D'où $-\int_\Omega \Delta u\, v\, dx + \int_\Omega c u v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \qquad \forall u \in H^1(\Omega)$

Il vient : $\int_\Gamma \gamma_1(u)\,\gamma_0(v)\,d\gamma = \int_\Gamma g\,\gamma_0(v)\,d\gamma \qquad \forall v \in H^1(\Omega)$

$\iff \forall v \in H^1(\Omega) \ \int_\Gamma (g-\gamma_1(u))\,\gamma_0(v)\,d\gamma = 0 \quad (**)$

Or $\mathrm{Im}\,\gamma_0$ est dense dans $L^2(\Gamma)$

D'où $\exists (v_p) \in H^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ tq $\lim_{p\to+\infty} \|\gamma_0(v_p) - (g-\gamma_1(u))\|_{L^2(\Gamma)} = 0$

car $g-\gamma_1(u) \in L^2(\Gamma)$

De plus, $\|g-\gamma_1(u)\|^2_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma (g-\gamma_1(u))^2\, d\gamma$

$$= \left|\int_\Gamma (g-\gamma_1(u))^2\, d\gamma\right| = \left|\int_\Gamma (g-\gamma_1(u))^2\, d\gamma - \overbrace{\int_\Gamma (g-\gamma_1(u))\,\gamma_0(v_p)\, d\gamma}^{=0 \text{ par } (**)} \right. \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\|g-\gamma_1(u)\|^2_{L^2(\Gamma)} = \Big|\underbrace{\int_\Gamma (g-\gamma_1(u))\,(g-\gamma_1(u)-\gamma_0(v_p))\, d\gamma}_{=\langle g-\gamma_1(u),\, g-\gamma_1(u)-\gamma_0(v_p)\rangle_{L^2(\Gamma)}}\Big|$$

Cauchy-Schwarz

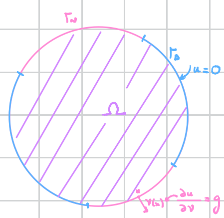
$$\leq \|g-\gamma_1(u)\|_{L^2(\Gamma)}\, \underbrace{\|g-\gamma_1(u)-\gamma_0(v_p)\|_{L^2(\Gamma)}}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \text{ par def de } (v_p)\in H^1(\Omega)^{\mathbb{N}}}$$

$$\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

D'où $\|g-\gamma_1(u)\|_{L^2(\Gamma)} = 0$ et $\gamma_1(u) = g$ dans $L^2(\Gamma)$

Exercice 2.

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \Gamma_D \end{cases} \qquad \text{avec } \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$$



avec $f\in L^2(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$ tq $c(x)\geq 0$ pp sur Ω, $g\in L^2(\Gamma)$

c'est + qu'une hyp, c'est vrai

hyp:
- $H^1_{0,D}(\Omega) = \{w\in H^1(\Omega)$ tq $\gamma_0(w) = 0$ sur $\Gamma_D\}$ muni de $\langle\ \rangle_{1,\Omega}$ est un espace de Hilbert
- $\exists\, C_\Omega > 0$ tq $\forall v \in H^1_{0,D}(\Omega)$ $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |v|_{1,\Omega}$

2.1) Formulation variationnelle:

Soit $u\in H^2(\Omega)$ solution de (P) On se ramène toujours à la forme intégrale pour pouvoir avancer.

$\forall v \in H^1(\Omega) \quad -\int_\Omega \Delta u\, v\, dx + \int_\Omega c u v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$

Or Ω domaine, par formule de Green :

$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_\Gamma \gamma_1(u)\gamma_0(v)\, d\gamma + \int_\Omega c u v\, dx = \int_\Omega f v\, dx$ or $\int_\Gamma \gamma_1(u)\,\gamma_0(v)\, d\gamma = \int_{\Gamma_D} \gamma_1(u)\gamma_0(v)\, d\gamma + \int_{\Gamma_N} \gamma_1(u)\gamma_0(v)\, d\gamma$ car $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ avec $\lambda(\Gamma_N\cap\Gamma_D) = 0$

λ mesure de Lebesgue.

On suppose $\begin{cases} \gamma_1(u) = g & \text{sur } \Gamma_N \\ \gamma_0(u) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases}$

On cherche $u \in H^1_{0,0}(\Omega)$ tq $\forall v \in H^1_{0,0}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx - \int_{\Gamma_0} \gamma_1(u) \underbrace{\gamma_0(v)}_{=0} \, d\gamma + \int_{\Gamma_N} \underbrace{\gamma_1(u)}_{=g} \gamma_0(v) \, d\gamma + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

$\Leftrightarrow$ Chercher $u \in H^1_{0,0}(\Omega)$ tq $\forall v \in H^1_{0,0}(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \overbrace{\int_{\Gamma_N} g \, \gamma_0(v) \, d\gamma}$$ $= \int_\Gamma g \, \gamma_0(v) \, d\gamma$ car $\int_{\Gamma_0} g \, \gamma_0(v) \, d\gamma = 0$ car $v \in H^1_{0,0}(\Omega)$

D'où le problème :

1) (P_{FV}) Trouver $u \in H^1_{0,0}(\Omega)$ tq $\forall v \in H^1_{0,0}(\Omega)$

$$a(u,v) = \ell(v)$$

avec $a : H^1_{0,0}(\Omega) \times H^1_{0,0}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$(u,v) \longmapsto \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_\Omega c u v \, dx$$

$\ell : H^1_{0,0}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$v \longmapsto \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g \, \gamma_0(v) \, d\gamma$$

2) $H^1_{0,0}(\Omega)$ muni de $\langle \, \rangle_{1,\Omega}$ est un espace de Hilbert

* Etude de a :

- a est bilinéaire (clair)
- a est continue :

$\forall (u,v) \in H^1_{0,0}(\Omega) \times H^1_{0,0}(\Omega)$

$$|a(u,v)| \leq \Big| \underbrace{\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx}_{= \langle u,v \rangle_{1,\Omega}} \Big| + \Big| \underbrace{\int_\Omega c u v \, dx}_{= \langle cu, v \rangle_{L^2(\Omega)}} \Big|$$

Rq : $1, \Omega = 1\Omega$

$$|a(u,v)| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |u|_{1\Omega} \, |v|_{1\Omega} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Par hyp, $\exists \, C_\Omega > 0$ tq $\forall w \in H^1_{0,0}(\Omega)$ $\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega |w|_{1,\Omega}$

$$|a(u,v)| \leq \underbrace{\left(1 + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} C_\Omega^2\right)}_{\text{cste} > 0} |u|_{1,\Omega} \, |v|_{1\Omega}$$

- a est coercive :

$\forall v \in H^1_{0,0}(\Omega)$: $a(v,v) = |v|_{1\Omega}^2 + \int_\Omega c v^2 \, dx$

Par hyp, $c(x) \geq 0$ p.p sur Ω, d'où $\int_\Omega c v^2 \, dx \geq 0$

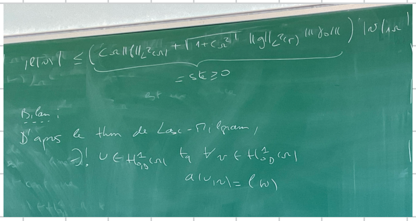
$\Rightarrow a(v,v) \geq |v|_{1\Omega}^2$ et ce $\forall v \in H^1_{0,0}(\Omega)$

* Etude de ℓ :

- ℓ est linéaire, par linéarité de γ_0 (et de l'intégrale)
- $\forall v \in H^1_{0,0}(\Omega)$

$$|\ell(v)| \leq \Big| \underbrace{\int_\Omega f v \, dx}_{= \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}} \Big| + \Big| \underbrace{\int_\Gamma g \, \gamma_0(v) \, d\gamma}_{= \langle g, \gamma_0(v) \rangle_{L^2(\Gamma)}} \Big| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)}$$

$$\underset{\substack{\text{par hyp. sur } \gamma_0 \\ \text{et } H^1_{0,0}(\Omega)}}{\leq} C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)} |v|_{1\Omega} + \|g\|_{L^2(\Gamma)} \, |||\gamma_0||| \, \underbrace{\|v\|_{H^1(\Omega)}}_{\leq \sqrt{1 + C_\Omega^2} \, |v|_{1,\Omega}}$$



V_ Résolution numérique : Méthode des éléments finis :

1) Principe de la méthode de Galerkin :

On s'intéresse au problème (P_{FV}). Trouver $u \in V$ tq $\forall v \in V$ avec V espace de Hilbert, $a(u,v) = \ell(v)$

$a : V \times V \to \mathbb{R}$ forme bilinéaire continue et coercive.

$\ell : V \to \mathbb{R}$ forme linéaire continue

de sorte que (P_{FV}) admet une unique solution $u \in V$.

Idée : On va chercher une "approximation" de $u \in V$ sur un s.e.v de V, de dimension $< +\infty$ noté V_h.

Typiquement, $\dim V_h = N_h$ avec $h \sim \frac{1}{N_h}$

On cherche ainsi :

(P_{FV_h}) $\quad u_h \in V_h$ tq $\forall v_h \in V_h$

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

Supposons que (P_{FV_h}) admet une solution, notée $u_h \in V_h$

$\forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$

De plus, $v_h \in V \Rightarrow a(u, v_h) = \ell(v_h)$ par définition de u solution de (P_{FV})

D'où, $\forall v_h \in V_h$: $\quad a(u - u_h, v_h) = 0$

Interprétation de u_h :

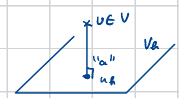
En supposant a symétrique, il vient que a est un produit scalaire sur V.

On montre que V muni de a est un espace de Hilbert.

De plus, V_h est un s.e.v fermé (car de dim $< +\infty$) de V

D'où, $\forall v_h \in V_h \quad a(u - u_h, v_h) = 0$ avec $u_h \in V_h \iff u_h = \Pi_{V_h}^{a}(u)$

u_h est la projection orthogonale au sens du produit scalaire a, de $u \in V$ sur V_h



Donc, pour le produit scalaire "a" c'est un problème de projection

b) Existence / Unicité de la solution de (P_{FV_h}) :

Prop : Lemme de Céa :

Soit V un espace de Hilbert

Soient a une forme bilinéaire continue coercive et ℓ une forme linéaire continue,

de sorte que $\exists!\, u \in V$ tq $a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V$

Soit V_h s.e.v de V de dim $< +\infty$

Alors $\exists!\, u_h \in V_h$ tq $\forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$

De plus, $\|u - u_h\|_V \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$ avec $M > 0$: constante de continuité de a

$\alpha > 0$: constante de coercivité de a

Preuve :

* V_h muni du produit scalaire induit par $\langle\,\rangle_V$ sur V_h est un espace de Hilbert.

En effet, V_h sev fermé $\Rightarrow$ V_h est complet pour la norme $\|\ \|_V$ car V muni de cette norme est un Banach.

$\Rightarrow$ V_h est un Banach pour la norme induite sur V_h par $\|\ \|_V$

D'où d'après le théorème de Lax-Milgram,

$$\exists!\, u_h \in V_h \text{ tq } \forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$$

* Par coercivité de a : $\|u - u_h\|_V^2 \leqslant \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - u_h)$

D'où, $\forall v_h \in V_h$, $\|u - u_h\|_V^2 \leqslant \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h)$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, u - v_h) + \frac{1}{\alpha} a(u - u_h, \overbrace{v_h - u_h}^{\in V_h})$$

On $\forall w_h \in V_h$, $a(u-u_h, w_h) = 0$ d'après a)

$\Rightarrow a(u-u_h, v_h-u_h) = 0$

D'où $\|u-u_h\|_V^2 \leq \frac{1}{\alpha} a|u-u_h, v-v_h| \leq \frac{M}{\alpha}\|u-u_h\|_V \|u-v_h\|_V$ par continuité de a

Si $u \neq u_h$, il vient $\|u-u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha}\|u-v_h\|_V$

Encore vraie, si $u = u_h$

D'où $\forall v_h \in V_h$ $\|u-u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha}\|u-v_h\|_V$

$\Rightarrow \|u-u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_V$

c) Résolution de (P_{FV_h})

Notons $N_h = \dim V_h$

Soit $(w_i)_{i \in [\![1, N_h]\!]} \in V_h^{N_h}$ une base de V_h

Soit $u_h \in V_h$, $\exists ! (x_i)_{i \in [\![1,N_h]\!]} \in \mathbb{R}^{N_h}$ tq $u_h = \sum_{i=1}^{N_h} x_i w_i$

V_h solution de $(P_{FV_h}) \iff \forall v_h \in V_h$ $a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$

$\iff \forall i \in [\![1, N_h]\!]$ $a(u_h, w_i) = \ell(w_i)$ car $(w_i)_{i \in [\![1,N_h]\!]}$ base de V_h

$\iff \forall i \in [\![1, N_h]\!]$ $a\left(\sum_{j=1}^{N_h} x_j w_j, w_i\right) = \ell(w_i)$

$\iff \forall i \in [\![1, N_h]\!]$: $\sum_{j=1}^{N_h} x_j a(w_j, w_i) = \ell(w_i)$

Une solution de (P_{FV_h}) : $\iff \forall i \in [\![1, N_h]\!]$

$\sum_{j=1}^{N_h} a(w_j, w_i) x_j = \ell(w_i)$

$\iff A_h x_h = b_h$

avec $A_h \in \mathcal{M}_{N_h}(\mathbb{R})$ tq $(A_h)_{ij} = a(w_j, w_i)$ $\forall (i,j) \in [\![1, N_h]\!]^2$

$b_h \in \mathbb{R}^{N_h}$ tq $(b_h)_i = \ell(w_i)$ $\forall i \in [\![1, N_h]\!]$

et $x_h = (x_i)_{i \in [\![1,N_h]\!]} \in \mathbb{R}^{N_h}$ inconnue.

On est donc amenés à resoudre un système linéaire de taille N_h.

$\forall x \in \mathbb{R}^{N_h} \setminus \{0\}$:

$x^T A_h x = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} \overbrace{(A_h)_{ij}}^{= a(w_j, w_i)} x_i x_j = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{j=1}^{N_h} a(w_j, w_i) x_i x_j$

$= a\left(\sum_{j=1}^{N_h} x_j w_j, \sum_{i=1}^{N_h} x_i w_i\right)$ par bilinéarité de a

$= a(v_h, v_h)$

avec $v_h = \sum_{i=1}^{N_h} x_i w_i \in V_h$

Par coercivité de a, $x^T A_h x \geq \alpha \|v_h\|_V^2$ or $x \neq 0 \Rightarrow v_h \neq 0$

d'où $x^T A_h x > 0$ et ce $\forall x \in \mathbb{R}^{N_h} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow A_h$ définie positive

En particulier, A_h est inversible.

2) Exemple 2D :

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$ avec Ω domaine de $\mathbb{R}^2$ et $f \in L^2(\Omega)$

Il vient :

(P_{FV}) : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tq $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ $a(u,v) = \ell(v)$

avec $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\ell : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$

$(u,v) \mapsto \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx$ $\quad v \mapsto \int_\Omega f v \, dx$

a) Principe 2D :

On cherche à recouvrir Ω par des éléments $(T_p)_{p\in[\![1,N_T]\!]}$ de formes géométriques simples (triangles, quadrangles). Dans la suite, on suppose que les T_p, $\forall p\in[\![1,N_T]\!]$ sont des triangles.

On note $\mathcal{T}_h=(T_p)_{p\in[\![1,N_T]\!]}$, avec $h=\sup\limits_{p\in[\![1,N_T]\!]} h(T_p)$ avec $h(T)$ le diamètre du triangle T, à savoir la plus grande distance entre 2 points de T.

Déf : Triangulation admissible

Soit $\mathcal{T}_h=(T_p)_{p\in[\![1,N_T]\!]}$ une triangulation, $\mathcal{T}_h$ est dite admissible si :

i) l'intersection de deux éléments est : soit vide / soit réduite à un sommet, soit réduite à une arête toute entière.

ii) Tous les "coins" de Γ sont des sommets d'éléments de $\mathcal{T}_h$

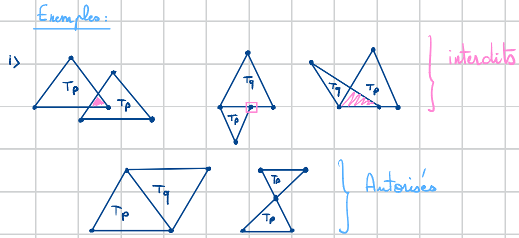
iii) Soit $\Omega_h=\bigcup\limits_{p=1}^{N_T} T_p$ frontière de Ω_h

On note $\Gamma_h=\partial\Omega_h$, alors tous les sommets des éléments de $\mathcal{T}_h$ sur Γ_h sont également sur Γ.

iv) Les éléments de $\mathcal{T}_h$ ne sont pas dégénérés. ($\forall p\in[\![1,N_T]\!]$ aire$(T_p)\neq 0$)

Exemples :

i)



b) Construction de V_h :

On suppose avoir N_T triangles dans le maillage recouvrant Ω. Soit $(q_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}$ les sommets de ce triangle.
En notant $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ les coordonnées d'un point dans $\Omega\,(\subset\mathbb{R}^2)$ pour ce problème
On pose $P^1=\mathbb{R}_1[X_1,X_2]$ les polynômes de degré au plus 1, en les variables X_1 et X_2
On a $\dim P^1=3$ et $(1,X_1,X_2)$ forme une base de P^1.
On pose $\tilde{V}_h=\{v_h\in C^0(\bar{\Omega})$ tq $\forall p\in[\![1,N_T]\!]$ $v_h|T_p\in P^1\}$

$$V_h=\{v_h\in\tilde{V}_h \text{ tq } v_h|_\Gamma=0\}$$

On a les propriétés suivantes pour $\tilde{V}_h$ et V_h :

i) Les fonctions de $\tilde{V}_h$ sont entièrement caractérisée par leurs valeurs en les sommets $(q_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ du maillage.

ii) $\dim\tilde{V}_h=N_S$

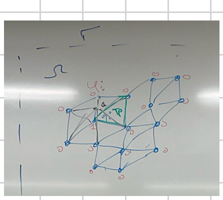
et $(\varphi_i)_{i\in[\![1,N_S]\!]}\in\tilde{V}_h^{N_S}$ tq $\forall j\in[\![1,N_S]\!]$, $\varphi_i(q_j)=\delta_{ij}$ est une base de $\tilde{V}_h$.

iii) $\tilde{V}_h\subset H^1(\Omega)$

iv) $\dim V_h=N_i$ avec N_i le nombre de sommets (q_i) n'appartenant pas à Γ.

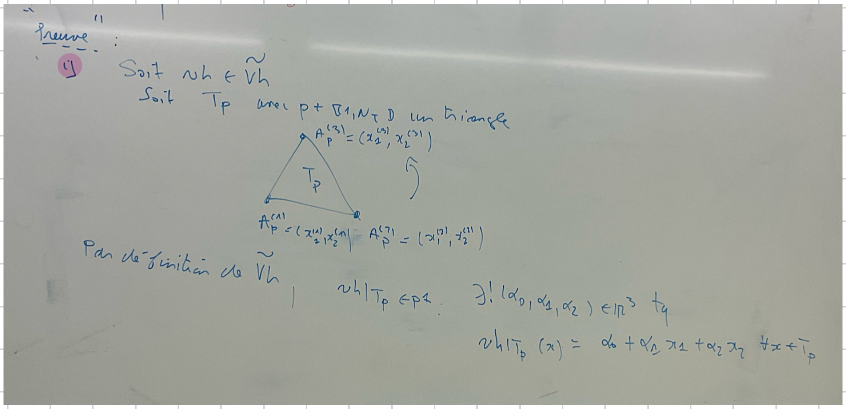
v) $V_h\subset H_0^1(\Omega)$

Rem :



⚠ φ_i est à support compact.
et pour les triangles qui n'ont pas q_i en sommet φ_i est nulle.

"Preuve" :



D'où $\alpha_0 + \alpha_1 x_1^{(i)} + \alpha_2 x_2^{(i)} = v_h(A_p^{(i)})$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} v_h(A_p^{(1)}) \\ v_h(A_p^{(2)}) \\ v_h(A_p^{(3)}) \end{bmatrix}} \quad \text{avec } i \in [\![1,3]\!]$$

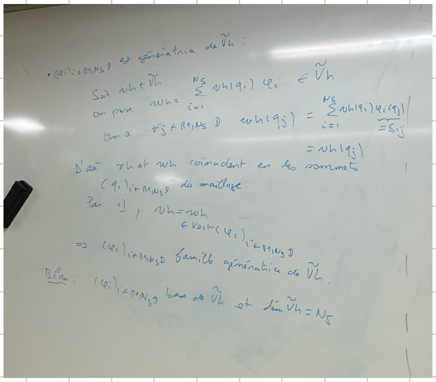
j'ai juste besoin de connaître v_h en ces Ns valeurs (les sommets du triangle), donc j'ai juste besoin de résoudre le système d'équations, et là j'aurai mes coeffs α_i qui définissent entièrement le polynome.

or
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \\ 1 & x_1^{(3)} & x_2^{(3)} \end{vmatrix} = (x_1^{(2)} - x_1^{(1)})(x_2^{(3)} - x_2^{(1)}) - (x_1^{(3)} - x_1^{(1)})(x_2^{(2)} - x_2^{(1)})$$
$$= \| \overrightarrow{A_p^{(1)} A_p^{(2)}} \wedge \overrightarrow{A_p^{(1)} A_p^{(3)}} \|_2$$
$$= 2 \text{ aire}(T_p) \neq 0 \text{ car } \mathcal{T}_h \text{ triangulation admissible}$$

$\Rightarrow$ Ce système admet une unique solution.
D'où $v_h|_{T_p}$ caractérisé par ses valeurs sur les 3 sommets de T_p.

Il vient que v_h caractérisée par la connaissance des valeurs $(v_h(q_i))_{i \in [\![1, N_S]\!]}$

ii) • On vérifie que $\forall i \in [\![1, N_S]\!]$, $\varphi_i \in \tilde{V}_h$
• $(\varphi_i)_{i \in [\![1, N_S]\!]}$ est libre :
Soit $(\lambda_i)_{i \in [\![1, N_S]\!]} \in \mathbb{R}^{N_S}$ tq $\sum_{i=1}^{N_S} \lambda_i \varphi_i = 0$
D'où $\forall j \in [\![1, N_S]\!]$:
$$\sum_{i=1}^{N_S} \lambda_i \underbrace{\varphi_i(q_j)}_{= \delta_{ij} \text{ par déf de } \varphi_i} = 0 \Rightarrow \forall j \in [\![1, N_S]\!] \quad \lambda_j = 0$$
d'où $(\varphi_i)_{i \in [\![1, N_S]\!]}$ est libre.

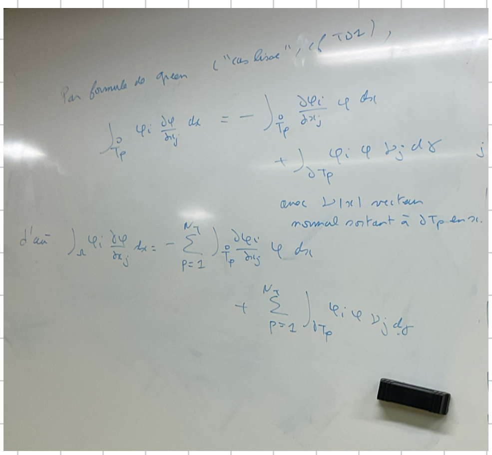


iii) Mtq $\tilde{V}_h \subset H^1(\Omega)$
* $\forall i \in [\![1, N_S]\!]$ $\varphi_i \in L^2(\Omega)$
* Soit $j \in \{1, 2\}$
Mtq $\exists w_j \in L^2(\Omega)$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\int_\Omega \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega w_j \varphi \, dx$

$$\int_\Omega \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \sum_{p=1}^{N_T} \int_{T_p} \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \quad \text{car } \Omega = \bigcup_{p=1}^{N_T} T_p = \sum_{p=1}^{N_T} T_p$$
$$= \sum_{p=1}^{N_T} \int_{\mathring{T}_p} \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

intérieur du triangle T_p (on ne peut pas trop contrôler ce qui se passe à la frontière, donc on ne peut pas dériver) et on ne peut appliquer les formules de Green que sur des ouverts.

Or, $\varphi_i|_{\mathring{T}_p} \in \mathcal{C}^1(T_p)$ car $\varphi_i|_{\mathring{T}_p} \in \mathbb{P}^1$
$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big|_{\mathring{T}_p} \in \mathcal{C}^1(T_p)$ car $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

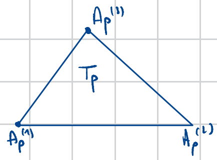


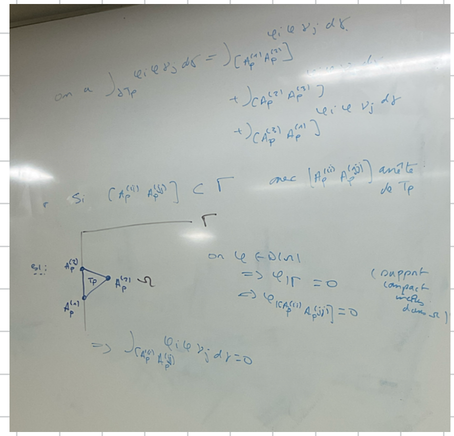
on $\displaystyle\sum_{p=1}^{N_T} \int_{\mathring{T}_p} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\, \varphi \, dx = \sum_{p=1}^{N_T} \int_{\mathring{T}_p} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\Big|_{\mathring{T}_p} \varphi \, dx$

$\displaystyle = \sum_{p=1}^{N_T} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\Big|_{\mathring{T}_p} \varphi \, 1_{\mathring{T}_p} \, dx$

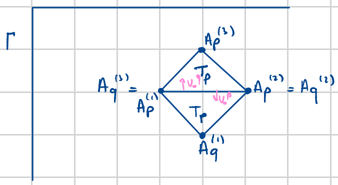
$\displaystyle = \int_{\Omega} \underbrace{\left[\sum_{p=1}^{N_T} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\Big|_{\mathring{T}_p} 1_{\mathring{T}_p} \right) \right]}_{:= w_j \in L^2(\Omega)} \varphi \, dx$

d'où $\displaystyle\int_\Omega \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega w_j \varphi + \sum_{p=1}^{N_T} \int_{\partial T_p} \varphi_i \varphi \nu_j \, d\gamma$



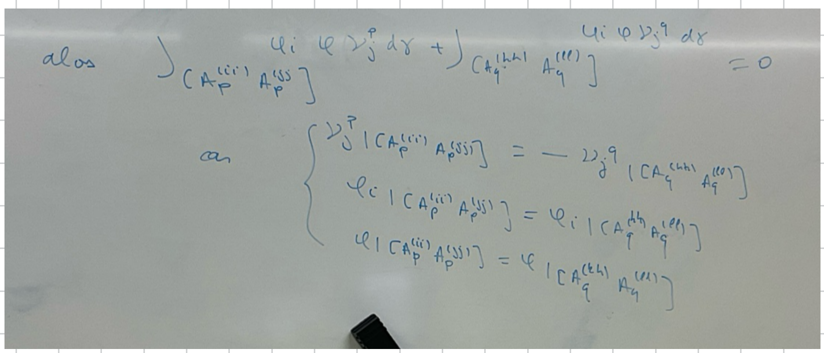


* Sinon soient T_p et T_q avec $(p,q) \in [\![1, N_T]\!]^2$ $p \neq q$ tq



et $[A_p^{(ii)} \; A_p^{(jj)}] = [A_q^{(kk)} \; A_q^{(ll)}] \notin \Gamma$

avec $(ii, jj, kk, ll) \in \{1, 2, 3\}^4$



D'où $\displaystyle\sum_{p=1}^{N_T} \int_{\partial T_p} \varphi_i \varphi \nu_j \, d\gamma = 0$

Bilan : $\forall j \in \{1,2\}$ $\displaystyle\int_\Omega \varphi_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega w_j \varphi \, dx$ $\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $w_j \in L^2(\Omega)$

$\Rightarrow$ φ_i admet une dérivée faible et $\varphi_i \in H^1(\Omega)$

c) Construction des données du système associé à (P_{V_h})

(P_{V_h}) : Trouver $u_h \in V_h$ tq $\forall v_h \in V_h$ $\quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h)$

En posant $u_h = \sum_{i=1}^{N_i} \alpha_i \varphi_i$

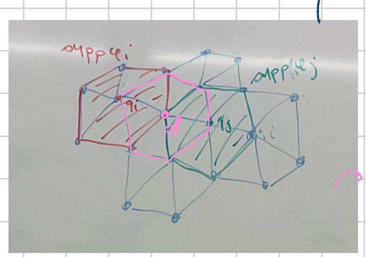
Ceci revient à résoudre $A_h \alpha = b_h$ avec $[A_h]_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ $\quad \forall (i,j) \in [\![1, N_i]\!]^2$

$[b_h]_i = \ell(\varphi_i)$ $\quad \forall i \in [\![1, N_i]\!]$

Calcul de $[A_h]_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) = \displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx + \int_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx$?

$[b_h]_i = \ell(\varphi_i) = \displaystyle\int_\Omega f \varphi_i \, dx$?

Idée : $\displaystyle\int_\Omega \ldots \, dx = \sum_{p=1}^{N_T} \int_{T_p} \ldots \, dx$ $\Rightarrow$ assemblage de A_h et b_h : boucle sur les triangles.



* Si $\text{mes}(\text{supp}\, \varphi_i \cap \text{supp}\, \varphi_j) = 0$

alors $\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \varphi_i \varphi_j \, dx = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx = 0 \end{cases}$

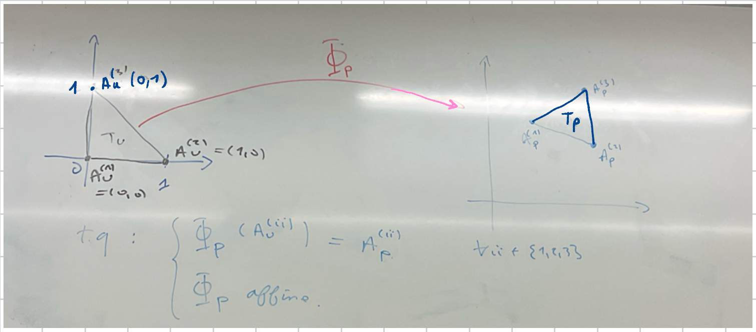
$\Rightarrow a(\varphi_j, \varphi_i) = 0$

* Sinon $(\text{mes}(\text{supp}\, \varphi_i \cap \text{supp}\, \varphi_j) \neq 0)$

$\Rightarrow$ Stratégie de l'élément de base : $\displaystyle\int_{T_p} \varphi_i \varphi \, dx + \int_{T_p} \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j \, dx$?

Question : Comment calculer $\int_{T_p} \_\_ \, dx$ avec T_p triangle quelconque de la triangulation

$\Rightarrow$ Changement de variable pour se ramener à un triangle de référence.



prop / def : Coordonnées barycentriques relatives à un triangle.

Soit T un triangle non dégeneré

Soit $M = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$\exists! \, (\lambda_i(M))_{i \in [\![1,3]\!]} \in \mathbb{R}^3$ tq $\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(M) = 1 \\ M = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(M) A^{(i)} \end{cases}$

Les coeffs $\lambda_i(M)_{i \in [\![1,3]\!]}$ sont appelées coordonnées barycentriques relativement à T.