteq W$, adică dacă $T(w) \in W$, $\forall\, w \in W$. De exemplu, $\{\theta_V\}$ şi V sunt subspaţii invariante ale lui T.

Deoarece operatorii liniari sunt aplicaţii liniare, prin particularizare, obţinem următoarele proprietăţi.

Propoziţia 4.1.1. *Fie* $f \in \mathcal{L}(V)$, $g \in \mathcal{L}(V)$ *şi* $T_{BB'}$ *matricea de trecere de la baza* B *la baza* B'.

1. $f_B \in K^{n\times n}$.
2. $f \circ g,\ g \circ f \in \mathcal{L}(V)$ şi $(f \circ g)_B = f_B \cdot g_B$.
3. $f_{B'} = T_{BB'}^{-1} \cdot f_B \cdot T_{BB'}$.
4. *Orice matrice* $A \in K^{n\times n}$ *defineşte în mod unic un operator* $h \in \mathcal{L}(V)$ *pentru care* $A = h_B$; *expresia sa analitică este* $h(v) = y_1v_1 + y_2v_2 + \cdots + y_nv_n$, *unde* $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n \in V$, *iar* $Av_B := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_2 \end{pmatrix}$.
5. f *este automorfism dacă şi numai dacă* f_B *este nesingulară; în acest caz matricea operatorului* f^{-1} *este inversa matricei operatorului* f, *adică* $\left(f^{-1}\right)_B = (f_B)^{-1}$.

Definiţia 4.1.1. Matrice diagonală. *O matrice de forma*

$$D := diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

în care cel puţin unul dintre scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *este nenul se numeşte* ***matrice diagonală***.

Problema diagonalizării. Ne punem problema depistării unui procedeu de calcul eficient al matricei A^m, unde A este o matrice pătratică, iar m este un număr întreg pozitiv. Dacă D este matricea diagonală din definiţia de mai sus, atunci, prin inducţie matematică obţinem că D^m este de asemenea matrice diagonală şi

$$D^m = diag(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_n^m).$$

Fie $L \in \mathcal{L}(V)$ şi $L_B := A$ matricea sa în baza B. Presupunem că există o bază B' în care matricea operatorului L este matricea diagonală $L_{B'} := D$. Atunci $D = T_{BB'}^{-1} \cdot A \cdot T_{BB'}$ şi, de aici,

$$A = T_{BB'} \cdot D \cdot T_{BB'}^{-1}.$$

Ridicând la pătrat matricea A obţinem

$$A^2 = T_{BB'} \cdot D \cdot T_{BB'}^{-1} \cdot T_{BB'} \cdot D \cdot T_{BB'}^{-1} = T_{BB'} \cdot D^2 \cdot T_{BB'}^{-1}.$$

Prin inducţie completă deducem că

$$A^m = T_{BB'} \cdot D^m \cdot T_{BB'}^{-1}.$$

Prin urmare calculul matricei A^m este facil atunci când matricea A se poate **aduce la formă diagonală.**

Ne punem problema existenţei unei baze în care un operator (matrice pătratică) are forma diagonală şi, în cazul existenţei, găsirea acestei baze şi a formei diagonale. Aceasta este ***problema diagonalizării****.*

Vom folosi adesea expresiile de *operator diagonalizabil* sau *matrice diagonalizabilă.*

Definiţia 4.1.2. Matrice diagonalizabilă. Operator diagonalizabil. Fie $L \in \mathcal{L}(V)$ şi A matricea sa într-o bază B. Dacă există o bază B' în care matricea $L_{B'}$ este matrice diagonală spunem că L este un *operator diagonalizabil* şi că matricea A este *matrice diagonalizabilă.*

Observaţia 4.1.1. Dacă $L \in \mathcal{L}(V)$ are forma diagonală $L_B = \mathit{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ în baza $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ atunci $L_B v_{1B} = \lambda_1 v_{1B}$, $L_B v_{2B} = \lambda_2 v_{2B}$, $\ldots$, $L_B v_{nB} = \lambda_n v_{nB}$, ori, echivalent

$$L(v_1) = \lambda_1 v_1,\ L(v_2) = \lambda_2 v_2,\ \ldots,\ L(v_n) = \lambda_n v_n.$$

Prin urmare problema diagonalizării este strict legată de problema depistării unor scalari λ şi a unor *vectori nenuli* v astfel încât $L(v) = \lambda v$.

Exemplul 4.1.1. Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este matricea operatorului $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $f(x, y) = (x + y, x + y)$ în baza canonică. Dacă ea ar fi diagonalizabilă şi $D = \mathit{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ar fi forma sa diagonală în baza $B = \{v_1, v_2\}$ atunci, conform observaţiei precedente, *trebuie să găsim* $\lambda \in \mathbb{R}$ *şi doi vectori liniar independenţi* de forma $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $L(v) = \lambda v$. Matriceal

$$(A - \lambda I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru ca acest sistem să admită soluţii netriviale trebuie ca $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, deci $\lambda \in \{0, 2\}$. Dacă $\lambda = 0$ sistemul se reduce la ecuaţia $x + y = 0$, deci un vector nenul $v_1 = (x, y)$ pentru care $L(v_1) = \lambda v_1$ trebuie să aparţină mulţimii $\{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$; alegem de exemplu $v_1 = (1, -1)$. Analog, dacă $\lambda = 2$ sistemul se reduce la ecuaţia $x - y = 0$, deci un vector nenul $v_2 = (x, y)$ pentru care $L(v_2) = \lambda v_2$ trebuie să aparţină mulţimii $\{x(1,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$; alegem de exemplu $v_2 = (1,1)$. Am obţinut baza $B = \{v_1, v_2\}$; matricea de trecere de la baza canonică la baza B este $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, iar matricea operatorului în aceasta bază este matricea $f_B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ adică o matrice diagonală.

Vom generaliza consideraţiile făcute în acest exemplu, dând astfel răspuns problemei diagonalizării.

5.2. Valori proprii şi vectori proprii

Definiţia 4.2.1. *Fie $f \in \mathcal{L}(V)$ şi A matricea sa în baza $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Un vector nenul $v \in V \setminus \{\theta_V\}$ se numeşte* ***vector propriu*** *al operatorului liniar f (sau al matricei A) dacă există un scalar $\lambda \in K$ astfel încât*

$$f(v) = \lambda v.$$

Numărul $\lambda \in K$ se numeşte ***valoare proprie*** *a operatorului liniar f (sau a matricei A) asociată vectorului propriu v. Mulţimea valorilor proprii ale operatorului f (ale matricei A) se notează cu $\sigma(f)$ (respectiv $\sigma(A)$) şi se numeşte* ***spectrul*** *operatorului f (spectrul matricei A).*

Prin urmare $\lambda \in \sigma(f)$ (atenţie, $\sigma(f) \subset K$!) dacă şi numai dacă

$$\exists v \in V \setminus \{\theta_V\} : f(v) = \lambda v,$$

sau, echivalent,

$$\exists v \in \ker(f - \lambda \cdot id_V) \setminus \{\theta_V\}$$

sau, echivalent $\exists v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n \neq \theta_V$ astfel încât

$$v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in Null(A - \lambda I_n) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

De aici obţinem imediat că

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \text{ şi } \lambda \in K.$$

Observaţia 4.2.1. Dacă $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$, atunci pentru determinarea spectrului acestei matrice trebuie să rezolvăm ecuaţia polinomială de grad n cu coeficienţi din K :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ sunt cele n rădăcini (complexe, unele, posibil, multiple) ale acestei ecuaţii şi dacă m_1 este ordinul de multiplicitate al rădăcinii λ_1, m_2 este ordinul de multiplicitate al rădăcinii λ_2, $\ldots$, m_k este ordinul de multiplicitate al rădăcinii λ_k, atunci $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. În plus, $\sigma(A) \subset \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$, iar dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in K$ atunci $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$.

Exemplul 4.2.1. Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ studiată la Exemplul 4.1.1, spectrul este format din mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\det(A - \lambda I_2) = 0$, deci $\sigma(A) =$

$\{0, 2\}$.

Definiţia 4.2.2. *Fie A şi f ca în Definiţia 4.2.1. Funcţia polinomială de grad n definită prin*

$$p : K \to K, p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

se numeşte ***polinomul caracteristic*** *al matricei A (al operatorului f), iar ecuaţia de grad n cu coeficienţi din K*

$$p(\lambda) = 0$$

se numeşte ***ecuaţia caracteristică*** *a matricei A (a operatorului f).*

Observaţia 4.2.2. *Cu aceste notaţii spectrul matricei A este*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\} \cap K,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ sunt cele n rădăcini ale polinomului caracteristic.

Se verifică uşor că *spectrul unui operator f nu depinde de baza B, i.e. dacă A' este matricea operatorului în baza B' atunci $\sigma(A) = \sigma(A')$.*

S-a conturat următorul algoritm.

Algoritm de calcul al vectorilor proprii.

- *Determinăm spectrul $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l\} \subset K$ rezolvând ecuaţia caracteristică $p(\lambda) = 0$ şi alegând acele soluţii care aparţin corpului K.*
- *Pentru fiecare $\lambda \in \sigma(A)$ aflăm mulţimea*

  $$S_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

  ştiind că $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n \in S_\lambda$ dacă şi numai dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt soluţiile sistemului

  $$(A - \lambda I_n) \cdot v_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_B \in Null(A - \lambda I_n).$$

- *Mulţimea vectorilor proprii asociaţi valorii proprii $\lambda \in \sigma(A)$ este $S_\lambda \backslash \{\theta_V\}$.*

Mulţimea S_λ definită mai sus este un subspaţiu vectorial al lui V. Mai mult:

Propoziţia 4.2.1. *Fie $f \in \mathcal{L}(V)$ şi $\lambda \in \sigma(f)$. Atunci*

1. $S_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \leq V$.
2. $f(S_\lambda) \subset S_\lambda$.

3. *Dacă valorile proprii* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \sigma(f)$ *sunt distincte (adică* $\lambda_i \neq \lambda_j$ *dacă* $i \neq j$*) şi* $v_1, v_2, \ldots, v_s$ *sunt vectori proprii asociaţi acestor valori (adică* $f(v_i) = \lambda_i v_i$ *pentru* $i \in \{1, \ldots, s\}$*) atunci* $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ *este un sistem de vectori liniar independent.*

4. Da*că* $\lambda \in \sigma(f)$ *este o rădăcină multiplă de ordinul* m_λ *a polinomului caracteristic atunci*
$$\dim S_\lambda \leq m_\lambda.$$

Subspaţiul S_λ se numeşte ***subspaţiul propriu*** *asociat valorii proprii* λ. Din cauza proprietăţii 2, el se mai numeşte şi ***subspaţiul invariant*** *asociat valorii proprii* λ.

Din exemplele 4.1.1 şi 4.2.1 rezultă că:

Exemplul 4.2.2. Dacă $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = (x+y, x+y)$ atunci $\sigma(f) = \{0,2\}$, iar subspaţiile proprii corespunzătoare sunt $S_0 = \{x(1,-1) \mid x \in \mathbb{R}\} = span\{(1,-1)\}$, respectiv $S_2 = \{x(1,1) \mid x \in \mathbb{R}\} = span\{(1,1)\}$. Mulţimea vectorilor proprii asociaţi valorii proprii $\lambda = 0$ este $\{x(1,-1) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$, iar mulţimea vectorilor proprii asociaţi valorii proprii $\lambda = 2$ este $\{x(1,1) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$.

Mulţimea vectorilor proprii ai unui operator poate fi vidă.

Exemplul 4.2.3. Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $f(x,y) = (x+y, -x+y)$. Atunci matricea operatorului f (în baza canonică) este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ecuaţia caracteristică este
$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = 0.$$
Prin urmare rădăcinile (imaginare $1 \pm i$) nu aparţin corpului $K = \mathbb{R}$ şi $\sigma(f) = \varnothing$ adică f nu are vectori proprii.

Teorema 4.2.1. Teorema diagonalizării. *Fie* V *un spaţiu* n*-dimensional peste corpul* K *şi* $f \in \mathcal{L}(V)$. *Operatorul* f *este diagonalizabil dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

1. *toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice aparţin corpului* K;

2. *dimensiunea subspţiului* S_λ *este egală cu ordinul de multiplicitate* m_λ *al valorii proprii* λ, *oricare ar fi* $\lambda \in \sigma(f)$.

Din această teoremă şi din proprietăţile vectorilor proprii extragem următorul algoritm.

Algoritm de rezolvare a problemei diagonalizării matricei A**.**

1. *Determinăm spectrul* $\sigma(A) := \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l\} \subset K$ *rezolvând ecuaţia caracteristică şi stabilim ordinul de multiplicitate* m_λ *pentru orice* $\lambda \in \sigma(A)$. *Dacă spectrul* $\sigma(A)$ *coincide cu mulţimea rădăcinilor polinomului caracteristic (adică* $m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \cdots + m_{\lambda_l} = n$*) trecem la pasul următor. În caz contrar, A nu este diagonalizabilă.*

2. *Determinăm subspaţiile proprii (invariante)*

$$S_{\lambda_i} = \left\{ v = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid v^T \in Null\,(A - \lambda_i I_n) \right\}$$

pentru $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$.
Dacă $m_{\lambda_i} = \dim(S_{\lambda_i})$ *pentru orice* $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, *atunci trecem la pasul următor. În caz contrar, matricea A nu este diagonalizabilă.*

3. *Pentru fiecare* $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ *extragem o bază (de* m_{λ_i} *vectori!)* $B_{\lambda_i} := \left\{ v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^{m_{\lambda_i}} \right\}$ *a spaţiului* S_{λ_i}. *Reuniunea acestor baze (atenţie la ordinea vectorilor!) este o bază a spaţiului* K^n *în care A are forma diagonală. Dacă, de exemplu, alegem*

$$B := \left\{ v_1^1, v_1^2, \ldots, v_1^{m_{\lambda_1}}, v_2^1, v_2^2, \ldots, v_2^{m_{\lambda_2}}, \ldots, v_l^1, v_l^2, \ldots, v_l^{m_{\lambda_l}} \right\},$$

atunci forma diagonală corespunzătoare acestei baze este

$$D = diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_l, \ldots, \lambda_l),$$

unde numărul apariţiilor volorii proprii λ_i *din această matrice este exact ordinul de multiplicitate* $m_{\lambda_i} = \dim(S_{\lambda_i})$.

Exemplul 4.2.4. Fie operatorii $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiţi prin $f(x, y, z) = (3x + 2y + 2z, x + 4y + z, -2x - 4y - z)$, respectiv $g(x, y, z) = (4x + 9y, -2y + 8z, 7z)$.

a) Să se determine polinoamele caracteristice ale lui f şi g.

b) Să se determine subspaţiile proprii şi valorile proprii ale lui f şi g.

c) Să se studieze posibilitatea diagonalizării operatorilor daţi.

d) Să se determine $f^m := f \circ f \circ \cdots \circ f,\ m \in \mathbb{N}^*$.

e) Să se calculeze A_g^m, $m \in \mathbb{N}^*$, unde A_g este matricea operatorului g în baza canonică.

Rezolvare.
a) În baza canonică $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ matricea operatorului f este

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix},$$

iar matricea operatorului g este

$$A_g = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic al operatorului f este

$$p_f(\lambda) = \det(A_f - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda),$$

iar polinomul caracteristic al operatorului g este

$$p_g(\lambda) = \det(A_g - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 9 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(4-\lambda)(7-\lambda)(2+\lambda).$$

b) Pentru a determina subspaţiile proprii ale operatorului f aplicăm *algoritmul de calcul al vectorilor proprii:* constatăm întâi că spectrul său este $\sigma(f) = \{1, 2, 3\}$; apoi aflăm subspaţiile proprii S_1, S_2 şi S_3 ştiind că pentru orice $\lambda \in \sigma(f)$

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in S_\lambda \Leftrightarrow (A_f - \lambda I_3)\, v_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b1) Pentru $\lambda = 1$ avem ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

care este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x + \ \ y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases},$$

ori $y = 0$ şi $z = -x$; deci $S_1 = \{(x, 0, -x)\,|x \in \mathbb{R}\} = span\,\{(1, 0, -1)\}$.

b2) Pentru $\lambda = 2$ avem ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

care este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + \ \ z = 0 \\ 2x + 4y + 3z = 0 \end{cases},$$

deci $S_2 = \{(-2y, y, 0)\,|y \in \mathbb{R}\} = span\,\{(-2, 1, 0)\}$.

b3) Pentru $\lambda = 3$ avem ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

care este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases},$$

ori $x = 0$ şi $y = -z$; deci $S_3 = \{(0, -z, z) \,|\, z \in \mathbb{R}\} = span\,\{(0, -1, 1)\}$.

Vectorii proprii ai operatorului f sunt, conform aceluiaşi algoritm

$$\{(x, 0, -x) \,|\, x \in \mathbb{R}^*\} \cup \{(-2y, y, 0) \,|\, y \in \mathbb{R}^*\} \cup \{(0, -z, z) \,|\, z \in \mathbb{R}^*\}.$$

Similar, pentru a determina subspaţiile proprii ale operatorului g avem $\sigma(g) = \{4, 7, -2\}$, apoi $S_4 = \{(x, 0, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = span\,\{(1, 0, 0)\}$,
$S_7 = \{(24y, 8y, 9y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} = span\,\{(24, 8, 9)\}$, $S_{-2} = \{(3x, -2x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = span\,\{(3, -2, 0)\}$.
În sfârşit, vectorii proprii ai operatorului g sunt

$$\{(x, 0, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}^*\} \cup \{(24y, 8y, 9y) \,|\, y \in \mathbb{R}^*\} \cup \{(3x, -2x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}^*\}.$$

c) Deoarece

1. $\sigma(f) = \{1, 2, 3\}$ conţine toate soluţiile ecuaţiei caracteristice şi, conform punctului precedent

2. $B_1 = \{v_1 = (1, 0, -1)\}$ este o bază pentru subspaţiul propriu S_1, deci $m_1 = \dim(S_1) = 1$, $B_2 = \{v_2 = (-2, 1, 0)\}$ este o bază pentru subspaţiul propriu S_2, deci $m_2 = \dim(S_2) = 1$ şi $B_3 = \{v_3 = (0, -1, 1)\}$ este o bază pentru subspaţiul propriu S_3 deci $m_3 = \dim(S_3) = 1$,

conform Teoremei diagonalizării, operatorul f este diagonalizabil.

Analog pentru operatorul g: $\sigma(g) = \{4, 7, -2\}$ conţine toate soluţiile ecuaţiei caracteristice, $B_4 = \{v_1' = (1, 0, 0)\}$ este o bază pentru subspaţiul propriu S_4, şi $m_4 = \dim(S_4) = 1$, $B_7 = \{v_2' = (24, 8, 9)\}$ este o bază pentru subspaţiul propriu S_7, şi $m_7 = \dim(S_7) = 1$, iar $B_{-2} = \{v_3' = (3, -2, 0)\}$ este o bază pentru subspaţiul propriu S_{-2} şi $m_{-2} = \dim(S_{-2}) = 1$; conform Teoremei diagonalizării, operatorul g este diagonalizabil.

d) Diagonalizăm întâi matricea operatorului f. Conform algoritmului expus,

$$D = diag\,(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

este matricea operatorului f în baza $B := \{v_1, v_2, v_3\}$ din spaţiul real $\mathbb{R}^3$. În plus, conform Propoziţiei 4.1.1,

$$D = T^{-1} A_f T,$$

unde

$$T = T_{B_c B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea de trecere de la baza canonică la baza de vectori proprii găsită. Cu transformări elementare pe linie asupra matricei $(T|I_3)$ până la matricea scară redusă obţinem inversa

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $A_f = TDT^{-1}$ obţinem, pentru $m \in \mathbb{N}^*$,

$$A_f^m = TD^m T^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{m+1} - 1 & 2^{m+1} - 2 & 2^{m+1} - 2 \\ 3^m - 2^m & 2 \cdot 3^m - 2^m & 3^m - 2^m \\ 1 - 3^m & 2 - 2 \cdot 3^m & 2 - 3^m \end{pmatrix}.$$

Din nou, folosind Propoziţia 4.1.1, deducem că A_f^m este matricea operatorului f^m. Prin urmare, expresia analitică a operatorului f^m este dată de $f^m(x, y, z) = \big((2^{m+1} - 1)x + (2^{m+1} - 2)y + (2^{m+1} - 2)z,\ (3^m - 2^m)x + (2 \cdot 3^m - 2^m)y + (3^m - 2^m)z,\ (1 - 3^m)x + (2 - 2 \cdot 3^m)y + (2 - 3^m)z\big)$.

e) Urmăm acelaşi procedeu ca la punctul precedent, dar pentru matricea A_g. De la punctele precedente aflăm că

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

este forma diagonală a matricei A_g în baza $B' := \{(1,0,0), (24,8,9), (3,-2,0)\}$, iar legătura dintre A_g şi D este dată de formula $D = T^{-1} A_g T$, unde $T = \begin{pmatrix} 1 & 24 & 3 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ este matricea de trecere de la baza canonică la baza B'. Cum $T^{-1} = \dfrac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 27 & -72 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 8 \end{pmatrix}$ şi $A_g^m = TD^m T^{-1}$, făcând înmulţirile obţinem $A_g^m =$

$$\begin{pmatrix} 4^m & 3 \cdot \left(2^{2m-1} + (-1)^{m+1} 2^{m-1}\right) & \frac{1}{3}\left(8 \cdot 7^m - 12 \cdot 4^m + (-1)^m 2^{m+2}\right) \\ 0 & (-1)^m 2^m & \frac{1}{9}\left(8 \cdot 7^m + (-1)^{m+1} 2^{m+3}\right) \\ 0 & 0 & 7^m \end{pmatrix}.$$

Propoziţia 4.2.2. *Dacă λ este o rădăcină a ecuaţiei caracteristice asociate matricei A, atunci λ^2 este o rădăcină a ecuaţiei caracteristice asociate matricei A^2. În particular, dacă $f \in L(V)$ şi $\lambda \in \sigma(f)$ atunci $\lambda^2 \in \sigma(f^2)$, unde $f^2 := f \circ f$.*

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel ca $\det(A - \lambda I_n) = 0$, atunci

$$\det\left(A^2 - \lambda^2 I_n\right) = \det\left(A^2 - \lambda^2 I_n^2\right) = \det(A - \lambda I_n)\det(A + \lambda I_n) = 0.$$

Teorema următoare are diverse aplicaţii în calculul matriceal. Printre altele, poate fi utilizată la determinarea inversei unei matrice nesingulare şi la calculul recursiv al puterilor unei matrice pătratice.

Teorema 4.2.2. Teorema Cayley-Hamilton. *Fie $A \in K^{n\times n}$ şi $p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = 0$ ecuaţia sa caracteristică. Atunci $p(A) = 0$, adică matricea A satisface propria sa ecuaţie caracteristică.*

Exemplul 4.2.5. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Să calculăm polinomul caracteristic al matricei A^{13} şi matricea A^{-13}.

Ecuaţia caracteristică a matricei A este $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$. Din teorema Cayley-Hamilton rezultă că

$$A^2 = 2A - 3I_2.$$

De aici obţinem

$$A^4 = 4A^2 - 12A + 9I_2 = 4(2A - 3I_2) - 12A + 9I_2 = -4A - 3I_2,$$

de unde rezultă succesiv că

$$A^8 = 16A^2 + 24A + 9I_2 = 56A - 39I_2,$$

$$A^{12} = (56A - 39I_2)(-4A - 3I_2) = -460A + 789I_2,$$

deci

$$A^{13} = -460(2A - 3I_2) + 789A = -131A + 1380I_2.$$

Prin urmare $A^{13} = \begin{pmatrix} 1249 & 131 \\ -262 & 1249 \end{pmatrix}$, iar polinomul caracteristic al acestei matrice este $p(\lambda) = \lambda^2 - 2498\lambda + 1594323$.

Daţi o altă rezolvare folosind Propoziţia 4.2.2!

Pentru calculul matricei A^{-13} folosim iar teorema Cayley-Hamilton. Dacă $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ este, pe scurt, polinomul caracteristic al matricei A^{13}, atunci $A^{26} + aA^{13} + bI = 0$. Înmulţind cu A^{-13} avem $A^{13} + aI + bA^{-13} = 0$, deci

$$A^{-13} = -b^{-1}\left(A^{13} + aI\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{1249}{1594\,323} & -\dfrac{131}{1594\,323} \\ \dfrac{262}{1594\,323} & \dfrac{1249}{1594\,323} \end{pmatrix}.$$

B. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se determine valorile proprii şi câte o bază în subspaţiile proprii ale operatorului $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rezolvare.
Matricea
$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$
are determinantul $\det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$, deci valorile proprii, adică rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det(A-\lambda I_3) = 0$ sunt $\lambda_1 = 1$, de multiplicitate $m_1 = 2$ (dublă) şi $\lambda_2 = 2$, de multiplicitate $m_2 = 1$ (simplă).

Pentru $\lambda_1 = 1$ avem subspaţiul invariant corespunzător $S_{\lambda_1} = S_1 = Null(A - \lambda_1 I_3) = Null(A - I_3)$.
Prin operaţii pe linie,
$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{-2L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\overset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A-I_3}$$
Dar $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in Null(A - I_3) \iff u \in Null(S_{A-I_3})$, adică dacă şi numai dacă
$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + x_3 = 0 \\ \quad -2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$
Avem că x_1 şi x_2 sunt necunoscute principale pentru că ele corespund poziţiei pivoţilor iar $x_3 = \alpha$ este necunoscută secundară. Astfel, sistemul devine $\begin{cases} x_1 + \ x_2 = -\alpha \\ \quad -2x_2 = -\alpha \end{cases}$

de unde, prin substituţie inversă $x_2 = \dfrac{\alpha}{2}$ şi $x_1 = -\dfrac{3\alpha}{2}$. Deci $u \in S_{\lambda_1} \iff u = \left[-\dfrac{3\alpha}{2},\ \dfrac{\alpha}{2},\ \alpha\right]^T = \dfrac{\alpha}{2}\,[-3, 1, 2]^T$;
cu alte cuvinte $S_{\lambda_1} = span(u_1)$, unde am notat $u_1 = [-3, 1, 2]^T$. Aşadar $B_1 = \{u_1\}$ e o bază în S_{λ_1}.

Pentru $\lambda_2 = 2$ avem subspaţiul invariant corespunzător $S_{\lambda_2} = Null(A-\lambda_2 I_3) = Null(A - 2I_3)$.

Prin operaţii pe linie,

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_1+L_2\to L_2;\ L_1+L_3\to L_3} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{5}L_2\to L_2} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_3\to L_3} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A-2I_3}$$

Dar $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in Null(A - 2I_3) \iff u \in Null(S_{A-2I_3})$, adică dacă şi numai dacă

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\ \ - \ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Avem că x_1 şi x_2 sunt necunoscute principale pentru că ele corespund poziţiei pivoţilor iar $x_3 = \alpha$ este necunoscută secundară. Astfel, sistemul devine $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = -\alpha \\ \quad\ \ - \ x_2 = -\alpha \end{cases}$

de unde, prin substituţie inversă, $x_2 = \alpha$ şi $x_1 = -\alpha$. Deci $u \in S_{\lambda_2} \iff u = [-\alpha, \alpha, \alpha]^T = \alpha[-1, 1, 1]^T$.
Cu alte cuvinte $S_{\lambda_2} = span(u_2)$ unde am notat $u_2 = [-1, 1, 1]^T$. Aşadar $B_2 = \{u_2\}$ e o bază în S_{λ_2}.

2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Fără a calcula polinomul caracteristic al lui f, să se găsească valorile proprii şi vectorii proprii lui f.
Rezolvare.
Geometric vorbind, f asociază unui vector $u = (x_1, x_2)$ simetricul său faţă de axa Ox. Un vector u din plan va fi vector propriu dacă şi numai dacă este coliniar cu simetricul său faţă de Ox.

   Observăm că dacă u e un vector de pe axa Ox, atunci simetricul lui u este el însuşi, deci vectorii de pe axa Ox sunt vectori proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 1$, pentru că în cazul lor $f(u) = u$. Dar cum subspaţiul S_{λ_1} al acestor vectori e generat de $e_1 = (1, 0)$, avem că $B_1 = \{e_1\}$ este bază în S_{λ_1}.

   Pe de altă parte mai observăm că dacă u e un vector de pe axa Oy, atunci simetricul lui u este opusul său, deci vectorii de pe axa Oy sunt vectori proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = -1$, pentru că în cazul lor $f(u) = -u$. Deoarece subspaţiul acestor vectori este generat de $e_2 = (0, 1)$, avem că $B_2 = \{e_2\}$ este bază în S_{λ_2}.

   Deoarece $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, f are cel mult două valori proprii, prin urmare f nu are alte valori proprii în afara lui 1 şi -1.

3. Să se stabilească dacă operatorul de la problema 1 este diagonalizabil.

Rezolvare.
Toate valorile proprii $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ sunt reale, dar pentru $\lambda_1 = 1$ avem că ordinul său algebric de multiplicitate este $m_{\lambda_1} = 2$; însă $\dim(S_{\lambda_1}) = 1$, deci operatorul f nu e diagonalizabil.

4. Să se stabilească dacă operatorul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ este diagonalizabil.
Rezolvare.
Matricea
$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$
are determinantul $\det(A - \lambda I_3) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$ deci valorile proprii, adică rădăcinile reale ale ecuaţiei caracteristice $\det(A - \lambda I_3) = 0$, sunt $\lambda_1 = 1$, de multiplicitate $m_{\lambda_1} = 2$, şi $\lambda_2 = -1$, de multiplicitate $m_{\lambda_2} = 1$.

Pentru $\lambda_1 = 1$ avem subspaţiul invariant corespunzător $S_{\lambda_1} = Null(A - \lambda_1 I_3) = Null(A - I_3)$.
Prin operaţii pe linie obţinem
$$A - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A-I_3}.$$
Dar $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in Null(A - I_3) \iff u \in Null(S_{A-I_3})$, adică dacă şi numai dacă $-x_1 + x_3 = 0$. Avem că x_1 este necunoscută principală pentru că ea corespunde poziţiei pivotului iar $x_2 = \alpha$ şi $x_3 = \beta$ sunt necunoscute secundare. Astfel, $x_1 = \beta$. Deci $u \in S_{\lambda_1} \iff u = [\beta, \alpha, \beta]^T = \alpha[0,1,0]^T + \beta[1,0,1]^T$ cu alte cuvinte $S_{\lambda_1} = span(u_1, u_2)$ unde am notat $u_1 = [0,1,0]^T$ şi $u_2 = [1,0,1]^T$. În plus, u_1, u_2 sunt liniar independenţi. Aşadar $B_1 = \{u_1, u_2\}$ este o bază în S_{λ_1}.

Pentru $\lambda_2 = -1$ avem subspaţiul invariant corespunzător $S_{\lambda_2} = Null(A - \lambda_2 I_3) = Null(A + I_3)$.
Prin operaţii pe linie,
$$A + I_3 = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1 + L_3 \to L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_{A+I_3}.$$
Dar $u = [x_1, x_2, x_3]^T \in Null(A + I_3) \iff u \in Null(S_{A+I_3})$, adică dacă şi numai dacă
$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 0 \\ \quad 2x_2 \quad = 0. \end{cases}$$

Avem că x_1 şi x_2 sunt necunoscute principale pentru că ele corespund poziţiei pivoţilor, iar $x_3 = \alpha$ e necunoscută secundară. Astfel, $x_2 = 0$ şi $x_1 = -\alpha$. Deci $u \in S_{\lambda_2} \iff u = [-\alpha, 0, \alpha]^T = \alpha[-1, 0, 1]^T$ cu alte cuvinte $S_{\lambda_2} = span(u_3)$ unde am notat $u_3 = [-1, 0, 1]^T$. Aşadar $B_2 = \{u_3\}$ e o bază în S_{λ_2}.

Observăm că toate valorile proprii sunt reale; în plus $m_{\lambda_1} = 2 = \dim(S_{\lambda_1})$ şi $m_{\lambda_2} = 1 = \dim(S_{\lambda_2})$, deci, conform teoremei de diagonalizare, operatorul f este diagonalizabil.

5. Să se calculeze A^{2k} unde A este matricea operatorului din problema precedentă.
Rezolvare.
Operatorul e diagonalizabil; mai precis matricea sa în baza

$$B = \{u_1 = [0, 1, 0]^T,\ u_2 = [1, 0, 1]^T,\ u_3 = [-1, 0, 1]\}$$

din $\mathbb{R}^3$ formată din vectori proprii, este

$$D = f_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dacă notăm $T = T_{B_cB} = [u_{1_{B_c}} | u_{2_{B_c}} | u_{3_{B_c}}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, atunci avem că $A = TDT^{-1}$ şi ridicând această relaţie la puterea $2k$ obţinem

$$A^{2k} = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}),$$

deci $A^{2k} = TD^{2k}T^{-1}$. Dar cum $D^{2k} = I_3$, obţinem că $A^{2k} = TT^{-1} = I_3$.

6. Fie $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ T(A) = A^T$ operatorul de transpunere a matricelor. Să se scrie matricea operatorului în baza canonică

$$B = \left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

apoi să se determine spectrul său.
Rezolvare.
Avem $T(E_1) = E_1 = 1E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 0E_4$, deci $T(E_1)_B = (1, 0, 0, 0)$. Analog $T(E_2) = E_3 = 0E_1 + 0E_2 + 1E_3 + 0E_4$, astfel $T(E_2)_B = (0, 0, 1, 0)$, apoi $T(E_3) = E_2 = 0E_1 + 1E_2 + 0E_3 + 0E_4$, deci $T(E_3)_B = (0, 1, 0, 0)$ şi în final $T(E_4) = E_4 = 0E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 1E_4$, cu $T(E_4)_B = (0, 0, 0, 1)$. Aşadar

$$A = T_B = [T(E_1)_B | T(E_2)_B | T(E_3)_B | T(E_4)_B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Polinomul caracteristic este

$$\det(T-\lambda I_4)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(\lambda^2-1)=-(1-\lambda)^3(1+\lambda),$$

deci spectrul lui T este $\sigma(T)=\{\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1\}$

7. Să se găsească valorile proprii şi subspaţiile invariante corespunzătoare valorilor proprii ai operatorului din problema precedentă fără a mai calcula polinomul caracteristic.
Rezolvare.
Căutăm matricea $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ pentru care $T(A)=A^T=\lambda A$. Observăm că o matrice simetrică, adică o matrice cu proprietatea că $A^T=A$ este vector propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1=1$. Dar o astfel de matrice simetrică are forma

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cu alte cuvinte dacă notăm $\mathbb{R}^{2\times 2}_S$ subspaţiul matricelor simetrice, atunci $\mathbb{R}^{2\times 2}_S=$ $span(E_1,M_1,E_4)$, unde $M_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Cum aceste matrice sunt liniar independente, $B_1=\{E_1,M_1,E_4\}$ este o bază în $\mathbb{R}^{2\times 2}_S=S_{\lambda_1}$.
Pe de altă parte, o matrice antisimetrică este o matrice A cu proprietatea că $A^T=-A$, deci matricele antisimetrice vor fi vectori proprii pentru $\lambda_2=-1$. O astfel de matrice are forma

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

deci dacă notăm $\mathbb{R}^{2\times 2}_A$ subspaţiul matricelor antisimetrice, atunci $\mathbb{R}^{2\times 2}_A=span(M_2)$, unde $M_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ şi deci $B_2=\{M_2\}$ este o bază în subspaţiul invariant $S_{\lambda_2}=\mathbb{R}^{2\times 2}_A$.
Deoarece $\dim(S_{\lambda_1})+\dim(S_{\lambda_2})=3+1=4=\dim(\mathbb{R}^{2\times 2})$, nu mai avem alte valori proprii în afara celor găsite.

8. Dacă $Null(A+5I_n)$ conţine vectori nenuli, atunci ce informaţie avem despre spectrul matricei A?

   Rezolvare.
   $Null(A+5I_n)$ conţine vectori nenuli dacă şi numai dacă sistemul omogen de

matrice $A+5I_n$ admite şi soluţii nebanale, ceea se întâmplă doar dacă $\det(A+5I_n)=\det(A-(-5)I_n)=0$, adică $\lambda=-5$ este valoare proprie pentru matricea A.

C. PROBLEME PROPUSE

1. Stabiliţi care dintre funcţiile $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definite mai jos sunt operatori liniari; în caz de liniaritate, determinaţi matricele în baza canonică şi rangul acestora.

   (a) $f(x,y,z)=(x,2y,3z)$;

   (b) $f(x,y,z)=(y+z,z-x,z)$;

   (c) $f(x,y,z)=(y-z,z-x,z+1)$;

   (d) $f(x,y,z)=(y-z,z-x,x-y)$;

   (e) $f(x,y,z)=\left(y^2-z,z-x,z\right)$;

   Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, 3; (b) $\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, 3; (d) $\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$, 2.

2. Fie V/K un spaţiu vectorial. Arătaţi că $\mathcal{L}(V)\simeq K^{n\times n}$.

3. Fie V/K un spaţiu vectorial, W un subspaţiu al său, iar $B=\{w_1,\dots,w_m\}$ o bază în W. Dacă $T\in\mathcal{L}(V)$ este un operator liniar, demonstraţi că W este subspaţiu invariant al lui T dacă şi numai dacă $T(w_i)\in W$, $\forall\, i=\overline{1,m}$.

4. Operatorul $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ are, în baza canonică, matricea $\begin{pmatrix}1&2&3\\a&3&4\\-1&2&1\end{pmatrix}$. Să se determine $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie automorfism.

   Răspuns. $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

5. Operatorul $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ are, în baza canonică, matricea $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&4\\-1&2&1\end{pmatrix}$.

   (a) Să se determine forma sa analitică, adică $f(x,y,z)$, pentru orice $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

   (b) Să se arate că f este automorfism al spaţiului $\mathbb{R}^3$, apoi să se afle matricea operatorului f^{-1} în baza $\{(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\}$.

6. Fie $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ ale căror matrice în baza canonică sunt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, respectiv $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Să se scrie matricea operatorilor $f \circ g$ şi $g \circ f$ în baza $\{(1,1),\,(-1,1)\}$. Sunt operatorii $f \circ g$ şi $g \circ f$ inversabili?

7. Demonstraţi că operatorul de derivare $d : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$, $d(f) = f'$, este liniar. Determinaţi matricea acestuia în:

   (a) baza canonică $\{1, x, \ldots, x^n\}$;

   (b) baza $\left\{1, \dfrac{x-a}{1!}, \dfrac{(x-a)^2}{2!}, \ldots, \dfrac{(x-a)^n}{n!}\right\}$, unde a este un număr real fixat.

   Să se determine câte o bază pentru nucleul, respectiv imaginea sa şi să se calculeze defectul şi rangul operatorului d.

8. Operatorul liniar f are, în baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, matricea f_B. Ce transformări va suferi această matrice dacă interschimbăm vectorii e_i şi e_j din baza B?

9. Un operator liniar are matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ în baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Să se determine matricea operatorului în baza:

   (a) $\{e_1, e_3, e_2, e_4\}$;

   (b) $\{e_1,\, e_1 + e_2,\, e_1 + e_2 + e_3,\, e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$.

   Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

10. Matricea operatorului $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ în baza $B = \{e_1 = (1,2), e_2 = (2,3)\}$ este $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, iar matricea operatorului $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ în baza $B' = \{e_1' = (3,1), e_2' = (4,2)\}$ este $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea operatorului $f + g$ în baza B'.

    Răspuns. $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -\frac{59}{2} & -25 \end{pmatrix}$.

11. Matricea operatorului $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ în baza $B = \{e_1 = (-3,7), e_2 = (1,-2)\}$ este $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, iar matricea operatorului $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ în baza $B' = \{e_1' =$

$(6, -7), e'_2 = (-5, 6)\}$ este $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea operatorului $f \circ g$ în baza canonică.

Răspuns. $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$.

12. Determinaţi spectrul operatorului $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ a cărui ecuaţie caracteristică are rădăcinile:

    (a) $1, -1, 2, -2$;

    (b) $1, 2, i, -i$;

    (c) $1 + i, 1 - i, i, -i$.

13. Arătaţi că 0 este valoare proprie pentru o matrice dacă şi numai dacă determinantul acesteia este nul.

14. Fie λ o valoare proprie pentru matricea A. Arătaţi că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $\lambda + a$ este valoare proprie pentru matricea $A + aI$. Implicaţia inversă este adevărată?

15. Determinaţi valorile proprii şi subspaţiile invariante corespunzătoare pentru matricele:

    (a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

    (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

    Răspunsuri. (a) $\lambda_1 = -1$, $(m_{\lambda_1} = 3)$, $\{x\,(1, 1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\}$; (b) $\lambda_1 = 2$, $(m_{\lambda_1} = 3)$, $\{x\,(1, 2, 0) + y\,(0, 0, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

16. Arătaţi că dacă $\lambda \in \sigma(L)$, atunci $\lambda^2 \in \sigma(L^2)$, unde $L^2 := L \circ L$.

17. Determinaţi subspaţiile care sunt invariante simultan pentru matricele $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

    Răspuns. $\{x\,(1, 0, -1) + y\,(0, 1, 2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

18. Dacă într-o matrice pătratică schimbăm două linii între ele, spectrul se schimbă? Argumentaţi răspunsul.

19. Dacă într-o matrice pătratică înmulţim o linie cu un scalar nenul, spectrul se schimbă? Argumentaţi răspunsul.

20. Determinaţi valorile şi vectorii proprii ale următoarelor matrice.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri. (a). 1, cu mulţimea vectorilor proprii $\{x\,(1,1,1) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$, respectiv 0, cu vectorii proprii $x\,(1,2,3)$, unde $x \neq 0$; (b). 1, cu mulţimea vectorilor proprii $\{x\,(3,1,1) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$; (c). 2, cu vectorii proprii de forma $(x+y, x+y, -x, y)$, unde scalarii x şi y nu sunt simultan nuli.

21. Fie λ o valoare proprie a inversei matricei $(a_{ij}) \in K^{n\times n}$. Arătaţi că λ^{-1} este valoare proprie a matricei (a_{ij}).

22. Fie $(a_{ij}) \in K^{n\times n}$. Arătaţi că suma rădăcinilor ecuaţiei caracteristice $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ coincide cu urma matricei, i.e. $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

23. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca $(1, -1, 1)$ să fie vector propriu pentru operatorul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\,(x,y,z) = (ax + y + z, x + by + z, x + y + cz)$.

    Răspuns. $(a,b,c) \in \{(t, t+2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

24. Să se arate că spectrul unei matrice simetrice din $\mathbb{R}^{2\times 2}$ este nevid.

25. Arătaţi că produsul rădăcinilor ecuaţiei caracteristice a unei matrice pătratice coincide cu determinantul acesteia.

26. Să se aducă la o formă diagonală şi să se indice o bază în care are această formă fiecare din matricele

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(d) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Răspunsuri. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,-3)\}$;

(b) matricea nu admite formă diagonală;

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ \{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (1,-1,-1,-1)\}$;

(d) matricea nu admite formă diagonală;

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \{(1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,-1,1,0), (-1,0,0,1)\}$.

27. Un operator liniar are matricea $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$. Să se găsească matricea operatorului în baza

$$\{2e_1 + 3e_2 + e_3, \ 3e_1 + 4e_2 + e_3, \ e_1 + 2e_2 + 2e_3\}$$

şi să se calculeze A^n, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Răspuns. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{n+2} + 3^n - 12 & 10 - 9 \cdot 2^n - 3^n & 3 \cdot 2^n + 3^n - 4 \\ 2^{n+4} + 2 \cdot 3^n - 18 & 15 - 3 \cdot 2^{n+2} - 2 \cdot 3^n & 2^{n+2} + 2 \cdot 3^n - 6 \\ 2^{n+2} + 2 \cdot 3^n - 6 & 5 - 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & 2^n + 2 \cdot 3^n - 2 \end{pmatrix}.$$

28. Operatorul $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ are, în baza canonică, matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Să se arate că există un automorfism $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ astfel ca $f^{\,n} = g \circ d \circ g^{-1}$ pentru orice întreg pozitiv n, unde $d(x, y, z) := (3^n x, (-1)^n y, 5^n z)$.

29. Să se arate că un operator liniar este automorfism dacă şi numai dacă nucleul său este subspaţiul nul.

30. Să se arate că există o matrice T astfel ca

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} T = T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Răspuns. De exemplu $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3}+1 & -\sqrt{3}+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

31. Să se reducă la forma diagonală matricea $\begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$, unde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Răspuns. $\begin{pmatrix} -\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha + \sin 2\alpha \end{pmatrix}$.

32. Să se arate că există o matrice nesingulară T astfel încât

$$T \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix} T.$$

33. * Să se arate că un subspaţiu S al unui spaţiu V/K este invariant pentru automorfismul f dacă şi numai dacă el este invariant pentru operatorul f^{-1}.

34. Operatorul f are, într-o bază dată, matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine numărul a pentru care f nu este automorfism.

Răspuns. $a = \dfrac{9}{5}$.

35. Determinaţi toate subspaţiile invariante ale spaţiului funcţiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu n, $\mathbb{R}_n[x]$, relativ la operatorul de derivare.

Răspuns. Subspaţiul nul şi subspaţiile $\mathbb{R}_m[x]$, unde $m \leq n$.

36. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Să se arate că înmulţirea matricelor din $\mathbb{R}^{2\times 2}$

(a) la stânga cu A;

(b) la dreapta cu A

definește un operator liniar, apoi determinați matricea acestuia în baza canonică $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

37. Folosind teorema Cayley-Hamilton să se arate că

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3;$

(b) $\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{17}{3} & \frac{31}{6} & -\frac{13}{6} \\ -\frac{28}{3} & \frac{25}{3} & -\frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} & \frac{17}{6} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} = I_3;$

(c) există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $A\,(A - aI_3)\,(A - bI_3) = 0$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

38. * Matricea operatorului $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ în baza canonică este

$$\begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ab & 1+b^2 & bc \\ ac & bc & 1+c^2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât să existe o bază în care matricea operatorului f să fie matricea unitate.

39. * Dovediți că matricele unui operator liniar în două baze coincid dacă și numai dacă o matrice de trecere dintre cele două baze comută cu matricea operatorului relativă la una dintre baze.

40. * Să se arate că un operator liniar de rang k (care acționează pe un spațiu finit dimensional) poate fi reprezentat ca o sumă de k operatori de rang unu.

41. * Să se determine toate subspațiile invariante ale unui operator diagonal care are elementele diagonale distincte.

42. * Matricea B este nesingulară și de același tip cu matricea A, ambele cu elemente din $\mathbb{R}$. Să se arate că matricea AB este diagonalizabilă dacă și numai dacă matricea BA este diagonalizabilă.

43. * Fie A o matrice nesingulară cu elemente reale. Să se arate că ea este diagonalizabilă dacă și numai dacă matricea A^{-1} este diagonalizabilă.

44. * Matricea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ are valorile proprii $0, 1, 2, 3$. Să se determine:

(a) $\operatorname{rang}(A)$;

(b) $\det\left(A^T A\right)$;

(c) valorile proprii ale matricei $(A + I_4)^{-1}$.

Răspunsuri. (a) 3; (b) 0; (c) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}$.

45. * Operatorii $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ au aceleaşi valori proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ şi aceiaşi vectori proprii independenţi $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Să se arate prin două metode că $f = g$.

46. * Matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au aceiaşi vectori proprii independenţi e_1, e_2, $\ldots$, e_n. Arătaţi că $AB = BA$.

47. * Arătaţi că dacă A este o matrice pătratică cu elemente reale iar suma elementelor de pe orice linie (coloană) este k, atunci k este o valoare proprie a acestei matrice.

48. Există o bază în care matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ are forma diagonală? Justificaţi afirmaţiile.

(Examen, Informatică, 2013)

49. Folosind diagonalizarea matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ determinaţi A^n.

(Examen, Ingineria sistemelor, 2013)

50. * În $\mathbb{R}^3$ se consideră transformarea liniară, pentru a real fixat,

$$T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T_a(x, y, z) = \left(x,\ ax + y,\ \frac{a^2}{2}x + ay + z\right)$$

a) Se cere matricea M_a a lui T_a în baza canonică din $\mathbb{R}^3$ şi să se determine nucleul şi imaginea transformării.

b) Să se afle valorile şi vectorii proprii pentru M_a. Stabiliţi dacă matricea este diagonalizabilă.

c) Arătaţi că $M_a M_b = M_{a+b}$ şi calculaţi M_a^n şi M_a^{-1}.

d) Să se studieze convergenţa şi să se afle (dacă există) limita şirului (S_n), în care $S_n = I_3 + \dfrac{1}{1!}M_a + \dfrac{1}{2!}M_a^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}M_a^n$.

(Concurs ,,Traian Lalescu", profil neelectric, et. finală, Constanţa, 2011)

51. * Fie $(a_i \cdot a_j)_{1 \le i,j \le n}$ matricea operatorului $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, unde $a_i > 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Să se determine defectul operatorului şi imaginea sa.

(b) Să se determine valorile şi vectorii proprii ai operatorului f.

(Concurs ,,Traian Lalescu”, etapa locală, Timişoara, 2012)

52. * Se consideră spaţiul vectorial real $V = C[0;2]$ şi endomorfismul

$$T : V \to V;\ T(f)(x) = \int_0^{2\pi} 4\sin^3(x+y)f(y)\,\mathrm{d}y,\ f \in C[0;2];\ x \in [0;2].$$

a) Daţi exemplu de 2014 funcţii liniar independente din $\ker T$.

b) Determinaţi valorile proprii nenule si vectorii proprii corespunzători pentru T.

(Concurs ,,Traian Lalescu”, profil electric, etapa finală, Timişoara, 2014)

5 FORME LINIARE. FORME BILINIARE. FORME PĂTRATICE.

Formele (liniare, biliniare, pătratice) sunt aplicaţii definite pe spaţii vectoriale peste un corp K având codomeniul corpul K. Formele liniare sunt de fapt funcţii polinomiale de gradul întâi omogene, iar formele biliniare şi cele pătratice sunt funcţii polinomiale omogene de gradul al doilea.

Pe lângă aplicaţiile directe, aceste forme vor interveni esenţial în construcţia unor spaţii cu structură mai complexă, spaţii care vor fi analizate în capitolele următoare.

A. TEORIE

Peste tot în această secţiune V este un spaţiu vectorial peste corpul $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, iar $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază în acest spaţiu.

5.1. Forme liniare

Cele mai importante aplicaţii practice directe ale formelor liniare sunt în tehnicile de optimizare ale unor procese.

Reamintim că, deoarece $(K, +)$ este un grup abelian, K este şi el un spaţiu vectorial peste corpul K, operaţia externă de înmulţire a scalarilor din K cu vectori din K fiind chiar operaţia (internă) de înmulţire din corpul K. Reamintim şi faptul că mulţimea $\mathcal{L}(V, K)$ este un spaţiu vectorial peste corpul K (adunarea vectorilor $f, g \in \mathcal{L}(V, K)$ fiind definită prin $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, iar înmulţirea scalarului $\alpha \in K$ cu vectorul f fiind definită prin $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$).

Definiţia 5.1.1. *O aplicaţie liniară $f : V \to K$ se numeşte **formă liniară** a spaţiului V (sau formă liniară pe spaţiul V). Notăm spaţiul vectorial al formelor liniare (adică $\mathcal{L}(V, K)$) cu V^* şi îl numim **spaţiul dual** al spaţiului vectorial V.*

Reamintim că forma $f \in V^*$ este complet determinată dacă cunoaştem valorile $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) \in K$, deoarece atunci pentru orice $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ avem

$$f(v) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \cdots + x_n f(e_n).$$

*Scalarii $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n) \in K$ se numesc coeficienţii **formei** f în baza B. Cum dimensiunea spaţiului vectorial K/K* este 1 (deoarece sistemul $\{1\} \subset K$ este o bază pentru spaţiul vectorial K/K) rezultă că matricea unei forme relativ la o pereche de baze este o matrice linie cu n coloane şi că

$$V^* \simeq K^{1 \times n}, \text{ iar } \dim V^* = n.$$

Definiţia 5.1.2. Baza duală a bazei B. Construim, pornind de la baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ formele $e_i^* \in V^*$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ prin

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases},$$

adică $e_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) := x_i$, pentru orice $v = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in V$. Să arătăm că $B^* := \{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ este o bază pentru V^*. Dacă

$$x_1 e_1^* + x_2 e_2^* + \cdots + x_n e_n^* = \theta_{V^*}$$

rezultă că $(x_1 e_1^* + x_2 e_2^* + \cdots + x_n e_n^*)(e_i) = \theta_{V^*}(e_i) = 0$, deci $x_i = 0$ pentru $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; prin urmare B^* este un sistem de vectori liniar independent maximal, adică B^* este o bază.

Baza B^* *se numeşte* ***baza duală*** *a bazei* B.

Dacă $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ atunci $e_j^*(v) = x_j$, pentru $j \in \{1, \ldots, n\}$ iar dacă $f \in V^*$, $f = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*$ atunci $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i^*(e_j) = y_j$. Am obţinut astfel formula de reprezentare a unei forme din următoarea propoziţie.

Propoziţia 5.1.1. *Dacă* $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *este o bază în spaţiul* V*, iar* $B^* := \{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ *este baza duală a bazei* B*, atunci coordonatele vectorului* $f \in V^*$ *în baza* B^* *sunt* $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$*, adică*

$$f = f(e_1) e_1^* + f(e_2) e_2^* + \ldots + f(e_n) e_n^*.$$

Se poate arăta următoarea formulă care stabileşte legătura dintre matricea de trecere dintre două baze a spaţiului V şi matricea de trecere dintre bazele duale asociate.

Propoziţia 5.1.2. Dacă B şi B_1 *sunt două baze în* V *atunci*

$$T_{B^* B_1^*} = T_{B_1 B}^T.$$

Exemplul 5.1.1. Fie $V := \mathbb{R}^2$ spaţiul aritmetic bidimensional, $B_c = \{e_1, e_2\}$ baza canonică a acestuia şi $T_{B^* B_c^*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea de trecere de la baza duală a unei baze B din $\mathbb{R}^2$ la baza duală a bazei canonice. Să determinăm baza B şi coordonatele formei f în baza B_c^* şi baza B^*, ştiind că $f(x, y) = 2x + 3y$.

Din Propoziţia 5.1.2 avem $T_{B^* B_c^*} = T_{B_c B}^T$. În plus $T_{B_c B} = T_{B^* B_c^*}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Am obţinut baza $B = \{v_1 = (1, -1), v_2 = (0, 1)\}$.

Din Propoziţia 5.1.1 avem $f = f(e_1)\, e_1^* + f(e_2)\, e_2^* = 2e_1^* + 3e_2^*$, deci coordonatele vectorului f în baza B_c^* sunt $2, 3$.

Deoarece

$$f_{B^*} = T_{B^* B_c^*} \cdot f_{B_c^*} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

rezultă că $-1, 3$ sunt coordonatele vectorului f în baza B^*.

5.2. Forme biliniare

Formele biliniare sunt instrumente esenţiale pentru definirea formelor pătratice şi pentru construcţia spaţiilor euclidiene - subiecte care vor fi studiate în continuare.

Definiţia 5.2.1. ***Definiţia formelor biliniare.*** *O aplicaţie*

$$\varphi : V \times V \to K$$

se numeşte ***formă biliniară*** *(a spaţiului V) dacă ea este liniară în ambele variabile, adică*

(i) $\varphi(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\varphi(u, w) + \beta\varphi(v, w)$

(ii) $\varphi(u, \alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(u, v) + \beta\varphi(u, w)$

oricare ar fi $u, v, w \in V$ şi oricare ar fi $\alpha, \beta \in K$. Notăm cu $\mathcal{B}(V)$ *mulţimea formelor biliniare ale spaţiului V.*

Dacă $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ şi

(iii) $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

pentru orice $u, v \in V$ spunem că φ este o ***formă biliniară simetrică****.* Notăm cu $\mathcal{B}_s(V)$ *mulţimea formelor biliniare simetrice ale spaţiului V.*

Se verifică imediat următoarea caracterizare a formelor biliniare.

Propoziţia 5.2.1. ***Caracterizarea formelor biliniare.***
O aplicaţie $\varphi : V \times V \to K$ este formă biliniară a spaţiului V/K dacă şi numai dacă pentru orice $m, p \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_p \in V$ şi pentru orice $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_p \in K$ avem

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i v_i,\ \sum_{j=1}^{p} y_j w_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} x_i y_j\, \varphi(v_i, w_j).$$

Observaţia 5.2.1. Dacă $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ atunci

- φ este complet determinată dacă cunoaştem scalarii $a_{ij} := \varphi(e_i, e_j)$, pentru $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ (înţelegând prin aceasta că expresia analitică a formei φ este determinată complet). Într-adevăr, dacă $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $w = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \in V$, atunci folosind biliniaritatea aplicaţiei φ avem $\varphi(v, w) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$.
  Matriceal avem
  $$\big(\varphi(v, w)\big) = v_B^T \varphi_B w_B,$$
  unde $\varphi_B := \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{i,j=\overline{1,n}}$.
- φ este omogenă, cu gradul de omogenitate doi, deoarece $\varphi(tv, tw) = t^2 \varphi(v, w)$ pentru orice $v, w \in V$ *şi pentru orice* $t \in K$.

Definiţia 5.2.2. ***Matricea unei forme biliniare***. *Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în V/K şi forma biliniară $\varphi \in \mathcal{B}(V)$. Matricea*

$$\varphi_B := \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{i,j=\overline{1,n}} \in K^{n \times n}$$

*se numeşte **matricea formei biliniare** φ în baza B.*

Observaţia 5.2.2. Forma biliniară φ este simetrică dacă şi numai dacă matricea ei într-o bază oarecare este simetrică.

Exemplul 5.2.1. Fie $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Atunci $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dacă şi numai dacă există o constantă reală a astfel încât $\varphi(x, y) = axy$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Într-adevăr, dacă $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ şi $a := \varphi(1, 1)$ atunci, cum φ este liniară în ambele variabile, avem $\varphi(x, y) = x\,\varphi(1, y) = xy\,\varphi(1, 1) = axy$.

Invers, dacă $\varphi(x, y) := axy$ este imediată liniaritatea în ambele variabile pentru funcţia φ.

Exemplul 5.2.2. Fie $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi((x, y), (x', y')) := xx' + 2xy' - x'y + 3yy'$. Atunci $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ iar $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ unde B_c este baza canonică din $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$. Expresia analitică exprimată matriceal este

$$(\varphi((x, y), (x', y'))) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Având matricea unei forme într-o bază putem să construim matricea acestei forme într-o bază nouă folosind matricea de trecere.

Propoziţia 5.2.2. ***Schimbarea bazei.*** *Dacă B, B' sunt două baze în V/K, $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ şi $T_{BB'}$ este matricea de trecere de la baza B la baza B' atunci*

$$\varphi_{B'} = T_{BB'}^T \cdot \varphi_B \cdot T_{BB'}.$$

Exemplul 5.2.3. Fie $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ astfel ca $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde B_c este baza canonică din $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$. Să determinăm

1. $a \in \mathbb{R}$ astfel ca forma biliniară φ să fie simetrică;
2. expresia analitică a formei biliniare φ;
3. matricea formei biliniare φ în baza $B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,0)\}$.

Rezolvare.

1. Conform Observaţiei 5.2.2 este suficient să impunem ca φ_{B_c} să fie simetrică. Deci $a = 1$.
2. Folosind formula matriceală de la Observaţia 5.2.1, dacă $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, avem
$(\varphi((x,y),(x',y'))) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix} = (yy')$.
Prin urmare expresia analitică a formei biliniare φ este
$\varphi((x,y),(x',y')) := yy'$.
3. Conform propoziţiei precedente avem $\varphi_B = T_{B_cB}^T \cdot \varphi_{B_c} \cdot T_{B_cB} = T_{B_cB}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5.3. Forme pătratice

Formele pătratice sunt folosite într-o mulţime de tehnici statistice de analiză a unor fenomene concrete. De asemenea sunt utilizate în diverse probleme de optimizare, în special pentru a decide natura punctelor staţionare ale funcţiilor de clasă C^2.

În esenţă, formele pătratice sunt funcţii omogene de gradul al doilea provenite din forme biliniare simetrice.

Definiţia 5.3.1. ***Definiţia formei pătratice şi a polarei sale.***
*O aplicaţie $f : V \to K$ se numeşte **formă pătratică** (a spaţiului vectorial V/K) - scriem $f \in \mathcal{Q}(V)$ - dacă există o formă biliniară simetrică*

$$\varphi : V \times V \to K \text{ şi } f(v) = \varphi(v,v)$$

oricare ar fi $v \in V$. În acest caz mai spunem că f este ***forma pătratică asociată*** *formei biliniare simetrice φ, iar φ este* ***polara formei pătratice*** *f.* Dacă *B este o bază în spaţiul V/K matricea φ_B se numeşte* ***matricea formei pătratice*** *f şi se notează f_B.*

Exemplul 5.3.1. Dacă φ este forma biliniară definită la Exemplul 5.2.3 atunci forma pătratică asociată ei este $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cu expresia analitică dată de $f(x,y) := \varphi((x,y),(x,y)) = y^2$.

Expresia *polara formei pătratice* f îşi găseşte justificarea logică în următoarea propoziţie: unei forme pătratice îi corespunde o unică formă biliniară simetrică care este polara ei.

Propoziţia 5.3.1. Construcţia polarei unei forme pătratice. *Fie $f : V \to K$ o formă pătratică. Atunci $\varphi : V \times V \to K$,*

$$\varphi(v,w) := \frac{1}{2}\left[f(v+w) - f(v) - f(w)\right]$$

defineşte polara formei pătratice f.

Observaţia 5.3.1. Expresia analitică a unei forme pătratice. Din Observaţia 5.2.1 deducem că *aplicaţia $f : V \to K$ este o formă pătratică dacă şi numai dacă există scalarii $a_{ij} \in K$, cu $a_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ astfel încât dacă* $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ *atunci* $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, sau

$$f(v) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n).$$

Cum $f_B = \varphi_B$, unde φ este polara formei pătratice f, avem $(\varphi(v,v)) = v_B^T\,\varphi_B\,v_B$, deci

$$(f(v)) = v_B^T\, f_B\, v_B,$$

unde $f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Observaţia 5.3.2. Tehnica dedublării. Să presupunem că forma pătratică $f \in \mathcal{Q}(V)$ are reprezentarea analitică $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ în baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Atunci $f_B = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = \varphi_B$, unde φ este polara formei f. Prin urmare, cum $(\varphi(v,w)) = v_B^T\,\varphi_B\,w_B$, oricare ar fi $v,w \in V$, rezultă imediat că expresia analitică a formei biliniare φ este dată de următoarea formulă

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j.$$

Această *metodă de construcţie a expresiei analitice a polarei din expresia analitică a formei pătratice se numeşte* ***dedublare****.*

Exemplul 5.3.2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 - 2xy + 3y^2$.

1. Să se determine polara formei pătratice f.
2. Să se determine matricea f_B, unde $B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (-1,1)\}$.
3. Fie $g_1, g_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$. Să se arate că $h \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$, unde $h(x,y) := f(g_1(x,y), g_2(x,y))$ şi să se determine matricea h_{B_c} unde B_c este baza canonică din $\mathbb{R}^2$.

Rezolvare. 1. Folosim procedeul dedublării. Fie $B_c = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^2$ şi φ polara formei pătratice f. Atunci $\varphi_{B_c} = f_{B_c}$ şi $a_{11} = \varphi(e_1,e_1) = 1$ (coeficientul lui x^2), $a_{12} = \varphi(e_1,e_2) = \varphi(e_2,e_1) = \dfrac{-2}{2} = -1$ (jumătate din coeficientul lui xy), iar $a_{22} = \varphi(e_2,e_2) = 3$. Prin urmare $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Expresia analitică a formei biliniare simetrice φ se obţine imediat din egalitatea matriceală $(\varphi(v,w)) = v_B^T \varphi_B \, w_B$: dacă $v = (x,y), w = (x',y')$ atunci $(\varphi(v,w)) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (xx' - xy' - x'y + 3yy')$. De aceea $\varphi((x,y),(x',y')) = xx' - xy' - x'y + 3yy'$.

2. Din Propoziţia 5.2.2 avem

$$f_B = \varphi_B = T_{B_cB}^T \, \varphi_{B_c} \, T_{B_cB} = T_{B_cB}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Deoarece g_1, g_2 sunt două forme liniare rezultă că există constantele b_{11}, b_{12}, b_{21}, $b_{22} \in \mathbb{R}$ astfel ca $g_1(x,y) := b_{11}x + b_{12}y$ şi $g_2(x,y) := b_{21}x + b_{22}y$.

Atunci

$$\begin{aligned} h(x,y) &= f(b_{11}x + b_{12}y, b_{21}x + b_{22}y) = (b_{11}x + b_{12}y)^2 - \\ &\quad -2(b_{11}x + b_{12}y)(b_{21}x + b_{22}y) + 3(b_{21}x + b_{22}y)^2 = \\ &= \left(b_{11}^2 - 2b_{11}b_{21} + 3b_{21}^2\right) x^2 + 2(b_{11}b_{12} - b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} + 3b_{21}b_{22})xy + \\ &\quad + \left(b_{12}^2 - 2b_{12}b_{22} + 3b_{22}^2\right) y^2 \end{aligned}$$

este expresia analitică a unei forme pătratice iar matricea sa în baza canonică este

$$h_{B_c} = \begin{pmatrix} b_{11}^2 - 2b_{11}b_{21} + 3b_{21}^2 & b_{11}b_{12} - b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} + 3b_{21}b_{22} \\ b_{11}b_{12} - b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} + 3b_{21}b_{22} & b_{12}^2 - 2b_{12}b_{22} + 3b_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Am văzut că dacă $f \in \mathcal{Q}(V)$ atunci $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ij} x_i x_j$, pentru orice vector $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$. Cazul în care cea de-a două sumă din această expresie analitică este nulă pentru orice vector din V, deci dacă $a_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$, este esenţial în aplicaţii.

Definiţia 5.3.2. *Dacă matricea formei $f \in \mathcal{Q}(V)$ în baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ are forma diagonală, atunci expresia analitică a formei f (adică $f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$) se numeşte **formă canonică** a formei pătratice f.*

Se pune *problema existenţei unei forme canonice pentru o formă pătratică dată f şi a unei baze în care f are respectiva formă canonică.* Răspunsul la această problemă este afirmativ: orice formă pătratică admite o formă canonică, iar metoda lui Gauss ne indică şi o tehnică simplă de depistare a ei.

Teorema 5.3.1. **Determinarea formei canonice prin metoda Gauss.** *Fie $f \in \mathcal{Q}(V)$ o formă pătratică nenulă. Atunci există o bază în care f are forma canonică. Algoritmul de construcţie este următorul. Presupunem că, dată fiind baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, f are reprezentarea analitică*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

şi presupunem că există $i \neq j$ astfel ca $a_{ij} \neq 0$. Avem două cazuri posibile:

1. *dacă există i astfel ca $a_{ii} \neq 0$ formăm **un pătrat perfect de forma** $b_{ii} \cdot y_i^2$ grupând **toţi termenii care conţin variabila** x_i, apoi repetăm procedeul pentru restul variabilelor rămase.*

2. *Dacă $a_{ii} = 0$ pentru orice i atunci **reducem problema la cazul** 1 astfel: deoarece există $a_{ij} \neq 0$ cu $i \neq j$ schimbăm variabilele punând*

   $$x_i = y_i + y_j \text{ şi } x_j = y_i - y_j$$

   (în acest caz $x_i x_j = y_i^2 - y_j^2$ şi se poate aplica mai departe cazul 1).

Aplicând succesiv algoritmul descris ajungem, după $n-1$ paşi, la o sumă de pătrate de forma

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} z_i^2,$$

unde $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, adică la forma canonică. Legătura dintre vechile coordonate şi noile coordonate ale vectorului arbitrar v este dată de matricea de trecere de la baza

B la baza B_o în care f are forma canonică, deoarece ştim că $v_B = T_{BB_o} v_{B_o}$.

Exemplul 5.3.3. Fie $f \in \mathcal{Q}\left(\mathbb{R}^3\right)$, $f(x,y,z) = xy + yz + zx$. Să se reducă la o forma canonică şi să se indice o bază în care are forma găsită.

Rezolvare. Aplicăm metoda lui Gauss. Dacă $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ este baza canonică din $\mathbb{R}^3$ matricea formei în această bază este $f_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Trebuie să aplicăm cazul 2 (deoarece $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$). Cum $a_{12} \neq 0$ luăm $x = x_1 + y_1$, $y = x_1 - y_1$, $z = z_1$. Atunci $f(x,y,z) = x_1^2 - y_1^2 + 2x_1z_1$ şi aplicăm cazul 1; formăm un pătrat perfect cu termenii care-l conţin pe x_1 şi obţinem forma canonică

$$f(x,y,z) = (x_1 + z_1)^2 - y_1^2 - z_1^2 = x_2^2 - y_2^2 - z_2^2,$$

unde $x_2 = x_1 + z_1$, $y_2 = y_1$ şi $z_2 = z_1$. Cum $x_1 = \dfrac{x+y}{2}$, $y_1 = \dfrac{x-y}{2}$, $z_1 = z$, obţinem $x_2 = \dfrac{x+y+2z}{2}$, $y_2 = \dfrac{x-y}{2}$, $z_2 = z$. Matriceal, dacă $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ este baza în care $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = x_2v_1 + y_2v_2 + z_2v_3$, avem

$$v_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T_{BB_c} \cdot v_{B_c}.$$

Deci matricea de trecere de la baza B la baza B_c este

$T_{BB_c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, iar $T_{B_cB} = T_{BB_c}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prin urmare baza în care f are forma canonică
$f(x,y,z) = f(x_2v_1 + y_2v_2 + z_2v_3) = x_2^2 - y_2^2 - z_2^2$ este

$$B = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,-1,0), v_3 = (-1,-1,1)\}.$$

Dacă dorim să verificăm rezultatul, ţinem seama de faptul că, pe de o parte $f_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi, pe de altă parte, $f_B = T_{BB_c}^T f_{B_c} T_{BB_c}$. Dar

$$T_{B_cB}^T\, f_{B_c}\, T_{B_cB} = T_{BB_c}^T \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

O altă tehnică de aducere la forma canonică este furnizată de următoarea teoremă. Din păcate ea nu se poate aplica întotdeauna, dar este, de multe ori, avantajoasă din punct de vedere computaţional.

Teorema 5.3.2. Determinarea formei canonice prin metoda Jacobi. *Fie $f \in \mathcal{Q}(V)$ o formă pătratică a cărei matrice în baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este*

$$f_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dacă minorii principali (i.e. determinanţii construiţi după regula nord-vest)

$$\Delta_1 := |a_{11}|,\ \Delta_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sunt nenuli, atunci există o bază $B_o = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ în care f are următoarea formă canonică:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right) = \frac{1}{\Delta_1}\, y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\, y_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\, y_n^2.$$

În diferite aplicaţii este important de ştiut care este semnul unei forme pătratice definite pe un spaţiu real - *signatura sa* - în sensul următoarei definiţii.

Definiţia 5.3.3. *Fie $f \in Q(V)$, unde $V/\mathbb{R}$ este un spaţiu n-dimensional. Dacă*

1. *$f(v) > 0, \forall v \in V \setminus \{\theta\}$ spunem că f este* ***pozitiv definită;***
2. *$f(v) < 0, \forall v \in V \setminus \{\theta\}$ spunem că f este* ***negativ definită;***

3. *$f(v) \geq 0, \forall v \in V \setminus \{\theta\}$ şi există $w \in V \setminus \{\theta\}$ astfel ca $f(w) = 0$ spunem că f este **semidefinită pozitiv (pozitiv semidefinită)**;*

4. *$f(v) \leq 0, \forall v \in V \setminus \{\theta\}$ şi există $w \in V \setminus \{\theta\}$ astfel ca $f(w) = 0$ spunem că f este **semidefinită negativ (negativ semidefinită)**;*

5. *$\exists v, w \in V$ astfel ca $f(v) < 0$ şi $f(w) > 0$ spunem că f este **nedefinită**.*

*Dacă într-o formă canonică matricea formei f este $diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, iar dintre numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ există $p \geq 0$ numere pozitive, $q \geq 0$ numere negative şi $z \geq 0$ zerouri, vom numi tripletul (p, q, z) **signatura** formei f.*

O formă pătratică îşi conservă signatura la schimbarea bazei.

Teorema 5.3.3. Legea inerţiei formelor pătratice (*Sylvester*). *Fie $V/\mathbb{R}$ un spaţiu vectorial real şi $f : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Signatura este aceeaşi în orice bază în care forma f are forma canonică.*

Observaţia 5.3.2. Folosind legea inerţiei şi signatura putem stabili semnul unei forme pătratice definite pe un spaţiu n-dimensional (în sensul Definiţiei 5.3.3):

- *dacă signatura este $(n, 0, 0)$, atunci forma este pozitiv definită;*
- *dacă signatura este $(0, n, 0)$, atunci forma este negativ definită;*
- *dacă signatura este de forma $(p, 0, z)$, cu p, z numere pozitive atunci forma este pozitiv semidefinită;*
- *dacă signatura este de forma $(0, q, z)$, cu q, z numere pozitive atunci forma este negativ semidefinită;*
- *dacă signatura este de forma (p, q, z), cu p, q numere pozitive atunci forma este nedefinită.*

Exemplul 5.3.4. Forma pătratică $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ de la Exemplul 5.3.2 are matricea $f_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, iar $\Delta_1 = 0$; prin urmare metoda Jacobi nu este aplicabilă. Signatura lui f este $(1, -2, 0)$, deci g este o formă pătratică nedefinită.

Fie $g \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$, $g(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy - 2yz + 2zx$. Matricea ei în baza canonică este $g_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Prin urmare minorii caracteristici sunt $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 6$ şi $\Delta_3 = 9$. Conform teoremei lui Jacobi există o bază $B_o = \{v_1, v_2, v_3\}$ astfel încât $g\left(\sum_{i=1}^{3} y_i v_i\right) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{2}{3}y_3^2$. În consecinţă, cum $(3, 0, 0)$ este signatura lui g, urmează că g este pozitiv definită.

B. PROBLEME REZOLVATE

1. Forma liniară f a spaţiului $\mathbb{R}^4/\mathbb{R}$ are, în baza canonică, matricea $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Să se determine dimensiunea nucleului acestei forme.
Rezolvarea 1.
Din matrice ştim că $f(1,0,0,0) = 1$, $f(0,1,0,0) = -2$, $f(0,0,1,0) = 3$ şi $f(0,0,0,1) = -4$, deci $f(x,y,z,t) = x - 2y + 3z - 4t$. $(x,y,z,t) \in \ker f \Leftrightarrow x - 2y + 3z - 4t = 0$ care este un ,,sistem" cu o ecuaţie şi 4 necunoscute. Rangul matricei sistemului este 1, deci vom avea 3 necunoscute secundare, prin urmare spaţiul soluţiilor, $\ker f$, va avea dimensiunea 3.
Rezolvarea 2.
Cum f nu este aplicaţia nulă, $\dim Im\, f = 1$, prin urmare $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim Im\, f = 4 - 1 = 3$.

2. În spaţiul $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ considerăm forma liniară $f \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ a cărei matrice în baza $B = \{v_1 = (1,-1), v_2 = (0,2)\}$ este $\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$. Se cere:

   (a) expresia analitică a formei f;

   (b) dimensiunea nucleului formei f;

   (c) duala bazei B şi exprimarea formei f în această bază.

   Rezolvare.

   (a) Din matrice ştim că $f(1,-1) = 2$ şi $f(0,2) = 4$. Atunci $f(0,1) = \frac{1}{2}f(0,2) = 2$, apoi $f(1,0) = f(1,-1) + f(0,1) = 4$. În fine, $f(x,y) = xf(1,0) + yf(0,1) = 4x + 2y$.

   (b) Avem că $(x,y) \in \ker f \Longleftrightarrow 4x + 2y = 0 \Longleftrightarrow y = -2x \Longleftrightarrow (x,y) \in span\{(1,-2)\}$, deci $\dim \ker f = 1$.

   (c) Fie $B' = \{f_1, f_2\}$ baza duală a bazei $B = \{v_1, v_2\}$. Atunci f_1 este forma liniară care satisface $f_1(v_1) = 1$ şi $f_1(v_2) = 0$, iar f_2 este forma liniară care satisface $f_2(v_1) = 0$ şi $f_2(v_2) = 1$. Putem proceda ca mai sus, sau, echivalent, exprima vectorul arbitrar (x,y) în baza B: $(x,y) = x\cdot(1,-1) + \frac{x+y}{2}\cdot(0,2)$, apoi $f_1(x,y) = x\cdot f_1(1,-1) + \frac{x+y}{2}\cdot f_1(0,2) = x$, iar $f_2(x,y) =$

$x \cdot f_2(1,-1) + \dfrac{x+y}{2} \cdot f_2(0,2) = \dfrac{x+y}{2}$.

Este uşor de văzut că $f(x,y) = 2f_1(x,y) + 4f_2(x,y)$, deci matricea lui f în baza duală a lui B coincide cu matricea lui f în baza B.

3. Forma $\varphi \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^3\right)$ este definită prin $\varphi\left(\left(x_1,x_2,x_3\right),\left(y_1,y_2,y_3\right)\right) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 - 5x_3y_1 - 2x_2y_3$. Să se determine matricea sa în
(a) baza canonică;
(b) baza $\left\{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\right\}$.
Rezolvare.
Matricea formei biliniare φ în baza $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, notată φ_B, are pe linia i coloana j elementul $\varphi(v_i, v_j)$, $i,j \in \{1,2,3\}$.
(a) Avem că: $\varphi\big((1,0,0),(1,0,0)\big) = 1$, $\varphi\big((1,0,0),(0,1,0)\big) = 0$,
$\varphi\big((1,0,0),(0,0,1)\big) = 0$, $\varphi\big((0,1,0),(1,0,0)\big) = 0$,
$\varphi\big((0,1,0),(0,1,0)\big) = 2$, $\varphi\big((0,1,0),(0,0,1)\big) = -2$,
$\varphi\big((0,0,1),(1,0,0)\big) = -5$, $\varphi\big((0,0,1),(0,1,0)\big) = 0$,
$\varphi\big((0,0,1),(0,0,1)\big) = 4$, deci $\varphi_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Observaţi că elementul a_{ij} al matricei lui φ <u>în baza canonică</u> este tocmai coeficientul lui x_iy_j, ceea ce permite scrierea directă a matricei lui φ în această bază.
(b) Avem $\varphi\big((0,1,1),(0,1,1)\big) = 4$, $\varphi\big((0,1,1),(1,0,1)\big) = -3$,
$\varphi\big((0,1,1),(1,1,0)\big) = -3$, $\varphi\big((1,0,1),(0,1,1)\big) = 4$,
$\varphi\big((1,0,1),(1,0,1)\big) = 0$, $\varphi\big((1,0,1),(1,1,0)\big) = -4$,
$\varphi\big((1,1,0),(0,1,1)\big) = 0$, $\varphi\big((1,1,0),(1,0,1)\big) = -1$,
$\varphi\big((1,1,0),(1,1,0)\big) = 3$, deci $\varphi_B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Observaţie. Odată calculată matricea lui φ într-o bază B, matricea ei într-o a doua bază, B', poate fi determinată şi cu formula $\varphi_{B'} = T_{BB'}^T \cdot \varphi_B \cdot T_{BB'}$.
În cazul nostru,

$$\varphi_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Forma biliniară φ a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ are matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ în baza B.
Care este forma sa analitică dacă
(a) B este baza canonică;
(b) $B = \left\{(1,1),(2,0)\right\}$?
Rezolvare.
(a) Dacă notăm cu $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ vectorii din baza canonică, avem, din matrice, că $\varphi(e_1,e_1) = 1$, $\varphi(e_1,e_2) = 2$, $\varphi(e_2,e_1) = 3$ şi

$\varphi(e_2, e_2) = 4$. Ca şi la aplicaţiile liniare unde valorile pe vectorii unei baze determinau în mod unic aplicaţia liniară, o aplicaţie biliniară poate fi determinată dacă se cunosc valorile ei pe *perechile* (e_i, e_j) de vectori dintr-o bază. Astfel, avem $\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = \varphi(xe_1+ye_2, x'e_1+y'e_2) = x\varphi(e_1, x'e_1+y'e_2)+ y\varphi(y, x'e_1+y'e_2) = x\big(x'\varphi(e_1,e_1)+y'\varphi(e_1,e_2)\big)+y\big(x'\varphi(e_2,e_1)+y'\varphi(e_2,e_2)\big) = xx'\varphi(e_1,e_1)+xy'\varphi(e_1,e_2)+x'y\varphi(e_2,e_1)+x'y'\varphi(e_2,e_2)$.
În cazul de faţă obţinem $\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = xx'+2xy'+3x'y+4yy'$.
Observaţie. Alternativ, se poate afla expresia analitică a formei biliniare φ cunoscând matricea să în baza B şi aplicând direct formula:

$$\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = (x\ y)_B \cdot \varphi_B \cdot (x'\ y')_B^T,$$

unde $(x\ y)_B$ reprezintă matricea linie formată cu coordonatele lui (x,y) în baza B. Astfel, în baza canonică, avem $(x\ y)_B = (x\ y)$ deci obţinem imediat expresia analitică a lui φ calculând

$$\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = (x\ y)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = xx'+2xy'+3x'y+4yy'.$$

(b) Notând $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (2,0)$, avem, din matrice, că $\varphi(v_1,v_1) = 1$, $\varphi(v_1,v_2) = 2$, $\varphi(v_2,v_1) = 3$, $\varphi(v_2,v_2) = 4$. Exprimăm vectorii arbitrari (x,y) şi (x',y') în baza B: $(x,y) = a(1,1)+b(2,0)$ conduce la sistemul $\begin{cases} a+2b &= x\\ a &= y\end{cases}$
cu soluţia $a = y$, $b = \dfrac{y-x}{2}$. Aşadar, un vector arbitrar (x,y) are în baza B coordonatele $(x\ y)_B = \left(y \quad \dfrac{x-y}{2}\right)$.
Procedând ca mai sus, obţinem că

$$\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = \varphi\left(yv_1+\frac{x-y}{2}v_2,\ y'v_1+\frac{x'-y'}{2}v_2\right) =$$

$$yy'\,\varphi(v_1,v_1)+y\cdot\frac{x'-y'}{2}\,\varphi(v_1,v_2)+\frac{x-y}{2}\cdot y'\,\varphi(v_2,v_1)+$$

$$\frac{x-y}{2}\cdot\frac{x'-y'}{2}\,\varphi(v_2,v_2) = yy'+2y\cdot\frac{x'-y'}{2}+3\frac{x-y}{2}\cdot y'+$$

$$4\frac{x-y}{2}\cdot\frac{x'-y'}{2} = xx'+\frac{1}{2}\,xy'-\frac{1}{2}\,yy'.$$

Observaţie. După ce stabilim coordonatele unui vector arbitrar (x,y) în baza B, anume $(x\ y)_B = \left(y \quad \dfrac{x-y}{2}\right)$, putem aplica direct formula $\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = (x\ \ y)_B \cdot \varphi_B \cdot (x'\ \ y')_B^T =$

$$\left(y \quad \frac{x-y}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y'\\ \dfrac{x'-y'}{2}\end{pmatrix} = xx'+\frac{1}{2}\,xy'-\frac{1}{2}\,yy'.$$

5. Aflaţi expresia analitică a formei biliniare $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dacă $\varphi\big((1,0),(1,1)\big) = 1$, $\varphi\big((1,1),(1,2)\big) = 2$, $\varphi\big((2,1),(1,0)\big) = 3$, $\varphi\big((0,1),(1,0)\big) = 4$.
Este întotdeauna posibilă determinarea expresiei analitice a unei forme biliniare $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dacă se cunosc valorile acesteia pe patru perechi de vectori din $\mathbb{R}^2$?
Rezolvare.
Dacă notăm cu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matricea lui φ în baza canonică, avem
$\varphi\big((1,0),(1,0)\big) = a$, $\varphi\big((1,0),(0,1)\big) = b$, $\varphi\big((0,1),(1,0)\big) = c$, $\varphi\big((0,1),(0,1)\big) = d$, iar valorile date ale lui φ se traduc prin:
$1 = \varphi\big((1,0),(1,1)\big) = \varphi\big((1,0),(1,0)\big) + \varphi\big((1,0),(0,1)\big) = a + b$,
$2 = \varphi\big((1,1),(1,2)\big) = \varphi\big((1,0),(1,2)\big) + \varphi\big((0,1),(1,2)\big) = \varphi\big((1,0),(1,0)\big) + 2\varphi\big((1,0),(0,1)\big) + \varphi\big((0,1),(1,0)\big) + 2\varphi\big((0,1),(0,1)\big) = a + 2b + c + 2d$,
$3 = \varphi\big((2,1),(1,0)\big) = 2\varphi\big((1,0),(1,0)\big) + \varphi\big((0,1),(1,0)\big) = 2a + c$,
$4 = \varphi\big((0,1),(1,0)\big) = c$.
Rezolvând acest sistem, găsim $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$, $c = 4$, $d = -\dfrac{9}{4}$.
Prin urmare, expresia analitică a lui φ este

$$\varphi\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = -\frac{1}{2}\,x_1y_1 + \frac{3}{2}\,x_1y_2 + 4x_2y_1 - \frac{9}{4}\,x_2y_2.$$

În general se obţine un sistem liniar, cu patru ecuaţii şi patru necunoscute. Se pot da uşor exemple în care acest sistem este incompatibil (caz în care nu există o asemenea formă biliniară) sau compatibil nedeterminat (caz în care există o infinitate de forme biliniare cu proprietăţile date, prin urmare ea nu poate fi determinată).

6. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât forma biliniară $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + ax_2y_1 + bx_2y_2$ să fie simetrică.
Rezolvare.
Trebuie ca $\varphi\big((y_1,y_2),(x_1,x_2)\big) = \varphi\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big),\ \forall\,(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, adică $x_1y_1 + ax_1y_2 + 2x_2y_1 + bx_2y_2 = x_1y_1 + 2x_1y_2 + ax_2y_1 + bx_2y_2$, $\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Identificând coeficienţii (egalitatea celor două polinoame din $\mathbb{R}[x_1,x_2,y_1,y_2]$ revine la egalitatea coeficienţilor), deducem că $a = 2$, $b \in \mathbb{R}$ arbitrar.
La aceeaşi concluzie am fi putut ajunge rapid examinând matricea lui φ în baza canonică, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$. φ este simetrică dacă şi numai dacă matricea ei, în orice bază este simetrică (adică este egală cu transpusa sa).

7. Scrieţi forma pătratică f asociată formei biliniare simetrice φ dacă:
(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2$;
(b) $\varphi : \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(aX + b,\, cX + d) = ac - 2ad - 2bc$.
Rezolvare.
(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) \overset{\text{def}}{=} \varphi\big((x_1,x_2),(x_1,x_2)\big) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9y_2^2$;

(b) $f : \mathbb{R}_1[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(aX+b) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(aX+b,\, aX+b) = a^2 - 4ab$.

8. Determinaţi polara formei pătratice $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2^2 + 5x_2x_3 + 6x_3^2$.
Rezolvare.
Pentru a determina expresia lui $\varphi\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big)$, putem folosi una din formulele
$\varphi(u, v) = \dfrac{f(u) + f(v) - f(u-v)}{2} = \dfrac{f(u+v) - f(u) - f(v)}{2}$, în care termenii din membrul drept sunt cunoscuţi, ceea ce permite determinarea, în principiu facilă, dar deseori laborioasă, a lui $\varphi(u, v)$.
În loc de aceasta, putem deduce expresia analitică a lui φ prin ,,dedublare", adică gândindu-ne din ce provine fiecare termen. Astfel, fiind extrem de uşor de văzut cum se poate obţine f pornind de la φ, să încercăm să facem demersul invers. Să analizăm fiecare termen din f şi să vedem din ce termen(i) provine. Constatăm că, în general, termenii de forma ax_i^2 provin dintr-un termen ax_iy_i din φ, în vreme ce un termen de forma ax_ix_j provine din adunarea unor termeni de forma bx_iy_j şi cx_jy_i, cu $b + c = a$. Însă φ este simetrică, deci coeficienţii lui x_iy_j şi x_jy_i trebuie să fie egali. Prin urmare un termen de forma x_ix_j în expresia lui f provine din adunarea termenilor $\dfrac{a}{2}\, x_iy_j$ şi $\dfrac{a}{2}\, x_jy_i$. În concluzie, găsim:

$$\varphi\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = x_1y_1 + \left(\frac{2}{2}\, x_1y_2 + \frac{2}{2}\, x_2y_1\right) + \left(\frac{3}{2}\, x_1y_3 + \frac{3}{2}\, x_3y_1\right) + 4x_2y^2 + \left(\frac{5}{2}\, x_2y_3 + \frac{5}{2}\, x_3y_2\right) + 6x_3y_3 =$$

$$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + \frac{3}{2}\, x_1y_3 + \frac{3}{2}\, x_3y_1 + 4x_2y_2 + \frac{5}{2}\, x_2y_3 + \frac{5}{2}\, x_3y_2 + 6x_3y_3.$$

9. Reduceţi la forma canonică formele pătratice de mai jos, precizând şi câte o bază în care se obţin:
(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 6xy$
(b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4xz + 5z^2 + 6yz$
(c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx$
(d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$
(e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 4x^2 - yz$.
Rezolvare.
(a) Completăm $f(x, y) = x^2 + 6xy$ la un pătrat adunând $9y^2$; obţinem $f(x, y) = x^2 + 6xy + 9y^2 - 9y^2 = (x + 3y)^2 - (3y)^2 = (x')^2 - (y')^2$ unde, de exemplu, $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = \phantom{x+{}} 3y. \end{cases}$ (Nu este singura alegere posibilă: am fi putut de pildă alege

$y' = -3y$, cu care am fi obţinut o altă bază în care se realizează forma canonică.)

Obţinem de aici imediat că $\begin{cases} x = & x' - y' \\ y = & \dfrac{1}{3}\,y', \end{cases}$ de unde vectorii din baza în care se realizează forma canonică se află citind coeficienţii lui x', respectiv y' : $v_1 = (1,0)$, $v_2 = \left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$.

Desigur, atunci când am explicitat x şi y în funcţie de x' şi y' am inversat în fapt matricea sistemului:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

adică

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

(b) Considerăm un ,,pătrat de pornire", de exemplu x^2, şi pornim grupările de la acesta (pornind gruparea de la $3y^2$ sau de la $5z^2$ s-ar fi obţinut alte baze, dar o formă canonică de aceeaşi signatură). Considerăm **toţi** termenii în care apare x: $x^2 + 2xy + 4xz = x^2 + 2x(y + 2z)$ şi îi completăm la un pţrat, anume adăugând $(y + 2z)^2$.
Avem $f(x, y, z) = x^2 + 2x(y + 2z) + (y + 2z)^2 - (y + 2z)^2 + 3y^2 + 5z^2 + 6yz = (x+y+2z)^2 - y^2 - 4yz - 4z^2 + 3y^2 + 5z^2 + 6yz = (x+y+2z)^2 + 2y^2 + z^2 + 2yz$.
Scopul acestei manevre a fost să ,,scăpăm" de variabila x. De aici înainte avem de grupat la pătrate o formă pătratică de numai două variabile, y, z, anume $g(y, z) = 2y^2 + z^2 + 2yz$. Iarăşi, alegem un pătrat, considerăm toţi termenii în care apare respectiva variabilă, apoi completăm la un pătrat. Putem scrie fie $g(y, z) = 2y^2 + 2yz + \dfrac{1}{2}\,z^2 + \dfrac{1}{2}\,z^2 = \left(\sqrt{2}\,y + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,z\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,z\right)^2$ (dacă pornim cu gruparea de la termenul y^2), fie, mai comod, $g(y, z) = z^2 + 2yz + y^2 + y^2 = (z + y)^2 + y^2$ (dacă pornim gruparea de la termenul z^2). Vom alege, desigur, cea de-a doua variantă pentru că ea duce la calcule mai frumoase. Am găsit aşadar
$f(x, y, z) = (x + y + 2z)^2 + (z + y)^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2$, unde

$$\begin{cases} x' = & x & + y & +2z \\ y' = & & y & + \ z \\ z' = & & y & . \end{cases}$$

Inversând eventual matricea sistemului (sau, mai bine în cazul de faţă constatând succesiv că $y = z'$, $z = y' - z'$, apoi $x = x' - y - 2z = x' - z' - 2(y' - z') =$

$x' - 2y' + z'$) obţinem

$$\begin{cases} x = x' - 2y' + z' \\ y = z' \\ z = y' - z'. \end{cases}$$

O bază în care se obţine forma canonică este deci

$$B = \{(1,0,0),\ (-2,0,1),\ (1,1,-1)\}.$$

(c) Probabil că unii dintre voi îşi amintesc de demonstraţia inegalităţii $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ în care se înmulţea cu 2, se trecea totul într-o parte şi se folosea că $f(x,y,z) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$, unde f este chiar forma pătratică din exerciţiul de faţă. Dispunem, în aparenţă, de o foarte elegantă scriere a lui f ca sumă de pătrate, scriere pe care, dacă nu o ştiaţi din clasa a IX-a, o puteaţi descoperi acum. Notând $x' = x - y$, $y' = y - z$, $z' = z - x$, constatăm că nu putem scoate de aici x, y, z în funcţie de x', y', z' pentru că matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă. Care este explicaţia?

Ei bine, scrierea aceea elegantă a lui f ca sumă de pătrate nu respectă o condiţie necesară, pe care tehnica ,,epuizării succesive a câte unei variabile" o asigură: cantităţile de sub pătrate trebuie să fie independente. Ori la noi $x' + y' + z' = 0$. Să lăsăm deoparte scrierea ,,elegantă" şi să aplicăm algoritmul.

$f(x,y,z) = \underline{2x^2 - 2x(y+z)} + 2y^2 - 2yz + 2z^2 =$

$\underline{2x^2 - 2x(y+z) + \frac{1}{2}(y+z)^2} - \frac{1}{2}(y+z)^2 + 2y^2 - 2yz + 2z^2 =$

$\left(\sqrt{2}\,x - \frac{1}{\sqrt{2}}\,y - \frac{1}{\sqrt{2}}\,z\right)^2 + \frac{3}{2}\,y^2 - 3yz + \frac{3}{2}\,z^2 = \left(\sqrt{2}\,x - \frac{1}{\sqrt{2}}\,y - \frac{1}{\sqrt{2}}\,z\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,y - \sqrt{\frac{3}{2}}\,z\right)^2.$

Remarcaţi că forma canonică are signatura $(2,0,1)$ şi nu $(3,0,0)$ cum părea să indice ,,scrierea elegantă".

Vom alege $x' = \sqrt{2}\,x - \frac{1}{\sqrt{2}}\,y - \frac{1}{\sqrt{2}}\,z$, $y' = \sqrt{\frac{3}{2}}\,y - \sqrt{\frac{3}{2}}\,z$ şi $z' = ax + by + cz$ cu a, b, c alese cu singura restricţie ca matricea sistemului obţinut să fie inversabilă. Pentru comoditate, alegem $z' = z$. (Alte alegeri conduc la alte baze, la fel de bune.) Atunci obţinem succesiv $z = z'$, $y = \sqrt{\frac{2}{3}}\,y' + z'$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,x' + \frac{1}{\sqrt{6}}\,y' + z'$, deci o bază în care se obţine forma canonică este

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right),\ (1,1,1) \right\}.$$

(d) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$. Alegem $x' = x + y + z$, apoi y', z' aproape la întâmplare; trebuie doar ca matricea sistemului care îi exprimă pe x', y', z'

în funcţie de x, y, z să fie inversabilă. Dacă alegem $y' = y$, $z' = z$, avem $x = x' - y' - z'$, $y = y'$, $z = z'$, deci o bază în care se obţine forma canonică este $B = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1)\}$.
(e) $f(x,y,z) = \underline{4x^2} - 2yz = (2x)^2 - 2yz$, dar acum nu mai avem pătrat de la care să continuăm gruparea. (Această problemă poate apărea la început sau oricând pe parcursul aplicării algoritmului.) Vom face nişte schimbări auxiliare care să producă pătrate: alegem un termen de forma $x_i x_j$ (aici yz), iar variabilele implicate le scriem $x_i = y_i + y_j$, $x_j = y_i - y_j$, celelalte variabile rămânând neschimbate. În locul termenului $x_i x_j$ vom avea acum $y_i^2 - y_j^2$, prin urmare vom avea acum pătrat de la care să continuăm aplicarea algoritmului. La sfârşit, revenim la variabilele iniţiale.
Punând $y = y_1 + z_1$, $z = y_1 - z_1$, avem $f(x,y,z) = (2x)^2 + 2y_1^2 - 2z_1^2 = (2x)^2 + (\sqrt{2}\,y_1)^2 - (\sqrt{2}\,z_1)^2 = (2x)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,y + \frac{1}{\sqrt{2}}\,z\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,y - \frac{1}{\sqrt{2}}\,z\right)^2$.
Notăm $x' = 2x$, $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,y + \frac{1}{\sqrt{2}}\,z$, $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,y - \frac{1}{\sqrt{2}}\,z$; obţinem $x = \frac{1}{2}\,x'$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\,z'$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}\,y' - \frac{1}{\sqrt{2}}\,z'$, deci o bază pentru forma canonică este

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

C. PROBLEME PROPUSE

1. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x - y + 2z$. Să se arate că f este o formă liniară a spaţiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ şi să se determine dimensiunea imaginii sale.

   Răspuns. 1.

2. Forma liniară f a spaţiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ are, în baza canonică, matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine dimensiunea nucleului acestei forme.

   Răspuns. 2.

3. În spaţiul $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ considerăm forma liniară $f \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ a carei matrice în baza $B = \{v_1 = (1,1),\ v_2 = (0,1)\}$ este $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$. Se cere:

   (a) expresia analitică a formei f;

   (b) dimensiunea nucleului formei f;

   (c) duala bazei B şi exprimarea formei f în aceasta bază.

   Răspuns. (a) $f(x,y) = 3x - y$; (b) 1; (c) $B^* = \{v_1^* = e_2^*, v_2^* = e_1^* - e_2^*\}$, $f = 2v_1^* - v_2^*$ (unde cu $\{e_1, e_2\}$ am notat baza canonică din $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$).

4. Fie V/K un spaţiu de dimensiune n. Să se determine dimensiunea spaţiului dual V^*.

5. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x, y, z) = (a-1)x^2 + (a+b)xy + (b+1)y^2 + ax + by + cz$ să fie o formă liniară a spaţiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$, apoi să se determine matricea sa în baza canonică.

   Răspuns. $a = 1$, $b = -1$, $c \in \mathbb{R}$; $f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & c \end{pmatrix}$.

6. Fie f o formă liniară a spaţiului $\mathbb{R}_3[x]/\mathbb{R}$, care are matricea $f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ în baza canonică.

   (a) Să se scrie expresia analitică a aplicaţiei f.

   (b) Să se determine nucleul formei f şi dimensiunea sa.

   (c) Să se afle matricea acestei forme în baza $\left\{1, -2+x, -3+x^2, -4+x^3\right\}$ prin două metode.

   Răspuns. (a) $f\left(a + bx + cx^2 + dx^3\right) = a + 2b + 3c + 4d$;
   (b) $\ker f = \left\{b(-2+x) + c\left(-3+x^2\right) + d\left(-4+x^3\right) \mid b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$, 3;
   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Fie V/K un spaţiu, $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a sa şi $f : V \to K$ o funcţie. Să se arate că $f \in V^*$ dacă şi numai dacă există n elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ astfel ca $f(v) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, pentru orice vector $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \in V$.

8. Să se construiască baza duală a bazei B când:

   (a) $B = \{13\}$ din spaţiul $\mathbb{R}/\mathbb{R}$;

   (b) $B = \{(1, 3), (-1, 1)\}$ din spaţiul $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$;

   (c) $B = \{1 + x, 1 - x\}$ din spaţiul $\mathbb{R}_1[x]/\mathbb{R}$.

9. Fie forma $f \in \mathbb{R}_1[x]^*$ definită prin $f(a + bx) = a - 2b$. Să se exprime f în baza duală a bazei:

   (a) canonice;

   (b) $\{1 + x, 1 - x\}$.

10. Forma liniară $f : \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ are matricea $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ în baza $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Să se scrie:

    (a) expresia analitcă a formei f;

    (b) coordonatele formei f în baza duală B^*.

    Răspuns. (a) $f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = 3a - b$; (b) 2, −1.

11. Să se arate că $\left\{f \in \mathbb{R}_2[X]^* \mid f\left(X+X^2\right)=0=f\left(-1+X+X^2\right)\right\}$ este subspaţiu vectorial al spaţiului dual $\mathbb{R}_2[X]^*$ şi să se determine dimensiunea acestuia.

    Răspuns. 1.

12. Fie $I : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $I(f) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$. Să se arate că $I \in \mathbb{R}_2[x]^*$ şi să se scrie aceasta formă în duala bazei canonice.

    Răspuns. $I = (\beta-\alpha)\, e_1^* + \dfrac{(\beta-\alpha)^2}{2}\, e_2^* + \dfrac{(\beta-\alpha)^3}{3}\, e_3^*.$

13. Să se arate că orice formă liniară este ori trivială ori surjectivă.

14. * Fie $I : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ forma definită la Problema 12, şi $x_0, x_1, x_2, x_3 \in [\alpha,\beta]$ patru numere distincte. Să se arate că există $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ pentru care

    $$I(f) = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + a_3 f(x_3).$$

    Generalizare. (Această reprezentare a formei I constituie fundamentul teoriei integrării numerice).

15. * Fie f, g două forme netriviale ale spaţiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$. Să se arate că există $c \in \mathbb{R}^*$ astfel ca $f = cg$ dacă şi numai dacă cele două forme au acelaşi nucleu.

16. * Fie V un spaţiu real de dimensiune n şi f o formă liniară nenulă a sa. Să se arate că există o bază $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ în V astfel încât $f(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1$, oricare ar fi $x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \in V$.

    Indicaţie. Se alege baza astfel încât $f(e_1) = 1,\ f(e_2) = 0, \ldots,\ f(e_n) = 0$.

17. Să se arate că funcţia $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $\varphi((x,y),(x',y')) = 2xx' + xy' - yy'$ este o formă biliniară a spaţiului $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ şi să se scrie matricea ei în baza canonică. Este aceasta formă simetrică?

    Răspuns. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; nu este simetrică

18. Forma biliniară φ a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ are matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ în baza $B = \{(1,1),(1,-1)\}$. Să se determine expresia sa analitică.

    Răspuns. $\varphi\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \dfrac{1}{2}\, x_1y_1 + \dfrac{1}{2}\, x_1y_2 + x_2y_1.$

19. Fie V un spaţiu real de dimensiune n. Să se arate că mulţimea formelor biliniare $\mathcal{B}(V)$ se poate înzestra cu o structură canonică de spaţiu vectorial real şi că $\mathcal{B}(V) \simeq \mathbb{R}^{n\times n}$.

20. Fie V un spaţiu real de dimensiune n. Să se arate că mulţimea formelor biliniare simetrice $B_s(V)$ este un subspaţiu liniar al spaţiului $\mathcal{B}(V)$. Care este $\dim B_s(V)$? Este adevarată afirmaţia $B_s(V) \simeq \mathcal{Q}(V)$?

21. Forma biliniară φ a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ are matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ în baza canonică.

    (a) Să se calculeze $\varphi\big((x,0), (1,2) \big)$ şi $\varphi\big((x,y), (x,y) \big)$.

    (b) Care este matricea formei φ în baza $\{(1,1), (-1,2)\}$?

    Răspuns. (a) $\varphi\big((x,0), (1,2) \big) = 3x, \quad \varphi\big((x,y), (x,y) \big) = x^2 + 3xy + y^2.$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

22. Fie $V\ /K$ şi $V'\ /K$ două spaţii vectoriale de dimensiune n. Să se arate că $\mathcal{B}(V) \simeq \mathcal{B}(V')$.

23. Fie $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definită prin $\varphi(f,g) = \int_\alpha^\beta f(x)\, g(x)\, dx$.

    (a) Să se arate că $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_2[x])$.

    (b) Să se determine matricea formei φ în baza canonică din $\mathbb{R}_2[x]$.

    (c) Să se determine matricea formei φ în baza $\left\{1,\ 1-x,\ x-x^2\right\}$.

24. Considerăm forma $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_1[x])$ a carei matrice în baza canonică $\{1, x\}$ este $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

    (a) Să se găsească expresia analitică a funcţiei φ.

    (b) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(a+bx) = \varphi(a+bx, 1+x)$ este o formă liniară a spaţiului $\mathbb{R}_1[x]/\mathbb{R}$ şi să se determine o bază a nucleului său.

    Răspuns. (a) $\varphi(a+bx, a'+b'x) = 2aa' + ab' - bb'$. (b) e.g. $\{1+3x\}$.

25. Fie V/K un spaţiu, $\mathcal{B}(V)$ spaţiul formelor biliniare, $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ şi $v \in V$.

    (a) Să se arate că $\varphi_{v1}, \varphi_{v2} \in V^*$, unde $\varphi_{v1}(u) = \varphi(u,v)$ şi $\varphi_{v2}(u) = \varphi(v,u)$ pentru orice $u \in V$.

    (b) Să se arate că matricea formei biliniare φ este simetrică dacă şi numai dacă $\varphi_{v1} = \varphi_{v2}$, pentru orice vector $v \in V$.

26. Fie V/K un spaţiu, iar $\mathcal{B}(V)$ spaţiul formelor biliniare.

    (a) Să se arate că $\mathcal{B}_s(V) \leq \mathcal{B}(V)$, unde $\mathcal{B}_s(V)$ este spaţiul formelor biliniare simetrice.

    (b) Să se arate că $\mathcal{B}_a(V) \leq \mathcal{B}(V)$, unde $\varphi \in \mathcal{B}_a(V)$ dacă şi numai dacă forma $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ este antisimetrică, i.e. $\varphi(v,u) = -\varphi(u,v)$ pentru orice $u, v \in V$.

(c) Fie $K = \mathbb{R}$. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{B}(V)$ definim

$$\varphi_s(u,v) = \frac{1}{2}(\varphi(u,v) + \varphi(v,u)) \text{ şi } \varphi_a(u,v) = \frac{1}{2}(\varphi(u,v) - \varphi(v,u))$$

pentru orice $u, v \in V$. Să se arate că $\varphi_s \in \mathcal{B}_s(V)$ şi că $\varphi_a \in \mathcal{B}_a(V)$.

(d) Să se arate că $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}_s(V) \oplus \mathcal{B}_a(V)$, dacă V este un spaţiu real.

27. Forma $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3)$ este definită prin

$$\varphi\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_1 - 2x_2y_3.$$

Să se determine matricea sa în baza $\{(1,1,1),(-1,1,1),(1,-1,1)\}$.

Răspuns. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

28. Să se determine numerele naturale n pentru care spaţiile reale $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ şi $\mathbb{R}^{2^n}$ sunt izomorfe.

Răspuns. $n \in \{2, 4\}$.

29. Fie $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $\varphi\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_1 - 2x_2y_3$.

(a) Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \varphi(x,x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$ este o formă pătratică, i.e. $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$.

(b) Să se scrie matricea formei pătratice f (în baza canonică).

(c) Să se construiască polara formei pătratice f.

Răspuns. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $\chi\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = x_1y_1 - x_2y_2 +$ $2x_3y_3 - \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_1) - (x_2y_3 + x_3y_2)$.

30. Să se arate că următoarele funcţii din $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$ admit formele canonice indicate şi să se stabilească signaturile lor.

(a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;

(b) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$;

(c) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = y_1^2 + y_2^2$;

(d) $-x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

Răspuns. (a) $(2,1,0)$, nedefinită; (b) $(1,2,0)$, nedefinită; (c) $(2,0,1)$, pozitiv semidefinită; (d) $(0,3,0)$, negativ definită.

31. Folosind metoda Gauss să se stabilească signatura formelor pătratice:

   (a) $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

   (b) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

   Răspuns. (a) $(2,1,0)$ (b) $(2,1,0)$.

32. Fie $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi\left((x,y),(1,1)\right) = 0\right\}$, unde φ este polara formei pătratice $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy$. Să se arate că $S \simeq \mathbb{R}$.

33. Să se determine signatura formei pătratice $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$, unde $a \in \mathbb{R}$.

   Răspuns. $(3,0,0)$, dacă $a > 5$; $(2,0,1)$ dacă $a = 5$; $(2,1,0)$ dacă $a < 5$.

34. Folosind metoda Jacobi să se scrie forma canonică a formei pătratice $q : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ definită prin $q(f) = \int_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

   Răspuns. $\frac{3}{8}\alpha^2 + 2\beta^2$.

35. Să se indice o bază în care $f \in \mathcal{Q}\left(\mathbb{R}^4\right)$ are forma canonică:

   (a) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$;

   (b) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4$.

   Răspuns. De exemplu: (a) $y_1^2 - y_2^2$, cu transformările de coordonate $x_1 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 - y_4$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$; deci noua bază este $\{(1,1,0,0),(-1,1,0,0),(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$. (b) $3y_1^2 - y_2^2 + \frac{17}{3}y_3^2 - \frac{3}{17}y_4^2$; $\left\{(1,0,0,0),(0,0,1,0),\left(-\frac{1}{3},1,-2,0\right),\left(\frac{1}{17},-\frac{3}{17},\frac{6}{17},1\right)\right\}$.

36. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât forma pătratică $f \in \mathcal{Q}\left(\mathbb{R}^3\right)$,

   $$f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_2x_3 + 2x_3x_1$$

   să fie pozitiv definită.

   Răspuns. $a \in (0,1)$.

37. Să se verifice legea de inerţie a signaturii prin metoda Gauss, respectiv, cu metoda Jacobi pentru forma pătratică $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ care are în baza canonică matricea $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

38. * Fie V un spaţiu vectorial real, V^* dualul sau şi $W := V \times V^*$ spaţiul produs.

   (a) Care sunt operaţiile - internă şi externă - pe W?

(b) Care este dimensiunea spaţiului W?

(c) Arătaţi că $W \simeq \mathbb{R}^{n\times n}$.

(d) Fie $\varphi : W \times W \to \mathbb{R}, \varphi\left(\left(u,f\right),\left(v,g\right)\right) = g\left(u\right) + f\left(v\right)$. Aătaţi că φ este o formă biliniară simetrică.

39. O formă biliniară a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ are matricea $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ în baza $B = \{(1,0),(-1,1)\}$. Se cere forma sa analitică.

(Examen, Informatică, 2014)

40. Să se determine polara şi signatura formei pătratice $f\left(x,y,z\right) := xz + yz - 2zx$.

(Examen, Ingineria sistemelor, 2014)

41. Să se determine matricea şi signatura formei pătratice $f\left(x,y,z\right) := x^2 - 2yz - 2zx$.

(Examen, Ingineria sistemelor, 2014)

42. * Fie V un spaţiu finit dimensional peste corpul K, fie $F : V \times V \to K$ o formă biliniară şi fie subspaţiile $V_1 = \{x \in V \,|\, F\left(x,y\right) = 0, \forall y \in V\}$ şi $V_2 = \{y \in V \,|\, F\left(x,y\right) = 0, \forall x \in V\}$. Arătaţi că $\dim V_1 = \dim V_2$.

(Concurs ,,Traian Lalescu", profil electric, etapa finală, Alba Iulia, 2013)

6 SPAŢII VECTORIALE EUCLIDIENE

Spaţiile vectoriale euclidiene - generalizări ale planului euclidian - se constituie în cel mai firesc şi cel mai uzitat suport matematic necesar descrierii, modelării şi analizei fenomenelor cotidiene. Structura unui asemenea spaţiu este, esenţial, mai bogată (decât a unui spaţiu care este doar liniar), acest fapt permiţând diferite calcule care, într-un spaţiu vectorial fără structură suplimentară, nu sunt posibile: într-un asemenea spaţiu putem calcula lungimea unui vector, putem măsura unghiul dintre doi vectori, putem, de asemenea, să aflăm distanţa dintre doi vectori.

Regăsirea informatiilor (information retrieval) este una din miile de aplicaţii ale acestor spaţii. Algoritmul transformatei Fourier rapide este probabil cel mai important algoritm numeric din zilele noastre, iar instrumentul esenţial folosit în realizarea lui este ortogonalitatea vectorilor din spaţiile euclidiene.

Pe tot parcursul capitolului spaţiile vectoriale considerate sunt reale, adică aici $K = \mathbb{R}$

A. TEORIE

6.1. Produse scalare

Într-un spaţiu vectorial putem aduna vectori (operaţia internă) şi putem înmulţi scalari cu vectori (operaţia externă). În plus putem compara doi vectori din următorul punct de vedere.

Definiţia 6.1.1. Direcţii şi sensuri comune pentru doi vectori. *Fie $V/\mathbb{R}$ un spaţiu vectorial real. Spunem că vectorii $u, v \in V$ sunt* ***coliniari*** *(sau* ***au aceeaşi direcţie****) dacă există un scalar nenul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ astfel ca $v = \lambda u$. Dacă, în plus, $\lambda > 0$ spunem că cei doi vectori* ***au acelaşi sens****, iar dacă $\lambda < 0$ spunem că u şi v au* ***sens opus****.*

Exemplul 6.1.1. În spaţiul $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$ vectorii $u = (1, 2, 0)$ şi $v = (13, 26, 0)$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens deoarece $v = 13u$ şi $\lambda = 13 > 0$. În astfel de cazuri convenim să scriem rapoartele de proporţionalitate ale coordonatelor în forma $\frac{13}{1} = \frac{26}{2} = \frac{0}{0} = \lambda = 13$ chiar dacă raportul al treilea nu are sens; identificăm acest şir de egalităţi cu următoarele egalitaţi care au sens: $13 = 1 \times 13$, $26 = 2 \times 13$, $0 = 0 \times 13$. Vectorii u şi $-v$ au aceeaşi direcţie dar au sens opus.

În spaţiile vectoriale euclidiene avem, în plus faţă de spaţiile vectoriale, posibilitatea să ,,înmulţim" vectori. Produsul a doi vectori pe care îl definim în continuare va fi un număr real, de aceea acestei înmulţiri a vectorilor îi vom spune *produs scalar.*

Definiţia 6.1.2. Definiţia produsului scalar. *Fie $V/\mathbb{R}$ un spaţiu vectorial n-dimensional şi $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică a cărei formă pătratică asociată este pozitiv definită. Atunci spunem că (V, φ) este un* ***spaţiu (vectorial, liniar) euclidian*** *iar φ este un* ***produs scalar*** *pe V, iar dacă nu este pericol de confuzie, spunem (şi scriem) că V este spaţiu vectorial euclidian. Dacă $u,v \in V$ scalarul $\varphi(u, v)$ va fi notat cu uv (sau $u \cdot v$ sau $\langle u, v\rangle$); vom spune că uv este* ***produsul scalar al vectorilor*** *u şi v. Uneori vom spune că $(V, \cdot)$ este spaţiu euclidian înţelegând prin aceasta că aplicaţia $\varphi(u, v) := uv$ defineşte un produs scalar pe V.*

Din definiţia precedentă, din definiţia formei biliniare simetrice şi din definiţia formei pătratice pozitiv definite rezultă următoarea caracterizare a produsului scalar.

Observaţia 6.1.1. *Fie V un spaţiu vectorial real şi $V \times V \ni (u, v) \mapsto uv := u \cdot v \in \mathbb{R}$ o funcţie. Atunci $(V, \cdot)$ este un spaţiu vectorial euclidian dacă şi numai dacă:*

1. *$uv = vu$ pentru orice $u, v \in V$* ***(simetria formei biliniare****);*
2. *$(\alpha u + \beta v) w = \alpha uw + \beta vw$ pentru orice $u, v, w \in V$ şi pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.* ***(liniaritatea în prima componentă*** *a funcţiei produs ,, $\cdot$ ");*
3. *$v \cdot v \geq 0$ pentru orice $v \in V$* şi *$v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = \theta_V$ (forma pătratică asociată formei biliniare simetrice ,, $\cdot$ "* ***este pozitiv definită****).*

Exemplul 6.1.2. Definim pe $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ aplicaţia $\varphi((x, y)(x', y')) := xx' - xy' - x'y + 4yy'$. Să arătăm că $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ este un spaţiu euclidian. Deoarece φ este o formă biliniară simetrică având matricea $\varphi_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ în baza canonică din $\mathbb{R}^2$, înseamnă că forma pătratică f care are drept polară forma φ are expresia analitică $f(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$. Dar $f(x, y) = (x - y)^2 + 3y^2$, daci signatura formei noastre este $(2, 0, 0)$, şi, prin urmare, forma este pozitiv definită. În consecinţă φ este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$, deci $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ este un spaţiu euclidian.

Definiţia 6.1.3. Definiţia normei. Versor (vector unitar). *Fie $(V, \cdot)$ un spaţiu euclidian. Numărul nenegativ*

$$\|v\| := \sqrt{v \cdot v}$$

se numeşte ***norma*** *sau* ***lungimea vectorului*** *$v \in V$. Funcţia*

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R},\ v \mapsto \|v\|$$

se numeşte ***normă*** *(pe V), iar cuplul $(V, \| \cdot \|)$ se numeşte* ***spaţiu vectorial normat.*** *Mai spunem uneori că spaţiul euclidian V este un* ***spaţiu normat cu norma***

indusă de produsul scalar *„ · ”. Un vector de lungime* 1 *se numeşte* ***vector unitar*** *sau* ***versor****.*

Exemplul 6.1.3. În spaţiul euclidian $\left(\mathbb{R}^2, \varphi\right)$ definit la exemplul precedent norma indusă de produsul scalar φ are expresia analitică $\|(x,y)\|_\varphi = \sqrt{\varphi\left((x,y),(x,y)\right)} = \sqrt{x^2 - 2xy + 4y^2}$. Deci, dacă $e_1 = (1,0)$ şi $e_2 = (0,1)$ sunt vectorii din baza canonică, norma lui e_1 este 1, iar norma (lungimea) lui e_2 este 2. Să observăm că, definind $(x,y) \cdot (x',y') := xx' + yy'$, cuplul $\left(\mathbb{R}^2, \cdot\right)$ este de asemenea spaţiu euclidian; în acest spaţiu lungimile celor doi vectori sunt egale cu 1, adică cei doi vectori sunt unitari.

Exemplul 6.1.4. **Versorul unui vector.** Dacă $(V, \cdot)$ este un spaţiu vectorial euclidian şi v este un vector nenul din acest spaţiu atunci

$$v_0 := \frac{1}{\|v\|}\, v$$

este un vector care are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu vectorul v. În plus $\|v_0\| = \sqrt{\frac{1}{\|v\|}\, v \cdot \frac{1}{\|v\|}\, v} = \frac{1}{\|v\|}\sqrt{v \cdot v} = 1$. Vectorul v_0 se numeşte ***versorul vectorului*** v.

Exemplul 6.1.5. **Produsul scalar standard şi spaţiul euclidian canonic** $\mathbb{R}^n$. În spaţiul $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ definim produsul vectorilor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ prin

$$xy := x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Să arătăm că această aplicaţie defineşte un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ şi $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ vectori arbitrari din $\mathbb{R}^n$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci

- $xy = yx$;
- $(\alpha x + \beta y)\, z = (\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n)\,(z_1, \ldots, z_n) = (\alpha x_1 + \beta y_1)\, z_1 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)\, z_n = \alpha\,(x_1z_1 + \cdots + x_nz_n) + \beta\,(y_1z_1 + \cdots + y_nz_n) = \alpha xz + \beta yz$;
- $x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$ şi $x \cdot x = 0$ dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, adică $x = \theta_{\mathbb{R}^n}$.

Prin urmare, cu acest produs scalar - numit ***produsul scalar standard*** - $\mathbb{R}^n$ devine un spaţiu vectorial euclidian. Îl vom numi ***spaţiul euclidian canonic*** (n-dimensional).

Norma vectorului x este $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ şi *versorul vectorului nenul* x este

$$x^0 = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{-\frac{1}{2}} x.$$

Conform *inegalităţii Cauchy - Buniakowski - Schwarz* avem

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

de unde rezultă că
$$|xy| \leq \|x\| \, \|y\| \, .$$

Inegalitatea dovedită mai sus este valabilă în general: *într-un spaţiu euclidian produsul scalar al doi vectori este mai mic sau egal cu produsul normelor celor doi vectori*, după cum rezultă din următoarea teoremă.

Teorema 6.1.1. **Inegalitatea lui Schwarz.** *Fie V este un spaţiu vectorial euclidian şi $u, v \in V$. Atunci*
$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\| \, .$$
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă cei doi vectori sunt coliniari.

Din definiţia normei induse de un produs scalar rezultă imediat următoarele proprietăţi ale normei.

Observaţia 6.1.2. **Proprietăţi ale normei.** *Fie V un spaţiu vectorial euclidian şi $\| \cdot \|$ norma indusă de produsul scalar. Atunci*

1. $\|v\| \geq 0$ *pentru orice* $v \in V$, *iar* $\|v\| = 0$ *dacă şi numai dacă* $v = \theta_V$;
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ *pentru orice* $v \in V$ *şi pentru orice* $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *pentru orice* $u, v \in V$ - ***inegalitatea triunghiului***.

Primele două afirmaţii sunt imediate. Deoarece

$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 \Leftrightarrow (u + v)(u + v) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 \|u\| \, \|v\| \Leftrightarrow uv \leq \|u\| \, \|v\|$,

iar ultima inegalitate este chiar inegalitatea lui Schwarz, rezultă că inegalitatea triunghiului este verificată.

Din inegalitatea lui Schwarz rezultă că dacă u şi v sunt vectori nenuli, atunci
$$\left| \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} \right| \leq 1.$$
Acest fapt permite definirea cosinusului unghiului dintre aceşti vectori. Reamintim că funcţia $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ este inversa restricţiei funcţiei cos la intervalul $[0, \pi]$.

Definiţia 6.1.4. Măsura unghiului dintre doi vectori. *Fie u şi v doi vectori nenuli din spaţiul vectorial euclidian V. Numărul* $\arccos \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$ *se numeşte* ***măsura unghiului*** *dintre vectorii u şi v. Scriem*
$$\cos \widehat{u, v} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$$

şi, prin abuz de limbaj, spunem uneori că $\arccos \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$ *este* ***unghiul vectorilor*** *u şi v.*

Dacă $\arccos \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} = \dfrac{\pi}{2}$*, sau, echivalent, $u \cdot v = 0$, spunem că* ***vectorii*** *u şi v sunt* ***ortogonali****, sau că u este* ***perpendicular (ortogonal)*** *pe v şi scriem $u \perp v$.*

Exemplul 6.1.6. Fie $u = (1, 2, 3)$ şi $v = (3, 2, 1)$ doi vectori din spaţiul euclidean canonic tridimensional. Atunci $\|u\| = \|v\| = \sqrt{14}$ şi $uv = 10$. Prin urmare măsura unghiului dintre cei doi vectori este $\arccos \dfrac{5}{7}$, iar măsura unghiului dintre vectorii u şi $-v$ este $\arccos \dfrac{-5}{7} = \pi - \arccos \dfrac{5}{7}$. Vectorul $w = (x, y, z)$ este perpendicular pe u dacă şi numai dacă $x + 2y + 3z = 0$ şi este perpendicular pe v dacă şi numai dacă $3x + 2y + z = 0$; prin urmare mulţimea vectorilor ortogonali pe u şi v este $\{(x, -2x, x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = span\{(1, -2, 1)\}$, adică un subspaţiu unidimensional al spaţiului $\mathbb{R}^3$, iar $\{u, v, (1, -2, 1)\}$ este o bază în $\mathbb{R}^3$.

Exemplul 6.1.7. **Regăsirea informaţiei (I R)**. Regăsirea informaţiei (information retrieval, pe scurt I R) este un proces de selecţie. Să presupunem că avem documentele $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Se pune problema *găsirii documentelor relevante pentru o cerere c a unui solicitant.* Grosso modo, partea algebrică a tehnicii de găsire a acestora este următoarea.

- Se face o selecţie a termenilor din documente şi se stabilesc m termeni $t_1, t_2, \ldots, t_m$.
- Fiecărui document D_j i se asociază un vector $d_j = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ unde $d_{ij} \geq 0$ este ponderea termenului t_i în documentul D_j.
- Se construieşte *matricea termenilor* (*document-term matrix*) $D = (d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_n)$, matrice care este folosită la orice solicitare a unui utilizator.
- În cazul în care un utilizator face cererea c, acestei cereri i se asociază de asemenea un vector $\overline{c} = (c_i) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ unde $c_i \geq 0$ este ponderea termenului t_i în cererea c.
- Se calculează cosinusurile unghiurilor $\widehat{\overline{c}, d_1}\ \widehat{\overline{c}, d_2}, \ldots, \widehat{\overline{c}, d_n}$, adică $\dfrac{\overline{c} \cdot d_j}{\|\overline{c}\| \, \|d_j\|}$, $j = \overline{1, n}$ şi se ordonează descrescător. Se obţine un şir de numere nenegative ordonat $\delta_{k_1} \geq \delta_{k_2} \geq \delta_{k_3} \geq \ldots$
- Se oferă utilizatorului documentele $D_{k_1}, D_{k_2}, D_{k_3}, \ldots$ în această ordine. (De exemplu dacă $\dfrac{\overline{c} \cdot d_j}{\|\overline{c}\| \, \|d_j\|} = 1$, atunci documentul D_j are cea mai mare relevanţă în raport cu cererea c, deoarece vectorii $\overline{c}$, d_j sunt coliniari şi au acelaşi sens; în acest caz $k_1 = j$.)

Lungimea vectorului $u - v$ este, prin definiţie, distanţa dintre vectorii u şi v.

Definiţia 6.1.5. Distanţa dintre doi vectori. *Fie V un spaţiu euclidian şi $\|\cdot\|$ norma indusă de produsul scalar. Dacă $u, v \in V$ atunci numărul nenegativ*

$$d(u,v) := \|u - v\|$$

se numeşte ***distanţa dintre vectorii*** *u şi v. Funcţia $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$ definită prin*

$$d(u,v) := \|u - v\|$$

se numeşte ***metrica*** *(sau* ***distanţa****)* ***indusă de norma*** *$\|\cdot\|$ pe V, iar cuplul (V, d) se numeşte* ***spaţiu metric****.*

Din proprietăţile normei obţinem imediat următoarele proprietăţi ale metricii induse de normă.

Observaţia 6.1.3. **Proprietăţi ale metricii.** Fie V este un spaţiu vectorial euclidian şi d metrica indusă de norma sa. Atunci

1. $d(u,v) = 0$ dacă şi numai dacă $u = v$;
2. $d(u,v) = d(v,u)$ pentru orice $u, v \in V$;
3. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ pentru orice $u, v, w \in V$ - *inegalitatea triunghiului.*

Ultima inegalitate rezultă imediat din inegalitatea triunghiului proprie normei:
$d(u,v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\| = d(u,w) + d(w,v)$.

Exemplul 6.1.8. Fie spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^n$ şi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ doi vectori din acest spaţiu. Distanţa dintre ei este

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Observăm că dacă $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este baza canonică, atunci $d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$ dacă $i \neq j$, că lungimea fiecărui vector din bază este 1 (adică baza B este formată din vectori unitari) şi că $e_i e_j = \delta_{ij}$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$; în particular $e_i \perp e_j$ dacă $i \neq j$.

6.2. Baze ortonormate

Bazele ortonormate sunt generalizări ale bazei canonice din spaţiul euclidian canonic. Ele permit reprezentări numerice simple, şi, de aceea sunt larg utilizate în practică, în special în grafica pe calculator.

Fie V un spaţiu euclidian n-dimensional, $n > 1$.

Definiţia 6.2.1. Sisteme ortogonale. *O mulţime de vectori nenuli* $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$*, unde* $m > 1$*, se numeşte* ***sistem ortogonal*** *dacă orice doi vectori diferiţi din mulţime sunt ortogonali, i.e.* $v_i v_j = 0$ *(sau* $v_i \perp v_j$*) dacă* $i \neq j$*,* $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$*. Dacă, în plus, vectorii din* M *sunt şi unitari spunem că* M *este un* ***sistem ortonormat****.*

Observaţia 6.2.1. *Dacă* $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset V$ *este un sistem ortogonal atunci* M *este un sistem de vectori liniar independent.* Într-adevăr, dacă luăm o combinaţie liniară nulă a acestor vectori

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_m v_m = \theta, \quad x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$$

şi înmulţim scalar cu $v_i \in M$ membrii acestei egalităţi, obţinem $x_i v_i v_i = x_i \|v_i\|^2 = 0$, deci, cum $v_i \neq \theta$, urmează că $x_i = 0$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

În particular, *un sistem ortogonal de* n *vectori din spaţiul* n*-dimensional* V *este bază în acest spaţiu.*

Definiţia 6.2.2. Baze ortonormate. *Un sistem ortogonal de* n *vectori din spaţiul* n*-dimensional* V *se numeşte* ***bază ortogonală****. O bază ortogonală formată cu vectori unitari se numeşte* ***bază ortonormată****.*

Exemplul 6.2.1. Baza canonică din spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^n$ - vezi Exemplul 6.1.5 - este formată din vectori unitari, ortogonali doi câte doi, deci este o bază ortonormată. În schimb, dacă considerăm produsul scalar din $\mathbb{R}^2$ definit la Exemplul 6.1.3, avem $\varphi((1,0)(0,1)) := -2$, deci baza canonică din $\mathbb{R}^2$ nu este ortogonală în spaţiul euclidian $(\mathbb{R}^2, \varphi)$.

Observaţia 6.2.2. Dacă $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este *o bază oarecare* a spaţiului euclidian $(V, \cdot)$, iar $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n \in V$, atunci, în acord cu expresia analitică cunoscută de la formele biliniare avem

$$uv = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i e_j)$$

sau, matriceal,

$$(uv) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & \cdots & e_1e_n \\ e_1e_2 & e_2e_2 & \cdots & e_2e_n \\ \ldots & \ldots & \vdots & \ldots \\ e_1e_n & e_2e_n & \cdots & e_ne_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

În schimb, bazele ortonormate permit o reprezentare facilă (aşa numita *reprezentare (exprimare) Fourier*) a unui vector şi formule simple - similare celor din spaţiul euclidian canonic - de calcul al produsului scalar al doi vectori, respectiv al normei unui vector.

Observaţia 6.2.3. **Coeficienţii Fourier**. **Reprezentarea Fourier**. Dacă $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază ortonormată în spaţiul euclidian $(V, \cdot)$ atunci coordonatele unui vector $v \in V$ în această bază sunt

$$e_1 v,\ e_2 v,\ \ldots,\ e_n v.$$

Într-adevăr, dacă $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$ şi înmulţim scalar membrii egalităţii cu $e_i \in B$, rezultă imediat că $e_i v = x_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prin urmare am obţinut următoarea reprezentare - numită *reprezentarea (exprimarea) Fourier* - a vectorului v în baza B :

$$v = (e_1 v)\, e_1 + (e_2 v)\, e_2 + \ldots + (e_n v)\, e_n.$$

Scalarii $e_1 v, e_2 v, \ldots, e_n v \in \mathbb{R}$ se numesc *coeficienţii Fourier ai vectorului* v (în baza ortonormată B). În plus, dacă $u = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$ este un alt vector din V, produsul scalar al celor doi vectori este

$$uv = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

iar norma vectorului v este

$$\|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Exemplul 6.2.2. Fie $v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ şi $v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ în spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^3$. Deoarece $v_1 v_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$, $v_2 v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$ şi $v_3 v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ rezultă că $B := \{v_1, v_2, v_3\}$ este o bază ortogonală în $\mathbb{R}^3$. Cum $\|v_1\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$, $\|v_2\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$ şi $\|v_3\| = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = 1$ urmează că B este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$. Exprimarea (unică) a vectorului $v = (1, 2, 3)$ în această bază se face cu ajutorul coeficienţilor Fourier: $x_1 = v_1 v = \frac{-1 + 2 + 3}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $x_2 = v_2 v = \frac{1 + 2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $x_3 = v_3 v = \frac{1 - 2 + 6}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$. prin urmare $v = \frac{4}{\sqrt{3}} v_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} v_2 + \frac{5}{\sqrt{6}} v_3$.

Observaţia 6.2.4. **Reprezentarea unui versor într-o bază ortonormată**. Să presupunem că $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază ortonormată în spaţiul euclidian $(V, \cdot)$ şi $v \in V$ este un versor. Coeficienţii Fourier, i.e. coordonatele vectorului v sunt $x_1 = ve_1, x_2 = ve_2, \ldots, x_n = ve_n$. Cum v este unitar, avem $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Pe de altă parte cosinusul unghiului dintre vectorii v şi e_i este $\cos \widehat{v, e_i} = \frac{ve_i}{\|v\|\,\|e_i\|} = x_i$. Prin urmare *coeficienţii Fourier ai versorului v în baza ortonormată B sunt chiar* *cosinusurile unghiurilor dintre vectorul v şi vectorii bazei B :*

$$v = (\cos\widehat{v, e_1})\, e_1 + (\cos\widehat{v, e_2})\, e_2 + \cdots + (\cos\widehat{v, e_n})\, e_n.$$

Definiţia 6.2.3. Matrice ortogonală . *O matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pentru care $T^T T = I_n$ se numeşte* ***matrice ortogonală****.*

Exemplul 6.2.3. Matricea $T := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ este ortogonală pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ deoarece

$$T^T T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observaţia 6.2.5. Proprietăţi ale matricelor ortogonale. *O matrice ortogonală T este inversabilă, iar inversa sa coincide cu transpusa ei.* Într-adevăr, dacă $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este ortogonală atunci $T^T T = I_n$, $\det(T^T T) = 1$, deci $\det T \in \{-1, 1\}$; prin urmare T este inversabilă, iar din $T^T T = I_n$ rezultă că $T^{-1} = T$. Dacă B şi B' sunt baze ortonormate şi cunoaştem exprimarea vectorului v în baza B, atunci putem determina uşor coordonatele acestui vector în baza B' astfel:

$$v_{B'} = T_{B'B}\, v_B = T_{BB'}^{-1}\, v_B = T_{BB'}^T\, v_B.$$

Dacă $T_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice ortogonală atunci

$$(TT_1)^T\, TT_1 = T_1^T T^T T T_1 = I_n,$$

deci produsul a două matrice ortogonale este o matrice ortogonală.
Reamintim că matricea de trecere $T_{BB'}$ de la baza B la baza B', are pe coloane coordonatele vectorilor din baza B' exprimaţi în baza B. O asemenea matrice este inversabilă iar legătura dintre coordonatele unui vector v în cele două baze se exprimă matriceal prin formula $v_B = T_{BB'}\, v_{B'}$ (şi $v_{B'} = T_{BB'}^{-1}\, v_B$). În cazul matricelor de trecere între două baze ortonormate formulele se simplifică semnificativ din cauza următoarei proprietăţi care se dovedeşte folosind Observaţia 6.2.2.

Propoziţia 6.2.1. **Matricea de trecere între baze ortonormate.** *Matricea de trecere dintre două baze ortonormate ale unui spaţiu euclidian este ortogonală.*

Exemplul 6.2.4. Fie baza $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de la Exemplul 6.2.2. Să determinăm matricea de trecere T_{BB_c} de la baza B la baza canonică B_c din $\mathbb{R}^3$. Cum cele două baze sunt ortonormate, matricea T_{BB_c} este ortogonală şi, prin urmare

$$T_{BB_c} = T_{B_cB}^{-1} = T_{B_cB}^T = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

6.3. Subspaţii ortogonale

Fie $(V, \cdot)$ un spaţiu euclidian şi $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a sa.

Definiţia 6.3.1. Complementul ortogonal al unui vector. *Fie $v \in V$ un vector nenul. Mulţimea*

$$v^{\perp} := \{u \in V \mid uv = 0\}$$

se numeşte ***complementul ortogonal al vectorului*** *v.*

Prin urmare $v^{\perp}$ *conţine totalitatea vectorilor ortogonali pe vectorul v şi vectorul nul.* Dacă $u, w \in v^{\perp}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci

$$(\alpha u + \beta w)\, v = \alpha\,(uv) + \beta\,(wv) = 0,$$

deci $\alpha u + \beta w \in v^{\perp}$. Prin urmare $v^{\perp}$ *este un subspaţiu liniar al spaţiului V.* Dacă $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ atunci ***ecuaţia subspaţiului*** $v^{\perp}$ este

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0,$$

deci dacă $A := \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ atunci subspaţiul $v^{\perp}$ *este izomorf cu $Null\,(A)$.* În particular, dimensiunea complementului ortogonal al vectorului nenul v este $n - 1$.

Propoziţia 6.3.1. *Complementul ortogonal al unui vector nenul al spaţiului euclidian n-dimensional V este un subspaţiu vectorial de dimensiune $n - 1$.*

Exemplul 6.3.1. Fie $v = (1, -2, 1) \in \mathbb{R}^3$. Să determinăm o bază a complementului ortogonal al acestui vector. Avem

$v^{\perp} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (1, -2, 1) \cdot (x, y, z) = x - 2y + z = 0\right\} =$
$\{(x, y, -x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = span\,\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}.$

Rezultă imediat că $\{(1, -1, 0), (0, 1, 2)\}$ este o bază a complementului ortogonal $v^{\perp}$.

Extindem definiţia complementului ortogonal al unui vector la un sistem de vectori.

Definiţia 6.3.2. Complementul ortogonal al unui sistem de vectori. *Fie $S \subset V$ o mulţime nevidă. Mulţimea*

$$S^{\perp} := \{v \in V \mid uv = 0,\ \forall u \in S\}$$

se numeşte ***complementul ortogonal al sistemului*** *S.*

Denumirea de *complement* este justificată de faptul că reuniunea dintre un subspaţiu şi complementul său ortogonal este întregul spaţiu euclidian.

Propoziţia 6.3.2. *Fie $S \subset V$. Atunci $S^{\perp} \leq V$. Dacă $S \leq V$ atunci*

$$S \cap S^{\perp} = \{\theta_V\}\,,\ S \cup S^{\perp} = V \ \text{şi}\ \dim S + \dim S^{\perp} = n;$$

dacă, în plus, $B_S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ este o bază în S şi $m < n$ atunci

$$S^{\perp} := \left\{v \in V \mid s_i v = 0,\ \ i = \overline{1,m}\right\}.$$

Propoziţia 6.3.3. *Dacă V este un spaţiu euclidian, subspaţiul vectorial $S \leq V$ are dimensiunea $m < n$ şi B este o bază în S, atunci complementul său ortogonal, $S^{\perp}$, coincide cu mulţimea vectorilor din V care sunt ortogonali pe vectorii bazei B.*

Exemplul 6.3.2. Să determinăm complementul ortogonal al subspaţiului

$$S = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0,\ y + z - t = 0\right\}.$$

Deoarece $S = \{(x,\ y,\ x + y,\ x + 2y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} =$
$\{x\,(1, 0, 1, 1) + y\,(0, 1, 1, 2) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = span\,\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 2)\},$
rezultă imediat că o bază în S este $B := \{s_1 = (1, 0, 1, 1),\ s_2 = (0, 1, 1, 2)\}$. Prin urmare $S^{\perp} = \left\{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid vs_1 = 0,\ vs_2 = 0\right\}$, adică

$$S^{\perp} = \left\{v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z + t = 0,\ y + z + 2t = 0\right\}.$$

6.4. Proiecţii ortogonale

Generalizarea proiecţiei unui vector pe alt vector din plan este dată în următoarea definiţie.

Definiţia 6.4.1. Proiecţia unui vector pe un subspaţiu. *Să considerăm că S este un subspaţiu al spaţiului euclidian V şi $v \in V$ un vector nenul. Numim **proiecţia ortogonală a vectorului** v **pe subspaţiul** S un vector notat $pr_S\, v \in S$ cu proprietatea că vectorul $v - pr_S\, v$ este perpendicular pe toţi vectorii subspaţiului S, deci, pentru care*

$$(v - pr_S\, v) \cdot s = 0,\ \ \forall s \in S.$$

*Dacă $w \in V$ un alt vector nenul vom spune că vectorul notat $pr_w v$ este **proiecţia vectorului** v **pe vectorul** w dacă vectorii w şi $pr_w v$ sunt coliniari iar $v - pr_w v \perp w$, adică*

$$(v - pr_w v) \cdot w = 0.$$

Observaţia 6.4.1. *Proiecţia ortogonală a vectorului v pe vectorul w coincide cu proiecţia ortogonală a vectorului v pe subspaţiul generat de vectorul w,* adică

$$pr_w v = pr_{span\{w\}} v.$$

Într-adevăr, din definiţia proiecţiei $pr_w v$, dacă $w' = \alpha w \in span\,\{w\}$ atunci $w' \cdot (v - pr_w v) = \alpha\,(w \cdot (v - pr_w v)) = 0$, deci $v - pr_w v \perp w'$ pentru orice $w' \in span\,\{w\}$, adică $pr_w v = pr_{span\{w\}} v$.

De altfel, *putem obţine **expresia proiecţiei** $pr_w v$ astfel:*

- *deoarece $pr_w v \in span\,\{w\}$, există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel că $pr_w v = \alpha w$;*

- *deoarece* $(v - pr_w v)\, w = 0$ *rezultă că* $vw - \alpha \|w\|^2 = 0$*, deci* $\alpha = \dfrac{vw}{\|w\|^2}$ *şi*

$$pr_w v = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2}\, w.$$

Reamintim că un vector din plan se poate scrie ca suma proiecţiilor sale pe două direcţii ortogonale. Proprietatea este valabilă într-un spaţiu euclidian arbitrar.

Observaţia 6.4.2. Dacă $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază ortonormată în spaţiul euclidian V şi $v \in V$ atunci $pr_{e_i} v = (v \cdot e_i)\, e_i$, $i = \overline{1, n}$. Atunci, folosind exprimarea Fourier avem

$$v = pr_{e_1} v + pr_{e_2} v + \cdots + pr_{e_n} v.$$

Analog se arată următoarea proprietate.

Observaţia 6.4.3. Descompunerea proiecţiei ortogonale după vectorii unei baze ortonormate. Fie $B_S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ o bază ortonormată în subspaţiul $S \le V$, unde $m < n = \dim V$ şi $v \in V$. Atunci *proiecţia ortogonală a vectorului* v *pe subspaţiul* S este *suma proiecţiilor ortogonale ale lui* v *pe vectorii bazei* B_S, adică

$$pr_S v = pr_{s_1} v + pr_{s_2} v + \cdots + pr_{s_m} v.$$

Exemplul 6.4.1. Fie $v = (1, 2, 3)$, $w = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ şi $S = \{(x - y,\, y - z,\, z - x) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Să se determine $pr_w v$ şi $pr_S\, v$.

Rezolvare. Pentru prima proiecţie avem

$$pr_w v = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2}\, w = \frac{6}{3}\, w = (2, 2, 2).$$

Pentru cea de a doua, remarcăm întâi că

$$S = span\,\{v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (0, -1, 1)\}$$

şi că $v_1 + v_2 + v_3 = (0, 0, 0)$. Deci $B := \{v_1, v_2\}$ este o bază a subspaţiului S. Fie $pr_S\, v = a v_1 + b v_2$. Atunci $v - pr_S\, v \perp v_1, v_2$, sau, echivalent

$$(1, 2, 3) - a v_1 - b v_2 \perp v_1, v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 2 \\ a - 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Deci $pr_S\, v = (-1, 0, 1)$.

6.5. Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt

După cum am văzut în paragrafele precedente, calculele într-o bază ortonormată sunt substanţial simplificate, deci determinarea unei asemenea baze este deseori extrem de profitabilă. Dăm, în final, procedeul de ortonormare Gram-Schmidt, procedeu care, pornind de la o bază a unui spaţiu euclidian, permite construcţia algoritmică a unei baze ortonormate.

Procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.
Fie $(V, \cdot)$ un spaţiu euclidian şi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a sa, unde $n > 1$.

1. *Recursiv, construim o bază ortogonală* $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$*, folosind vectorii bazei* B :

   - *întâi alegem un vector din* B*; fie* $v_1 := e_1$;
   - *construim vectorul*
   $$v_2 = e_2 - \lambda v_1,$$
   determinând scalarul λ *astfel ca* $v_2 \perp v_1$*, adică rezolvând ecuaţia de gradul întâi*
   $$v_1 \cdot e_2 - \lambda \|v_1\|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{v_1 \cdot e_2}{\|v_1\|^2};$$
   am obţinut astfel doi vectori ortogonali (deci liniar independenţi) v_1 *şi* v_2.
   - *repetăm procedeul: construim vectorul*
   $$v_3 = e_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2,$$
   determinând scalarii λ_1, λ_2 *astfel ca* $v_3 \perp v_1, v_2$*, adică rezolvând sistemul liniar, compatibil determinat* $v_3 \cdot v_1 = 0,\ v_3 \cdot v_2 = 0$*; obţinem vectorii ortogonali (deci liniar independenţi)* v_1, v_2 *şi* v_3*. Continuăm procedeul. În cele din urmă, având determinaţi vectorii ortogonali* $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$
   - *în sfârşit, construim vectorul*
   $$v_n = e_n - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_{n-1} v_{n-1},$$
   determinând scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ *astfel ca* $v_n \perp v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$*, adică rezolvând sistemul liniar compatibil determinat de* $n-1$ *ecuaţii şi* $n-1$ *necunoscute* $v_n \cdot v_i = 0,\ i = \overline{1, n-1}$*; am obţinut astfel baza ortogonală* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

2. *Luând versorii vectorilor* $v_1, v_2, \ldots, v_n$*, adică* $w_i = \dfrac{1}{\|v_i\|} v_i,\ \ i = \overline{1, n}$*, obţinem baza ortonormată* $B_o = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ *a spaţiului* V.

Exemplul 6.5.1. Să se ortonormeze baza $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, unde $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (1, 0, 1)$.

Construim întâi baza ortogonală $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ cu procedeul Gram-Schmidt. Fie
$$v_1 := e_1 = (1, 1, 0).$$
Determinăm $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca
$$v_2 := e_2 - \lambda v_1 = (0, 1, 1) - \lambda (1, 1, 0) = (-\lambda, 1 - \lambda, 1) \perp v_1.$$

Avem $v_1 v_2 = 0 \Leftrightarrow -\lambda + 1 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$, iar

$$v_2 = \left(-\frac{1}{2}\,,\ 1 - \frac{1}{2}\,,\ 1\right) = \left(-\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ 1\right)$$

este acum un vector perpendicular pe v_1.

Determinăm în continuare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru $v_3 := e_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$ să avem $v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0$. Cum

$$v_3 = e_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 = (1,0,1) - \lambda_1\,(1,1,0) - \lambda_2 \left(-\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ 1\right) =$$

$$= \left(1 - \lambda_1 + \frac{1}{2}\,\lambda_2,\ -\lambda_1 - \frac{1}{2}\,\lambda_2,\ 1 - \lambda_2\right),$$

din condiţiile de ortogonalitate obţinem

$$v_1 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda_1 + \frac{1}{2}\,\lambda_2 - \lambda_1 - \frac{1}{2}\,\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \text{ şi}$$

$$v_2 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \lambda_1 + \frac{1}{2}\,\lambda_2\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\lambda_1 - \frac{1}{2}\,\lambda_2\right) + 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\,\lambda_2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{1}{3}\,.$$

Prin urmare $v_3 = \left(\dfrac{2}{3}\,,\ -\dfrac{2}{3}\,,\ \dfrac{2}{3}\right)$.

Deoarece $\|v_1\| = \sqrt{2}$, $\|v_2\| = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ şi $\|v_3\| = \sqrt{\dfrac{4}{3}}$, luând $w_1 = \dfrac{1}{\|v_1\|}\,v_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,,\ 0\right)$, $w_2 = \dfrac{1}{\|v_2\|}\,v_2 = \left(-\sqrt{\dfrac{1}{6}}\,,\ \sqrt{\dfrac{1}{6}}\,,\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$ şi $w_3 = \dfrac{1}{\|v_3\|}\,v_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,,\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, am determinat baza ortonormată $B_o = \{w_1, w_2, w_3\}$.

B. PROBLEME REZOLVATE

1. Să se stabilească dacă următoarele forme biliniare pe $\mathbb{R}^2$ reprezintă produse scalare: a) $q_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q_1(u,v) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$, $\forall u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$;
   b) $q_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q_2(u,v) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$, $\forall u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2)$.
   Rezolvare.
   Forma biliniară q_1 are matricea

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

care e o matrice simetrică, deci q_1 e o formă biliniară simetrică. În plus, are valorile proprii $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$ pozitive, deci forma pătratică asociată e pozitiv definită. Aşadar q_1 este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$.

Pentru forma biliniară q_2 de la b), observăm că ea are matricea

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

care e o matrice simetrică, deci q_2 e şi ea o formă biliniară simetrică. În plus, are valorile proprii $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ iar λ_2 nu e pozitivă, deci forma pătratică asociată nu e pozitiv definită. Deci q_2 nu este un produs scalar pe $\mathbb{R}^2$.

2. Se consideră spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ dotat cu produsul scalar standard. Calculaţi cosinusul unghiului $\angle(u, v)$ şi determinaţi versorul v_0 al vectorului v pentru vectorii $u = (1, 2, 3), v = (-1, 1, 2) \in (\mathbb{R}^3, \cdot)$. Unghiul dintre cei doi vectori este unul ascuţit sau obtuz?
Rezolvare.
Calculăm produsul scalar $u \cdot v = 1(-1)+2+6 = 7$ şi normele $||u|| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ şi $||v|| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$. Deci $\cos(\widehat{u,v}) = \dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \dfrac{7}{2\sqrt{21}}$. Cosinusul fiind pozitiv, unghiul este ascuţit.
Versorul v_0 al vectorului v îl calculăm prin

$$v_0 = \frac{1}{||v||}\, v = \frac{1}{\sqrt{6}}\, v = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

3. Arătaţi că

$$B = \left\{ q_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix},\ q_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix},\ q_3 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\}$$

este o bază ortonormată în $(\mathbb{R}^{3\times 1}, \cdot)$.
Rezolvare.
Calculăm produsele scalare $q_1 \cdot q_2 = q_1^T q_2 = [1/3 \quad -2/3 \quad 2/3] \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = 0$, $q_1 \cdot q_3 = q_1^T q_3 = [1/3 \quad -2/3 \quad 2/3] \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0$ şi $q_2 \cdot q_3 = q_2^T q_3 = [2/3 \quad 2/3 \quad 1/3] \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0$ şi vedem că vectorii din B sunt doi câte doi ortogonali. Dar orice sistem de vectori doi câte doi ortogonali este şi un sistem liniar independent. Cum $card(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}^{3\times 1})$, avem că vectorii

din B formează un sistem liniar independent maximal de vectori doi câte doi ortogonali, adică o bază ortogonală în $(\mathbb{R}^{3\times 1}, \cdot)$.

În plus, $||q_1|| = \sqrt{1/9 + 4/9 + 4/9} = 1$. Analog, $||q_2|| = ||q_3|| = 1$, deci B este o bază ortonormată în $(\mathbb{R}^{3\times 1}, \cdot)$.

4. Calculaţi coordonatele vectorului $u = [1 \quad 2 \quad 3]^T$ în raport cu baza ortonormată B de la problema 3.
Rezolvare.
Vectorul u admite în raport cu baza ortonormată B reprezentarea Fourier
$$u = (q_1 \cdot u)q_1 + (q_2 \cdot u)q_2 + (q_3 \cdot u)q_3$$
Calculând produsele scalare din cele trei paranteze vom obţine că $u = q_1 + 3q_2 + 2q_3$, deci $u_B = [1 \quad 3 \quad 2]^T$.

5. Scrieţi matricele de trecere T_{B_cB} şi T_{BB_c}, unde B este baza de la problema 3 iar B_c este baza canonică din $\mathbb{R}^{3\times 1}$ şi folosiţi una din aceste matrice pentru a calcula coordonatele în baza B ale vectorului $v = [2 \quad 1 \quad -1]^T$.
Rezolvare.
Întâi $T_{B_cB} = [q_{1_B}|q_{2_B}|q_{3_B}] = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$. Apoi, $T_{BB_c} = T_{B_cB}^{-1} = T_{B_cB}^T$ unde ultima egalitate rezultă din faptul că matricea de trecere între două baze ortonormate este o matrice ortogonală. Aşadar $T_{BB_c} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$.
Pentru coordonate, avem $v_B = T_{BB_c}\, v_{B_c} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 5/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}$.

6. Construiţi două baze ortonormate în $(\mathbb{R}^2, \cdot)$, $B_1 = \{q_1, q_2'\}$ şi $B_2 = \{q_1, q_2''\}$ pentru care primul vector q_1 face un unghi θ de măsură $\dfrac{\pi}{6}$ cu vectorul e_1.
Rezolvare.
q_1, fiind versor, coordonatele sale sunt cosinusurile directoare, deci cosinusurile unghiurilor pe care acesta le face cu vectorii bazei canonice: $q_1 = (\cos\widehat{(q_1, e_1)}, \cos\widehat{(q_1, e_2)}) = (\cos\theta, \cos(\pi/2 - \theta)) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Pentru al doilea vector, avem două variante de a alege vectori ortogonali pe q_1 şi de aceeaşi normă, mai precis $q_2' = (-\sin\theta, \cos\theta)$ şi $q_2'' = (\sin\theta, -\cos\theta)$. Aşadar pentru $\theta = \pi/6$, $B_1 = \{q_1 = (\sqrt{3}/2,\ 1/2),\ q_2' = (-1/2,\ \sqrt{3}/2)\}$ şi $B_2 = \{q_1 = (\sqrt{3}/2,\ 1/2),\ q_2'' = (1/2,\ -\sqrt{3}/2)\}$.

7. Dacă A este o matrice pătratică nesingulară, să se determine care din liniile l_i ale lui A şi coloanele c_j ale lui A^{-1} reprezintă vectori ortogonali.
Rezolvare.
Când calculăm produsul $A \cdot B$ a două matrice, elementul c_{ij} din matricea produs este de fapt produsul scalar între linia i a matricei A şi coloana j a matricei B.

La matricea din enunţ, $AA^{-1} = I_n$ deci $l_i \cdot c_j = \delta_{ij}$, unde δ_{ij}, simbolul lui Kronecker, este elementul de pe poziţia (i, j) din matricea unitate. Deci linia l_i a lui A şi coloana c_j a lui A^{-1} reprezintă vectori ortogonali dacă şi numai dacă $i \neq j$.

8. Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Să se arate că subspaţiile $Null(A)$ şi $Lin(A) = Col(A^T)$ ale lui $\mathbb{R}^m$ sunt ortogonale.
Rezolvare.
Fie $u \in Null(A)$ şi $v \in Lin(A)$, oarecare. Din definiţiile celor două subspaţii, avem că $Au = \theta$, respectiv că există $x \in \mathbb{R}^m$ astfel încât $A^T x = v$ (scrierea matriceală a faptului că v se poate scrie combinaţie liniară de coloanele lui A^T).

   Calculăm produsul scalar $v \cdot u = v^T u = (A^T x)^T u = x^T Au = x^T \theta = 0$, deci cei doi vectori sunt ortogonali. Cum vectorii sunt arbitrar aleşi, rezultă că cele două subspaţii sunt ortogonale.

9. Să se dea exemplu de o matrice A pentru care $u = (1, 2, 1) \in Lin(A)$ şi $v = (1, -2, 1) \in Null(A)$, sau în cazul în care nu există o astfel de matrice, să se argumenteze inexistenţa ei.
Rezolvare.
Din problema de mai sus, $Null(A) \perp Lin(A)$. Dar $u \cdot v = -2 \neq 0$, deci nu există matrice cu proprietatea cerută.

10. Să se arate că dacă $Au \in Null(A^T)$, atunci $Au = \theta$, pentru orice matrice A.
Rezolvare.
Scriind că $Null(A) \perp Lin(A)$ pentru matricea transpusă, obţinem că $Null(A^T) \perp Col(A)$. Au este un vector din $Col(A)$ şi $Null(A^T)$, dar intersecţia a două subspaţii ortogonale este formată doar din vectorul nul, deci $Au = \theta$.

11. Să se construiască prin procedeul Gram-Schmidt o bază ortonormată în $(\mathbb{R}^3, \cdot)$, pornind de la baza $B = \{u_1 = (1, -2, 2), u_2 = (-1, 1, 0), u_3 = (2, 1, 3)\}$.
Rezolvare.
Construim întâi baza ortogonală $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$. Fie

$$v_1 = u_1 = (1, -2, 2)\,.$$

   Determinăm $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $v_2 = u_2 - \lambda v_1 = (-1, 1, 0) - \lambda\,(1, -2, 2) = (-1 - \lambda, 1 + 2\lambda, -2\lambda) \perp v_1$. Avem $v_1 v_2 = 0 \Leftrightarrow -3 - 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{3}$, deci

$$v_2 = \left(-1 + \frac{1}{3}\,,\ 1 - \frac{2}{3}\,,\ \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{2}{3}\right)$$

   este un vector ortogonal pe v_1. Determinăm în continuare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru $v_3 = u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$ să avem $v_1 \cdot v_3 = v_2 \cdot v_3 = 0$. Cum $v_3 = u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 = (2, 1, 3) - \lambda_1\,(1, -2, 2) - \lambda_2 \left(-\dfrac{2}{3}\,,\ \dfrac{1}{3}\,,\ \dfrac{2}{3}\right) = \left(2 - \lambda_1 + \dfrac{2}{3}\,\lambda_2,\ 1 + 2\lambda_1 - \dfrac{1}{3}\,\lambda_2,\ 3 - 2\lambda_1 - \dfrac{2}{3}\,\lambda_2\right)$, din condiţiile de ortogonalitate obţinem

$$v_1 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow -9\lambda_1 + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{2}{3} \text{ şi}$$

$$v_2 \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1.$$

Deci $v_3 = (2, 2, 1)$.
Împărţim fiecare vector la norma lui şi obţinem baza ortonormată

$$B_2 = \left\{ q_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right),\ q_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right),\ q_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}.$$

12. Să se determine o bază în complementul ortogonal $u^\perp$ al vectorului $u = (1, -1, 2) \in (\mathbb{R}^3, \cdot)$.
Rezolvare.
Fie $= (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, oarecare. $v \in u^\perp$ dacă şi numai dacă $v \cdot u = 0$, adică $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Rezolvând acest sistem de o ecuaţie cu trei necunoscute, x_1 e necunoscută principală iar $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ sunt necunoscute secundare. Astfel $x_1 = \alpha - 2\beta$ şi deci $v \in u^\perp \iff v = (\alpha - 2\beta,\, \alpha,\, \beta) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-2, 0, 1)$. Dacă notăm $v_1 = (1, 1, 0)$ şi $v_2 = (-2, 0, 1)$, am arătat că $u^\perp = span(v_1, v_2)$, iar cum aceşti vectori sunt liniar independenţi, $B_1 = \{v_1, v_2\}$ formează o bază în $u^\perp$.

13. Să se determine proiecţia ortogonală a vectorului $w = (1, 1, 1)$ pe subspaţiul $u^\perp$ din problema 12.
Rezolvare.
Proiecţia ortogonală a lui w pe S o calculăm ca sumă a proiecţiilor pe vectorii unei baze ortonormate din S.

Pentru aceasta, aplicăm procedeul Gram-Schmidt bazei B_1 din S, găsită în rezolvarea problemei precedente. Construim vectorii ortogonali $o_1 = v_1 = (1, 1, 0)$, iar $o_2 = v_2 - \lambda v_1 = (-2, 0, 1) - \lambda(1, 1, 0) = (-2 - \lambda, -\lambda, 1)$. Dar $o_1 \cdot o_2 = 0$ dacă şi numai dacă $-2 - 2\lambda = 0 \iff \lambda = -1$ de unde $o_2 = (-1, 1, 1)$. Normând aceşti vectori, găsim baza ortonormată $B_2 = \left\{ q_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right),\ q_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right.\right.$

Astfel, proiecţia cerută este $s = pr_S\, w = pr_{q_1} w + pr_{q_2} w = (q_1 \cdot w) q_1 + (q_2 \cdot w) q_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} q_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right)$.

14. Să se descompună vectorul $w = (1, 1, 1)$ în suma dintre un vector coliniar cu u din problema 12 şi un vector ortogonal pe u.
Rezolvare.
Descompunerea este $w = pr_u w + pr_{u^\perp} w$. Proiecţia lui w pe $u^\perp$ e chiar proiecţia s calculată în problema precedentă. Mai rămâne să calculăm $s' = pr_u w$. Norma lui u este $||u|| = \sqrt{6}$ şi deci acesta are versorul $u_0 = \frac{1}{||u||} u = \frac{1}{\sqrt{6}} u = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$.

Atunci $pr_u w = pr_{u_0} w = (u_0 \cdot w)u_0 = \dfrac{2}{\sqrt{6}}\, u_0 = \left(\dfrac{1}{3}\,,\ -\dfrac{1}{3}\,,\ \dfrac{2}{3}\right).$

C. PROBLEME PROPUSE

1. Fie $u = (1, -1, 2, 3)$ şi $v = (-2, 0, 3, 1)$ doi vectori din spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^4$.

   (a) Să se determine versorii u_0 şi v_0 ai vectorilor u şi v.

   (b) Să se calculeze măsura unghiului dintre vectorii u şi v.

   (c) Să se determine un vector u_1 care are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens ca u, de normă 13.

   (d) Să se determine un vector unitar w ortogonal pe vectorii $e_1 = (1, 0, 0, 0)\,,\ u$ şi v.

   Răspuns.
   (a) $u_0 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{15}}\,,\ \dfrac{-1}{\sqrt{15}}\,,\ \dfrac{2}{\sqrt{15}}\,,\ \dfrac{3}{\sqrt{15}}\right)$, $v_0 = \left(\dfrac{-2}{\sqrt{14}}\,,\ \dfrac{0}{\sqrt{14}}\,,\ \dfrac{3}{\sqrt{14}}\,,\ \dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)$;

   (b) $\arccos \dfrac{7}{\sqrt{210}}$; (c) $u_1 = \left(\dfrac{13}{\sqrt{15}}\,,\ \dfrac{-13}{\sqrt{15}}\,,\ \dfrac{26}{\sqrt{15}}\,,\ \dfrac{39}{\sqrt{15}}\right)$;

   (d) $w \in \left\{\left(0,\ \mp\dfrac{7}{\sqrt{59}}\,,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{59}}\,,\ \mp\dfrac{3}{\sqrt{59}},\right)\right\}.$

2. Dacă φ este o formă biliniară a spaţiului n-dimensional V/K, în ce condiţii cuplul (V, φ) este spaţiu euclidian?

3. Forma $\varphi \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^3\right)$ este definită prin $\varphi\left(\left(x_1, x_2, x_3\right), \left(y_1, y_2, y_3\right)\right) = x_1y_1 + ax_2y_2 + 4x_3y_3 + bx_3y_1 - cx_2y_3 + bx_1y_3$. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca $\left(\mathbb{R}^3, \varphi\right)$ să fie spaţiu euclidian şi mulţimea vectorilor care se află la distanţa 1 de vectorul nul.

   Răspuns. $a \in (0, \infty)\,,\quad b \in (-2, 2)\,,\quad c = 0;$
   $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + ay^2 + 4z^2 + 2bxz = 1\right\}.$

4. În spaţiul euclidian canonic $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$ considerăm că S este mulţimea vectorilor care fac un unghi de măsură $\dfrac{\pi}{4}$ cu vectorul $u = (1, 1, 1)$. Formează S un subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$?

   Răspuns. Nu; de exemplu $(0, 0, 0) \notin S$.

5. Pe spaţiul vectorial al funcţiilor polinomiale de grad mai mic sau egal cu doi definim forma $(\ , \ ) : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ prin $(f, g) = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2$, unde $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$ şi $g = b_0 + b_1x + b_2x^2$.

   (a) Să se arate că $(\mathbb{R}_2[x], (\ , \ ))$ este un spaţiu euclidian.

   (b) Să se găsească un vector f_0 aflat la distanţa d faţă de vectorii $f_1 = 2 + x + 5x^2$, $f_2 = 2 + x - x^2$, $f_3 = 4 + x + 5x^2$, $f_4 = 3 + 3x + 5x^2$ şi să se calculeze această distanţă.

   Răspuns. (b) $f_0 = 3 + \dfrac{15}{8}x + 2x^2$; $\dfrac{3\sqrt{82}}{8}$.

6. Să se verifice dacă polara formei pătratice $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este produs scalar pe $\mathbb{R}^3$ şi, în caz afirmativ, să se calculeze măsura unghiului dintre primii doi vectori ai bazei canonice relativ la acest produs scalar.

   (a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

   (b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

   (c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

   Răspuns. (a) forma f nu este pozitiv definită; (b) forma f nu este pozitiv definită; (c) $\dfrac{\pi}{3}$.

7. Considerăm aplicaţia $(\ , \ ) : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

   (a) Să se arate că $(\mathbb{R}_2[x], (\ , \ ))$ este un spaţiu euclidian.

   (b) Să se calculeze măsurile unghiurilor dintre vectorii $f = 1$, $g = x$ şi $h = 1 + x$.

   (c) * Să se definească un izomorfism de spaţii vectoriale $\tau : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ şi un produs scalar pe $\mathbb{R}^3$ astfel încât unghiurile triunghiului $\tau(f), \tau(g), \tau(h)$ să aibă măsurile $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{6}$, respectiv 0.

   Răspuns. (b) $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{6}$, 0; (c) e.g. $\tau\left(a + bx + cx^2\right) = (a, b, c)$;
   $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \left(\tau^{-1}(x_1, x_2, x_3), \tau^{-1}(y_1, y_2, y_3)\right)$.

8. * Fie $(V, \cdot)$ un spaţiu euclidian şi doi vectori nenuli $u, v \in V$. Arătaţi că $u \cdot v = \|u\| \, \|v\|$ dacă şi numai dacă vectorii u şi v au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens.

9. Arătaţi că, într-un spaţiu euclidian, un sistem de vectori ortogonali este un sistem liniar independent.

10. Fie spaţiul euclidian canonic $(\mathbb{R}^4, \cdot)$. Să se determine o bază ortonormată a subspaţiului generat de vectorii $(2,1,3,-1), (7,4,3,-3), (1,1,-6,0)$, $(5,7,7,8)$.

Răspuns. e.g. $\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}}\right),\right.$
$\left.\left(\frac{3}{\sqrt{23}}, \frac{2}{\sqrt{23}}, \frac{-3}{\sqrt{23}}, \frac{-1}{\sqrt{23}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{127}}, \frac{5}{\sqrt{127}}, \frac{1}{\sqrt{127}}, \frac{10}{\sqrt{127}}\right)\right\}$.

11. Determinaţi un sistem maximal de vectori ortonormaţi din $\mathbb{R}^{3\times 1}$ astfel încât primii doi vectori să genereze spaţiul coloanelor matricei $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Răspuns. $\left\{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, v\right\}$, $v \in \left\{\pm \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}\right\}$.

12. * Fie $(V, \cdot)$ un spaţiu euclidian, $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormată a sa şi $v \in V$ un vector nenul. Să se arate că v este versor dacă şi numai dacă coordonatele sale în baza B sunt cosinusurile unghiurilor dintre v şi vectorii bazei B.

13. Completaţi mulţimea $\{u, v\}$ până la o bază ortonormată în spaţiul euclidian canonic adecvat, unde

   (a) $u = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $v = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$;

   (b) $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Răspuns. (a) cu unul dintre vectorii $\pm\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; (b) de exemplu cu $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ şi $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

14. * Fie $(V, \cdot)$ un spaţiu euclidian, $V_1 \leq V$ şi $V_2 \leq V$ două subspaţii astfel încât $\dim(V_1) < \dim(V_2)$. Arătaţi că există $v \in V_2$ ortogonal pe toţi vectorii din V_1.

15. * Fie $(V, \cdot)$ un spaţiu euclidian n-dimensional şi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a sa. Să se arate că

$$u \cdot v = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$

$\forall\, u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n \in V$ dacă şi numai dacă baza B este ortonormată.

16. Demonstraţi Propoziţia 6.2.2.

17. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ două matrice ortogonale (i.e $A^T A = I_n$ şi $B^T B = I_n$).

(a) Să se arate că $AA^T = I_n$.

(b) Să se arate că determinantul matricei A este egal cu 1 sau -1.

(c) Să se arate că $A^{-1} = A^T$.

(d) Să se arate că matricea AB este ortogonală.

(e) Este adevărat că matricea $A + B$ este ortogonală?

(f) Să se arate că mulţimea matricelor ortogonale din $\mathbb{R}^{n\times n}$ formează un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor nesingulare.

(g) Formează mulţimea matricelor ortogonale din spaţiul $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ un subspaţiu vectorial?

18. Să se determine $a, b \in (0, \infty)$ astfel încât matricea $\begin{pmatrix} a & a & -b \\ a & -b & a \\ -b & a & a \end{pmatrix}$ să fie ortogonală .

    Răspuns. $a = \dfrac{2}{3}\,,\ b = \dfrac{1}{3}\,.$

19. Se ştie că dacă T este o matrice ortogonală atunci $(\det(T))^2 = 1$.
    Reciproca acestei afirmaţii este adevărată?

20. Să se arate că dacă matricea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ are coloanele unitare şi ortogonale (în spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^{2\times 1}$) atunci ea este ortogonală. Generalizare.

21. Fie $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Să se demonstreze că B este o bază ortonormată în spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă
    $\left(v_1^T|v_2^T|\ldots|v_n^T\right)$ este o matrice ortogonală.

22. Fie $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^n$. Arătaţi că matricea $\left(t_1^T\left|t_2^T\right|\ldots\left|t_n^T\right.\right) = (t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este ortogonală dacă şi numai dacă $t_i \cdot t_j = 0$ pentru orice $i \neq j$ şi $t_i \cdot t_i = 1$ pentru orice i.

23. * Să se arate că matricea de trecere dintre două baze ortonormate ale unui spaţiu euclidian n-dimensional este o matrice ortogonală.

24. Fie $(V, \cdot)$ un spaţiu euclidian n-dimensional şi $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ o matrice ortogonală. Să se arate că există două baze ortonormate $B, B' \subset V$ astfel încât T să fie matricea de trecere de la baza B la baza B'.

25. Subspaţiul V al spaţiului euclidian canonic $\mathbb{R}^4$ este definit de ecuaţiile:

    $2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0,\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0,\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0.$

    (a) Determinaţi un număr minimal de ecuaţii care să definească complementul ortogonal $V^\perp$.

    (b) Descompuneţi vectorul $u = (1, 1, 1, 1)$ în suma $v + v'$, cu $v \in V$ şi $v' \in V^\perp$.

Răspuns. (a) E.g. $6y_1 - 9y_2 - y_3 = 0,\ y_2 + y_4 = 0.$

(b) $v = \left(\frac{12}{31}, \frac{22}{31}, -\frac{2}{31}, \frac{40}{31}\right),\ v' = \left(\frac{19}{31}, \frac{9}{31}, \frac{33}{31}, -\frac{9}{31}\right).$

26. Să se proiecteze ortogonal primul vector pe cel de al doilea (în spaţiul euclidian canonic adecvat):

 (a) $(2,1), (3,-2)$;
 (b) $(2,1), (3,0)$;
 (c) $(1,1,4), (1,2,-1)$;
 (d) $(1,1,4), (3,3,12)$.

 Răspuns. (a) $\left(\frac{12}{13}, -\frac{8}{13}\right)$; (b) $(2,0)$; (c) $\left(\frac{-1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{6}\right)$; (d) $(1,1,4)$.

27. Determinaţi doi vectori ortogonali din spaţiul euclidian canonic, ortogonali la rândul lor pe vectorul $(1,1,1)$.

 Răspuns. De exemplu $u = (1,0,-1) \perp (1,1,1)$ şi $\{(1,0,-1), (1,1,1)\}^{\perp} = \{(x,y,z) \mid x - z = 0 = x + y + z\} = \{(x,-2x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, aşadar $u = (1,0,-1)$ şi $v = (1,-2,1)$ sunt doi asemenea vectori.

28. Să se determine complementul ortogonal al subspaţiului generat de vectorii $(1,1,1,1,1,1)$, $(1,2,3,4,5,6)$, $(2,3,4,5,6,7)$, $(3,4,5,6,7,8)$ în spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^6/\mathbb{R}$.

29. * Într-un spaţiu euclidian subspaţiul U este inclus în subspaţiul V. Arătaţi că $V^{\perp} \leq U^{\perp}$.

30. Completaţi mulţimea $\{u, v\}$ până la o bază ortogonală în spaţiul euclidian canonic $(\mathbb{R}^4, \cdot)$, unde

 (a) $u = (1,-2,2,-3),\ v = (2,-3,2,4)$;
 (b) $u = (1,1,1,2),\ v = (1,2,3,-3)$.

 Răspuns. De exemplu cu vectorii: (a) $(2,2,1,0)$, $(5,-2,-6,-1)$;
 (b) $(1,-2,1,0)$, $(25,4,-17,-6)$.

31. Să se descompună vectorul $v = (5,2,-2,2) \in \mathbb{R}^4$ în suma a doi vectori, unul din subspaţiul S generat de vectorii $(2,1,1,-1)$ şi $(1,1,3,0)$, iar celălalt din complementul ortogonal $S^{\perp}$.

 Răspuns. $v = (3,1,-1,-2) + (2,1,-1,4)$.

32. * Să se arate că, în spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$, pentru orice subspaţii $U, V \leq \mathbb{R}^n$,

 (a) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$;

(b) $(U+V)^{\perp}=U^{\perp}\cap V^{\perp}$;

(c) $(U\cap V)^{\perp}=U^{\perp}+V^{\perp}$;

(d) $(\mathbb{R}^n)^{\perp}=\mathbf{0}$;

(e) $\mathbf{0}^{\perp}=\mathbb{R}^n$,

unde cu $\mathbf{0}$ am notat subspaţiul nul, iar cu $U^{\perp}$ am notat complementul ortogonal al subspaţiului U.

33. * Să se demonstreze că $U\cap U^{\perp}=\{\theta\}$, unde U este un subspaţiu netrivial al unui spaţiu euclidian V.

34. În ce se transformă o bază ortonormată dacă aplicăm procedeul de ortonormare Gram-Schmidt?

35. Fie $\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ matricea unui operator al spaţiului euclidian canonic $\mathbb{R}^3$. Să se determine o bază ortonormată a unui subspaţiu invariant de dimensiune 2 al acestui operator.

Răspuns. e.g. $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),\ \left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

36. Să se arate că dacă V este un spaţiu euclidian n-dimensional şi U este un subspaţiu al său atunci $\dim(U^{\perp})=n-\dim(U)$.

37. Construiţi o bază ortogonală a subspaţiului generat de vectorii din spaţiul canonic $\left(\mathbb{R}^4,\ \cdot\right)$:

(a) $(1,2,2,-1)\,,(1,1,-5,3)\,,(3,2,8,-7)\,;$

(b) $(1,1,-1,-2)\,,(5,8,-2,-3)\,,(3,9,3,8)\,.$

Răspuns. (a) E.g. $(1,2,2,-1)\,,\ (2,3,-3,2)\,,\ (2,-1,-1,-2)\,;$
(b) $(1,1,-1,-2)\,,\ (2,5,1,3)\,.$

38. Arătaţi că ortogonalizând un sistem de vectori liniar independent S al spaţiului euclidian canonic $(\mathbb{R}^n,\ \cdot)$ obţinem un sistem S' pentru care
$span\,(S)=span\,(S')\,.$

39. În spaţiul euclidian canonic $\left(\mathbb{R}^3,\ \cdot\right)$ considerăm vectorul $u=(1,1,1)\,.$
Să se determine o bază ortonormată a subspaţiului ortogonal $u^{\perp}$.

Răspuns. E.g. $\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},\ \dfrac{2}{\sqrt{6}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.

40. Fie V un spaţiu euclidian şi $S\le V$ astfel ca $m:=\dim S<\dim V:=n$ şi $B=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ o bază în S. Arătaţi că

$$S^{\perp}=\left\{v\in V \mid v\cdot e_i=0,\ \ i=\overline{1,m}\right\}.$$

41. În spaţiul euclidian $(\mathbb{R}_2[x], \langle\ ,\ \rangle)$ distanţa de la vectorul $p = 1+x+x^2$ la vectorul nul este este 2, iar matricea produsului scalar $\langle\ ,\ \rangle$ în baza canonică $\left\{1, x, x^2\right\}$ este $\begin{pmatrix} 1 & ab & ab \\ a & 1 & ab \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$. Să se determine subspaţiul $p^{\perp}$ şi o bază ortonormată a acestuia.

Răspuns. Trebuie ca $b = 1$, $a = \dfrac{1}{3}$; $\left\{\alpha\left(1 - x^2\right) + \beta\left(x - x^2\right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$; de exemplu: $\left\{\dfrac{\sqrt{6}}{4}\left(1 - x^2\right),\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1-x)^2\right\}$.

42. Folosiţi procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt pentru a determina două baze ortonormate B° şi $B^{\circ\circ}$ pornind de la baza $\{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ din spaţiul euclidian canonic $\left(\mathbb{R}^3, \cdot\right)$; care este matricea de trecere de la baza B° la baza $B^{\circ\circ}$?

Răspuns. De exemplu, pornind de la vectorul $(1,1,0)$, respectiv de la vectorul $(0,1,1)$ obţinem

$$B^{\circ} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\},$$

$$B^{\circ\circ} = \left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right\},$$

iar $T_{B^{\circ}B^{\circ\circ}} = T^{T}_{B_cB^{\circ}} \cdot T_{B_cB^{\circ\circ}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

43. * Fie V un spaţiu euclidian şi $U \leq V$. Să se arate că orice vector $v \in V$ se exprimă în mod unic ca suma unui vector $u \in U$ cu un vector $u' \in U^{\perp}$, adică $U \oplus U^{\perp} = V$.

44. Arătaţi că dacă v este un vector nenul dintr-un spaţiu euclidian n-dimensional atunci există o matrice $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ astfel încât subspaţiul $v^{\perp}$ este izomorf cu $Null\,(A)$.

45. Fie V un spaţiu euclidian şi $S \leq V$. Arătaţi că

    (a) orice vector $v \in V$ se exprimă unic ca o sumă de forma $v = s + s'$, unde $s \in S$ şi $s' \in S^{\perp}$;

    (b) dacă B este o bază în S iar B' este o bază $S^{\perp}$ atunci $B \cup B'$ - cu o ordine fixată a vectorilor din reuniune - este o bază în V.

46. Folosind procedeul Gram-Schmidt să se determine o bază ortonormată a subspaţiului $span\big((1,1,2), (-1,1,1)\big)$.

(Examen, Informatică, 2014)

47. Să se verifice că $\{(1,1,1),(1,1,0),(-1,1,1)\}$ este bază în $\mathbb{R}^3$ şi să se ortonormeze.
(Examen, Ingineria sistemelor, 2014)

7 TRANSFORMĂRI ORTOGONALE ŞI APLICAŢII

Unul dintre cele mai puternice instrumente de care dispunem în cadrul spaţiilor euclidiene este dat de clasa transformărilor ortogonale în conexiune cu transformările liniare simetrice. Aceste transformări sunt utilizate intens în grafica pe calculator; folosirea transformărilor ortogonale în proiectarea sistemelor permite asigurarea fezabilităţii acestora; calculul matricei A^m - de importanţă capitală în foarte multe aplicaţii - devine facil în cazul matricelor simetrice folosind transformările ortogonale; stabilirea naturii punctelor critice ale unei funcţii f de clasă C^2 utilizând transformări ortogonale pentru diferenţiala a doua este necesară în probleme de optimizare; şi, nu în ultimul rând, algoritmii de descompunere $Q \cdot R$, respectiv $V^T \cdot \Sigma \cdot U$ pentru matrice nesingulare, respectiv matrice arbitrare (algoritmi aflaţi în ,,top 10" al descoperirilor matematice care au revoluţionat ingineria secolului XX) - ca aplicaţii ale tehnicilor de ortogonalizare - permit rezolvarea sistemelor mari şi furnizează baza matematică pentru cea mai performantă tehnică de comprimare a datelor.

A. TEORIE

Peste tot în aceasta secţiune $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ este un spaţiu vectorial euclidian şi B este o bază a sa.

7.1. Izometrii

Transformările ortogonale, numite şi izometrii, sunt operatori care invariază produsele scalare în sensul următoarei definiţii.

Definiţia 7.1.1. *Operatorul $f \in \mathcal{L}(V)$ se numeşte **transformare ortogonală** sau **izometrie** (a spaţiului V) dacă*

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

pentru orice $u, v \in V$.

Exemplul 7.1.1. Funcţia id_V este transformare ortogonală a spaţiului euclidian V.

Exemplul 7.1.2. Să determinăm transformarea ortogonală $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ ştiind că matricea sa în baza canonică este

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & b \\ a & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ştim că vectorii $f(1,0) = \left(\frac{1}{2}, a\right)$, $f(0,1) = \left(b, -\frac{1}{2}\right)$ trebuie să formeze o bază ortonormată. Prin urmare $a^2 + \frac{1}{4} = b^2 + \frac{1}{4} = 1$ şi $\frac{b}{2} - \frac{a}{2} = 0$, deci $a = b \in \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Am obţinut două transformări ortogonale care satisfac cerinţele şi care au expresiile analitice

$$f_1(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$$

pentru $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, respectiv

$$f_2(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$$

pentru $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Să remarcăm că dacă $f \in \mathcal{L}(V)$ este o transformare ortogonală şi $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază ortonormată în V, atunci $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, n\}$; prin urmare $f(B) = \{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ *este bază ortonormată* în V şi f *este automorfism* (adică izomorfism al spaţiului V). Invers, dacă $f \in \mathcal{L}(V)$ are proprietatea că transformă o bază ortonormată într-o bază ortonormată, atunci f este izometrie. Într-adevăr, dacă $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ şi $f(B) = \{f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\}$ sunt baze ortonormate în V, iar $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \in V$ atunci

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_j)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle f(e_i), f(e_j)\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Am obţinut următoarea caracterizare a transformărilor ortogonale:

Propoziţia 7.1.1. *Fie $f \in \mathcal{L}(V)$. Atunci f este transformare ortogonală dacă şi numai dacă f transformă o bază ortonormată într-o bază ortonormată.*

Observaţia 7.1.2. *Dacă $f, g \in \mathcal{L}(V)$ sunt două transformări ortogonale atunci $f \circ g$ este transformare ortogonală.* Într-adevăr, dacă $u, v \in V$, folosind faptul că f este transformare ortogonală, apoi că g este transformare ortogonală avem

$$\langle f \circ g(u), f \circ g(v) \rangle = \langle f(g(u)), f(g(v)) \rangle = \langle g(u), g(v) \rangle = \langle u, v \rangle .$$

Prin urmare *mulţimea transformărilor ortogonale din $\mathcal{L}(V)$ formează un grup (neabelian) faţă de operaţia de compunere numit **grupul ortogonal** al spaţiului $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Notăm cu $\mathcal{GO}(V)$ grupul transformărilor ortogonale ale spaţiului V.*

Din propoziţia precedentă (vezi şi problema 22 de la capitolul precedent) rezultă următoarea propoziţie.

Propoziţia 7.1.2. *Fie $f \in \mathcal{L}(V)$ şi B o bază ortonormată în V. Atunci $f \in \mathcal{GO}(V)$ dacă şi numai dacă f_B este matrice ortogonală.*

Observaţia 7.1.3. Fie $f \in \mathcal{GO}(V)$. Să arătăm că această aplicaţie *invariază unghiurile*, adică $\cos \widehat{f(u), f(v)} = \cos \widehat{u, v}$, pentru orice vectori nenuli. Fie, pentru aceasta, doi vectori nenuli $u, v \in V$. Atunci

$$\cos \widehat{f(u), f(v)} = \frac{\langle f(u), f(v) \rangle}{\sqrt{\langle f(u), f(u) \rangle} \sqrt{\langle f(v), f(v) \rangle}} = \frac{\langle u, v \rangle}{\sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle}} = \cos \widehat{u, v}$$

şi proprietatea este dovedită.

Nu orice aplicaţie liniară care invariază unghiurile este transformare ortogonală.

Exemplul 7.1.3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 \neq 0$. Atunci $f(x, y) := (ax + by, -bx + ay)$ defineşte un automorfism al spaţiului euclidian canonic $\mathbb{R}^2$. Dacă $B = \{e_1, e_2\}$ este baza canonică, atunci

$$f(B) = \{f(e_1) = (a, -b), f(e_2) = (b, a)\}$$

este bază ortogonală (deoarece $\langle f(e_1), f(e_2) \rangle = ab - ba = 0$), dar nu este întotdeauna ortonormată. Mai precis, dacă $a^2 + b^2 \neq 1$ baza nu este ortonormată, deci f nu este transformare ortogonală. De fapt $f \in \mathcal{GO}(\mathbb{R}^2)$ dacă şi numai dacă $a^2 + b^2 = 1$; în acest caz există $\varphi \in (-\pi, \pi]$ astfel încât $a = \cos \varphi$ şi $b = \sin \varphi$ iar automorfismul f se numeşte **rotaţie de unghi** φ.

7.2. Matrice simetrice şi valorile lor proprii

Definiţia 7.2.1. *Operatorul $f \in \mathcal{L}(V)$ se numeşte **transfomare liniară simetrică** (a spaţiului V) dacă*

$$\langle f(u), v \rangle = \langle u, f(v) \rangle$$

pentru orice $u, v \in V$.
Notăm cu $\mathcal{L}_s(V)$ *mulţimea transformărilor liniare simetrice ale spaţiului* V.

Reamintim că o matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este simetrică dacă şi numai dacă ea coincide cu transpusa sa, adică dacă $A = A^T$.

Dacă B este o bază în V, $f \in \mathcal{L}(V)$ şi $u, v \in V$ atunci, în convenţia matriceală, avem

$$\langle f(u), v\rangle = (f_B \cdot u_B)^T \cdot v_B = u_B^T \cdot f_B^T \cdot v_B \text{ şi } \langle u, f(v)\rangle = u_B^T \cdot f_B \cdot v_B.$$

Cu ajutorul acestei proprietăţi deducem următoarea caracterizare a transformărilor liniare simetrice.

Propoziţia 7.2.1. *Operatorul* $f \in \mathcal{L}(V)$ *este transfomare liniară simetrică dacă şi numai dacă matricea sa într-o bază ortonormată este simetrică.*

Cu alte cuvinte, dacă $f \in \mathcal{L}(V)$ *şi* B *este o bază ortonormată în* V *atunci* $f \in \mathcal{L}_s(V)$ *dacă şi numai dacă* f_B *este simetrică.*

Spaţiul vectorial $\mathbb{R}^{n\times 1}$ este spaţiu euclidian faţă de produsul scalar canonic definit prin

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j,$$

unde $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$, $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Cu acest produs scalar, Propoziţia 7.2.1 are următoarea exprimare matriceală.

Propoziţia 7.2.2. *Matricea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *este simetrică dacă şi numai dacă*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Reamintim că o matrice pătratică $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este *diagonalizabilă (sau un operator* $f \in \mathcal{L}(V)$ *este diagonalizabil) dacă şi numai dacă toate valorile sale proprii sunt reale şi ordinul de multiplicitate* m_λ *al fiecărei valori proprii* λ *coincide cu dimensiunea subspaţiului invariant* S_λ*, adică* $m_\lambda = \dim S_\lambda$*, pentru orice valoare proprie* λ *a matricei* A *(a operatorului* f*).*

În cazul matricelor simetrice (transformărilor liniare simetrice), diagonalizarea este întotdeauna posibilă.

Teorema 7.2.1. Diagonalizarea matricelor simetrice.
Dacă $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *este o matrice simetrică atunci ea este diagonalizabilă.*
Mai mult, dacă $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *sunt valorile proprii distincte ale matricei simetrice* A *şi* $m_{\lambda_1}, m_{\lambda_2}, \dots, m_{\lambda_k}$ *sunt ordinele de multiplicitate corespunzătoare, atunci există o bază ortonormată* B *astfel ca*

$$T_{B_cB}^T \cdot A \cdot T_{B_cB} = D,$$

unde D este o matrice diagonală care are pe diagonala principală valorile proprii ale matricei A dispuse în următoarea ordine (de la nord-vest la sud-est):

$$\underbrace{\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1} \text{ ori}}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_{\lambda_2} \text{ ori}}, \ldots, \underbrace{\lambda_k, \lambda_k, \ldots, \lambda_k}_{m_{\lambda_k} \text{ ori}}$$

În plus, baza ortonormată a spaţiului V în care A are forma diagonală D este

$$B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \ldots \cup B_{\lambda_k},$$

unde B_{λ_i} este o bază ortonormată a subspaţiului invariant (propriu) S_{λ_i}, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Observaţia 7.2.1. *Atenţie la ordinea celor n vectori din baza B: dacă $B_{\lambda_i} = \left\{v_{\lambda_i}^1, v_{\lambda_i}^2, \ldots, v_{\lambda_i}^{m_{\lambda_i}}\right\}$, atunci, pentru a obţine*

$$D = diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k\right)$$

trebuie să alegem ordonarea în conformitate cu algoritmul rezultat din Teorema diagonalizării (Teorema 4.2.1), adică

$$B = \left\{v_{\lambda_1}^1, v_{\lambda_1}^2, \ldots, v_{\lambda_1}^{m_{\lambda_1}}, v_{\lambda_2}^1, v_{\lambda_2}^2, \ldots, v_{\lambda_2}^{m_{\lambda_2}}, \ldots, v_{\lambda_k}^1, \ldots, v_{\lambda_k}^{m_{\lambda k}}\right\}.$$

Deoarece T_{B_cB} este o matrice ortogonală - deci este matricea unei transformări ortogonale - metoda de diagonalizare descrisă poartă numele de ***reducere la forma diagonală printr-o transformare (liniară) ortogonală****.*

Observaţia 7.2.2. *Dacă dorim să determinăm* ***forma diagonală a unei matrice simetrice*** *$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$* ***şi o bază ortonormată în care are forma diagonală****, trebuie să parcurgem următorii paşi:*

1. *Determinăm valorile proprii rezolvând ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_n) = 0$; obţinem valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (ştim că suma ordinelor de multiplicitate este n, adică $m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \cdots + m_{\lambda_k} = n$); forma diagonală D a matricei A are pe diagonala principală valorile proprii, ca în teorema de mai sus. Baza în care are această formă se obţine parcurgând cele ce urmează.*

2. *Pentru fiecare valoare proprie λ_i determinăm subspaţiul invariant (propriu) S_{λ_i} şi o bază a sa B_i.*

3. *Ortonormăm baza B_i prin procedeul de ortonormare Gram-Schmidt şi obţinem baza B_{λ_i}.*

4. *Construim $B = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} \cup \ldots \cup B_{\lambda_k}$. Aceasta este o bază ortonormată în care A are forma diagonală D.*

Dacă, în plus, dorim să calculăm A^m, unde $m \in \mathbb{N}^*$, cum matricea T_{B_cB} este ortogonală, avem

$$A^m = T_{B_cB} \cdot D^m \cdot T_{B_cB}^T.$$

Deoarece spaţiul vectorial al transformărilor liniare simetrice ale spaţiului V este izomorf cu spaţiul vectorial al matricelor de ordinul n reale şi simetrice, afirmaţiile teoremei precedente sunt valabile şi pentru transformări liniare simetrice.

Exemplul 7.2.1. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \left(2x + \sqrt{2}y, \sqrt{2}x + y, 3z\right)$. Ne propunem să determinăm compusa f^n, $n \in \mathbb{N}^*$ cu ajutorul unei transformări ortogonale şi să determinăm expresia analitică a acestei transformări.

A. Deoarece f este o transformare liniară simetrică, planul de lucru pentru determinarea aplicaţiei f^n este următorul:

- determinăm f_{B_c} - matricea aplicaţiei în baza canonică B_c;
- determinăm valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (care sunt obligatoriu reale) şi bazele ortonormate din spaţiile invariante corespondente;
- construim baza ortonormată $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ca reuniune a bazelor determinate la punctul precedent;
- construim matricea ortogonală T_{B_cB}; ştim că matricea aplicaţiei noastre în baza B este matricea diagonală $f_B = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ şi că $f_B = T_{B_cB}^T \cdot f_{B_c} \cdot T_{B_cB}$;
- calculăm matricea aplicaţiei f^n ştiind că aceasta este matricea aplicaţiei ridicată la puterea n şi că $f_B^n = diag(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)$:
$$f_{B_c}^n = (f_{B_c})^n = \left(T_{B_cB} \cdot f_B \cdot T_{B_cB}^T\right)^n = T_{B_cB} \cdot f_B^n \cdot T_{B_cB}^T;$$
- scriem expresia analitică a aplicaţiei f^n (cunoscând matricea sa în baza canonică).

Matricea aplicaţiei liniare f în baza canonică B_c este

$$f_{B_c} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică $|f_{B_c} - \lambda I_3| = 0$ are rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$. Subspaţiul invariant corespunzător valorii proprii $\lambda = 3$ este

$$S_{\lambda=3} = \left\{\left(\sqrt{2}y, y, z\right) \mid y, z \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{\left(\sqrt{2}, 1, 0\right), (0, 0, 1)\right\}$$

şi o bază ortonormată a acestuia este

$$B_{\lambda_1} = \left\{v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), v_2 = (0, 0, 1)\right\}.$$

Subspaţiul invariant corespunzător valorii proprii $\lambda = 0$ este

$$S_{\lambda=0} = \left\{ \left(x, -\sqrt{2}x, 0 \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \left(1, -\sqrt{2}, 0 \right) \right\}$$

şi o bază ortonormată a acestuia este

$$B_{\lambda_3} = \left\{ v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0 \right) \right\}.$$

Prin urmare $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ este o bază ortonormată în care f are forma diagonală şi matricea sa este

$$f_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$f^n_{B_c} = T_{B_cB} \cdot f^n_B \cdot T^T_{B_cB} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T^T_{B_cB} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} 3^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n-1} & \sqrt{2} \cdot 3^{n-1} & 0 \\ \sqrt{2} \cdot 3^{n-1} & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Ţinând seama că

$$f^n_{B_c} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^{n-1}x + \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}y \\ \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}x + 3^{n-1}y \\ 3^n z \end{pmatrix}$$

rezultă că expresia analitică a operatorului f^n este

$$f^n(x, y, z) = \left(2 \cdot 3^{n-1}x + \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}y,\ \sqrt{2} \cdot 3^{n-1}x + 3^{n-1}y,\ 3^n z \right).$$

B. Fie $\tau \in \mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^3\right)$ transformarea ortogonală folosită la pasul precedent, deci aplicaţia liniară $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care are drept matrice în perechea de baze B_c, B chiar matricea T_{B_cB}. Dacă $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ este baza canonică, avem

$$\tau(e_1) = v_1,\ \tau(e_2) = v_2,\ \tau(e_3) = v_3$$

şi atunci expresia analitică este

$$\tau(x,y,z) = \tau(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x\tau(e_1) + y\tau(e_2) + z\tau(e_3) = x\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ 0 \right) + y\,(0,0,1) + z\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ 0 \right) = \left(\frac{\sqrt{2}\,x + z}{\sqrt{3}},\ \frac{x - \sqrt{2}\,z}{\sqrt{3}},\ y \right).$$

7.3. Reducerea formelor pătratice la forma canonică prin transformări ortogonale

Pentru a simplifica notaţiile, vom considera doar forme pătratice definite pe spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^n$ (de fapt spaţiul vectorial al matricelor simetrice din $\mathbb{R}^{n\times n}$ este izomorf cu spaţiul liniar $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ şi, în plus, dacă V este un spaţiu vectorial n-dimensional atunci $\mathcal{Q}(V) \simeq \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{L}_s(V)$ - vezi problemele propuse 22 şi 23) şi vom nota cu B_c baza canonică din $\mathbb{R}^n$.

Tehnica de reducere a formelor pătratice la forma canonică.

Fie $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$. Deoarece f_{B_c} este o matrice simetrică, din teorema de diagonalizare a matricelor simetrice rezultă că există o bază ortonormată B formată din vectori proprii ai matricei f_{B_c} în care matricea f_{B_c} are forma diagonală $D = T_{B_cB}^T \cdot f_{B_c} \cdot T_{B_cB}$. Din formula de schimbare a bazei pentru forme pătratice (vezi Propoziţia 5.2.2) ştim că matricea formei f în baza B este $f_B = T_{B_cB}^T \cdot f_{B_c} \cdot T_{B_cB}$. În consecinţă $f_B = D$, adică forma pătratică f are forma canonică în baza ortonormată B. Am obţinut astfel o tehnică de reducere a formei f la forma canonică prin transformarea ortogonală de matrice T_{B_cB}.

Exemplul 7.3.1. Să se reducă la forma canonică printr-o transformare ortogonală forma pătratică definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) := 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Matricea formei în baza canonică este

$$f_{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică $|f_{B_c} - \lambda I_4| = 0$ are rădăcinile $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -1, 1$. Prin urmare, conform tehnicii de mai sus, există o bază ortonormată $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de vectori proprii ai matricei f_{B_c} în care forma $f \in \mathcal{Q}\left(\mathbb{R}^4\right)$ are forma canonică

$$f(y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 + y_4v_4) := \sqrt{5}\, y_1^2 - \sqrt{5}\, y_2^2 - y_3^2 + y_4^2.$$

Pentru a determina baza B trebuie să determinăm în prealabil subspaţiile invariante $S_{\sqrt{5}}, S_{-\sqrt{5}}, S_{-1}, S_1$ corespunzătoare valorilor proprii $\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -1, 1$ şi apoi să le determinăm câte o bază ortonormată $B_{\sqrt{5}} = \{v_1\}, B_{-\sqrt{5}} = \{v_2\}, B_{-1} = \{v_3\}, B_1 = \{v_4\}$. După calcule obţinem

$$S_{\sqrt{5}} = span\left\{\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2},\ -1,\ \frac{\sqrt{5}+1}{2},\ 1\right)\right\}.$$

Putem lua v_1 chiar versorul vectorului $\left(\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}\,,\ -1,\ \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\,,\ 1\right)$, deci

$$v_1 = \frac{1}{2\sqrt[4]{5}}\left(-\sqrt{\sqrt{5}+1}\,,\ -\sqrt{\sqrt{5}-1}\,,\ \sqrt{\sqrt{5}+1}\,,\ \sqrt{\sqrt{5}-1}\right).$$

Apoi, cum $S_{-\sqrt{5}} = span\left\{\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,,\ -1,\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\ 1\right)\right\}$ putem lua v_2 versorul vectorului $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,,\ -1,\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\ 1\right)$, deci

$$v_2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{5}}\left(\sqrt{\sqrt{5}-1}\,,\ -\sqrt{\sqrt{5}+1}\,, -\ \sqrt{\sqrt{5}-1}\,,\ \sqrt{\sqrt{5}+1}\right).$$

Analog, cum $S_{-1} = span\,\{(1,0,1,0)\}$ luăm

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,0,1,0)\,,$$

iar pentru $S_1 = span\,\{(0,1,0,1)\}$ luăm

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(0,1,0,1)\,.$$

Baza ortonormată în care forma pătratică dată are forma canonică de mai sus este $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

7.4. Descompunerea singulară a unei matrice

Fie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se pune problema descompunerii matricei A într-un produs de forma

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

unde $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ şi $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sunt matrice ortogonale iar $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ este o matrice de forma

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

unde constantele $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ se numesc **valorile singulare ale matricei** A. Această descompunere se numeşte **descompunerea valorilor singulare,** pe scurt **SVD**.

Tehnica pe care o descriem în continuare este bazată pe descompunerea QR a matricei $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (vezi problemele 27-31).

Algoritm de descompunere SVD a matricei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

- Construim matricea simetrică de tip $n \times n$
$$B := A^T A.$$
- Determinăm valorile proprii ale matricei B (care sunt obligatoriu nenegative) şi le ordonăm descrescător:
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0;\ \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$
- Determinăm baza ortonormată a spaţiului $\mathbb{R}^n$
$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$
în care matricea B are forma diagonală (folosind tehnica descrisă la Observaţia 7.2.2).
- Construim matricea ortogonală
$$V := \left(v_1^T \mid v_2^T \mid \ldots \mid v_n^T\right).$$
- Calculăm valorile singulare ale matricei A :
$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1},\, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2},\, \ldots,\, \sigma_r = \sqrt{\lambda_r}.$$
- Determinăm vectorii ortonormaţi
$$u_1 := \frac{1}{\sigma_1} A v_1^T,\ u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2^T,\ \ldots,\ u_r = \frac{1}{\sigma_r} A v_r^T.$$
din spaţiul $\mathbb{R}^{m\times 1}$.
- Determinăm - doar dacă $m - r > 0$ - o bază ortonormată
$$\{u_{r+1},\, u_{r+2},\, \ldots,\, u_m\}$$
a spaţiului $Null\left(A^T\right)$.
- Construim matricea ortogonală U :
$$U := (u_1 \mid u_2 \mid \ldots \mid u_m)$$
- Construim matricea $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a valorilor singulare şi descompunerea SVD:
$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T.$$

Exemplul 7.4.1. Să determinăm descompunerea SVD a matricei $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ urmărind paşii algoritmului prezentat.

1. Determinăm matricea simetrică de tip 3×3
$$B := A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}.$$

2. Determinăm valorile proprii ale matricei B rezolvând ecuaţia caracteristică $\det(B - \lambda I_3) = (40 - \lambda)(\lambda - 20)\lambda = 0$ şi ordonăm descrescător valorile proprii. Obţinem
$$\lambda_1 = 40,\ \lambda_2 = 20,\ \lambda_3 = 0.$$

3. Determinăm baza ortonormată $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ în care matricea B are forma diagonală. Avem spaţiile invariante corespunzătoare valorilor proprii determinate: $S_{\lambda_1} = span\{(0,0,1)\}, S_{\lambda_2} = span\{(1,1,0)\}, S_{\lambda_3} = span\{(-1,1,0)\}.$ Prin urmare
$$v_1 = (0,0,1),\ v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right),\ v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right).$$

4. Construim matricea ortogonală
$$V := \left(v_1^T \mid v_2^T \mid v_3^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Calculăm valorile singulare ale matricei A :
$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 2\sqrt{10},\ \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 2\sqrt{5}.$$

6. Determinăm vectorii ortonormaţi
$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix},\ u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

7. Deoarece $r = 2 = m$, spaţiul $Null\left(A^T\right)$ este spaţiul trivial.

8. Construim matricea ortogonală U :
$$U = (u_1 \mid u_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

9. Construim matricea valorilor singulare $\Sigma \in \mathbb{R}^{2\times 3}$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Am obţinut astfel descompunerea SVD: $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observaţia 7.4.1. În exemplul precedent rangul r al matricei A coincide cu numărul liniilor m; de aceea pasul 7 nu furnizează vectori suplimentari în construcţia matricei ortogonale U.

Să analizăm şi cazul $m > n$.

Exemplul 7.4.2. Să determinăm descompunerea SVD a matricei
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Determinăm matricea simetrică de tip 2×2

$$B := A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Determinăm valorile proprii ale matricei B. Obţinem

$$\lambda_1 = 3 > \lambda_2 = 1.$$

3. Determinăm baza ortonormată $\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ în care matricea B are forma diagonală. Avem spaţiile proprii $S_{\lambda_1} = span\,\{(1,-1)\}\,, S_{\lambda_2} = span\,\{(1,1)\}\,.$ Prin urmare

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

4. Construim matricea ortogonală

$$V := \left(v_1^T \mid v_2^T\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

5. Calculăm valorile singulare ale matricei A :

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3} > \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.$$

6. Determinăm vectorii ortonormaţi

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \; u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

7. Deoarece $r = 2 < m = 3$ şi spaţiul $Null\left(A^T\right) = span\{(1, 1, -1)\}$, luăm $u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

8. Construim matricea ortogonală U :

$$U = (u_1 \mid u_2 \mid u_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

9. Construim matricea valorilor singulare $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times 2}$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Am obţinut astfel descompunerea SVD, $A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

B. PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $(V, \langle\, . \,,\, . \,\rangle)$ un spaţiu euclidian. Arătaţi că aplicaţia liniară $f = 2 \cdot id_V$ invariază unghiurile. Este f o transformare ortogonală?
Rezolvare. Fie $u, v \in V$. Atunci $\cos\left(\widehat{f(u), f(v)}\right) = \dfrac{\langle f(u), f(v)\rangle}{\|f(u)\| \cdot \|f(v)\|} = \dfrac{\langle 2u, 2v\rangle}{\|2u\| \cdot \|2v\|} = \dfrac{4 \cdot \langle u, v\rangle}{4\|u\| \cdot \|v\|} = \cos\left(\widehat{u, v}\right)$, deci f invariază unghiurile.
f nu este trasformare ortogonală pentru că $\|f(u)\| = 2\|u\| \neq \|u\|$ pentru $u \neq \theta$.

2. Matricea unei transformări ortogonale într-o bază ortonormată este o matrice ortogonală, adică verifică $A^{-1} = A^T$.
Demonstraţie. Dacă B este o bază în V, $f \in \mathcal{L}(V)$ şi $u, v \in V$ atunci, în convenţia matriceală, avem $\langle f(u), f(v)\rangle = (f_B \cdot u_B)^T \cdot f_B \cdot v_B = u_B^T \cdot f_B^T \cdot f_B \cdot v_B$ şi $\langle u, v\rangle = u_B^T \cdot v_B$, de unde $f_B^T \cdot f_B = I$, adică f_B este inversabilă şi $f_B^{-1} = f_B^T$.

3. Demonstraţi că toate valorile proprii ale unei transformări ortogonale ale unui spaţiu vectorial real (sau complex) au modulul 1.
Rezolvare. Dacă λ este o valoare proprie a unei transformări ortogonale f iar v este un vector propriu corespunzător lui λ atunci $f(v) = \lambda v$ implică $\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$. Cum $\|v\| \neq 0$ rezultă de aici că $|\lambda| = 1$.

4. Mulţimea $\mathcal{GO}(V)$ a transformărilor ortogonale din $\mathcal{L}(V)$ *formează grup în raport cu operaţia de compunere numit* ***grupul ortogonal*** *al spaţiului* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$.
Demonstraţie. Am văzut la Observaţia 7.1.2. că mulţimea $\mathcal{GO}(V)$ este stabilă la compunere. Asociativitatea rezultă din asociativitatea compunerii funcţiilor în general. Am văzut la Exemplul 7.1.1. că funcţia id_V este o transformare ortogonală, deci elementul neutru la compunerea aplicaţiilor liniare aparţine lui $\mathcal{GO}(V)$. Matricea unei transformări ortogonale într-o bază ortonormată fiind o matrice ortogonală, deci inversabilă, orice transformare ortogonală este un izomorfism. Inversa ei va fi tot o transformare ortogonală pentru că $\langle f^{-1}(u), f^{-1}(v)\rangle = \left\langle f\left(f^{-1}(u)\right), f\left(f^{-1}(v)\right)\right\rangle = \langle u, v\rangle$, deci orice transformare din $\mathcal{GO}(V)$ este inversabilă în $\mathcal{GO}(V)$.

5. Determinaţi $f \in \mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ astfel încât $f(1,2) = (2,1)$.
Rezolvare. Deoarece o transformare ortogonală păstrează măsurile unghiurilor şi lungimile vectorilor, o idee ar fi să examinăm acţiunea lui f pe un vector ortogonal pe $v = (1,2)$. Avem că $(a,b) \perp (1,2) \iff a + 2b = 0$. Putem lua $a = -2$, $b = 1$, adică vectorul $v' = (-2,1)$. Cum $v' \perp v$ şi $\|v'\| = \sqrt{5}$, trebuie ca $f(v') \perp f(v)$ şi $\|f(v')\| = \sqrt{5}$. Dacă $f(v') = (c,d)$, trebuie ca $2c + d = 0$ şi $c^2 + d^2 = 5$, de unde $(c,d) = (1,-2)$ sau $(c,d) = (-1,2)$. În primul caz se vede uşor că avem de a face cu aplicaţia $f(x,y) = (y,x)$. În cel de-al doilea caz,

căutând f de forma $f(x,y)=(mx+ny,\ px+qy)$ găsim că $m+2n=2$, $p+2q=1$ (din $f(1,2)=(2,1)$) şi $-2m+n=-1$, $-2p+q=2$ (din $f(-2,1)=(-1,2)$). Obţinem $m=\frac{4}{5}$, $n=\frac{3}{5}$, $p=-\frac{3}{5}$, $q=\frac{4}{5}$, adică $f(x,y)=\frac{1}{5}(4x+3y,\ -3x+4y)$.

6. Determinaţi $f\in\mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ astfel încât $f(1,2)=(3,1)$.
Rezolvare. Deoarece $\|f(1,2)\|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}\neq\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}=\|(1,2)\|$, nu există nicio aplicaţie liniară $f\in\mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ care să verifice condiţia din enunţ.

7. Arătaţi că $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y,x+y)$ defineşte o transformare ortogonală. Este ea simetrică?
Rezolvare. Există mai multe căi de a verifica dacă f este ortogonală:
1. cu definiţia:
$\langle f(x,y),f(x',y')\rangle=\left\langle\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y,x+y),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y',x'+y')\right\rangle=$
$\frac{1}{2}\big((x-y)(x'-y')+(x+y)(x'+y')\big)=xx'+yy'=\langle(x,y),(x',y')\rangle$;
2. cu caracterizarea oferită de Propoziţia 7.1.1:
considerăm baza canonică şi verificăm dacă ea este transformată într-o bază ortonormată: $f(1,0)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$, $f(0,1)=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)$ formează o bază ortonormată deoarece $\left\|\frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)\right\|^2=\frac{1}{2}(1^2+1^2)=1$,
$\left\|\frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)\right\|^2=\frac{1}{2}((-1)^2+1^2)=1$, iar $\left\langle\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle=$
$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$;
3. arătând că matricea în baza canonică este ortogonală, adică verifică $A^{-1}=A^T$: $A=f_{B_c}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, se verifică imediat, satisface egalitatea $AA^T=I_2$ deci A este matricea unei transformări ortogonale.
Simetria: Cum A nu este simetrică ($A^T\neq A$), rezultă că f nu este simetrică.

8. Operatorul $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ are în baza $B=\{(1,1),(1,0)\}$ matricea $f_B=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$. Este f simetrică?

Rezolvare. Pare tentant să spunem că ,,având în vedere că matricea ei în baza B este simetrică, operatorul f este simetric”. În realitate, vom vedea, f nu este simetric. Propoziţia 7.2.1. cere ca matricea lui f într-o <u>bază ortonormată</u> să fie simetrică. Ori baza B nu este ortonormată, deci nu putem aplica propoziţia. Pentru a afla matricea lui f într-o bază ortonormată, o vom alege pe cea canonică şi vom folosi formula $f_{B_c} = T_{B_cB} \cdot f_B \cdot T_{BB_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Această matrice nu este simetrică, deci f nu este simetric.

9. Să se determine o bază ortonormată în care transformarea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ are forma diagonală.

Rezolvare. Calculăm mai întâi polinomul caracteristic
$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 12\lambda$, apoi valorile proprii:
$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 12\lambda = 0 \Leftrightarrow -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, -2, 6\}$.
Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = 0$ se află rezolvând sistemul
$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$.
Scăzând prima ecuaţie din cea de-a doua găsim că $x = z$, apoi că $y = -2x$, deci $S_{\lambda_1=0} = span\{(1, -2, 1)\}$. Ortonormăm baza $B_1 = \{(1, -2, 1)\}$ obţinând versorul $v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$.
Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_2 = -2$ se află rezolvând sistemul
$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$.
Obţinem uşor că $y = 0$, apoi că $z = -x$, deci $S_{\lambda_2=-2} = span\{(1, 0, -1)\}$. Ortonormăm baza $B_2 = \{(1, 0, -1)\}$ obţinând versorul $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_3 = 6$ se află rezolvând sistemul
$\begin{cases} -5x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$.

Rangul matricei sistemului este 2, un minor principal fiind $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 16$.

Notând $z = \alpha$, sistemul devine $\begin{cases} -5x + 2y = -3\alpha \\ 2x - 4y = -2\alpha \end{cases}$, cu soluţia $x = y = \alpha$, deci $S_{\lambda_3=6} = span\{(1,1,1)\}$. Ortonormăm baza $B_3 = \{(1,1,1)\}$ obţinând versorul $v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Baza ortonormată căutată este $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ adică
$B = \left\{ v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1),\ v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),\ v_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \right\}$.

În această bază matricea transformării din enunţ este diagonală, şi anume $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

10. Să se reducă la forma canonică prin transformări ortogonale forma pătratică $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + x_3^2$.
Rezolvare. Matricea formei în baza canonică este

$$f_{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ecuaţia caracteristică $\det(f_{B_c} - \lambda I_3) = 0$ este $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5 = 0$ şi are rădăcinile $5, -1, 1$. Prin urmare există o bază ortonormată $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de vectori proprii ai matricei f_{B_c} în care forma $f \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^3)$ are forma canonică

$$f(y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3) = 5y_1^2 - y_2^2 + y_3^2.$$

Pentru a determina baza B trebuie să determinăm subspaţiile invariante S_5, S_{-1}, S_1 corespunzătoare valorilor proprii $5, -1, 1$ şi apoi să le determinăm câte o bază ortonormată $B_5 = \{v_1\}$, $B_{-1} = \{v_2\}$, $B_1 = \{v_3\}$. După calcule obţinem

$$S_5 = span\{(1,-2,1)\}$$

deci putem lua v_1 chiar versorul vectorului $(1,-2,1)$, deci

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1).$$

Apoi, cum $S_{-1} = span\{(1,1,1)\}$ putem lua v_2 versorul vectorului $(1,1,1)$, deci

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Analog, cum $S_1 = span\{(-1,0,1)\}$ luăm

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).$$

Baza ortonormată în care forma pătratică dată are forma canonică de mai sus este $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Aşadar $f = 5y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$, unde

$y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - 2x_2 + x_3)$, $y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_3)$.

C. PROBLEME PROPUSE

1. Arătaţi că $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) := \dfrac{1}{2}\left(-x + \sqrt{3}y,\ y + \sqrt{3}x\right)$ defineşte o transformare ortogonală simetrică.
2. Dovediţi afirmaţiile de la Observaţia 7.1.1.
3. Să se determine $f \in \mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ astfel încât $f(1, 1) = (1, -1)$.
4. *Fie $(V, \cdot)$ un spaţiu euclidian şi τ un automorfism al său. Să se arate că τ este transformare ortogonală (adică $\tau(u) \cdot \tau(v) = u \cdot v$, $\forall u, v \in V$) dacă şi numai dacă τ conservă norma vectorilor, adică $\|\tau(u)\| = \|u\|$ pentru orice $u \in V$.
5. Fie $f \in \mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$. Să se determine $G := \{g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right) \mid g \circ f \in \mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)\}$.
6. *Fie V un spaţiu euclidian şi τ un automorfism al său. Să se arate că τ este transformare ortogonală dacă şi numai dacă imaginea unei baze ortonormate (prin τ) este o bază ortonormată.
7. Să se determine $f \in \mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ ştiind că $f^2 = id_{\mathbb{R}^2}$ şi $f \neq id_{\mathbb{R}^2}$.
8. Este adevarată implicaţia $\left[f, g \in \mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right) \Rightarrow f + g \in \mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)\right]$?
9. Fie $f(x, y, z) = a(2x + 2y - bz, 2x - by + 2z, -bx + 2y + 2z)$. Să se determine $a, b \in (0, \infty)$ astfel ca f să devină o transformare ortogonală a spaţiului euclidian canonic $\mathbb{R}^3$ prin trei metode.

   Răspuns. $a = \dfrac{1}{3}$, $b = 1$.
10. Arătaţi că grupul matricelor ortogonale din $\mathbb{R}^{n \times n}$ este izomorf cu grupul $\mathcal{GO}(V)$, unde V este un spaţiu euclidian n-dimensional.
11. Fie $B = \{e_1, e_2\}$ baza canonică din $\mathbb{R}^2$ şi $f \in \mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right)$ astfel ca $f(e_1) = -e_2$. Să se determine $\mathcal{M} = \{f_B^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
12. Demonstraţi Propoziţia 7.2.1.
13. Determinaţi mulţimea $\mathcal{GO}\left(\mathbb{R}^2\right) \cap \mathcal{L}_s\left(\mathbb{R}^2\right)$.
14. Demonstraţi Propoziţia 7.2.2.

15. Să se determine o bază ortonormată în care transformarea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$ are forma diagonală.

Răspuns. De exemplu, în baza $\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$ are forma $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. Fie $f \in \mathcal{L}_s\left(\mathbb{R}^2\right) \diagdown \{\alpha \cdot id_{\mathbb{R}^2} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Să se arate că nu există o transformare liniară ortogonală t astfel încât $t^{-1} \circ f \circ t \in \{\alpha \cdot id_{\mathbb{R}^2} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

17. Aduceţi matricea $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la o formă diagonală D şi determinaţi matricea ortogonală T astfel ca $A = TDT^T$.

Răspuns. De exemplu $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ şi $T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

18. Transcrieţi Teorema 7.2.1. de diagonalizare a matricelor simetrice pentru transformări liniare simetrice.

19. În spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^3$ determinaţi o bază ortonormată B formată cu vectorii proprii ai unei transformări liniare de matrice $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ şi matricea diagonală D a acestei transformări în baza B.

Răspuns. De exemplu $\left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$, $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

20. Determinaţi $\dim \mathcal{L}_s(V)$ ştiind că $\dim V = n$.

21. Să se verifice ortogonalitatea operatorului $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ care are matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

în baza canonică şi să se determine expresia analitică a operatorului f^{-1}.

22. Fie V un spaţiu liniar real n-dimensional. Arătaţi că spaţiul liniar al formelor pătratice $\mathcal{Q}(V)$ are dimensiunea $\dfrac{n(n+1)}{2}$. (Dacă $f, g \in \mathcal{Q}(V)$ atunci suma celor două forme este definită prin $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$ şi produsul extern dintre scalarul α şi vectorul f este definit prin $(\alpha f)(v) := \alpha f(v)$.). Demonstraţi că $\mathcal{Q}(V) \simeq \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$.

23. Dovediţi că spaţiile vectoriale $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ şi $\mathcal{L}_s(\mathbb{R}^n)$ sunt izomorfe.

24. Să se reducă la forma canonică prin transformări ortogonale formele pătratice:

    (a) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

    (b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_3x_4$.

    Răspuns. (a) $f = 4y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2$; $y_1 = \dfrac{1}{3}(2x_1 - 2x_2 + x_3)$,
    $y_2 = \dfrac{1}{3}(2x_1 + x_2 - 2x_3)$, $y_3 = \dfrac{1}{3}(x_1 + 2x_2 + 2x_3)$.
    (b) $f = y_1^2 - y_2^2 + 3y_3^2 + 5y_4^2$; $y_1 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$,
    $y_2 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$, $y_3 = \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$,
    $y_4 = \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$.

25. * Să se determine matricele $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonalizabile pentru care
    $A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

    Răspuns. $A \in \left\{ \pm \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -5 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

26. Determinaţi A^{13}, unde $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

Răspuns. $A^{13} = 9^{12} \begin{pmatrix} 2^{15}+3 & 6-2^{14} & -2^{15} \\ 6-2^{14} & 2^{13} & 6+2^{14} \\ -2^{15} & 6+2^{14} & 2^{15}-3 \end{pmatrix}.$

27. * **Algoritmul de descompunere QR a unei matrice nesingulare.** Fie $A = \left(v_1^T \mid v_2^T \mid \ldots \mid v_n^T\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice nesingulară, $B := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ şi $B' = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ baza ortonormată obţinută prin procedeul Gram-Schmidt din baza B, adică

$$v_1' = \frac{1}{\|v_1\|} v_1,\ v_k' = \frac{1}{\left\| v_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot v_i')\, v_i' \right\|} \left(v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot v_i')\, v_i' \right),$$

pentru $k > 1$, unde „ $\cdot$ ” reprezintă produsul scalar canonic din $\mathbb{R}^n$. Notăm

$$r_1 = \|v_1\|\,,\ r_k = \left\| v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k \cdot v_i')\, v_i' \right\|$$

pentru $k > 1$ şi $Q := \left(v_1'^T \mid v_2'^T \mid \ldots \mid v_n'^T\right)$. Să se arate că:

(a) $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este bază în $\mathbb{R}^n$

(b) $v_1 = r_1 v_1'$ şi $v_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} (v_i \cdot v_i')\, v_i' + r_k v_k'$, $k = \overline{1,n}$;

(c) $v_1^T = Q \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2^T = Q \begin{pmatrix} v_1' \cdot v_2 \\ r_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ v_n^T = Q \begin{pmatrix} v_1' \cdot v_n \\ v_2' \cdot v_n \\ \vdots \\ v_{n-1}' \cdot v_n \\ r_n \end{pmatrix}.$

(d) $A = QR$, unde $R = \begin{pmatrix} r_1 & v_1' \cdot v_2 & v_1' \cdot v_3 & \cdots & v_1' \cdot v_n \\ 0 & r_2 & v_2' \cdot v_3 & \cdots & v_2' \cdot v_n \\ 0 & 0 & r_3 & \cdots & v_3' \cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v_{n-1}' \cdot v_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_n \end{pmatrix}.$

(e) Folosind descompunerea $A = QR$ indicaţi o procedură de rezolvare a sistemului $Ax = b$, unde $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

28. * Să se efectueze descompunerea QR a matricei $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Răspuns. $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

29. * Să se determine descompunerea QR a unei matrice ortogonale.

30. * Să se efectueze descompunerea QR a matricei $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Răspuns. $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$,

$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

31. * Să se arate că în descompunerea QR a matricei $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ avem $R = 2I_4$.

32. Diagonalizaţi matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi determinaţi o bază în care are forma diagonală găsită.
(Examen, Informatică, 2014)

33. Fie $M = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta & a\sin\theta + b\cos\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta & -a\cos\theta + b\sin\theta \end{pmatrix}$, unde a, b, θ sunt numere reale date.

(a) Să se scrie M sub forma $M = aA + bB$ şi să se calculeze A^2, B^2 şi $AB + BA$.

(b) Să se determine M^n, unde n este un număr natural.

(c) Dacă $a^2 + b^2 < 1$ să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} M^k$.

(Concurs ,,Traian Lalescu", profil neelectric, faza finală, Alba Iulia, 2013)

8 SPAŢII AFINE EUCLIDIENE

Geometria afină are ca obiect studiul proprietăţilor geometrice care ramân neschimbate sub acţiunea transformărilor liniare nesingulare şi a translaţiilor. Spaţiile afine euclidiene - care sunt spaţii vectoriale euclidiene cărora li s-a ataşat un sistem de coordonate, unificând astfel geometria şi algebra liniară în geometria analitică - oferă cadrul natural de lucru în grafica 2D şi 3D şi în modelarea geometrică.

Următoarele capitole sunt dedicate celor mai uzitate noţiuni din spaţiile afine euclidiene.

În ultimii ani au fost realizate aplicaţii valoroase ale spaţiilor afine euclidiene în telecomunicaţii, în ştiinţele vieţii şi în computer science.

A. TEORIE

8.1. Spaţiul afin euclidian $\mathbb{E}^n$

Definiţia 8.1.1. Spaţiu afin. *Considerăm spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ şi o mulţime $\mathcal{P}$ ale cărei elemente le numim* ***puncte*** *şi le notăm cu litere mari: A, B, C etc. Dacă pentru orice pereche de puncte $(A, B) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ există un unic vector notat $\overline{AB} \in \mathbb{R}^n$,* (uneori $\overrightarrow{AB}$) *iar funcţia*

$$\alpha : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}^n,\ \alpha(A, B) := \overline{AB}$$

verifică axiomele:

(i) $\forall A \in \mathcal{P}$ *şi* $\forall\ v \in \mathbb{R}^n$ *există un unic punct* $B \in \mathcal{P}$ *astfel ca* $v = \overline{AB}$ *şi*

(ii) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, $\forall A, B, C \in \mathcal{P}$ *(relaţia lui Chasles)*

spunem că mulţimea $\mathcal{P}$ împreună cu aplicaţia α (pe scurt, cuplul $(\mathcal{P}, \alpha)$) este un ***spaţiu (punctual) afin n-dimensional.***

Să remarcăm faptul că, dacă A este un punct din $\mathbb{R}^n$, atunci, din cea de-a două axiomă avem $\overline{AA}+\overline{AA} = \overline{AA}$. Prin urmare $\overline{AA}$ este vectorul nul, oricare ar fi punctul A. Am obţinut:

Proprietatea 8.1.1. *Dacă A este un punct din $\mathcal{P}$, atunci*

$$\overline{AA} = \theta = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Deoarece $\overline{BA} + \overline{AB} = \theta$ rezultă:

Proprietatea 8.1.2. *Dacă A şi B sunt două puncte din $\mathcal{P}$, atunci*

$$\overline{BA} = -\ \overline{AB}.$$

Proprietatea 8.1.3. *Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sunt k puncte din $\mathcal{P}$ şi $k \geq 3$ atunci*

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_{k-1}A_k} = \overline{A_1A_k}.$$

Demonstraţie. Dovedim această generalizare a relaţiei lui Chasles prin inducţie matematică în raport cu k. Pentru $k = 3$ egalitatea decurge imediat din (ii). Presupunem că egalitatea din propoziţie are loc pentru k puncte. Trebuie să arătăm că $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_{k-1}A_k} + \overline{A_kA_{k+1}} = \overline{A_1A_{k+1}}$ pentru punctele arbitrare $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ din $\mathcal{P}$. Folosind consecutiv ipoteza de inducţie şi relaţia (ii) avem

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{k-1}A_k} + \overline{A_kA_{k+1}} = \overline{A_1A_k} + \overline{A_kA_{k+1}} = \overline{A_1A_{k+1}}.$$

Observaţii şi convenţii. Fie $(\mathcal{P}, \alpha)$ un spaţiu afin n-dimensional.

1. *Dacă $O \in \mathcal{P}$ este un punct fixat, conform axiomei (i) funcţia*

   $$\mathcal{P} \to \mathbb{R}^n \text{ definită prin } A \longmapsto \overline{OA}$$

   este o bijecţie; este motivul pentru care, în continuare, luăm

   $$\mathcal{P} := \mathbb{R}^n,$$

   *adică **elementele din $\mathbb{R}^n$ le considerăm fie vectori, fie puncte**.*

2. *Fie $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şi $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ două puncte (în $\mathbb{R}^n$). **Definim vectorul $\overline{AB}$ prin***

   $$\overline{AB} := B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n).$$

   Atunci $\mathbb{R}^n$ împreună cu aplicaţia

   $$\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \alpha(A, B) := \overline{AB}$$

   *este **spaţiu afin**.*

   Într-adevăr, dacă v este un vector şi A este un punct, atunci unicul punct B pentru care $v = \overline{AB} = B - A$ este $B = v + A$ şi prima axiomă este verificată; axioma (ii) este echivalentă cu egalitatea evidentă (din spaţiul $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$): $(B - A) + (C - B) = C - A$.

3. *Dacă pe $\mathbb{R}^n$ considerăm un produs scalar „$\cdot$", **atunci** $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ **se numeşte spaţiu (punctual) afin euclidian** (n **- dimensional**) şi se notează $\mathbb{E}^n$.* În lipsa altor precizări „$\cdot$" este produsul scalar canonic.

4. ***Baza canonică*** *din* $\mathbb{E}^3$ *o notăm mai departe cu* $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. *Vectorii din* $\mathbb{E}^2$ *şi cei din* $\mathbb{E}^3$ *se notează uneori cu litere latine barate:* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ *(sau* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \ldots$ *).*

Exemplul 8.1.1. În spaţiul afin $\mathbb{E}^3$ fie punctele $A = (1, 2, 3)$ şi $A' = (-1, -2, -3)$ şi vectorul $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}$.

1. Să se determine unicul punct B pentru care $\overline{a} = \overline{AB}$.
2. Să se determine unicul punct B' pentru care $\overline{a} = \overline{A'B'}$.

Rezolvare.

1. Pentru a obţine unicul punct $B(x, y, z)$ pentru care $\overline{a} = \overline{AB}$ remarcăm că $\overline{a} = (1, 2, 3)$ şi
$$\overline{AB} = B - A = (x, y, z) - (1, 2, 3) = (x - 1,\ y - 2,\ z - 3),$$
de unde rezultă că $B(2, 4, 6)$.
2. Unicul punct B' pentru care $\overline{a} = \overline{A'B'} = B' - A'$ se poate obţine direct din definiţie: $B' = A' + \overline{a} = (0, 0, 0)$.

Definiţia 8.1.2. Distanţa dintre două puncte. ***Distanţa*** $d(A, B)$ ***dintre punctele*** $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *şi* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *din* $\mathbb{E}^n$ *este lungimea vectorului* $\overline{AB}$*, deci*
$$d(A, B) = \left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}.$$

Noţiunea de segment de dreaptă se extinde în $\mathbb{R}^n$ după cum urmează.

Definiţia 8.1.3. Segment. *Fie* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *şi* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *două puncte din* $\mathbb{R}^n$. *Mulţimea punctelor de forma* $A + t \cdot \overline{AB}$ *pentru care scalarul* t parcurge intervalul $[0, 1]$ *se numeşte* ***segment de extremităţi*** A, B *şi se notează* $[AB]$*; deci*
$$[AB] = \{(1 - t)A + tB \,|t \in [0, 1]\}$$
sau
$$[AB] := \{((1 - t)a_1 + tb_1, (1 - t)a_2 + tb_2, \ldots, (1 - t)a_n + tb_n) \mid t \in [0, 1]\}.$$

Mijlocul segmentului $[AB]$ *este punctul* $M \in [AB]$ *pentru care* $\overline{AM} = \overline{MB}$. *Dacă* $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *şi* $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *din* $\overline{AM} = \overline{MB}$ *rezultă imediat că* $x_i - a_i = b_i - x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, deci mijlocul segmentului* $[AB]$ *este*
$$M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2},\ \frac{a_2 + b_2}{2},\ \ldots,\ \frac{a_n + b_n}{2}\right).$$

Definiţia 8.1.4. Unghi. *Fie A, B, C trei puncte distincte din $\mathbb{R}^n$. **Unghiul** $\widehat{BAC}$ este unghiul dintre vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$. Prin urmare cosinusul unghiului $\widehat{BAC}$ este*

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left\|\overline{AB}\right\|\left\|\overline{AC}\right\|},$$

*iar **măsura unghiului** $\widehat{BAC}$ este* $\arccos\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left\|\overline{AB}\right\|\left\|\overline{AC}\right\|}$ *(ca de obicei, prin abuz de limbaj, spunem uneori ,,unghiul $\widehat{BAC}$" în loc de ,,măsura unghiului $\widehat{BAC}$").*

Exemplul 8.1.2. În spaţiul afin $\mathbb{E}^3$ fie punctele $A = (1, 2, 3)$, $A' = (-1, -2, -3)$ şi $C = (1, 2, -3)$.

1. Să se determine segmentul $[AA']$ şi totalitatea punctelor egal depărtate de mijlocul lui.
2. Să se determine punctele M pentru care unghiul $\widehat{AMA'}$ este drept.
3. Să se determine punctele N aflate la distanţa $\sqrt{14}$ de punctul C şi de punctul A, pentru care unghiul $\widehat{NAA'}$ are măsura $\arccos\dfrac{3}{7}$.

Rezolvare.

1. Conform definiţiei,

$$[AA'] = \{(2t-1,\, 4t-2,\, 6t-3) \mid t \in [0,1]\}.$$

Mijlocul segmentului $[AA']$ are drept coordonate mediile aritmetice ale coordonatelor punctelor A şi A'. Deci mijlocul căutat este $O = (0, 0, 0)$. Punctul $P(x, y, z)$ se află la distanţa $R > 0$ de $O = (0, 0, 0)$ dacă şi numai dacă $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$. Prin urmare punctele egal depărtate de mijlocul $O = (0, 0, 0)$ al segmentului $[AA']$ descriu o suprafaţă (sfera de centru $(0, 0, 0)$ şi rază R) de ecuaţie

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

2. Unghiul $\widehat{AMA'}$ este drept dacă şi numai dacă produsul scalar $\overline{AM}\cdot\overline{MA'}$ este nul. Fie $M = (x, y, z)$. Atunci

$$\overline{AM}\cdot\overline{MA'} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-2, z-3)\cdot(-1-x, -2-y, -3-z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - 4 + z^2 - 9 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$

Prin urmare punctele căutate se caracterizează prin proprietatea că se găsesc la distanţa $\sqrt{14}$ de O.

3. Fie $N = (x, y, z)$ punctul căutat. Deoarece N se află la distanţa $\sqrt{14}$ de punctul C, respectiv punctul A avem imediat

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 14 \text{ şi } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14,$$

iar de aici urmează că

$$z = 0 \text{ şi } (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5.$$

Pe de altă parte, cosinusul unghiului $\widehat{NAA'}$ este $\frac{3}{7}$, deci $\frac{\overline{AN} \cdot \overline{AA'}}{\left\|\overline{AN}\right\| \left\|\overline{AA'}\right\|} = \frac{3}{7}$.

Cum $N = (x, y, 0)$, avem

$$\frac{3}{7} = \frac{\left[(x-1)\,\bar{i} + (y-2)\,\bar{j} - 3\bar{k}\right] \cdot \left(-2\bar{i} - 4\bar{j} - 6\bar{k}\right)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 9} \cdot \sqrt{4 \cdot 14}} =$$

$$= -\frac{(x-1) + 2\,(y-2) - 9}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{x + 2y - 14}{14} \Longleftrightarrow x + 2y = 8.$$

Prin urmare punctele căutate sunt $N_1 = (0, 4, 0)$ şi $N_2 = \left(\frac{16}{5}\,,\ \frac{12}{5}\,,\ 0\right)$.

Spaţiile euclidiene afine (în special $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{E}^3$ şi $\mathbb{E}^4$) oferă cadrul natural de lucru în grafica 3D şi în modelarea geometrică. În următoarele paragrafe introducem câteva dintre instrumentele folosite în aceste domenii.

8.2. Repere ortonormate în $\mathbb{E}^n$

Definiţia 8.2.1. Reper. Vector de poziţie. Coordonate. *Un **reper (ortonormat)** în $\mathbb{E}^n$ este un cuplu $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ unde $O \in \mathbb{R}^n$ este un punct fixat, numit **originea reperului**, iar $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază ortonormată a spaţiului euclidian $(\mathbb{R}^n, \cdot)$. Asociem reperului $\mathcal{R}$ un **sistem de semiaxe ortogonale** $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$, unde semiaxa Ox_i este mulţimea punctelor M cu proprietatea că vectorul $\overline{OM}$ are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens cu vectorul e_i, adică*

$$Ox_i = \left\{M \in \mathbb{R}^n \mid \overline{OM} = \lambda e_i,\ \lambda \in [0, \infty)\right\}.$$

*Dacă A este un punct şi $\overline{OA} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$, atunci $a_i e_i = pr_{e_i} \overline{OA}$ (vezi Observaţia 6.4.1). Vectorul $\overline{OA}$ se numeşte **vectorul de poziţie al punctului** A, iar coordonatele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ale vectorului $\overline{OA}$ în baza $\mathcal{B}$ sunt, prin definiţie, **coordonatele punctului** A **relativ la reperul** $\mathcal{R}$ (sau la sistemul de axe asociat). Vom scrie în continuare $A\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şi vom citi A **de coordonate** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (în reperul $\mathcal{R}$).*

În plan, i.e. în $\mathbb{E}^2$ (sau în spaţiu, i.e. în $\mathbb{E}^3$), axele unui reper ortonormat se notează de regulă cu Ox, Oy, (respectiv Ox, Oy, Oz) iar coordonatele unui punct arbitrar cu (x, y) (respectiv (x, y, z)).

Reperul $\mathcal{R}_c$ format din originea $O(0,0,\ldots,0)$ şi din baza canonică $\mathcal{B}_c$ se numeşte ***reperul canonic****.*

Observaţia 8.2.1. *În lipsa unor precizări suplimentare, dacă vorbim de coordonatele unui punct ne referim la coordonatele acestuia în reperul canonic.*

Observaţia 8.2.2. *Dacă $v \in \mathbb{R}^n$ este un vector iar A* şi *$B \in \mathbb{R}^n$ sunt două puncte astfel ca $v = \overline{AB}$ spunem că segmentul orientat de extremităţi A şi B este un* ***reprezentant al vectorului*** *v. Spunem că* ***vectorul*** *$v \in \mathbb{R}^n$* ***este aplicat în punctul*** $A \in \mathbb{R}^n$, dacă $v = \overline{AB}$, unde $B \in \mathbb{R}^n$ este unicul punct pentru care $v = \overline{AB}$.

Observaţia 8.2.3. *Vectorii liberi studiaţi în liceu - priviţi drept clase de echivalenţă relativ la relaţia de echipolenţă dintre segmentele orientate - sunt cazuri particulare ale vectorilor dintr-un spaţiu vectorial euclidian bidimensional (vezi şi Problema 2).*

Proprietăţi 8.2.1. *Fie trei puncte $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $B(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, $C(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ din spaţiul euclidian canonic $\mathbb{E}^n$ şi $\mathcal{R}_c$ reperul canonic. Atunci:*

1. *vectorul $\overline{AB}$ se poate exprima cu ajutorul vectorilor de poziţie ai punctelor A şi B astfel:*
$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA};$$
2. *norma vectorului de poziţie $\overline{OA}$ (lungimea sa) este*:
$$\left\|\overline{OA}\right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2};$$
3. *distanţa dintre punctele A şi B este*:
$$d(A,B) = \left\|\overline{AB}\right\| = \left\|\overline{OB} - \overline{OA}\right\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + \ldots + (b_n-a_n)^2};$$
4. *segmentul $[AB]$ este mulţimea punctelor $P \in \mathbb{R}^n$ pentru care* $\overline{OP} = (1-t)\,\overline{OA} + t\overline{OB}$, unde $t \in [0,1]$; deci
$$[AB] := \{P((1-t)a_1 + tb_1,\ (1-t)a_2 + tb_2,\ \ldots,\ (1-t)a_n + tb_n) \mid t \in [0,1]\};$$
5. *mijlocul segmentului $[AB]$ este punctul*
$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \ldots, \frac{a_n+b_n}{2}\right).$$

Exemplul 8.2.1. Centrul de greutate. Fie $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$. Să arătăm că centrul de greutate al triunghiului ABC este
$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}, \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right).$$

În primul rând ne amintim că centrul de greutate G se găseşte la intersecţia medianelor. Deoarece $A'\left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}, \frac{b_3+c_3}{2}\right)$ este mijlocul segmentului $[BC]$ şi $G \in [AA']$ se află la două treimi de vârful A urmează că

$$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AA'} \Leftrightarrow 3(G-A) = 2(A'-A) \Leftrightarrow G = \frac{1}{3}(A+2A'),$$

de unde obţinem imediat coordonatele căutate.

Exemplul 8.2.2. Fie triunghiul ABC, unde $\overline{OA} = 14\bar{i} - 7\bar{j} + 2\bar{k}$, $\overline{OB} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}$, $\overline{OC} = -2\bar{i} + 7\bar{j} + 2\bar{k}$.

1. Să se arate că triunghiul AOB este dreptunghic.
2. Să se arate că triunghiul BOC este isoscel.
3. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.
4. Să se calculeze măsura unghiului $\widehat{BAC}$.

Rezolvare.

1. $\overline{OA}\cdot\overline{OB} = 28-14-14 = 0$, deci $\overline{OA} \perp \overline{OB}$ şi triunghiul AOB este dreptunghic.
2. Deoarece $\left\|\overline{BO}\right\| = \left\|\overline{CO}\right\| = \sqrt{57}$, rezultă că triunghiul BOC este isoscel.
3. Avem $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = -4\bar{i} + 5\bar{j} + 9\bar{k}$, $\left\|\overline{BC}\right\| = \sqrt{122}$, $\overline{CA} = \overline{OA} - \overline{OC} = 16\bar{i} - 14\bar{j}$, $\left\|\overline{CA}\right\| = \sqrt{452}$, $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = -12\bar{i} + 9\bar{j} - 9\bar{k}$, $\left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{306}$, deci perimetrul cerut este $\sqrt{122} + \sqrt{452} + \sqrt{306}$.
4. Trebuie să calculăm cosinusul unghiului $\widehat{BAC}$:
$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left\|\overline{AB}\right\|\cdot\left\|\overline{AC}\right\|} = \frac{\left(-12\bar{i}+9\bar{j}-9\bar{k}\right)\cdot\left(-16\bar{i}+14\bar{j}\right)}{\left\|\overline{AB}\right\|\cdot\left\|\overline{AC}\right\|} =$$
$$\frac{6\left(4\bar{i}-3\bar{j}+3\bar{k}\right)\cdot\left(8\bar{i}-7\bar{j}\right)}{\left\|\overline{AB}\right\|\cdot\left\|\overline{AC}\right\|} = \frac{6(32+21)}{\sqrt{306}\cdot\sqrt{452}} = \frac{159}{\sqrt{306}\cdot\sqrt{113}}.$$
Prin urmare măsura unghiului $\widehat{BAC}$ este $\arccos\frac{159}{\sqrt{306}\cdot\sqrt{113}}$.

8.3. Schimbări de repere

Definiţia 8.3.1. Orientarea bazelor şi a reperelor. *Fie $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ două baze în $\mathbb{R}^n$ şi $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ două repere în $\mathbb{E}^n$.*

- *Bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ au* ***aceeaşi orientare (sunt la fel orientate)*** *dacă determinantul matricei de trecere $T_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ este pozitiv. Baza $\mathcal{B}$ este* ***dreaptă*** *dacă este la fel orientată ca baza canonică; în caz contrar spunem că este o* ***bază stângă****.*
- *Reperele $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{R}'$ au* ***aceeaşi orientare (sunt la fel orientate)*** *dacă bazele lor sunt la fel orientate.*
- *Spunem că reperul $\mathcal{R}$ este* ***drept*** *dacă are aceeaşi orientare ca reperul canonic; în caz contrar spunem că este* ***reper stâng****.*

Exemplul 8.3.1. Fie $\overline{v} = \cos\theta \cdot \overline{i} + \sin\theta \cdot \overline{j}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ un vector unitar din $\mathbb{E}^2$. Să determinăm o bază ortonormată dreaptă $\mathcal{B}_d$ şi una ortonormată stângă $\mathcal{B}_s$ în care $\overline{v}$ să fie pe prima poziţie.

Fie $\mathcal{B}_d := \{\overline{v}, \overline{w}\}$, unde $\overline{w}$ este un versor ortogonal pe $\overline{v}$. Faptul $\overline{w}$ că este unitar implică existenţa unui unghi $\alpha \in (-\pi, \pi]$ astfel ca $\overline{w} = \cos\alpha \cdot \overline{i} + \sin\alpha \cdot \overline{j}$. Din ortogonalitatea $\overline{v} \perp \overline{w}$ rezultă egalitatea $\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta = 0$, ori $\cos(\alpha - \theta) = 0$. De aici obţinem soluţiile

$$\overline{w} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overline{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overline{j} = -\sin\theta \cdot \overline{i} + \cos\theta \cdot \overline{j},$$

şi

$$\overline{w}_1 = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overline{i} + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \overline{j} = \sin\theta \cdot \overline{i} - \cos\theta \cdot \overline{j} = -\overline{w}.$$

Deoarece matricea de trecere $T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ de la baza canonică la baza $\{\overline{v}, \overline{w}\}$ are determinantul egal cu 1, rezultă că această bază este dreaptă, iar transformarea ortogonală asociată este o rotaţie în sensul definiţiei date la Exemplul 7.1.3. Baza $\{\overline{v}, -\overline{w}\}$ este bază stângă.

Observaţia 8.3.1. *Prin urmare, un reper ortonormat din plan care are axele ortogonale asociate Ox, Oy, iar Oy se obţine prin rotirea în sens trigonometric cu $\frac{\pi}{2}$ a axei Ox în jurul originii, este un* ***reper drept****. Dacă Oy se obţine prin rotirea în sensul acelor de ceasornic cu $\frac{\pi}{2}$ a axei Ox în jurul originii, atunci reperul* ***este stâng****.*

Definiţia 8.3.2. Schimbarea reperelor în $\mathbb{E}^n$.
Fie $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$ şi $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\})$ două repere în spaţiul euclidian afin $\mathbb{E}^n$.

1. *Dacă $\mathcal{R}' = (O', \mathcal{B})$ (adică $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$) şi $O' \neq O$ spunem că reperul $\mathcal{R}'$ s-a obţinut din reperul $\mathcal{R}$ prin* ***translaţia*** $\overline{OO'}$ ***(pe direcţia vectorului*** $\overline{OO'}$, *sau* ***de-a lungul dreptei*** *OO'). În acest caz axele ortogonale $O'x'_i$, $i = \overline{1,n}$ asociate reperului $\mathcal{R}'$ sunt paralele şi au aceaşi direcţie cu axele Ox_i, $i = \overline{1,n}$ ale reperului $\mathcal{R}$. Dacă punctul O' are coordonatele $(o'_1, o'_2, \ldots, o'_n)$ relativ la reperul $\mathcal{R}$, iar punctul A are coordonatele $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ relativ la reperul $\mathcal{R}$ şi coordonatele $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ relativ la reperul $\mathcal{R}'$, atunci*

$$a'_i = a_i - o'_i, \; i = \overline{1,n}.$$

2. *Dacă $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}')$ şi $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$ spunem că reperul $\mathcal{R}'$ s-a obţinut din reperul $\mathcal{R}$ prin* ***rotaţii în jurul axelor*** *Ox_i, $i = \overline{1,n}$ ale reperului $\mathcal{R}$. Dacă $f \in \mathcal{G}O(V)$ este transformarea pentru care $f(e_i) = e_i'$, $i = \overline{1,n}$, spunem că $\mathcal{R}'$ s-a obţinut din reperul $\mathcal{R}$ prin* ***rotaţia*** *f.*

3. *Dacă $O' \neq O$ şi $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$ spunem că reperul $\mathcal{R}'$ s-a obţinut din reperul $\mathcal{R}$ printr-o* ***rototranslaţie****.*

Observaţia 8.3.2. Reperul $\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}' = \{e_1', e_2'\})$ din $\mathbb{E}^2$ *este drept* (vezi Exemplul 8.3.1) dacă şi numai dacă matricea de trecere de la baza canonică $\mathcal{B}_c = \{e_1, e_2\}$ la baza $\mathcal{B}'$ este de forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

unde θ este măsura unghiului $\widehat{(e_1, e_1')}$, şi *este stâng* dacă şi numai dacă matricea de trecere de la baza canonică la baza $\mathcal{B}'$ este de forma

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Prin urmare o bază ortonormată $\{e_1', e_2'\}$ are aceeaşi orientare ca baza canonică dacă şi numai dacă unghiurile $\widehat{(e_1, e_1')}$ şi $\widehat{(e_2, e_2')}$ au aceeaşi măsură.

Observaţia 8.3.3. Fie $\theta \in (-\pi, \pi]$ şi reperul

$$\mathcal{R}' = (O, \mathcal{B}' = \{e_1' = (\cos\theta, \sin\theta),\ e_2' = (-\sin\theta, \cos\theta)\}).$$

Transformarea ortogonală $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ care realizează legătura dintre bazele reperelor $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{R}'$ şi are matricea

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

şi se mai numeşte ***rotaţie de unghi*** θ.

Dacă $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, atunci $v = \|v\| (\cos\alpha, \sin\alpha)$, unde α este măsura unghiului dintre v şi e_1 iar $R_\theta(v) = \|v\| (\cos(\alpha + \theta), \sin(\alpha + \theta))$.

8.4. Produs vectorial. Produs mixt.

Definiţia 8.4.1. **Produs vectorial în spaţiul euclidian canonic** $\mathbb{E}^3$. Fie $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ baza canonică şi $u = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\overline{k}$, $v = y_1\overline{i} + y_2\overline{j} + y_3\overline{k}$ doi vectori. Vectorul notat $u \times v$ care se obţine prin dezvoltarea determinantului

$$u \times v := \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \overline{i} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \overline{k}$$

după prima linie se numeşte *produsul vectorial al vectorilor u şi v*.

Propoziţia 8.4.1. Proprietăţi ale produsului vectorial. *Fie u, v, w trei vectori din $\mathbb{R}^3$.*

1. *Dacă vectorii u, v sunt liniar independenţi atunci produsul vectorial $u \times v$ este ortogonal pe vectorii u şi v, iar sistemul $\{u, v, u \times v\}$ este o bază dreaptă, adică produsul vectorial $u \times v$ este perpendicular pe planul determinat de vectorii u şi v aplicaţi în acelaşi punct, iar sensul său este dat de regula burghiului.*

2. *Sistemul ortonormat $\{u, v, w\}$ este o bază dreaptă dacă şi numai dacă se verifică una dintre relaţiile:*
$$u \times v = w,\ v \times w = u \text{ sau } w \times u = v.$$

3. ***Norma produsului vectorial** are valoarea*
$$\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \sin \widehat{(u, v)}$$
*şi reprezinta **aria paralelogramului construit pe vectorii** u şi v aplicaţi în acelaşi punct (adică $\|u\| \, \|v - pr_u v\|$).*

4. *Produsul vectorial este anticomutativ, i.e. $u \times v = -v \times u$.*

5. *$u \times v = \theta$ dacă şi numai dacă unul dintre vectori este nul, sau cei doi vectori sunt coliniari (i.e. $u \parallel v$).*

6. ***Produsul mixt**. Fie u, v, w trei vectori din $\mathbb{R}^3$. Produsul mixt definit prin*
$$(u, v, w) := (u \times v) \cdot w$$
este egal cu determinantul matricei coordonatelor celor trei vectori, i.e.
$$(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$
*unde $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $v = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ şi $w = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3$; dacă A, B, C sunt trei puncte din $\mathbb{R}^3$ atunci modulul produsului mixt $\left(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\right)$ este **volumul paralelipipedului construit pe vectorii** $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$.*

Propoziţia 8.4.2. *Fie u, u', v, w vectori din $\mathbb{R}^3$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Atunci:*

1. $(u, v, w) = (v, w, u) = (w, u, v)$.
2. $(u, v, w) = -(v, u, w)$.
3. $(\alpha u + \beta u', v, w) = \alpha (u, v, w) + \beta (u', v, w)$.

4. *Volumul V al tetraedrului $ABCD$ este* $V = \dfrac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right)\right|$.

5. $(u \times v) \times w = (u \cdot w)\, v - (v \cdot w)\, u$ *(**dublu produs vectorial** (Gibbs)).*

Observaţia 8.4.1. Dublul produs vectorial nu este asociativ. Prin urmare, în general $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$. De altfel

$$u \times (v \times w) = \begin{vmatrix} v & w \\ u \cdot v & u \cdot w \end{vmatrix}$$

Exemplul 8.4.1. Calculaţi volumul unui paraleliped construit pe vectorii $u = 3\overline{i} + 4\overline{j}$, $v = -3\overline{j} + \overline{k}$ *şi* $w = 2\overline{j} + 5\overline{k}$ având acelaţi punct de aplicaţie. Determinaţi orientarea bazei $B := \{u, v, w\}$. Este $B' := \{u \times v, v, w\}$ bază în E^3?

Rezolvare. Deoarece

$$(u, v, w) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -51$$

rezultă că volumul paralelipipedului este 51, iar $\mathcal{B}$ este o bază stângă.

Deoarece

$$u \times v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4\overline{i} - 3\overline{j} - 9\overline{k},$$

avem

$$(u \times v, v, w) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -68,$$

deci $\mathcal{B}'$ este o bază stângă. Alternativ, folosind proprietăţi ale produsului mixt şi regula lui Gibbs, obţinem

$$(u \times v, v, w) = ((u \times v) \times v) \cdot w = \left((u, v)\, v - \|v\|^2\, u\right) w =$$

$$= -12\,(v, w) - 10\,(u, w) = 12 - 80 = -68.$$

B. PROBLEME REZOLVATE

1. Construiţi în $\mathbb{R}^2$ o bază ortonormată dreaptă $\mathcal{B} = \{q_1, q_2\}$ astfel încât $m(\theta) = \dfrac{\pi}{6}$, unde $\theta = \sphericalangle(q_1, e_1)$.

   Rezolvare.

   Vectorul q_1 fiind versor, coordonatele sale în baza canonică (care e ortonormată) sunt cosinusurile directoare, adică $q_1 = \left(\cos\theta,\, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = (\cos\theta,\, \sin\theta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\, \frac{1}{2}\right)$.

Pentru ca baza să fie dreaptă, alegem $q_2 = \left(-\frac{1}{2},\, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Într-adevăr, $q_1 \cdot q_2 = 0$, $||q_1|| = ||q_2|| = 1$ şi matricea de trecere $T_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ are $\det(T_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}}) = +1$.

2. Considerăm în $\mathbb{R}^2$ reperele ortonormate drepte $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}_c = \{\overline{i}, \overline{j}\}\}$ de axe xOy şi $\mathcal{R}' = \{O',\ \mathcal{B} = \{q_1, q_2\}\}$ de axe $x'O'y'$ unde $\mathcal{B}$ e baza din problema precedentă iar $O'(3,2)_{\mathcal{R}}$. Să se exprime coordonatele (x', y') în funcţie de (x, y).
Rezolvare.
Considerăm un reper intermediar $\mathcal{R}'' = \{O', \mathcal{B}_c = \{\overline{i}, \overline{j}\}\}$ de axe $x''O'y''$. Vom avea pentru un punct P oarecare:

$$P(x,y)_{\mathcal{R}} \iff \overline{OP} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j}$$

$$P(x'',y'')_{\mathcal{R}''} \iff \overline{O'P} = x'' \cdot \overline{i} + y'' \cdot \overline{j}$$

$$O'(3,2)_{\mathcal{R}} \iff \overline{OO'} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$$

Din regula lui Chasles, $\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P}$, deci $x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} = 3\overline{i} + 2\overline{j} + x'' \cdot \overline{i} + y'' \cdot \overline{j}$. Identificând coeficienţii lui $\overline{i}$ şi $\overline{j}$, găsim

$$\begin{cases} x'' = x - 3 \\ y'' = y - 2 \end{cases}$$

Trecem acum de la reperul intermediar la cel final de axe $x'O'y'$. Pentru un punct oarecare P avem:

$$P(x'',y'')_{\mathcal{R}''} \iff \overline{O'P} = x'' \cdot \overline{i} + y'' \cdot \overline{j}$$

$$P(x',y')_{\mathcal{R}'} \iff \overline{O'P} = x' \cdot q_1 + y' \cdot q_2$$

Avem deci vectorul $\overline{O'P}$ exprimat în două baze ortonormate diferite. Legătura între coordonatele în cele două baze e dată de

$$\overline{O'P}^T_B = T_{BB_c}\, \overline{O'P}^T_{B_c} = T^{-1}_{B_cB}\, \overline{O'P}^T_{B_c} = T^T_{B_cB}\, \overline{O'P}^T_{B_c}$$

adică

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-3 \\ y-2 \end{bmatrix}$$

de unde

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,x + \dfrac{1}{2}\,y + \dfrac{-3\sqrt{3}-2}{2} \\ y' = -\dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,y + \dfrac{3-2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

3. Să se calculeze $Aria(\triangle ABC)$ cu $A(1,1,2)$, $B(2,1,1)$ şi $C(3,-2,1)$.
Rezolvare.
Pentru vectorii $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (1,0,-1)$ şi $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (2,-3,-1)$ calculăm

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -3\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$$

Aria triunghiului va fi jumătate din aria paralelogramului construit pe cei doi vectori, deci $Aria(\triangle ABC) = \dfrac{1}{2}||\overline{AB} \times \overline{AC}|| = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

4. Să se decidă dacă punctele $A(1,2,1)$, $B(5,0,3)$ şi $C(-1,3,0)$ sunt sau nu coliniare.
Rezolvare.
Construim vectorii $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (4,-2,2)$ şi $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (-2,1,-1)$. Cele trei puncte vor fi coliniare dacă paralelogramul construit pe cei doi vectori are aria nulă, ceea ce se întâmplă doar atunci când $\overline{AB} \times \overline{AC} = \theta$. Calculăm produsul vectorial

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\,\overline{i} + 0\,\overline{j} + 0\,\overline{k}$$

aşadar cele trei puncte sunt coliniare.

5. Să se calculeze volumul tetraedrului $OABC$ unde O este originea reperului iar punctele A, B, C sunt cele din problema 3.
Rezolvare.
Pentru vectorii $\overline{OA} = (1,1,2)$, $\overline{OB} = (2,1,1)$, $\overline{OC} = (3,-2,1)$ calculăm produsul mixt

$$(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

şi atunci volumul $Vol(OABC) = \dfrac{1}{6}\,|(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})| = \dfrac{5}{3}$.

6. Să se arate că punctele $A(2,4,0)$, $B(4,3,-1)$, $C(3,1,2)$ şi $D(0,5,1)$ sunt coplanare.
Rezolvare.
Construim vectorii $\overline{AB} = (2,-1,-1)$, $\overline{AC} = (1,-3,2)$, $\overline{AD} = (-2,1,1)$. Calculăm

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Aşadar paralelipipedul construit pe cei trei vectori are volum nul, ceea ce implică faptul că punctele sunt coplanare.

7. Dacă $\overline{AB} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{AC} = \overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$ să se determine lungimea înălţimii din A în triunghiul $\triangle ABC$.
Rezolvare.
Calculăm
$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\overline{i} + 3\overline{j} + 3\overline{k},$$
deci $Aria(\triangle ABC) = \dfrac{1}{2} ||\overline{AB} \times \overline{AC}|| = \dfrac{\sqrt{18}}{2}$. Dar totodată
$Aria(\triangle ABC) = \dfrac{||\overline{CB}|| \cdot h}{2}$ unde h este lungimea înălţimii din A a triunghiului.
$\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} = (1, -2, -2)$ şi $||\overline{CB}|| = 3$; egalând cele două expresii pentru arie, găsim $h = \sqrt{2}$.

8. Dacă $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ reprezintă laturile unui triunghi, să se arate că $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{v} \times \overline{w} = \overline{w} \times \overline{u}$.
Rezolvare.
Cei trei vectori sunt laturile unui triunghi dacă şi numai dacă
$$\overline{u} + \overline{v} + \overline{w} = \theta$$
Dacă aplicăm produsul vectorial cu $\overline{u}$ la stânga în ambii membri ai relaţiei, obţinem $\overline{u} \times (\overline{u} + \overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \times \theta = \theta$, de unde $\overline{u} \times \overline{u} + \overline{u} \times \overline{v} + \overline{u} \times \overline{w} = \theta$ adică $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{w} \times \overline{u}$. Repetând procedeul aplicând acum produsul vectorial cu $\overline{v}$, găsim analog $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{v} \times \overline{w}$.

9. Să se demonstreze identitatea lui Lagrange:
$$(\overline{u} \cdot \overline{v})^2 + ||\overline{u} \times \overline{v}||^2 = ||\overline{u}||^2 \cdot ||\overline{v}||^2$$
Rezolvare.
Dacă notăm $\sphericalangle(\overline{u}, \overline{v}) = \alpha$, atunci $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. Înlocuind în relaţie expresiile pentru sin şi cos, prima fiind dedusă din norma produsului vectorial, găsim
$$\left(\frac{\overline{u} \cdot \overline{v}}{||\overline{u}|| \cdot ||\overline{v}||}\right)^2 + \left(\frac{||\overline{u} \times \overline{v}||}{||\overline{u}|| \cdot ||\overline{v}||}\right)^2 = 1$$
dacă înmulţim relaţia de mai sus cu $||\overline{u}||^2 \cdot ||\overline{v}||^2$ ajungem la identitatea cerută pe care dacă o scriem pe coordonate găsim relaţia pe care o ştim din liceu sub numele de identitatea lui Lagrange:
$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 + (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$.
O consecinţă imediată a acestei identităţi este inegalitatea
Cauchy-Buniakowsky-Schwarz:
$(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$.

C. PROBLEME PROPUSE

1. Să se figureze axele de coordonate ale reperului canonic, apoi să se figureze reprezentanţi ai vectorilor $\overline{a}, \overline{b}$ şi $\overline{a} \times \overline{b}$ dacă:

   (a) $\overline{a} = \overline{i},\ \overline{b} = \overline{j}$;

   (b) $\overline{a} = \overline{i} - \overline{k},\ \overline{b} = \overline{j}$;

   (c) $\overline{a} = \overline{i} - \overline{k},\ \overline{b} = \overline{j} + \overline{k}$;

   (d) $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j},\ \overline{b} = \overline{i} - \overline{j}$.

2. Arătaţi că un vector $\overline{a}$ este un vector din $\mathbb{E}^2$ dacă şi numai dacă $\overline{a}$ este un vector liber din $\mathbb{R}^2$.

3. Pentru ce valori ale lui α vectorii $\overline{a} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}$ şi $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + \alpha\overline{k}$ sunt paraleli?

   Răspuns. $\alpha = 4$.

4. Să se arate că $\overline{a} \times \overline{b} = 2\overline{i} + 6\overline{j} - 10\overline{k}$, unde $\overline{a} = -4\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$ şi $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

5. Determinaţi un vector perpendicular pe planul ce trece prin $P\,(1,-1,0)\,,\ Q\,(2,1,-1)\,,$ $R\,(-1,1,2)\,.$

   Răspuns. E.g. $\overline{i} + \overline{k}$.

6. Determinaţi aria triunghiului care are vârfurile $P\,(1,-1,0)\,,\ Q\,(2,1,-1)$ şi $R\,(-1,1,2)\,.$

   Răspuns. $3\sqrt{2}$.

7. Determinaţi aria triunghiului PQR şi un versor perpendicular pe planul (PQR) când:

   (a) $P(0,0,0),\ Q(1,1,1),\ R(1,0,-1)$;

   (b) $P(-2,0,2),\ Q(1,1,1),\ R(1,0,-1)$;

   (c) $P(1,0,0),\ Q(0,1,0),\ R(0,0,1)$;

   (d) $P(1,0,0),\ Q(0,1,0),\ R(0,0,-1)$.

8. Fie punctele $A(1,1,-1),\ B(0,1,2),\ C(2,0,-1)$.

   (a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a\overline{AB} + b\overline{BC} = \overline{AC}$.

   (b) Să se calculeze măsura unghiului dintre vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{BC}$.

   (c) Să se determine mijlocul segmentului $[AB]\,.$

   (d) Să se determine centrul de greutate al triunghiului ABC.

   (e) Să se calculeze $\overline{AB} \times \overline{BC}$.

(f) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

9. În $\mathbb{E}^2$ reperul $\mathcal{R}' = (O'(x_0, y_0), B' = \{e_1', e_2'\})$ s-a obţinut din reperul $\mathcal{R} = (O, B = \{e_1, e_2\})$ printr-o translaţie de-a lungul dreptei OO' şi o rotaţie de unghi θ. Determinaţi coordonatele (x', y') ale unui punct P relativ la reperul $\mathcal{R}$ în funcţie de coordonatele sale (x, y) relativ la reperul $\mathcal{R}'$.

   Răspuns. $x' = x\cos\theta + y\sin\theta - x_0$, $y' = -x\sin\theta + y\cos\theta - y_0$.

10. Stabiliţi dacă afirmaţiile de mai jos sunt adevărate sau false:

    (a) $\left\|\overline{AB}\right\| = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$;

    (b) $\left\|\overline{AB}\right\|^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB}$;

    (c) $\overline{AB} \times \overline{AB} = \overrightarrow{0}$;

    (d) $\overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{BC} \times \overline{AB}$;

    (e) $\overline{AB} \times \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AB} + \overline{BC} \times \overline{CD}$;

    (f) $\left(\overline{AB} \times \overline{BC}\right) \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \left(\overline{BC} \times \overline{CD}\right)$;

    (g) $\left(\overline{AB} \times \overline{BC}\right) \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \times \overline{CD}$;

    (h) $\left(\overline{AB} \times \overline{BC}\right) \cdot \overline{AC} = \overline{BD} \cdot \left(\overline{BC} \times \overline{CD}\right)$.

11. Determinaţi:

    - $\overline{a} \cdot \overline{b}$, $\overline{a} \times \overline{b}$, $\|\overline{a}\|$, $\left\|\overline{b}\right\|$;
    - cosinusul unghiului dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$;
    - proiecţia vectorului $\overline{b}$ pe vectorul $\overline{a}$

    în fiecare din următoarele cazuri:

    (a) $\overline{a} = 2\overline{i} + 7\overline{j}$, $\overline{b} = \overline{k}$;

    (b) $\overline{a} = 2\overline{i} - 4\overline{j} + \sqrt{5}\,\overline{k}$, $\overline{b} = -2\overline{i} + 4\overline{j} - \sqrt{5}\,\overline{k}$;

    (c) $\overline{a} = \dfrac{3}{5}\,\overline{i} + \dfrac{4}{5}\,\overline{k}$, $\overline{b} = 5\overline{i} + 12\overline{j}$.

12. Scrieţi $\overline{a} = 3\overline{j} + 4\overline{k}$ ca suma dintre un vector paralel cu $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j}$ şi unul perpendicular pe $\overline{b}$.

13. Scrieţi $\overline{a} = \overline{j} + \overline{k}$ ca suma dintre un vector paralel cu $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j}$ şi unul perpendicular pe $\overline{b}$.

14. Vectorul $\overline{a} = \overline{i} + \left(\overline{j} + \overline{k}\right)$ este deja scris ca suma dintre un vector $\overline{a}_1$ paralel cu $\overline{i}$ şi altul, $\overline{a}_2$, ortogonal pe $\overline{i}$. Aplicând tehnica de la exerciţiul precedent pentru $\overline{b} = \overline{i}$ obţineţi $\overline{a}_1 = \overline{i}$ şi $\overline{a}_2 = \overline{j} + \overline{k}$? Este aplicabilă această tehnică pentru orice vectori nenuli $\overline{a}$ şi $\overline{b}$?

15. Verificaţi afirmaţiile de la Propoziţia 8.4.1.

16. Fie ABC un triunghi şi M un punct arbitrar. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \alpha\overrightarrow{CB}$.

17. Fie $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ trei vectori nenuli. Folosind produse scalare şi produse vectoriale potrivite descrieţi:

    (a) un vector ortogonal pe $\overline{a}$ şi $\overline{b}$;

    (b) un vector ortogonal pe $\overline{a} \times \overline{b}$ şi $\overline{c}$;

    (c) un vector ortogonal pe $\overline{a} \times \overline{b}$ şi $\overline{a} \times \overline{c}$;

    (d) un vector ortogonal pe $\overline{a} \times \overline{b}$.

18. Să se determine formulele de calcul ale coordonatelor centrului de greutate al unui triunghi dat.

19. Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului $ABCD$ şi M un punct arbitrar. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel ca $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = \alpha\overrightarrow{MO}$.

20. Fie ABC un triunghi. Să se arate că G este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă şi numai dacă $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

21. Să se scrie toate bazele drepte care conţin vectorii
$u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{j},\ v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\overline{j}$.

22. Este adevărat că $(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$?

23. Care este lungimea proiecţiei vectorului $\overline{a} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}$ pe vectorul $\overline{b} = 3\overline{i} - \overline{j}$?

24. * Este produsul vectorial invariant la schimbarea bazei canonice cu altă bază ortonormată?

25. Fie $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in \mathbb{E}^3$. Să se arate că $\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \left(\overline{c} \times \overline{d}\right) = \begin{vmatrix} \overline{a} \cdot \overline{c} & \overline{a} \cdot \overline{d} \\ \overline{b} \cdot \overline{c} & \overline{b} \cdot \overline{d} \end{vmatrix}$.

26. **Determinantul Gram** *al vectorilor* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{E}^3$ *este scalarul*

$$d = \begin{vmatrix} \overline{a} \cdot \overline{a} & \overline{a} \cdot \overline{b} & \overline{a} \cdot \overline{c} \\ \overline{b} \cdot \overline{a} & \overline{b} \cdot \overline{b} & \overline{b} \cdot \overline{c} \\ \overline{c} \cdot \overline{a} & \overline{c} \cdot \overline{b} & \overline{c} \cdot \overline{c} \end{vmatrix}.$$

    Arătaţi că:

    (a) $d = \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)^2$;

    (b) vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă determinantul lor Gram este nul.

27. Dacă $\|\overline{a}\| = 2$, $\left\|\overline{b}\right\| = 3$ şi unghiul dintre $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ are măsura $\dfrac{\pi}{3}$ calculaţi $\left\|\overline{a} - 2\overline{b}\right\|$.

28. Pentru ce valori ale lui α aria paralelogramului determinat de vectorii $\overline{a} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}$ şi $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + \alpha\overline{k}$ este 1?

29. Determinaţi aria paralelogramului determinat de vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ şi volumul paralelipipedului determinat de vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$, unde $\overline{a} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$ şi $\overline{c} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

30. Calculaţi cosinusurile directoare ale vectorilor $\overline{a} = 2\overline{i} - 6\overline{j} + 8\overline{k}$, $\overline{b} = \overline{i} - 3\overline{j} + \overline{k}$ şi $\overline{c} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$.

31. Vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt ortogonali doi câte doi, iar $\overline{d} = 5\overline{a} - 6\overline{b} + 3\overline{c}$.

    (a) Dacă $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt versori calculaţi norma vectorului $\overline{d}$.

    (b) Dacă $\|\overline{a}\| = 2$, $\|\overline{b}\| = 3$ şi $\|\overline{c}\| = 4$ calculaţi norma vectorului $\overline{d}$.

32. Versorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$ sunt ortogonali doi câte doi, iar $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$. Dovediţi că $\alpha = \overline{a} \cdot \overline{d}$, $\beta = \overline{b} \cdot \overline{d}$ şi $\gamma = \overline{c} \cdot \overline{d}$ şi stabiliţi legătura cu exprimarea Fourier a unui vector.

33. Scrieţi vectorul $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j}$ ca suma dintre un vector paralel cu $\overline{b} = 2\overline{j} - \overline{k}$ şi unul perpendicular pe $\overline{b}$.

    (Examen, Ingineria sistemelor, 2014)

34. Fie $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{E}^3$ trei vectori necoplanari $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}$ astfel încât $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 1$, $\|\overrightarrow{w}\| = 3$, $m\left(\widehat{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, $m\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

    (a) Să se afle volumul paralelipipedului construit pe suporturile cu origine comună ale vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

    (b) Se consideră $T : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ un endomorfism astfel încât $T(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{v}$, $T(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{w}$, $T(\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{u}$. Să se calculeze $T^{2014}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$.
    (Concurs ,,Traian Lalescu”, profil neelectric, etapa finală, Timişoara, 2014)

9 PLANUL ŞI DREAPTA

Majoritatea tehnicilor de proiectare apelează la geometria analitică. În acest capitol tratăm câteva probleme privind dreapta şi planul în spaţiul $\mathbb{E}^3$.

O problemă de actualitate în care este folosită masiv geometria analitică este grafica pe calculator.

A. TEORIE

9.1. Planul

În cele ce urmează $\mathcal{R}_c = \left(O, \left\{\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\right\}\right)$ este reperul canonic din $\mathbb{E}^3$, iar Ox, Oy, Oz sunt axele ortogonale asociate.

1. **Normala la plan**. *Un vector $\overline{N}$ nenul din $\mathbb{E}^3$ se numeşte **normală** la planul π dacă $\overline{N} \perp \overline{PQ}$, pentru orice două puncte distincte $P, Q \in \pi$. În acest caz vom mai spune că vectorul liber $\overline{N}$ este un **vector normal** la planul π sau că $\overline{N}$ este o **normală*** (ori, prin abuz de limbaj, *$\overline{N}$ este **normala***) *la planul π.*

2. **Planul determinat de un punct şi de normala sa.** *Fie $M_0\left(a, b, c\right)$ un punct fixat şi $\overline{N} = A\bar{\imath} + B\bar{\jmath} + C\bar{k}$ un vector nenul fixat. Planul ce trece prin M_0 şi are normala $\overline{N}$ este locul geometric al punctelor $M\left(x, y, z\right)$ din spaţiu pentru care $\overline{N} \cdot \overline{M_0M} = \bar{0}$ şi are ecuaţia*

$$A\left(x - a\right) + B\left(y - b\right) + C\left(z - c\right) = 0.$$

Dacă π este planul care are ecuaţia $A\left(x - a\right) + B\left(y - b\right) + C\left(z - c\right) = 0$ convenim să scriem

$$\pi: \ A\left(x - a\right) + B\left(y - b\right) + C\left(z - c\right) = 0$$

şi să spunem, prin abuz de limbaj, că $A\bar{\imath} + B\bar{\jmath} + C\bar{k}$ este normala sa.

Exemplul 9.1.1. Să determinăm ecuaţia planului π care este paralel cu planul

$$\alpha: \ 2x - 3y + z - 5 = 0$$

şi care trece prin punctul $M\left(1, 1, 1\right)$. Remarcăm că $\overline{N} = 2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath} + \bar{k}$ este o normală la planul α, deci şi la planul π. Prin urmare ecuaţia planului π este $2\left(x - 1\right) - 3\left(y - 1\right) + 1\left(z - 1\right) = 0$, deci

$$\pi: \ 2x - 3y + z = 0.$$

3. **Ecuaţia generală a planului.** *Ecuaţia*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ *se numeşte* ***ecuaţia generală a planului***; *coeficienţii* A, B, C *reprezintă tocmai coordonatele unei normale la acest plan.*

Exemplul 9.1.2. Să determinăm $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât punctele $M_1(\alpha, 0, 3)$, $M_2(1, 3, -1)$, $M_3(0, 3, \alpha)$, $M_4(1, 1, 1)$ să fie coplanare. Pentru aceasta considerăm planul $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ care conţine cele patru puncte. Atunci sistemul

$$\begin{cases} \alpha A + 3C + D = 0 \\ A + 3B - C + D = 0 \\ 3B + \alpha C + D = 0 \\ A + B + C + D = 0 \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil nedeterminat (deoarece $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$). Impunând tipul de compatibilitate rezultă imediat că $\alpha = 0$. Remarcăm şi faptul că ecuaţia planului celor patru puncte este $x + y + z - 3 = 0$.

4. **Plane de coordonate.** *Planele*

   $xOy:\ z = 0$ (care are normala $\overline{k}$ şi trece prin origine),

   $yOz:\ x = 0$ şi

   $zOx:\ y = 0$

   se numesc ***plane de coordonate***.

5. **Ecuaţia planului prin tăieturi**. *Ecuaţia planului care taie axele* Ox, Oy, Oz *în punctele* $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, *respectiv în* $(0, 0, c)$, *cu* $abc \neq 0$ *este*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

6. **Ecuaţia planului care trece prin punctele necoliniare** $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1, 3}$ *este:*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

7. **Planul determinat de un punct şi două direcţii.** *Planul ce trece prin punctul* $M_0(a, b, c)$ *şi este paralel cu vectorii nenuli şi necoliniari* $l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ *şi* $l'\overline{i} + m'\overline{j} + n'\overline{k}$ *are ecuaţia*

$$\begin{vmatrix} x - a & y - b & z - c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

8. **Unghiul diedru** *dintre planele* $\pi: \ Ax+By+Cz+D=0$ *şi* $\pi': \ A'x+B'y+C'z+D'=0$ *are măsura unghiului dintre normalele lor i.e.*

$$\arccos \frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

9. **Distanţa de la punctul** $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ **la planul** $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ este, prin definiţie *minimul distanţelor de la punctul* M_0 *la punctul arbitrar* $M\in\pi$ şi se poate calcula prin formula

$$d\,(M_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Distanţa dintre planele π **şi** α este, prin definitie, minimul distanţelor dintre punctele arbitrare $M\in\pi$ şi $P\in\alpha$.

Exemplul 9.1.3. Fie planele $\alpha: 2x-3y+z-5=0$ şi $\pi: 3x-y-z+2=0$ şi punctul $M_0\,(1,0,0)$.

1. Să se determine punctul M aflat la intersecţia dintre planele xOy, α şi π.

2. Să se determine distanţa $d\,(M_0,\pi)$ de la M_0 la π.

3. Să se determine măsura unghiului diedru dintre cele două plane.

4. Să se determine planul β care este perpendicular pe planele date şi trece prin M_0.

5. Să se determine distanţa dintre planele date.

Soluţie. 1. Să determinăm coordonatele x,y,z ale lui M. Cum $M\in xOy\cap\pi\cap\alpha$ rezultă că (x,y,z) verifică sistemul

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad\quad z \quad =0 \\ 3x-\ \ y-z+2=0 \\ 2x-3y+z-5=0 \end{array}\right. .$$

Obţinem $M\left(-\dfrac{11}{7}\,,\ -\dfrac{19}{7}\,,\ 0\right)$.

2. Avem $d\,(M_0,\pi)=\dfrac{|3+2|}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{11}}$.

3. Normala la planul π este $\overline{N_\pi}=3\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$, iar $\overline{N_\alpha}=2\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$ este normală la planul α. Prin urmare măsura unghiului diedru este

$$\arccos\frac{6+3-1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}}=\arccos 4\sqrt{\frac{2}{77}}.$$

4. O normală la planul β este

$$\overline{N_\beta} := \overline{N_\alpha} \times \overline{N_\pi} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 4\overline{i} + 5\overline{j} + 7\overline{k}.$$

Prin urmare ecuaţia planului căutat este $4(x-1) + 5y + 7z = 0$, deci

$$\beta : 4x + 5y + 7z - 4 = 0.$$

5. Deoarece planele date nu sunt paralele rezultă că distanţa dintre ele este nulă.

Exemplul 9.1.4. Să determinăm distanţa dintre planele $\alpha : x + y + z = 1$ şi $\beta : 2x + 2y + 2z = 1$.

Deoarece o normală la cele două plane este $\overline{N} = \overline{i} + \overline{j} + \overline{k}$ şi $\alpha \neq \beta$ rezultă că planele sunt paralele. Să luăm un punct din planul α. Atunci distanţa dintre cele două plane este chiar distanţa dintre punctul ales şi planul β. Prin urmare luând $P(1,0,0) \in \alpha$ obţinem

$$d(\alpha, \beta) = d(P, \beta) = \frac{|2-1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

9.2. Dreapta în $\mathbb{E}^3$

1. **Dreapta** d **ce trece prin punctul** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **şi are direcţia** $\overline{d} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k} \neq \overline{0}$ *este locul geometric al punctelor* $M(x,y,z)$ *pentru care vectorul* $\overline{M_0M}$ *este coliniar cu vectorul* $\overline{d}$*, adică*

$$d = \left\{ M \mid \overline{M_0M} = t\overline{d},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vom spune că $\overline{d} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ *este* ***vector director*** *pentru dreapta* d; *coeficienţii* l, m, n *se numesc* ***parametri directori*** *ai dreaptei* d; prin abuz de limbaj spunem uneori că l, m, n *sunt parametrii directori ai dreptei* d. Deoarece $\overline{M_0M} = (x - x_0)\overline{i} + (y - y_0)\overline{j} + (z - z_0)\overline{k} = t\overline{d}$ dacă şi numai dacă

$$x - x_0 = lt,\ y - y_0 = mt,\ z - z_0 = nt,$$

de aici obţinem imediat **ecuaţiile parametrice ale dreptei** d **care trece prin punctul** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **şi are direcţia** $\overline{d} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$:

$$d : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 9.2.1. Fie dreapta

$$d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Să determinăm dreapta d' paralelă cu d care trece prin origine.

Deoarece $d \parallel d'$ rezultă că un vector director pentru cele două drepte este $\overline{d} = \overline{i} + 2\overline{j} - 3\overline{k}$. Cum $O(0,0,0) \in d'$ rezultă că ecuaţiile parametrice ale dreptei d' sunt

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. **Ecuaţiile carteziene ale dreptei** d care trece punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi are direcţia $\overline{d} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$ sunt

$$d : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

3. **Dreapta care trece prin punctele** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $(M_0 \neq M_1)$ are ecuaţia

$$d : \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

4. **Ecuaţia generală a unei drepte determinată de două plane** (neparalele) *este*

$$d : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

unde $A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k} \neq t\left(A'\overline{i} + B'\overline{j} + C'\overline{k}\right)$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$.

Exemplul 9.2.2. Axa Oz este intersecţia planelor yOz (de ecuaţie $x = 0$) şi zOx (de ecuaţie $y = 0$). Prin urmare **ecuaţiile axelor de coordonate** sunt

$$Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \qquad Ox : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \qquad Oy : \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Exemplul 9.2.3. Să determinăm un plan π care trece prin origine şi este perpendicular pe dreapta

$$d : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 3. \end{cases}.$$

Deoarece $d \perp \pi$, un vector director al dreptei d este normală la planul π. Pe de altă parte planul de ecuaţie $x - y + 2z = 0$ admite normala $\overline{d}_1 = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, planul de ecuaţie $2x + y - z = 3$ admite normala $\overline{d}_2 = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$, iar $\overline{d} = \overline{d}_1 \times \overline{d}_2 = -\overline{i} + 5\overline{j} + 3\overline{k} \perp \pi$. Prin urmare ecuaţia planului π este $-x + 5y + 3z = 0$.

5. **Ecuaţia fascicolului de plane care trec prin dreapta**

$$d : \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{cases}$$

este

$$\pi_{\alpha,\beta} : \alpha\left(Ax + By + Cz + D\right) + \beta\left(A'x + B'y + C'z + D'\right) = 0,$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

6. **Perpendiculara comună a două drepte.** Fie dreptele necoplanare d_1 şi d_2 care trec prin $M_1(x_1, y_1, z_1)$, respectiv prin $M_2(x_2, y_2, z_2)$ de vectori directori $\overline{d_1} = l_1\overline{i}+m_1\overline{j}+n_1\overline{k}$, respectiv $\overline{d_2} = l_2\overline{i}+m_2\overline{j}+n_2\overline{k}$ şi produsul vectorial $\overline{d_1}\times\overline{d_2} = l\overline{i}+m\overline{j} + n\overline{k}$. *Ecuaţiile **dreptei perpendiculare** pe* dreptele d_1 şi d_2 sunt:
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

7. **Distanţa dintre dreptele** d_1 şi d_2 este, prin definiţie, minimul distanţelor dintre punctele arbitrare $P_1 \in d_1$ şi $P_2 \in d_2$ şi se poate calcula cu ajutorul formulei
$$d\left(d_1, d_2\right) = \frac{\left|\left(\overline{M_1M_2}, \overline{d_1}, \overline{d_2}\right)\right|}{\left\|\overline{d_1}\times\overline{d_2}\right\|},$$
unde $M_1, M_2, \overline{d_1}, \overline{d_2}$ au semnificaţiile de la punctul **6**.

Exemplul 9.2.4. Fie dreapta $d : \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ şi planul $\pi : -x+y-z = 3$. Să se arate că dreapta dată este paralelă cu planul π, apoi să se determine cea mai apropiată dreaptă d' din planul π care este paralelă cu dreapta d.

Rezolvare. Deoarece dreapta d este inclusă în planul $\alpha : x - y + z = 1$ şi α este paralel cu π rezultă că $d \parallel \pi$. Dreapta d' este chiar proiecţia dreptei d pe planul π. O metodă de determinare a acestei proiecţii este următoarea: din fascicolul de plane care trec prin d alegem planul perpendicular pe planul π; intersecţia acestuia cu π este dreapta căutată. Fie deci
$$a\left(x+y+z-3\right) + b\left(x-y+z-1\right) = 0$$
fascicolul de plane ce trec prin d. Normala $(a+b)\,\overline{i}+(a-b)\,\overline{j}+(a+b)\,\overline{k}$ a unui plan din fascicol trebuie să fie ortogonală pe normala $\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$ a planului π, deci $(a+b)-(a-b)+(a+b) = 0$, ori $a = -3b$. În consecinţă dreapta căutată este
$$d' : \begin{cases} -x+\ \ y-z=3 \\ \ \ x+2y+z=4 \end{cases}.$$
Verificaţi corectitudinea rezultatului rezolvând problema prin altă metodă.

8. **Volumul tetraedrului** $M_1M_2M_3M_4$ este modulul numărului
$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

unde $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{1,4}$ sunt vârfurile acestuia.

Exemplul 9.2.5. Să determinăm distanţa $d(P, Oz)$, unde P este punctul de coordonate $(1, 2, 3)$. Deoarece $d(P, Oz) = d(P, P')$, unde P' este proiecţia punctului P pe axa Oz, o metodă de determinare a distanţei căutate este următoarea:

- scriem ecuaţia planului π perpendicular pe Oz care trece prin P: cum $\overline{k}$ este normală la acest plan obţinem imediat că

$$\pi : z - 3 = 0;$$

- deoarece proiecţia $P' \in \pi \cap Oz$ obţinem $P'(0, 0, 3)$;
- distanţa căutată este $d(P, Oz) = d(P, P') = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}$.

Verificaţi rezultatul rezolvând problema prin altă metodă (de exemplu folosind proiecţia punctului P în planul xOy).

Exemplul 9.2.6. Să determinăm ecuaţia planului π care trece prin punctul $P(1, 2, 3)$ şi prin dreapta

$$d : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}.$$

Din fascicolul de plane care trec prin dreapta dată îl vom alege pe acela care conţine punctul P. Fascicolul căutat este

$$\pi_{\alpha,\beta} : \alpha(x - y) + \beta(x + z - 1) = 0.$$

Cum $P(1, 2, 3) \in \pi_{\alpha,\beta}$ avem $-\alpha + 3\beta = 0$. Planul care trece prin P şi d are, aşadar, ecuaţia $3(x - y) + (x + z - 1) = 0$, ori

$$\pi : 4x - 3y + z = 1.$$

B. PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $\alpha : x + 2y - z + 1 = 0$. Să se verifice dacă $A \in \alpha$, unde $A(-1, 2, 2)$ şi în caz contrar să se scrie ecuaţia unui plan $\alpha' \parallel \alpha$ cu $A \in \alpha'$
Rezolvare.
Verificăm dacă coordonatele lui A satisfac ecuaţia planului. Avem $x_A + 2y_A - z_A + 1 = 2 \neq 0$, deci $A \notin \alpha$.
Pentru că $\alpha' \parallel \alpha$, putem alege pentru α' acelaşi vector normal ca cel al planului α, adică $\overline{N}_\alpha = (1, 2, -1)$. Deci α' este planului determinat de punctul A şi vectorul normal $\overline{N}_\alpha$, astfel
$$\alpha' : 1(x + 1) + 2(y - 2) - 1(z - 2) = 0$$
sau echivalent, $\alpha' : x + 2y - z - 1 = 0$.

2. Să se verifice dacă planul $\alpha_1 : -2x - 4y + 2z + 3 = 0$ este paralel cu planul α din problema precedentă.
Rezolvare.
$\alpha \parallel \alpha_1$ dacă şi numai dacă $\overline{N}_\alpha$ şi $\overline{N}_{\alpha_1}$ sunt vectori coliniari, adică $\overline{N}_\alpha = \lambda \overline{N}_{\alpha_1}$ ceea ce e echivalent cu faptul că cei doi vectori au coordonate proporţionale. Verificăm acest lucru: $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{-4}{2} = \dfrac{2}{-1}$ e adevărat, deci $\alpha \parallel \alpha_1$.

3. Să se verifice dacă $\alpha_1 \perp \alpha_2$, unde
$$\alpha_1 : x + y + z - 1 = 0; \quad \alpha_2 : 2x - 4y + 2z - 2 = 0.$$
Rezolvare.
Cele două plane au normalele $\overline{N}_{\alpha_1} = (1, 1, 1)$ şi $\overline{N}_{\alpha_2} = (2, -4, 2)$. Calculăm produsul scalar $\overline{N}_{\alpha_1} \cdot \overline{N}_{\alpha_2} = 2 - 4 + 2 = 0$ şi vedem că normalele sunt vectori ortogonali, deci planele sunt perpendiculare.

4. Să se scrie ecuaţia planului (ABC) cu $A(1, 2, -1)$, $B(1, 2, 3)$ şi $C(2, 1, 1)$.
Rezolvare.
Planul (ABC) este determinat de punctul A şi vectorii directori
$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (1 - 1,\ 2 - 2,\ 3 + 1) = (0, 0, 4)$$
şi
$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (1, -1, 2)$$
Atunci
$$(ABC) : \begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$
adică $(ABC) :\ x + y - 3 = 0$.

5. Fie $d: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+3}{0}$, $A(1,2,-1)$ şi planul $\alpha:\ 2x+y-z+1=0$. Să se scrie ecuaţiile unei drepte $d_1 \parallel d$ cu $A \in d_1$ precum şi ale unei drepte d_2 cu $d_2 \perp \alpha$, $A \in d_2$.
Rezolvare.
$d_1 \parallel d$, deci putem alege ca vector director al dreptei d_1 acelaşi vector director ca cel al dreptei d, adică $\overline{v} = (1,1,0)$. Astfel d_1 e dreapta determinată de punctul A şi vectorul director $\overline{v}$, deci

$$d_1: \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{0}.$$

Avem $d_2 \perp \alpha$ deci putem alege ca vector director al dreptei d_2, vectorul $\overline{N}_\alpha = (2,1,-1)$ normal la planul α. Astfel d_2 e dreapta determinată de punctul A şi vectorul director $\overline{N}_\alpha$, deci

$$d_2: \ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

6. Fie $A(1,2,3)$ şi $B(-1,1,2)$. Să se scrie ecuaţiile dreptei AB.
Rezolvare.
AB este dreapta determinată de punctul A şi de vectorul director $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (-2,-1,-1)$. Deci

$$AB: \ \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}.$$

7. Să se scrie ecuaţia unui plan α, cu $\alpha \parallel d_1$, $\alpha \parallel d_2$ şi $A \in \alpha$, unde $A(1,2,3)$

$$d_1: \ \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}, \quad d_2: \ \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+1}{-1}$$

Rezolvare.
$\alpha \parallel d_1$ deci $\overline{N}_\alpha$ va fi un vector ortogonal pe vectorul director $\overline{u} = (2,1,3)$ al dreptei d_1. Analog $\alpha \parallel d_2$ deci $\overline{N}_\alpha$ va fi un vector ortogonal pe vectorul director $\overline{v} = (1,-2,-1)$ al dreptei d_2. Aşadar $\overline{N}_\alpha$ este un vector simultan ortogonal pe $\overline{u}$ şi pe $\overline{v}$. Putem alege

$$\overline{N}_\alpha = \overline{u} \times \overline{v} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5\overline{i} + 5\overline{j} - 5\overline{k}$$

Astfel, α este planul determinat de punctul A şi de vectorul normal $\overline{N}_\alpha = (5,5,-5)$. Deci

$$\alpha: 5(x-1) + 5(y-2) - 5(z-3) = 0$$

sau $\alpha: x+y-z=0$. Alternativ, se putea scrie ecuaţia planului α ca fiind determinat de punctul A şi vectorii directori $\overline{u}$ şi $\overline{v}$.

8. Fie $\alpha_1 : x + y - 2z - 1 = 0$, $\alpha_2 : 2x + y + z - 2 = 0$ şi $A(1, 2, -1)$. Să se scrie ecuaţiile unei drepte d, cu $A \in d$, $d \parallel \alpha_1$, $d \parallel \alpha_2$.
Rezolvare.
METODA I:
Fie $\overline{u}$ vectorul director al dreptei d. Pentru că $d \parallel \alpha_1$ avem că $\overline{u} \cdot \overline{N}_{\alpha_1}$ şi pentru că $d \parallel \alpha_2$ avem că $\overline{u} \cdot \overline{N}_{\alpha_2}$, deci $\overline{u}$ este un vector simultan ortogonal pe $\overline{N}_{\alpha_1}$ şi pe $\overline{N}_{\alpha_2}$. Putem alege

$$\overline{u} = \overline{N}_{\alpha_1} \times \overline{N}_{\alpha_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\overline{i} - 5\overline{j} - \overline{k}.$$

Astfel, d e dreapta determinată de punctul A şi de vectorul director $\overline{u} = (3, -5, -1)$ şi în final găsim

$$d : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{-1}.$$

METODA II:
Fie d' dreapta de intersecţie a celor două plane, $d' = \alpha_1 \cap \alpha_2$, deci

$$d' : \begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Rangul sistemului e 2 şi notăm $z = t$, necunoscută secundară. Sistemul devine

$$\begin{cases} x + y = 1 + 2t \\ 2x + y = 2 - t \end{cases}$$

de unde $x = 1 - 3t$ şi $y = 5t$. Am găsit astfel că ecuaţiile parametrice ale dreptei d' sunt

$$d' : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = \quad\ \ 5t \\ z = \quad\quad t \end{cases}$$

şi d' are direcţia dată de vectorul $\overline{u} = (-3, 5, 1)$. Dar $d \parallel \alpha_1$, $d \parallel \alpha_2$, deci $d \parallel d'$ şi putem alege pentru d acelaşi vector director u. Astfel

$$d : \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+1}{1}$$

9. Să se determine proiecţia dreptei AB pe planul $\alpha :\ 2x + y - z + 1 = 0$, unde $A(1, 2, 3)$ şi $B(2, 1, -1)$.
Rezolvare.
O dreaptă e determinată de două puncte. În particular, proiecţia dreptei AB pe planul α va fi determinată de proiecţiile A', B' ale punctelor A şi respectiv B pe planul α.

Proiecţia A' a lui A pe α este punctul de intersecţie dintre α şi dreapta d_1 ce conţine punctul A şi $d_1 \perp \alpha$. Dreapta va avea direcţia dată de $\overline{N}_\alpha = (2, 1, -1)$ şi va avea ecuaţiile parametrice:

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Punctul A' este obţinut pentru acel t pentru care x, y, z din ecuaţiile dreptei satisfac ecuaţia planului, adică pentru $2(1+2t)+(2+t)-(3-t)+1 = 0$, mai precis pentru $t = -1/3$. Înlocuind în ecuaţiile dreptei d_1, găsim $A'(1/3,\ 5/3,\ 10/3)$.

Analog, construim o dreaptă d_2 cu $B \in d_2$ şi $d_2 \perp \alpha$. Astfel, $\{B'\} = d_2 \cap \alpha$. Repetând raţionamentul de mai sus, găsim

$$d_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

şi vom avea că punctul B' e obţinut pentru $t = -7/6$, deci $B'(-1/3,\ -1/6,\ 1/6)$.

Dreapta $A'B'$ e determinată de punctul A' şi de vectorul director $\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = (-2/3,\ -11/6,\ -19/6)$, deci

$$A'B' : \frac{x - 1/3}{-2/3} = \frac{y - 5/3}{-11/6} = \frac{z - 10/3}{-19/6}\,.$$

10. Să se determine simetricul punctului A faţă de planul α, unde A şi α sunt cele din problema precedentă.
Rezolvare.
Dacă notăm cu A'' simetricul lui A în raport cu planul α, avem că proiecţia A' a lui A pe planul α este mijlocul segmentului $[AA'']$, deci $A' = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A''$, adică
$$x_{A'} = \frac{x_A + x_{A''}}{2} \Rightarrow x_{A''} = 2x_{A'} - x_A = 2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$
apoi
$$y_{A'} = \frac{y_A + y_{A''}}{2} \Rightarrow y_{A''} = 2y_{A'} - y_A = 2 \cdot \frac{5}{3} - 2 = \frac{4}{3}$$
şi
$$z_{A'} = \frac{z_A + z_{A''}}{2} \Rightarrow z_{A''} = 2z_{A'} - z_A = 2 \cdot \frac{10}{3} - 3 = \frac{11}{3}\,.$$

11. Să se determine proiecţia punctului $A(1, 2, 3)$ pe dreapta
$$d : \ \frac{x + 1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z + 2}{-1}\,,$$

apoi să se calculeze distanţa de la punct la dreaptă.
Rezolvare.
Fie α planul $\alpha \perp d$, $A \in \alpha$. Atunci, punctul $A' = \alpha \cap d$ va fi proiecţia lui A pe d. Planul α este determinat de punctul A şi de vectorul normal $\overline{N}_\alpha = (2, 1, -1)$ care e vectorul director al dreptei d. Găsim $\alpha : 2x + y - z - 1 = 0$. Scriem ecuaţiile dreptei d în formă parametrică:

$$d : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

şi punctul A' se obţine pentru acel t ce satisface $2(-1+2t)+t-(-2-t)-1 = 0$, deci pentru $t = 1/6$. Astfel $A'(-2/3,\ 1/6,\ -13/6)$.

Distanţa $d(A, d) = ||\overline{AA'}|| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 2\right)^2 + \left(-\frac{13}{6} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{591}{18}}$.

12. Fie $d_1 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{1}$, $d_2 : \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ şi $A(1, 2, 3)$. Să se scrie ecuaţia unei drepte d astfel încât $A \in d$ şi d intersectează dreptele d_1 şi d_2.
Rezolvare.
Fie α_1 planul ce conţine dreapta d_1 şi punctul A. Avem că $A_1(-1, 0, 0)$ e un punct de pe dreapta d_1, care are direcţia dată de $u_1 = (1, -2, 1)$. Atunci α_1 e determinat de punctul A_1 şi de vectorii directori liniar independenţi u_1 şi $\overline{A_1A} = \overline{OA} - \overline{OA_1} = (2, 2, 3)$. Deci

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_1 :\ -8x - y + 6z - 8 = 0.$$

Analog, fie α_2 planul ce conţine dreapta d_2 şi punctul A. Avem că $A_1(-2, 0, 0)$ este un punct de pe dreapta d_2, care are direcţia dată de $u_2 = (-1, 2, 3)$. Atunci α_2 e determinat de punctul A_2 şi de vectorii directori liniar independenţi u_2 şi $\overline{A_2A} = \overline{OA} - \overline{OA_2} = (3, 2, 3)$. Deci

$$\alpha_2 : \begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_2 :\ 3y - 2z = 0.$$

Dar pentru că $d_1 \subset \alpha_1$ şi $A \in \alpha_1$, vom avea că $d \subset \alpha_1$, iar cum $d_2 \subset \alpha_2$ şi $A \in \alpha_2$, rezultă că $d \subset \alpha_2$. Deci $d \subset \alpha_1 \cap \alpha_2$, dar cum intersecţia a două plane distincte nu poate fi mai mult decât o dreaptă, rezultă că:

$$d : \begin{cases} -8x - y + 6z - 8 = 0 \\ \phantom{-8x - {}} 3y - 2z \phantom{{}-8} = 0. \end{cases}$$

13. Să se scrie ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor d_1 şi d_2 de la problema precedentă.
Rezolvare.
Dacă d_1 conţine punctul $A_1(-1, 0, 0)$ şi are direcţia dată de $u_1 = (1, -2, 1)$ iar d_2 conţine punctul $A_2(-2, 0, 0)$ şi are direcţia dată de $u_2 = (-1, 2, 3)$, atunci perpendiculara comună d va avea direcţia dată de vectorul

$$w = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -8\bar{i} - 4\bar{j}$$

şi intersectează cele două drepte date.

În particular, d e conţinută în planul α_1 determinat de punctul A_1 şi de vectorii directori u_1 şi w. Avem

$$\alpha_1 : \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & -2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_1 : \; x - 2y - 5z + 1 = 0.$$

Analog, d e conţinută în planul α_2 determinat de punctul A_2 şi de vectorii directori u_2 şi w şi avem

$$\alpha_2 : \begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ -1 & 2 & 3 \\ -8 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \alpha_2 : \; 3x - 6y + 5z + 6 = 0.$$

Deci $d = \alpha_1 \cap \alpha_2$, adică

$$d : \begin{cases} x - 2y - 5z + 1 = 0 \\ 3x - 6y + 5z + 6 = 0. \end{cases}$$

Alternativ, se puteau folosi direct formulele corespunzătoare.

14. Să se scrie ecuaţiile unei drepte d cu $A(1, 2, 3) \in d$ şi d taie dreptele d_1, d_2, unde $d_1 : \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ şi $d_2 : \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ x + y + 3z - 1 = 0. \end{cases}$
Rezolvare.
Evident, se poate rezolva ca şi problema 12. Dar cum ecuaţiile dreptelor d_1, d_2 sunt scrise ca intersecţie de plane, ne e mai uşor să folosim fascicole.

Fie

$$\pi_{a,b} : a(x + 2y + z - 1) + b(2x + y + 2z - 4) = 0 \tag{1}$$

fascicolul de plane ce conţin dreapta d_1. Vrem să determinăm acel plan din fascicol care conţine punctul A. Observăm că pentru $b = 0$, planul $\pi_{a,0}$: $x + 2y + z - 1 = 0$ nu conţine punctul A, deci planul pe care îl căutăm are $b \neq 0$. Împărţind ecuaţia (1) cu b şi notând $c = b/a$, ecuaţia fascicolului devine $c(x + 2y + z - 1) + (2x + y + 2z - 4) = 0$, adică $(c+2)x + (2c+1)y + (c+2)z -$

$(c+4) = 0$. α_1, planul din fascicol care conţine punctul A este cel pentru care $(c+2) + 2(2c+1) + 3(c+2) - (c+4) = 0$, adică cel cu $c = -6/7$. Rezultă că

$$\alpha_1 : 8x - 5y + 8z - 22 = 0.$$

Repetăm raţionamentul pentru fascicolul de plane ce conţine dreapta d_2 şi găsim că planul ce conţine dreapta d_2 şi punctul A este $\alpha_2 :\ 3x + 3y - 13z + 30 = 0$. Dar $d = d_1 \cap d_2$, deci

$$\begin{cases} 8x - 5y + \ \ 8z - 22 = 0 \\ 3x + 3y - 13z + 30 = 0. \end{cases}$$

C. PROBLEME PROPUSE

1. Găsiţi planul care trece prin $P(-3,0,7)$ şi este perpendicular pe $\overline{N} = 5\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$.

   Răspuns. $5x + 2y - z + 22 = 0$.

2. Determinaţi un set de ecuaţii parametrice ale dreptei ce trece prin punctul $P(-2,0,4)$ şi este paralelă cu $\overline{a} = 2\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$.

   Răspuns. E.g. $x = -2 + t,\ y = 2t,\ z = 4 - t$.

3. Arătaţi că $x = -3 + 4t,\ y = 2 - 3t,\ z = -3 + 7t$ sunt ecuaţii parametrice ale dreptei care trece prin $P(-7,5,-10)$ şi $Q(1,-1,4)$.

4. Determinaţi punctul în care dreapta $x = \dfrac{8}{3}+2t$, $y = -2t$, $z = 1+t$ intersectează planul $3x + 2y + 6z = 6$.

   Răspuns. $\left(\dfrac{2}{3},\ 2,\ 0\right)$.

5. Se dau planele de ecuaţii: $3x - 2y + z = 0$ şi $Ax + By + Cz + D = 0$. Să se determine constantele $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ astfel încât planele date să fie paralele, iar punctul $M(1,1,1)$ să se găsească într-unul dintre ele.

   Răspuns. $A = 3,\ B = D = -2,\ C = 1$.

6. Calculaţi distanţa de la punctul $P(1,1,3)$ la planul $3x + 2y + 6z = 6$.

   Răspuns. $\dfrac{17}{7}$.

7. Arataţi că măsura unghiului dintre planele de ecuaţii $3x - 6y - 2z = 15$ şi $2x + y - 2z = 5$ este $\arccos\left(\dfrac{4}{21}\right)$.

8. Fie punctul $P(1,-2,2)$ şi planul $\pi :\ x + 2y + 2z + 5 = 0$.

   (a) Să se determine ecuaţia planului ce trece prin P şi este paralel cu π.

   (b) Să se calculeze distanţa dintre cele două plane.

   Răspuns. (a) $\alpha :\ x + 2y + 2z = 1$; (b) $d(\pi, \alpha) = 2$.

9. Fie planele $\alpha :\ x - y = 5$ şi $\beta :\ 2x - y + 2z = 0$.

   (a) Să se determine ecuaţia planului ce trece prin $P(3,4,-2)$ şi este perpendicular pe cele două plane.

   (b) Să se calculeze măsura unghiului diedru dintre planele α şi β.

   Răspuns. (a) $2x + 2y - z = 16$; (b) $\dfrac{\pi}{4}$.

10. Care este ecuaţia planului care trece prin mijlocul segmentului de capete $P\,(2,1,-3)$ şi $Q\,(0,-3,3)$, este paralel cu dreapta $d: \dfrac{x-1}{2} = y-4 = \dfrac{z-1}{-3}$ şi este perpendicular pe planul $\pi: \; z=5$?

    Răspuns. $x-2y=3$.

11. Care este ecuaţia planului ce trece prin $P\,(2,1,-3)$ şi este perpendicular pe vectorul $\overline{OP}$?

    Răspuns. $2x+y-3z=14$.

12. Determinaţi ecuaţii parametrice ale dreptei de intersecţie a planelor $3x-6y-2z=15$ şi $2x+y-2z=5$.

13. Calculaţi distanţa de la punctul P la dreapta d, unde:

    (a) $P\,(0,0,0)$, $d: \; x=t, \; y=2t, \; z=3t$;
    (b) $P\,(1,2,3)$, $d: \; x=t, \; y=2t, \; z=3t$;
    (c) $P\,(0,0,0)$, $d: \; x=y=z-3$;
    (d) $P\,(1,2,3)$, $d: \; x+y-z-3=0, \; x+2y-z=0$.

    Răspunsuri. (a) 0; (b) 0; (c) $\sqrt{6}$; (d) $\sqrt{57}$.

14. Determinaţi distanţa de la planul de ecuaţie $x+2y+3z=4$ la planul de ecuaţie $2x+4y+6z=13$.

15. Determinaţi distanţa de la planul de ecuaţie $x+2y+6z=10$ la dreapta de ecuaţii $x=2+t, \; y=1+t, \; z=-\dfrac{1+t}{2}$.

16. Să se determine care dintre cele trei drepte luate câte două sunt paralele, sunt concurente, sau oblice (i.e. nici concurente, nici paralele).

    (a) $d_1: \; x=3+2t, \; y=-1+4t, \; z=2-t$; $d_2: \; x=1+4s, \; y=1+2s, \; z=-3+4s$; $d_3: \; x=3+2r, \; y=2+r, \; z=-2+2r$.
    (b) $d_1: \; x=1+2t, \; y=-1-t, \; z=3t$; $d_2: \; x=2-s, \; y=3s, \; z=1+s$; $d_3: \; x=5+2r, \; y=1-r, \; z=8+3r$.

17. Determinaţi punctele de intersecţie ale dreptei $d: \; x=1+2t, \; y=-1-t, \; z=3t$ cu planele de coordonate.

18. Care sunt ecuaţiile dreptei din planul $z=3$ care face un unghi de $\dfrac{\pi}{6}$ radiani cu vectorul $\overline{i}$ şi un unghi de $\dfrac{\pi}{3}$ radiani cu vectorul $\overline{j}$?

19. Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta $d: \dfrac{x-2}{2} = y+1 = \dfrac{z}{3}$ şi e paralel cu dreapta determinată de punctele $P\,(0,1,1)$ şi $Q\,(-1,-2,-3)$.

    Răspuns. $x+y-z=1$.

20. Să se scrie ecuaţia planului care conţine dreapta $d:\ 2x = y + z,\ y - z + 2 = 0$ şi este perpendicular pe planul care trece prin punctele $P(2,0,0)$, $Q(0,-1,0)$ şi $R(0,0,-1)$.

    Răspuns. $y - z + 2 = 0$.

21. Să se demonstreze că dreapta care trece prin simetricul punctului $P(1,1,1)$ faţă de dreapta $d:\ x - 2z + 4 = 0,\ y = z$ şi este perpendiculară pe planul $\pi:\ 2x + y + z = 4$ are ecuaţiile $y = z,\ 2x - y - z + 8 = 0$.

22. Dreapta care trece prin proiecţia punctului $P(1,-1,2)$ pe planul $\pi: x+y+z = 5$ şi este paralelă cu dreapta $d:\ z = -3,\ x-y = 3$ are ecuaţiile $z = 3$ şi $x-y = 2$?

23. Dacă dreapta care se sprijină pe dreptele $d_1:\ x+y-z+3 = 0,\ y+z = 5x+9$, $d_2:\ y = 2x+3,\ z = 3x+5$ şi este paralelă cu dreapta $d:\ 2x - y + 2 = 0,\ 2x - z + 2 = 0$ are ecuaţiile $D:\ 2x - y + 3 = 0,\ y - z + 1 = 0$ să se afle distanţa dintre punctele de intersecţie dintre D şi d_1, respectiv d_2.

    Răspuns. 3.

24. * Justificaţi existenţa perpendicularei comune a două drepte disjuncte şi neparalele.

25. * Determinaţi perpendiculara comună a dreptelor $d_1:\ y - z = 7x - 7,\ y + z = x + 3$ şi $d_2:\ y = -4x + 3,\ z = 3x - 5$ şi distanţa dintre ele.

    Răspuns. $x = 1,\ 4y - 3z = 2;\ 5$.

26. * În *computer graphics* este nevoie să reprezentăm în plan obiectele din spaţiu. Să presupunem că ochiul privitorului este în punctul $Q(x_0,0,0)$ şi vrem să reprezentăm punctul $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ca un punct $P(0,y,z)$ din planul yOz; realizăm acest lucru proiectând P_1 pe plan de-a lungul dreptei QP_1.

    (a) Determinaţi coodonatele punctului P în funcţie de $x_0,\ x_1,\ y_1,\ z_1$.

    (b) Examinaţi comportarea coordonatelor găsite când $x_1 = 0$, când $x_1 = x_0$ şi când $x_0 \to \infty$.

27. * O problemă în *computer graphics* este depistarea *liniilor ascunse*. Să presupunem că ochiul tău este în $Q(4,0,0)$ şi priveşti o placă triunghiulară de vârfuri $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ şi $(-2,2,2)$. Segmentul care uneşte $(1,0,0)$ cu $(0,2,2)$ trece prin placă. Ce porţiune din segment este ascunsă vederii tale de placă?

28. Să se determine proiecţia punctului $M(1,2,3)$ pe dreapta de ecuaţii $x = y = z$.

    (examen, Informatică, 2014)

29. Să se determine dreapta care trece prin simetricul punctului $P(1,1,-1)$ faţă de dreapta $d:\ x = y = z$ şi este perpendiculară pe planul $z = 4$.

    (examen, Ingineria sistemelor, 2014)

30. Să se determine ecuaţia planului ce trece prin $P(1, -2, 0)$ şi este paralel cu $\pi: \ x + 2y + 2z + 5 = 0$; să se calculeze distanţa dintre cele două plane.

(examen, Informatică, 2014)

31. Să se determine planul care trece prin punctul $P(1, 1, 1)$ şi prin dreapta $2x + y + z = 4, \ x - y - 4 = 0.$

(examen, Ingineria sistemelor, 2014)

32. Fie $\overline{a} = \overline{i} + \overline{k}$ şi $\overline{b} = \overline{i} - 2\overline{j}$. Determinaţi planul paralel cu $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ ce trece prin $P\,(1, -1, 1)\,.$

(examen, Ingineria sistemelor, 2014)

33. * Se consideră dreapta $d_1 : \ \dfrac{x-a}{1} = \dfrac{y+2}{b} = \dfrac{z-a+b}{3}$ şi planele de ecuaţii $(P_1): \ x - 2y + z - 4 = 0, \ (P_2): \ x + 2y + 2z + 1 = 0, (P_3): \ x + 7y + 7z + m = 0,$ unde $a, b, m \in \mathbb{R}$.

   (a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că dreapta d_1 este inclusă în planul $(P_1)\,.$
   (b) Să se găsească proiecţia punctului $A = (1, -2, 2)$ pe planul $(P_2)\,.$
   (c) Să se discute poziţia relativă a celor trei plane în funcţie de m.

(concursul ,,Traian Lalescu”, profil neelectric, et. finală, Constanţa, 2011)