29.09.2021

Laborator – Recapitulare

Mărimile sunt:

- **SCALARE** – caract. prin modul și unit. de măsură.
- **VECTORIALE** – caract. prin modul, unit. de măsură, punct de aplicare, direcție și sens.

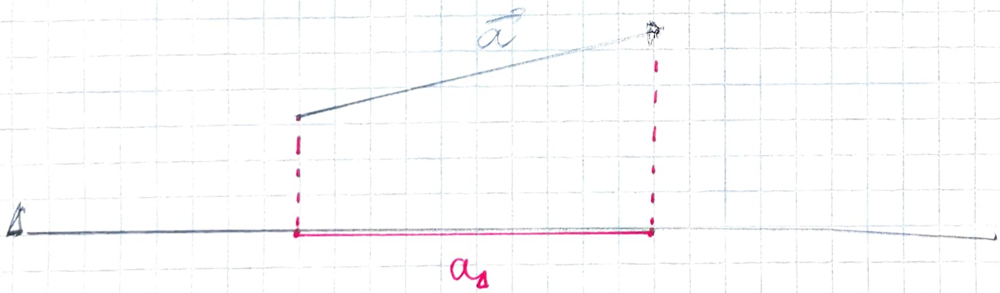
VECTORII

Sunt entități matematice caracterizate de:

- punct de aplicare
- direcție
- sens
- modul

Versorii sunt vectori cu modulul = 1.

Proiecția unui vector pe o dreaptă:



Un vector se poate scrie ca

$\vec{a} = |a| \cdot \vec{u}_{op}$, $\vec{u}_{op}$ – versorul de direcție ; $\vec{u} = \frac{\vec{OP}}{OP}$

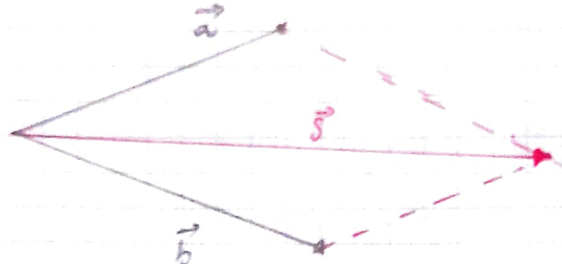
În sistem $Oxyz$:

$$\vec{a} = \underset{(Ox)}{K_1 \cdot \vec{i}} + \underset{(Oy)}{K_2 \cdot \vec{j}} + \underset{(Oz)}{K_3 \cdot \vec{k}}$$

Operații cu vectori

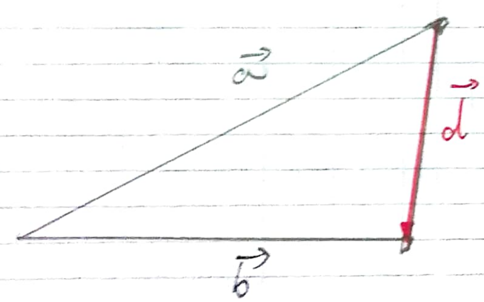
I. Adunarea

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$



- Regula Paralelogramului
- Regula Triunghiului

II. Scăderea



$\cancel{\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}}$ $\quad \vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$

III. Înmulțirea

① Scalară

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

② Vectorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, $\vec{c} \perp P(\vec{a}, \vec{b})$, sensul se afl
cu Regula Burghiului

În cazul în care cunoaștem forma analitică a vectorilor:

① scalar

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

② vectorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Proprietăți:

- Prod scalar a 2 vectori $\perp$ este nul.
- Prod scalar este distributiv față de adunare
  $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- Prod. vectorial ~~nu~~ NU este asociativ / comutativ

Aplicații

Se dau 5 vectori:

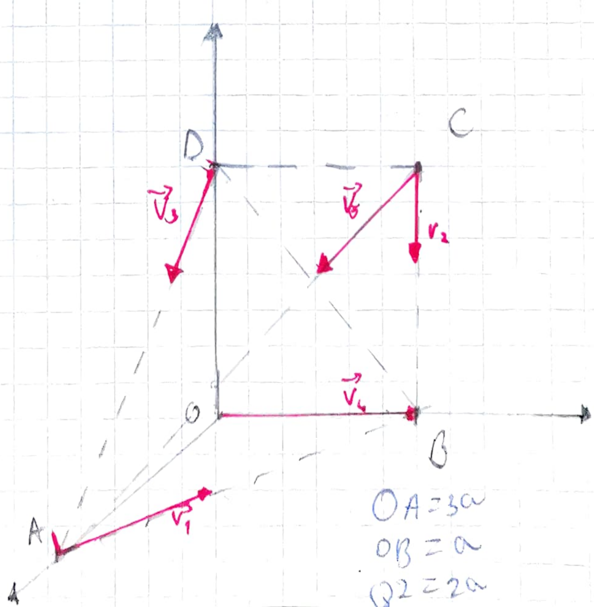
$V_1 = \sqrt{10}\ V$

$V_2 = 3\ V$

$V_3 = 2\sqrt{13}\ V$

$V_4 = 4\sqrt{5}\ V$

$V_5 = 3\sqrt{14}\ V$



Se cer:

1. exprimarea analitică a vectorilor
2. suma $\vec{V_1}+\vec{V_3}+\vec{V_5}$
3. diferența $\vec{V_1}-\vec{V_4}$
4. produsul scalar $\vec{V_1}\cdot\vec{V_4}$
5. produsul vectorial $\vec{V_1}\times\vec{V_4}$

1. $\vec{V_1} = V_1\cdot\vec{u}_{AB}$

$= V_1\cdot\frac{\vec{AB}}{AB}$

$= V_1\cdot\frac{\vec{AO}+\vec{OD}}{AB}$

$= V_1\cdot\frac{\vec{OB}-\vec{OA}}{AB}$

$= V_1\cdot\frac{a\vec{j}-3a\vec{j}}{\sqrt{(3a)^2+a^2}}$

$= V_1\cdot\frac{a\vec{j}-3a\vec{i}}{\sqrt{10}\cdot a}$

$= \sqrt{10}v\cdot\frac{-3\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{10}}$

$\boxed{= -3v\vec{i}+v\vec{j}}$

$\vec{V_2} = V_2\cdot\vec{u}_{CB}$

$= V_2\cdot\frac{-\vec{OD}}{OD}$

$= V_2\cdot\frac{-2a\vec{k}}{2a}$

$= \frac{-6av\vec{k}}{2a}$

$\boxed{= -3v\vec{k}}$

$\vec{V_3} = V_3\cdot\vec{u}_{DA} = V_3\cdot\frac{\vec{DA}}{DA} = V_3\frac{\vec{DO}+\vec{OA}}{DA} = V_3\frac{\vec{OA}-\vec{OD}}{AD} =$

$= V_3\cdot\frac{3a\vec{i}-2a\vec{k}}{\sqrt{9a^2+4a^2}} = V_3\cdot\frac{3\vec{i}-2\vec{k}}{\sqrt{13}} = 6v\vec{i}-4v\vec{k}$

$\vec{V_4} = \cancel{V_4\cdot u_0\cdot V_4\cdot a\vec{j} = 4\sqrt{5}}$ $V_4\cdot\vec{u}_{BD} = V_4\cdot\frac{\vec{BD}}{BD} = V_4\cdot\frac{\vec{BO}+\vec{OD}}{BD} =$

$= V_4\cdot\frac{\vec{OD}-\vec{OB}}{\sqrt{4a^2+a^2}} = V_4\cdot\frac{2a\vec{k}-a\vec{j}}{\sqrt{5}\cdot a} = 4v(2\vec{k}-\vec{j}) = \cancel{8k} -4v\vec{j}+8v\vec{k}$

$\vec{V_5} = V_5\cdot\vec{u}_{CA} = V_5\cdot\frac{\vec{CA}}{CA} = V_5\cdot\frac{\vec{CB}+\vec{BA}}{CA} = V_5\frac{\vec{BO}+\vec{OA}-\vec{OD}}{CA} =$

$= V_5\cdot\frac{\vec{OA}-\vec{OB}-\vec{OD}}{\sqrt{4a^2+10a^2}} = V_5\cdot\frac{3a\vec{i}-a\vec{j}-2a\vec{k}}{\sqrt{14}\,a} =$

$= \cancel{3\sqrt{14}v}\cdot 3v(3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}) = 9v\vec{i}-3v\vec{j}-6v\vec{k}$

② $\vec{V_1} + \vec{V_3} + \vec{V_5} = -3V\vec{i} + V\vec{j} + 6V\vec{i} - 4V\vec{k} + 9V\vec{i} - 3V\vec{j} - 6V\vec{k}$

$= 12V\vec{i} - 6V\vec{j} - 10V\vec{k}$

③ $\vec{V_1} - \vec{V_4} = -3V\vec{i} + V\vec{j} + 4V\vec{j} - 8V\vec{k}$

$= -3V\vec{i} + 5V\vec{j} - 8V\vec{k}$

④ $\vec{V_1} \cdot \vec{V_4} = (-3V\vec{i} + V\vec{j})(-4V\vec{j} + 8V\vec{k}) = -4V^2$

⑤ $\vec{V_1} \times \vec{V_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3V & V & 0 \\ 0 & -4V & 8V \end{vmatrix} = \cancel{8V^2\vec{i}} + 12V^2\vec{k} \quad \vec{i}\begin{vmatrix} V & 0 \\ -4V & 8V \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3V & 0 \\ 0 & 8V \end{vmatrix}$

$+ \vec{k}\begin{vmatrix} -3V & \cancel{V}\,0 \\ 0 & \cancel{8}\,4V \end{vmatrix}$

$= 8V^2\vec{i} + 24V^2\vec{j} + 12V^2 \cdot \vec{k}$