Reducerea sistemelor de forțe paralele

Fie $\vec{F_i} = F_i \cdot \vec{u}$, $i = \overline{1, n}$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \cdot \vec{u} \Rightarrow |\vec{R}| = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$M_o = \sum \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r_i} \times F_i \cdot \vec{u}) = \left(\sum \vec{r_i} \cdot F_i\right) \times \vec{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{R} \cdot \vec{M_o} = \cancel{R} \, R \cdot \vec{u} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r_i}\right) \times \vec{u}\right] = 0$$

!! Rezultanta și momentul rezultant sunt vectori perpendiculari.

13.10.2021

Laborator 2 – Probleme de reducere

<u>Forța</u> – este o mărime vectorială, măsurată în newtoni (N), ce măsoară interacțiunea dintre corpuri.

$$\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y} + \vec{F_z} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

! Forțele sunt vectori ALUNECĂTORI (efectul său e același, oricare ar fi pct. de aplicație pe dreapta suport).

<u>Momentul forței</u> în raport cu un punct

$$\vec{M_o} = \vec{r} \times \vec{F}$$

→ punct de aplicație în O

→ perpendiculară pe $\mathcal{P}(O, \vec{F})$

→ sensul dat de regula burghiului

→ modulul $M_o = r \cdot F \cdot \sin(\vec{r}, \vec{F}) = r \cdot d$, d = brațul forței

Momentul în formă analitică

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_r & y_r & z_r \\ X_F & Y_F & Z_F \end{vmatrix} \quad ; \quad |\vec{M}_O| = \sqrt{M_{O_x}^2 + M_{O_y}^2 + M_{O_z}^2}$$

A reduce un sistem de forțe înseamnă a găsi un sistem echivalent cu al dat, ce produce acelaș efect.

Forța rezultantă: $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

Momentul rezultant: $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{O_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Sistemul echivalent este redat de torsorul de reducere $\tau_O(\vec{R}, \vec{M}_O)$.

Teorema momentelor:

$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O - \vec{OO_1} \times \vec{R}$ – la schimbarea punctului de aplicare

Momentul minimal / redus

$M_r = \dfrac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R} = \dfrac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{M}_O$ → torsor minimal $\tau_{O_r}(\vec{R}, \vec{M}_r)$

Scris ca ~~v~~ vector: $\vec{M}_r = \dfrac{\vec{R} \cdot \vec{M}_O}{R^2} \vec{R}$ (vectori coliniari)

Ecuația axei centrale:

$$\frac{M_{O_x} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{O_y} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{O_z} - (xR_y - yR_x)}{R_z}$$

Cazuri de reducere

Cazul 1 $\vec{R} \cdot \vec{M_0} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} \neq \vec{0} \\ \vec{M_0} \neq \vec{0} \end{cases}$ $\Rightarrow$ torsor min., situat pe axa centrală

Cazul 2

$$\vec{R} \cdot \vec{M_0} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{M_0} = \vec{0} & - \ O \in \text{axa centrală} \\ \vec{R} \perp \vec{M_0} & - \ M_0 = M_{\text{axa centrala}} \end{cases}$$

Cazul 3

$\vec{R} = \vec{0}, \vec{M_0} \neq \vec{0} \Rightarrow$ Sistemul se reduce la un cuplu $\vec{M} = \vec{M_0}$

Cazul 4

$\vec{R} = \vec{0}, \vec{M_0} = \vec{0}$ — echilibru

Exerciții

1. În punctul $A(\alpha, \beta)$ acționează 5 forțe

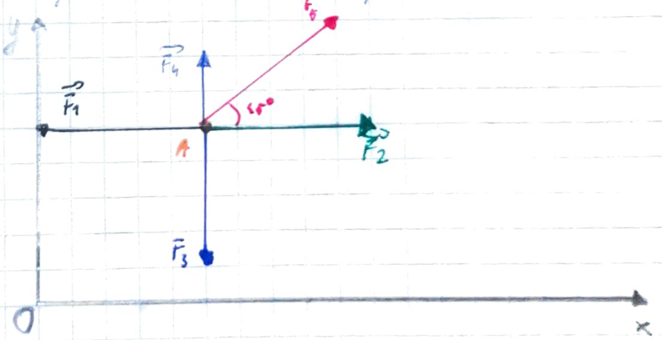
$F_1 = 6\,N$

$F_2 = 3\,N$

$F_3 = 5\,N$

$F_4 = 2\,N$

$F_5 = 3\sqrt{2}\,N$ (4,25 N)



Să se găsească elementele torsorului de reducere.

~~$\vec{F_1} = -6\vec{i}$~~ $F_1 = -6\vec{i}$

$F_2 = 3\vec{i}$

$F_3 = -5\vec{j}$

$F_4 = 2\vec{j}$

$F_5 = 3\vec{i} + 3\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow |R| = 0$

$$\vec{M_0}(\vec{F_1}) = \vec{OA} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 60\vec{k}$$

$$\vec{M_0}(\vec{F_2}) = \vec{OA} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -30\vec{k}$$

$$\vec{M_0}(\vec{F_3}) = \vec{OA} \times \vec{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -50\vec{k}$$

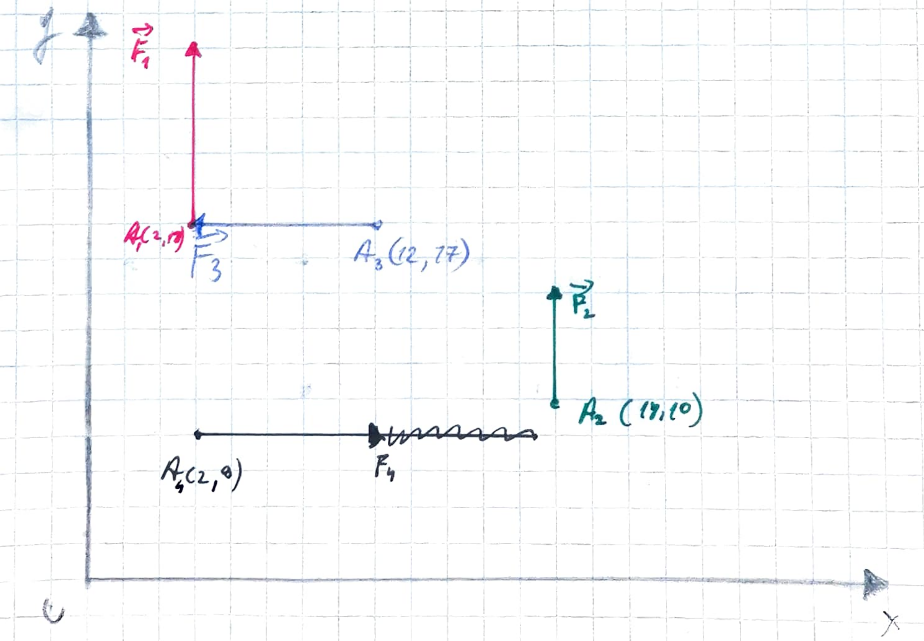
$$\vec{M_0}(\vec{F_4}) = \vec{OA} \times \vec{F_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 20\vec{k}$$

$$\vec{M_0}(\vec{F_5}) = \vec{OA} \times \vec{F_5} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 10 & 10 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{M_0} = 60\vec{k} - 30\vec{k} - 50\vec{k} + 20\vec{k} = \vec{0}$$

$$T(\vec{0}, \vec{0})$$

2. Se consideră sistemul de forțe



$$\left.\begin{aligned} \vec{F_1} &= 5\vec{j} \\ F_2 &= 3\vec{j} \\ \vec{F_3} &= -5\vec{i} \\ \vec{F_4} &= 5\vec{i} \end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{R} = 8\vec{j}$$

$$\vec{M}_0(F_1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 18 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \cancel{18\vec{k}}\ 10\vec{k}$$

$$\vec{M}_0(\vec{F_2}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 18 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 54\vec{k}$$

$$\vec{M}_0(\vec{F_3}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 12 & 17 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 85\vec{k}$$

$$\vec{M}_0(\vec{F_4}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -45\vec{k}$$

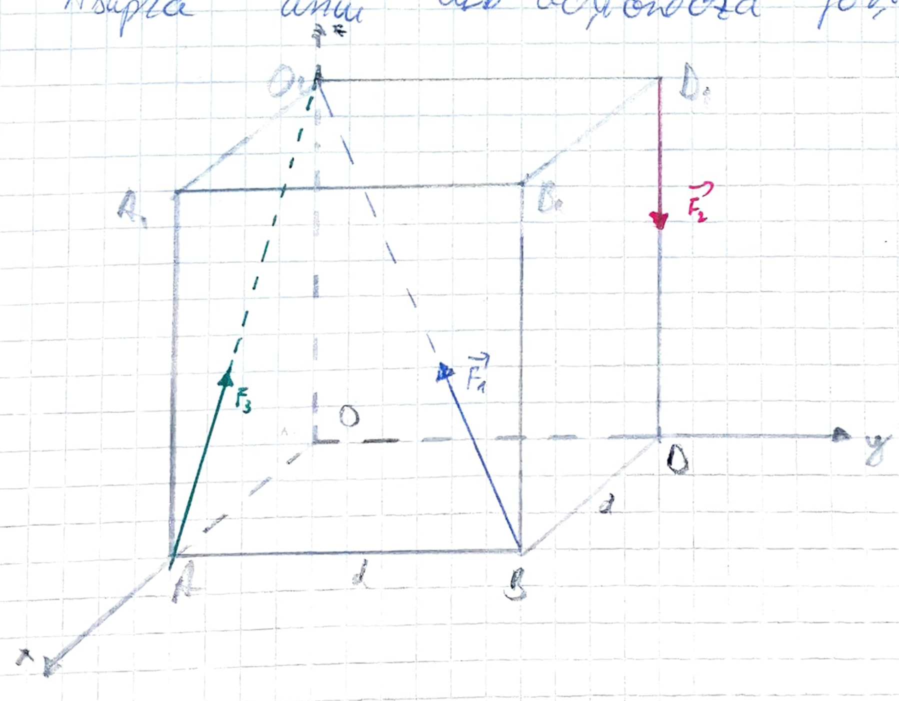
$$\vec{M}_0 = 104\vec{k}$$

$$\tau_0 = (8\vec{j},\ 104\vec{k})$$

$$M_R = \frac{R \cdot \vec{M_0}}{R} = 0 \quad (\text{cazul } 2)$$

$$M_{O_z} = x \cdot 8 - y \cdot 0 \Rightarrow 104 = 8x \Rightarrow x = \frac{104}{8} = 13$$

3. Asupra unui cub acționează forțele:



d – latura cubului

$F_1 = 2\sqrt{3}\,F$

$F_2 = 2\,F$

$F_3 = 2\sqrt{2}\,F$

a) $\vec{F_1} = F_1 \dfrac{\vec{BO_1}}{BO_1} = 2\sqrt{3}F \dfrac{\vec{BA} + \vec{AO} + \vec{OO_1}}{BO_1} = 2\sqrt{3}F \dfrac{-d\vec{i} - d\vec{j} + d\vec{k}}{d\sqrt{3}}$

$$\boxed{\vec{F_1} = -2F\vec{i} - 2F\vec{j} + 2F\vec{k}}$$

$$\vec{F_2} = F_2 \cdot \frac{\vec{D_1D}}{D_1D} = \boxed{-2F\vec{k}}$$

$$\vec{F_3} = F_3 \cdot \frac{\vec{AO_1}}{AO_1} = \frac{\vec{AO} + \vec{OO_1}}{AO} \cdot 2\sqrt{2}F = 2\sqrt{2}F \frac{-d\vec{i} + d\vec{k}}{d\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\vec{F_3} = -2F\vec{i} + 2F\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{R} = -4F\vec{i} - 2F\vec{j} + 2F\vec{k}}$$

$$\vec{M_O}(\vec{F_1}) = \vec{OB} \times \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d & d & 0 \\ -2F & -2F & 2F \end{vmatrix} = \vec{i} \cancel{\begin{vmatrix} d & 0 \\ -2F & 2F \end{vmatrix}} - \vec{j}$$

$$= 2dF\vec{i} - 2dF\vec{j}$$

$$\vec{M_O}(\vec{F_2}) = \vec{OD_1} \times \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & d & d \\ 0 & 0 & -2F \end{vmatrix} = -2dF\vec{i}$$

$$\vec{M_O}(\vec{F_3}) = \vec{OA} \times \vec{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d & 0 & 0 \\ -2F & 0 & 2F \end{vmatrix} = -2dF\vec{j}$$

$$\vec{M_O} = 2dF\vec{i} - 2dF\vec{j} - 2dF\vec{i} - 2dF\vec{j} = -4dF\vec{j}$$

$\tau_O(-4F\vec{i} - 2F\vec{j} + 2F\vec{k}, \cancel{0}\ -4dF\vec{j})$ ~~Corect~~

$$\vec{M_B} = \vec{M_O} - \vec{OB} \times \vec{R} = -4dF\vec{j} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d & d & 0 \\ -4F & -2F & 2F \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{4dF\vec{j}} - 2dF\vec{i} - 2dF\vec{j} - 2dF\vec{k}$$

b) $\tau_B(-4F\vec{i} - 2F\vec{j} + 2F\vec{k}, -2dF\vec{i} - 2dF\vec{j} - 2dF\vec{k})$

c) $M_r = \dfrac{\vec{R} \times \vec{M_O}}{R} = \dfrac{8dF^2}{\sqrt{16F^2 + 4F^2 + 4F^2}} = \dfrac{8dF^2}{\sqrt{24}\,F} = \dfrac{8dF}{2\sqrt{6}} = \dfrac{4dF}{\sqrt{6}}$

$= \dfrac{4dF\sqrt{6}}{6} = \dfrac{2dF\sqrt{6}}{3}$

~~Cazul~~ $M_r \neq 0 \Rightarrow$ Cazul 1

d) $\dfrac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \dfrac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \dfrac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 16d - 20z - 8x - 4y = 0 \\ -4d + 4x + 4z - 4y = 0 \end{cases}$

dacă $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{d}{3} \\ z = \dfrac{2d}{3} \end{cases} \Bigg| \Rightarrow P_1\left(\dfrac{d}{3}, 0, \dfrac{2d}{3}\right)$

dacă $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5d}{3} \\ y = \dfrac{2d}{3} \end{cases} \Bigg| \Rightarrow P_2\left(\dfrac{5d}{3}, \dfrac{2d}{3}, 0\right)$