prop : Soit Ω domaine de $\mathbb{R}^n$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle \,,\, \rangle_{H^m(\Omega)}$ défini par $\forall (u,v) \in H^m(\Omega)^2$

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$ est un espace de Hilbert

De plus, si Ω est un domaine $D(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$

3) Trace sur Γ de fonctions de $H^1(\Omega)$

Idée : Si $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, on peut construire une fonction définie sur Γ la frontière de Ω, par restriction sur Γ.

On va chercher à étendre cette stratégie à des fonctions de $H^1(\Omega)$.

Théorème : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière Lipschitzienne.

Il existe une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ vers $L^2(\Gamma)$, notée γ_0, telle que $\forall v \in D(\bar{\Omega})$, $\gamma_0(v) = v_{|\Gamma}$

De plus, on a : i) $\ker \gamma_0 = H^1_0(\Omega)$

ii) $\operatorname{Im} \gamma_0$ est dense dans $L^2(\Gamma)$

Remarque : $H^1_0(\Omega) = \ker \gamma_0$

application nulle sur la frontière

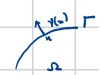
Cet espace va être associé à des problèmes d'EDP avec des conditions de Dirichlet homogène à la frontière " $v = 0$ sur Γ "

Proposition : Formules de Green :

Soit Ω domaine de $\mathbb{R}^n$ on a :

i) $\forall (u,v) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$: $\displaystyle\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \gamma_1(u)\, \gamma_0(v)\, d\gamma$

avec $\gamma_1(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \nu_i$ et $\nu(x)$ vecteur normal sortant à Γ en x



ii) $\forall (u,v) \in H^1(\Omega)^2$ $\displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma \gamma_0(u)\, \gamma_0(v)\, \nu_i \, d\gamma$

preuve : cf TD1

TD 1 :

Exercice 2 :

On admet ex 1 a) $\forall (u,v) \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \right) v \, d\gamma$$

Rem : $\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) = \nabla u(x)^T \nabla v(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$

On veut mq : $\displaystyle\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \gamma_1(u)\, \gamma_0(v)\, d\gamma$

1)

Soit $(u,v) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$

Ω domaine de $\mathbb{R}^n \implies D(\bar{\Omega})$ dense dans $H^m(\Omega)$ $\forall m \geq 1$

En particulier, $D(\bar{\Omega})$ dense dans $H^1(\Omega) \implies \exists (v_p) \in D(\bar{\Omega})^{\mathbb{N}}$ tq $v_p \xrightarrow{H^1(\Omega)} v$

$D(\bar{\Omega})$ dense dans $H^2(\Omega) \implies \exists (u_p) \in D(\bar{\Omega})^{\mathbb{N}}$ tq $u_p \xrightarrow{H^2(\Omega)} u$

Soit $p \in \mathbb{N}$ $\quad u_p \in D(\bar{\Omega}) \implies u_p \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$

$v_p \in D(\bar{\Omega}) \implies v_p \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$

Par (*) $\int_\Omega \Delta u_p v_p \, dx = -\int_\Omega \nabla u_p \cdot \nabla v_p \, dx + \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \nu_i \right) v_p \, d\gamma$ et ce $\forall p \in \mathbb{N}$

2) Soit $p \in \mathbb{N}$ $\int_\Omega \nabla u_p \cdot \nabla v_p \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \, dx$

car continue à support compact

or $\frac{\partial u_p}{\partial x_i} \in D(\bar{\Omega}) \Rightarrow \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$

$\frac{\partial v_p}{\partial x_i} \in D(\bar{\Omega}) \Rightarrow \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$

d'où $\forall i \in [\![1, n]\!]$: $\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \, dx = \left\langle \frac{\partial u_p}{\partial x_i}, \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}$

or $v_p \xrightarrow{H^1(\Omega)} v$: $\exists \lim_{p \to +\infty} \| v_p - v \|_{H^1(\Omega)} = 0$

or $\| v_p - v \|^2_{H^1(\Omega)} = \| v_p - v \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v_p}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$

d'où $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\left\| \frac{\partial v_p}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

Et $\frac{\partial v_p}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{\partial v}{\partial x_i}$

De même, $\| u_p - u \|_{H^2(\Omega)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

or $\| u_p - u \|^2_{H^2(\Omega)} = \| u_p - u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left\| \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$

De nouveau, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\left\| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ et $\frac{\partial u_p}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{\partial u}{\partial x_i}$

Par continuité du produit scalaire, à la limite $\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \, dx \xrightarrow[p \to +\infty]{} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}$

d'où $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \, dx \xrightarrow[p \to +\infty]{} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$

d'où $\int_\Omega \nabla u_p \cdot \nabla v_p \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \frac{\partial v_p}{\partial x_i} \, dx \xrightarrow[p \to +\infty]{} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx$

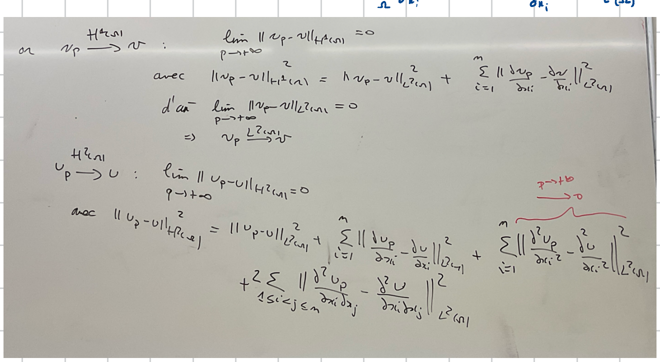
$\xrightarrow[p \to +\infty]{} \int_\Omega \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}}_{= \nabla u \cdot \nabla v} \, dx \xrightarrow[p \to +\infty]{} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

3) $\int_\Omega \Delta u_p v_p \, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} v_p \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} v_p \, dx$

$u_p \in D(\bar{\Omega}) \Rightarrow u_p \in H^2(\Omega)$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$ $\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} \in L^2(\Omega)$

$v_p \in D(\bar{\Omega}) \Rightarrow v_p \in L^2(\Omega)$ d'où $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\int_\Omega \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} v_p \, dx = \left\langle \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2}, v_p \right\rangle_{L^2(\Omega)}$



or $v_p \xrightarrow{H^1(\Omega)} v$: $\lim_{p \to +\infty} \| v_p - v \|_{H^1(\Omega)} = 0$

avec $\| v_p - v \|^2_{H^1(\Omega)} = \| v_p - v \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v_p}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$

d'où $\lim_{p \to +\infty} \| v_p - v \|_{L^2(\Omega)} = 0$

$\Rightarrow v_p \xrightarrow{L^2(\Omega)} v$

$u_p \xrightarrow{H^2(\Omega)} u$: $\lim_{p \to +\infty} \| u_p - u \|_{H^2(\Omega)} = 0$

avec $\| u_p - u \|^2_{H^2(\Omega)} = \| u_p - u \|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u_p}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|^2_{L^2(\Omega)}}^{\xrightarrow[p \to +\infty]{} 0} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left\| \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)}$

d'où $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\lim_{p \to +\infty} \left\| \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!]$ $\frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$

Il vient à la limite par continuité du produit scalaire :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \left\langle \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2}, v_p \right\rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

d'où
$$\int_\Omega \Delta u_p \, v_p \, dx = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_i^2}, v_p \right\rangle_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\xrightarrow[p \to +\infty]{} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \, v \, dx$$

$$\xrightarrow[p \to +\infty]{} \int_\Omega \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)}_{\Delta u} v \, dx$$

$$\xrightarrow[p \to +\infty]{} \int_\Omega \Delta u \, v \, dx$$

4) On veut mq : $\displaystyle\int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \nu_i \right) v_p \, d\gamma$

$\forall p \quad v_p \in D(\bar{\Omega})$ d'où $\gamma_0(v_p) = v_p/\Gamma$ par thm de Trace

$\forall i \in [\![1, n]\!] \ \dfrac{\partial u_p}{\partial x_i} \in D(\bar{\Omega})$, d'où $\gamma_0\left(\dfrac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) = \dfrac{\partial u_p}{\partial x_i}\Big|\Gamma$

d'où
$$\int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \nu_i \right) v_p \, d\gamma = \int_\Gamma \left(\sum_{i=1}^n \gamma_0\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) \nu_i \right) \gamma_0(v_p) \, d\gamma = \sum_{i=1}^n \int_\Gamma \underbrace{\gamma_0\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) \nu_i}_{\in L^2(\Gamma)} \underbrace{\gamma_0(v_p)}_{\in L^2(\Gamma)} \, d\gamma$$

De plus, $\left|\gamma_0\left(\dfrac{\partial u_p}{\partial x_i}\right)(x) \, \nu_i(x)\right|^2 \leqslant \left(\gamma_0\left(\dfrac{\partial u_p}{\partial x_i}\right)(x) \, \overbrace{\|\nu(x)\|^2_{\mathbb{R}^n}}^{=1 \text{ par déf de } \nu(x) \text{ vecteur normal sortant à } \Gamma \text{ en } x}\right. \quad \forall x$ p.p sur Γ

or $\gamma_0\left(\dfrac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) \in L^2(\gamma) \Rightarrow \gamma_0\left(\dfrac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) \nu_i \in L^2(\gamma)$

$$\int_\Gamma \left(\sum \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \nu_i \right) v_p \, d\gamma = \sum_{i=1}^n \left\langle \gamma_0\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) \nu_i, \gamma_0(v_p) \right\rangle_{L^2(\Gamma)})$$

Or $v_p \xrightarrow{H^1(\Omega)} v$

$u_p \in D(\bar{\Omega}) \Rightarrow u_p \in H^2(\Omega)$

$\Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \ \dfrac{\partial u_p}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$

Et par définition de $\| \ \|_{H^2(\Omega)}$ $\quad u_p \xrightarrow{H^2(\Omega)} u \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!] \quad \dfrac{\partial u_p}{\partial x_i} \xrightarrow{H^1(\Omega)} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$

Par continuité de γ_0 et du produit scalaire, à la limite :

$$\left\langle \gamma_0\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_i}\right) \nu_i, \gamma_0(v_p) \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} \left\langle \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \nu_i, \gamma_0(v) \right\rangle_{L^2(\Gamma)}$$

D'où
$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_p}{\partial x_i} \nu_i \right) v_p \, d\gamma \xrightarrow[p \to +\infty]{} \sum_{i=1}^n \left\langle \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \nu_i, \gamma_0(v) \right\rangle_{L^2(\Gamma)}$$

$$\xrightarrow[p \to +\infty]{} \sum_{i=1}^n \int_\Gamma \left(\gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \nu_i \right) \gamma_0(v) \, d\gamma$$

$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_p}{\partial x_i} v_i \right) v_p \, d\gamma \xrightarrow[p \to +\infty]{} \int_\Omega \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \nu_i \right)}_{:= \gamma_1(u)} \gamma_0(v_p) \, d\gamma$$

5) cf 2), 3), 4)

IV – Théorème de Lax-Milgram et applications aux EDP :

1) Cadre fonctionnel visé

Soit V un espace de Hilbert ($\mathbb{R}$-ev)

On s'intéresse au problème (P_{FV}) Trouver $u \in V$ tq $\forall v \in V \quad a(u,v) = \ell(v)$

avec $a : V \times V \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire

$\ell : V \to \mathbb{R}$ forme linéaire

Q? Quelles hypothèses sur a et ℓ pour garantir que (P_{FV}) admet une unique solution ?

Q? Comment construire (P_{FV}) depuis le problème d'EDP original ?

Théorème de Lax-Milgram :

Théorème : Soit V un espace de Hilbert

* Soit $a : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue et coercive :

i) $\exists M \geq 0$ tq $\forall (u,v) \in V^2 \quad |a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$
"continuité"

ii) $\exists \alpha > 0$ tq $\forall v \in V \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2$
"coercivité"

* Soit $\ell : V \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue

$\exists K \geq 0$ tq $\forall v \in V \quad |\ell(v)| \leq K \|v\|_V$

Alors, $\exists ! \, u \in V$ tq $\forall v \in V \quad a(u,v) = \ell(v)$

proposition : Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, la solution $u \in V$ du problème (P_{FV}) dépend continuement de la donnée $\ell : V \to \mathbb{R}$

preuve : Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux formes linéaires continues sur V

On note $u_1 \in V$ et $u_2 \in V$ les solutions de (P_{FV}) associées :

$$\forall v \in V \quad a(u_1, v) = \ell_1(v)$$
$$a(u_2, v) = \ell_2(v)$$

$\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq \frac{1}{\alpha} a(u_1 - u_2, u_1 - u_2)$ par coercivité de a

$\leq \frac{1}{\alpha} \underbrace{a(u_1, u_1 - u_2)}_{\substack{= \ell_1(u_1 - u_2) \\ \text{par def de } u_1}} - \frac{1}{\alpha} \underbrace{a(u_2, u_1 - u_2)}_{\substack{= \ell_2(u_1 - u_2) \\ \text{par def de } u_2}}$ par bilinéarité de a

$\leq \frac{1}{\alpha} (\ell_1 - \ell_2)(u_1 - u_2)$

$\leq \frac{1}{\alpha} |||\ell_1 - \ell_2||| \, \|u_1 - u_2\|_V$ par linéarité et continuité de $\ell_1 - \ell_2$

Si $u_1 \neq u_2$, $\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} |||\ell_1 - \ell_2|||$

Encore vraie si $u_1 = u_2$, d'où $\|u_1 - u_2\| \leq \frac{1}{\alpha} |||\ell_1 - \ell_2||| \xrightarrow[\ell_1 \to \ell_2]{} 0$

proposition : Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, si a est symétrique, on a l'équivalence entre les problèmes suivants :

i) Trouver $u \in V$ tq $a(u,v) = \ell(v)$

ii) Trouver $u \in V$ solution $\min_{v \in V} \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v)$

preuve : On pose $J : V \to \mathbb{R}$

$$v \longmapsto \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v)$$

$\forall (u,v) \in V^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$J(u+\lambda v) = \frac{1}{2} a(u+\lambda v, u+\lambda v) - \ell(u+\lambda v)$$

$$= \frac{1}{2} a(u,u) + \frac{\lambda}{2} a(u,v) + \frac{\lambda}{2} \underbrace{a(v,u)}_{=a(u,v) \text{ par sym de } a} + \frac{\lambda^2}{2} a(v,v) - \ell(u) - \lambda \ell(v)$$ par bilinéarité de a et linéarité de ℓ

$$= \frac{1}{2} a(u,u) - \ell(u) + \lambda \left(a(u,v) - \ell(v) \right) + \frac{\lambda^2}{2} a(v,v)$$

$$= J(u) + \lambda \left(a(u,v) - \ell(v) \right) + \frac{\lambda^2}{2} a(v,v)$$

1

i) ⟹ ii) Soit $u \in V$ tq $a(u,v) = \ell(v)$ $\forall v \in V$

Soit $w \in V \setminus \{u\}$

On a $w = u + w - u$

$= u + \lambda v$ avec $\lambda = \|w-u\|_V > 0$

$v = \frac{w-u}{\|w-u\|_V} \in V$

d'où $J(w) = J(u+\lambda v)$

$$= J(u) + \lambda \underbrace{\left(a(u,v) - \ell(v)\right)}_{=0 \text{ par déf de } u} + \frac{\lambda^2}{2} \overbrace{a(v,v)}^{\geq \alpha \|v\|_V^2 \text{ par coercivité de } a}$$

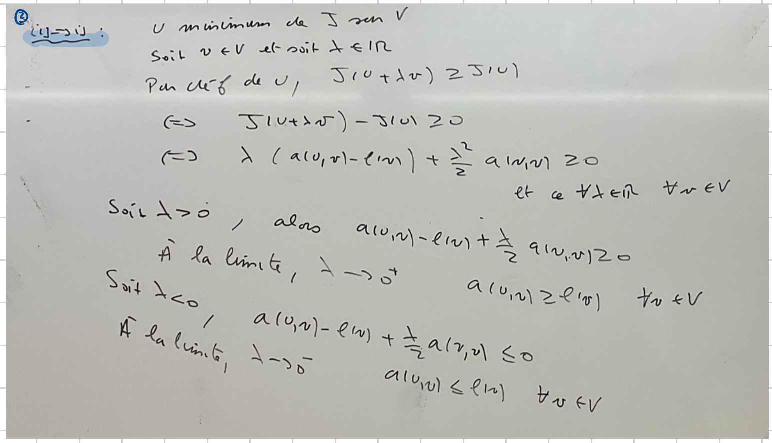
$$\geq J(u) + \underbrace{\alpha \frac{\lambda^2}{2} \|v\|_V^2}_{>0 \text{ car } \alpha > 0}$$

$J(w) \geq J(u)$ et ce $\forall w \in V \setminus \{u\}$

Encore vraie si $w = u$.

D'où $\forall w \in V$ $J(u) \leq J(w)$

$\Rightarrow u$ minimum de J sur V.



2 **ii) ⟹ i) :** u minimum de J sur V

Soit $v \in V$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$

Par déf de u, $J(u+\lambda v) \geq J(u)$

$\Leftrightarrow$ $J(u+\lambda v) - J(u) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\lambda \left(a(u,v) - \ell(v) \right) + \frac{\lambda^2}{2} a(v,v) \geq 0$

et ce $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall v \in V$

Soit $\lambda > 0$, alors $a(u,v) - \ell(v) + \frac{\lambda}{2} a(v,v) \geq 0$

À la limite, $\lambda \to 0^+$ $a(u,v) \geq \ell(v)$ $\forall v \in V$

Soit $\lambda < 0$, $a(u,v) - \ell(v) + \frac{\lambda}{2} a(v,v) \leq 0$

À la limite, $\lambda \to 0^-$ $a(u,v) \leq \ell(v)$ $\forall v \in V$

3) Exemple :

Soit Ω domaine de $\mathbb{R}^n$

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{sur } \Omega \quad (1) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \quad (2) \end{cases}$$ avec $f \in L^2(\Omega)$ et $c \in L^\infty(\Omega)$ tq $c(x) \geq 0$ p.p sur Ω

a) formulation variationnelle :

Soit $u \in H^2(\Omega)$ solution de (P)

On a : $-\Delta u + cu = f$ par (1)

$\forall v \in H^1(\Omega)$ $-\Delta u v + c u v = f v$

$\forall v \in H^1(\Omega)$ $-\int_\Omega \Delta u v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$

Remarque : * $u \in H^2(\Omega) \Rightarrow \Delta u \in L^2(\Omega)$
$v \in H^1(\Omega) \Rightarrow v \in L^2(\Omega)$
$\Rightarrow \int_\Omega \Delta u v \, dx$ existe

* $f \in L^2(\Omega)$, $v \in L^2(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega f v \, dx$ existe

* $|C(x) U(x)|^2 \leq \|C\|^2_{L^\infty(\Omega)} |u(x)|^2$ p.p sur Ω

or $u \in L^2(\Omega) \Rightarrow \int_\Omega (CU)^2 \, dx < +\infty$

$\Rightarrow CU \in L^2(\Omega)$ $\Rightarrow \int_\Omega CUv \, dx$ existe

or Ω domaine, d'où par la formule de green :

$$\int_\Omega \Delta u v \, dx = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Gamma \gamma_1(u) \gamma_0(v) \, d\gamma$$

D'où $\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx - \int_\Gamma \gamma_1(u) \gamma_0(v) \, d\gamma + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$

Rem : i) L'équation précédente ne fait plus intervenir de dérivées partielles faibles d'ordre 2 ⟹ On va chercher $u \in H^1(\Omega)$

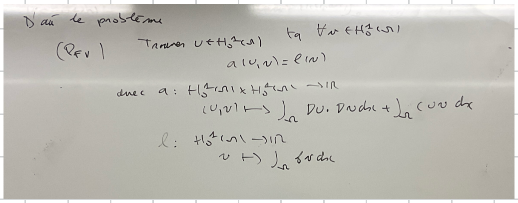
ii) (2) $u = 0$ sur Γ or $\operatorname{Ker} \gamma_0 = H_0^1(\Omega)$ $(\forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ $\gamma_0(v) = v_{|\Gamma})$

⟹ On va plutôt chercher $u \in H_0^1(\Omega)$ pour tenir compte des conds aux limites

D'après les conditions limites, on cherche plutôt $u \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H_0^1(v)$

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx - \int_\Gamma \gamma_1(u) \underbrace{\gamma_0(v)}_{\substack{=0 \\ \text{car } v \in H_0^1(\Omega)}} d\gamma + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

D'où le problème :



D'où le problème

(P_{FV}) Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$a(u,v) = \ell(v)$

avec $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

$(u,v) \mapsto \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx$

$\ell : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

$v \mapsto \int_\Omega f v \, dx$

ii) Existence unicité de solution (P_{FV})

* $H_0^1(\Omega)$ muni de $\langle \, \rangle_{1,\Omega}$ est un Hilbert (Ω ouvert borné)

* Etude de ℓ :

  - ℓ est linéaire : clair (linéarité de l'intégrale)
  - ℓ est continue :

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $\quad |\ell(v)| = |\int_\Omega \underbrace{f}_{\in L^2(\Omega) \text{ par hyp}} \overbrace{v}^{\in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)} dx| \implies |\ell(v)| = |\langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}|$

$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$

or Ω est un ouvert borné, par inégalité de Poincaré, $\exists C_\Omega > 0$ tq $\forall w \in H_0^1(\Omega)$

$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega |w|_{1,\Omega}$

D'où, $|\ell(v)| \leqslant \underbrace{C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}}_{cte \geqslant 0} |v|_{1,\Omega}$

et ce $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Donc ℓ est continue

* Etude de a :

  - a est bilinéaire : clair
  - a est continue : $\forall (u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

$$|a(u,v)| \leqslant \underbrace{|\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx|}_{= \langle u, v \rangle_{1,\Omega}} + \underbrace{|\int_\Omega \underbrace{cu}_{\in L^2(\Omega)} \overbrace{v}^{\in L^2(\Omega)} dx|}_{= \langle cu, v \rangle_{L^2(\Omega)}} \implies |a(u,v)| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + \|cu\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{or } \|cu\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_\Omega \underbrace{c^2}_{\leqslant \|c\|^2_{L^\infty(\Omega)} \text{ car } C \in L^\infty(\Omega)} u^2 \, dx} \leqslant \|C\|_{L^\infty(\Omega)} \underbrace{\sqrt{\int_\Omega u^2 \, dx}}_{= \|u\|_{L^2(\Omega)}} \leqslant \|C\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

je m'embête à faire tout ce calcul parce que j'ai besoin d'utiliser l'inégalité de Poincaré qui n'est valable que pour les fonctions de H_0^1 (mais H_1 non), donc $cu \notin H_0^1$ uniquement $u \in H_0^1$ donc je les segmente encore plus pour pouvoir appliquer cette inégalité.

$$|a(u,v)| \leqslant |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Par inégalité de Poincaré :

$$|a(u,v)| \leqslant |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} + C_\Omega^2 \|C\|_{L^\infty(\Omega)} |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega}$$

$$\leqslant \underbrace{(1 + C_\Omega^2 \|C\|_{L^\infty(\Omega)})}_{= cte \geqslant 0} |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \text{ et ce } \forall (u,v) \in (H_0^1(\Omega))^2$$

D'où a est continue

* a est coercive :

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(v,v) = \int_\Omega \nabla v . \nabla v \, dx + \int_\Omega c v^2 \, dx$$
$$= |v|^2_{1,\Omega} + \int_\Omega c v^2 \, dx$$

or $c(x) \geqslant 0$ p.p sur $\Omega \implies \int_\Omega c v^2 \, dx \geqslant 0$ d'où $a(v,v) \geqslant |v|^2_{1,\Omega}$ et ce $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ d'où a coercive.

Bilan : d'après le thm de Lax-Milgram, $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H_0^1$ $a(u,v) = \ell(v)$

iii) Interprétation de $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (P_{FV})

Soit $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ solution de (P_{FV})

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $\quad \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$

or Ω est un domaine (déf domaine avant)

D'où par formule de Green, $\int_\Omega \Delta u . v \, dx = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Gamma \gamma_1(u) \gamma_0(v) \, d\gamma$ Il vient $-\int_\Omega \Delta u v \, dx + \int_\Gamma \gamma_1(u) \underbrace{\gamma_0(v)}_{\substack{=0 \\ \text{car } v \in H_0^1(\Omega)}} d\gamma + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$\Leftrightarrow -\int_\Omega \Delta u . v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

En particulier, par définition de $H_0^1(\Omega)$ $\forall v \in D(\Omega)$ $-\int_\Omega \Delta u v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \Leftrightarrow \forall v \in D(\Omega) \int_\Omega (\underbrace{-\Delta u + cu - f}_{\in L^2(\Omega) \text{ par hyp sur } u, c, f}) v \, dx = 0$

$\Rightarrow -\Delta u + cu - f = 0$ dans $L^2(\Omega)$ (par prop) $\int_\Omega w v \, dx = 0 \quad \forall v \in D(\Omega)$ avec $w \in L^2(\Omega) \Rightarrow w = 0$

$\Rightarrow -\Delta u + cu = f$ dans $L^2(\Omega)$

$\Rightarrow -\Delta u(x) + c(x) u(x) = f(x)$ p.p sur Ω

* or $u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow \gamma_0(u) = 0$

TD2 : formulation variationnelle

Exercice 1 :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{sur } \Omega \text{ domaine} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

avec $c \in L^\infty(\Omega)$, $c(x) \geq c_0$ p.p sur Ω avec $c_0 > 0$

$f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$

Rem : $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u . \nu = \nabla u^T . u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i$

1.1) Formulation variationnelle :

On prend H^n avec n l'ordre de la dérivée faible le plus haut. Dans le cadre de ce cours on ira pas au delà de 2.

Soit $u \in H^2(\Omega)$ solution de (P)

$\forall v \in H^1(\Omega)$: $-\int_\Omega \Delta u . v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$, or Ω est un domaine, par formule de Green $\int_\Omega \Delta u v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx + \int_\Gamma \gamma_1(u) \gamma_0(v) \, d\gamma$ d'où $\forall v \in H^1(\Omega)$

$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx - \int_\Gamma \gamma_1(u) \gamma_0(v) \, d\gamma + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$

γ_0 c'est la fonction restreinte à sa frontière, $\gamma_0(u) = u$ seulement ds $D(\bar{\Omega})$ sinon c'est faux.

Rem : $\gamma_1(u) = \sum_{i=1}^n \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \nu_i$ donc pour pouvoir supposer ça il faut d'autres arguments (notamment de densité).

En tenant compte des conditions aux limites, on suppose $\gamma_1(u) = g$

d'où $\forall v \in H^1(\Omega)$: $\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx - \int_\Gamma g \gamma_0(v) \, d\gamma + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$

D'où le problème : on a plus de dérivées faible d'ordre 2 pour u donc on peut revenir sur H^1 qui est + grand, est c'est trop restrictif (et inutile) de supposer $u \in H^2$

(P_{FV}) Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H^1(\Omega)$ $a(u,v) = l(v)$

avec $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $l : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u,v) \longmapsto \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx$ et $v \longmapsto \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g \gamma_0(v) \, d\gamma$

1.2) Existence / unicité :

* $H^1(\Omega)$ muni de $\langle \, \rangle_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

L'inégalité de poincaré n'est vraie que sur H_0^1 et ici si on l'impose on change de problème (P_{FV}) donc on peut pas, donc il faut trouver autre chose que poincaré pour nous aider.

* Etude de a : • a bilinéaire : clair

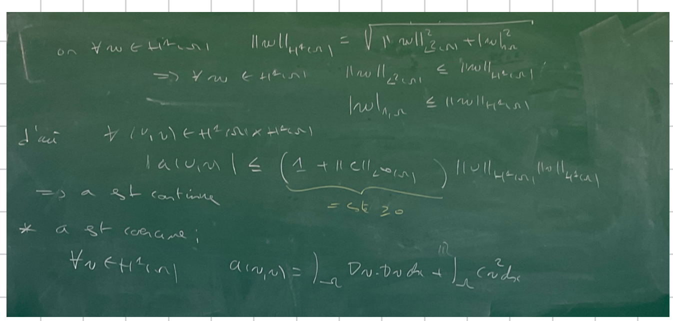
• a est continue : $\forall (u,v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$

$|a(u,v)| \leq \left|\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx\right| + \left|\int_\Omega c u v \, dx\right|$

$\leq |\langle u,v \rangle_{1,\Omega}| + |\langle u,v \rangle_{L^2(\Omega)}|$

$\underset{\text{Cauchy-schwarz}}{\leq} |u|_{1\Omega} |v|_{1\Omega} + \underbrace{\|cu\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}}_{\leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}}$

$\leq |u|_{1\Omega} |v|_{1\Omega} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$



$a(v,v) = |v|_{1,\Omega}^2 + \int_\Omega \underbrace{c}_{\geq c_0 \text{ pp. sur } \Omega \text{ avec } c_0 > 0} v^2 \, dx$.

$\geq |v|_{1,\Omega}^2 + c_0 \underbrace{\int_\Omega v^2 \, dx}_{= \|v\|^2_{L^2(\Omega)}} \geq |v|^2_{1\Omega} + c_0 \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \min(1, C_0) \underbrace{(|v|^2_{1\Omega} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)})}_{= \|v\|^2_{H^1(\Omega)}} \geq \underbrace{\min(1, C_0)}_{\text{cste} > 0} \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$ $\Rightarrow$ a coercive

*** Etude de ℓ :**

- ℓ est linéaire par linéarité de γ_0 et de l'intégrale :
- Mtq ℓ est continue :

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad |\ell(v)| \leqslant \Big|\underbrace{\int_\Omega f v \, dx}_{=\langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)}}\Big| + \Big|\underbrace{\int_\Gamma \overset{\in L^2(\Gamma) \text{ par hyp}}{g} \underbrace{\gamma_0(v)}_{L^2(\Gamma) \text{ par déf de } \gamma_0} \, d\gamma}_{\langle g, \gamma_0(v)\rangle_{L^2(\Gamma)}}\Big|$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \|f\|_{L^2(\Omega)} \underbrace{\|v\|_{L^2(\Omega)}}_{\substack{\leqslant \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ \text{par déf de } \|\ \|_{H^1(\Omega)}}} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \underbrace{\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)}}_{\substack{\leqslant \|\gamma_0\| \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ \text{car } \gamma_0 \text{ linéaire continue}}}$$

$$\leqslant \underbrace{\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} |||\gamma_0|||\right)}_{= \text{cste} \geqslant 0} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

D'où ℓ continue.

Bilan : D'après le théorème de Lax-Milgram, $\exists !\ u \in H^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H^1(\Omega) \quad a(u,v) = \ell(v)$

1.3) Interprétation de la solution $u \in H^1(\Omega)$ de (P_{FV}) vis-à-vis du problème (P) :

Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de (P_{FV}).

On suppose $u \in H^2(\Omega)$ → Si u est dans $H^1(\Omega)$ elle peut aussi être dans $|H^1(\Omega)|$. Or pour finir la conclusion ici, on est obligé d'utiliser les formules de Green. Pour utiliser les formules de Green il faut au moins que $u \in H^2(\Omega)$ ($u \in H^m(\Omega)$ avec $m \geqslant 2$ OK) et $v \in H^1(\Omega)$ ($v \in H^n_\Omega$ avec $n \geqslant 1$ OK). Dans les autres cas on est bloqués et on ne sait pas dire grand chose.

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g \gamma_0(v) \, d\gamma$$

Or Ω domaine :

D'où par formule de Green :

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Gamma \gamma_1(u) \gamma_0(v) \, d\gamma$$

$$\Rightarrow \forall v \in H^1(\Omega) \quad -\int_\Omega \Delta u \, v \, dx + \int_\Gamma \gamma_1(u) \gamma_0(v) \, d\gamma + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g \gamma_0(v) \, d\gamma$$

En particulier $(\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega))$,

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad -\int_\Omega \Delta u \, v \, dx + \int_\Gamma \gamma_1(u) \overbrace{\gamma_0(v)}^{=0} \, d\gamma + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g \underbrace{\gamma_0(v)}_{=0} \, d\gamma$$

Or $\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$ $(= \operatorname{Ker} \gamma_0)$

D'où, $\forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\gamma_0(v) = 0$

Il vient

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \int_\Omega \underbrace{(-\Delta u + c u - f)}_{\in L^2(\Omega)} \underbrace{v}_{\in \mathcal{D}(\Omega)} \, dx = 0$$

$\Rightarrow -\Delta u + c u - f = 0$ dans $L^2(\Omega)$

$\Rightarrow -\Delta u + c u = f$ dans $L^2(\Omega)$

$\Rightarrow -\Delta u(x) + c(x) u(x) = f(x)$ p.p sur Ω

* Mtq $\gamma_1(u) = g$

Par $(*)$ $\forall v \in H^1(\Omega)$: $-\int_\Omega \Delta u \, v \, dx + \int_\Gamma \gamma_1(u) \gamma_0(v) \, d\gamma + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g \gamma_0(v) \, d\gamma$

Or $-\Delta u + c u = f$ (dans $L^2(\Omega)$)