Introduction

Méthode des différences finies :

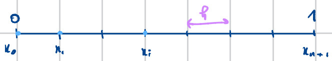
Trouver u solution de :

$$(P)\ \begin{cases} -u''(x) + c(x)\,u(x) = f(x) \text{ sur } \Omega =]0,1[\\ u(x) = 0 \quad \text{sur la frontière de } \Omega \end{cases}$$

① Etude théorique pour montrer qu'il y'a existence et unicité d'une solution dans un espace fonctionnel à définir.

② Chercher à trouver une approximation numérique (différences finies).

On se donne un maillage régulier de $\Omega =]0,1[$ de pas uniforme $h > 0$



On approxime les dérivées (partielles) en x_i $\forall i \in [\![0, N]\!]$ depuis les valeurs de u aux voisinages de x_i (développement de Taylor) :

$$u''(x_i) \simeq \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

hyp : $u \in \mathcal{C}^4(]0,1[)$

On cherche $(u_i)_{i \in [\![0,N]\!]} \in \mathbb{R}^{N+1}$ une approximation de $u(x_i) \in \mathbb{R}^{N+1}$

- Conditions aux limites $u_0 = u_N = 0$
- $\forall i \in [\![1, N-1]\!]$ $\quad \frac{-u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c(x_i)\,u_i = f(x_i)$

$\Rightarrow$ système d'équations à resoudre pour obtenir $(u_i)_{i \in [\![1,N-1]\!]}$

③ Etude théorique du schéma : erreur de consistence du schéma, stabilité du schéma pour des EDP instationnaires, et convergence de la méthode.

Remarque : La méthode peut conduire à chercher des solutions "très" régulières (ex : $u \in \mathcal{C}^4(]0,1[)$) pour le schéma alors que $u \in \mathcal{C}^2$ pourrait suffire selon les hypothèses en c et f.

Question : Comment appréhender des solution "pas régulières" ?

Formulation variationnelle et méthode des éléments finis :

Idée : Soit u solution du problème précédent

① Soit $v \in V$ (V à définir) (v est juste une fonction de x par laquelle je multiplie des deux côtés pour pouvoir prouver de bonnes props après).

$$\Rightarrow \int_\Omega -u''v\,dx + \int_\Omega c\,u\,v\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx \quad (P_v)$$

Objectif : Trouver $u \in V$ tq $\forall v \in V$ $\int_\Omega -u''v\,dx + \int_\Omega c\,u\,v\,dx = \int_\Omega f\,v\,dx$

$\Rightarrow$ "formulation variationnelle".

Question : choix de V (et hyp sur c et f) pour que :

* les intégrales soient bien définies.
* (P_v) admet une unique solution.

② Lien entre la solution de (P_{FV}) et la solution du problème (P) original ?

On obtiendra une solution dite "faible", qui vérifiera u solution de P presque partout sur Ω (on ne sait pas ce qui se passe sur des ensembles de mesures nulles)

③ Méthode des éléments finis :

- Résolution numérique de (P_{FV})
- Convergence de la méthode ?

I) Espace $L^2(\Omega)$, dérivation faible

1) Espace des fonctions "tests" :

Définition : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions définies sur Ω, à valeurs réelles, $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et à support compact inclus ds Ω.

$D(\Omega)$ est un espace vectoriel.

Remarque : i) Support d'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega \text{ tq } \varphi(x) \neq 0\}}$ → l'adhérence (ou la fermeture) de l'ensemble

↳ i.e. le plus petit fermé qui contient l'ensemble

ii) Soit $\varphi \in D(\Omega)$, alors toutes ses dérivées sont également ds $D(\Omega)$.

Définition : Convergence dans $D(\Omega)$

Soit $\varphi \in D(\Omega)$

Soit $(\varphi_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}$

(φ_p) converge vers φ dans $D(\Omega)$ si :

i) $\exists K \subset \Omega$ compact tq $\forall p \in \mathbb{N}$ $\mathrm{supp}\, \varphi_p \subset K$ et $\mathrm{supp}\, \varphi \subset K$

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ $(D^\alpha(\varphi_p))$ converge uniformément vers $D^\alpha \varphi$ avec la notation $D^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall p \geq p_0$ $\forall x \in \Omega$ $|D^\alpha \varphi_p(x) - D^\alpha \varphi(x)| < \varepsilon$

ex : Dans $\mathbb{R}^3$, $\alpha = (1, 0, 1)$, $D^\alpha f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}$

2) Espace $L^2(\Omega)$:

Définition : espace $L^2(\Omega)$

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ouvert muni de la mesure de Lebesgue. On pose $\mathcal{L}^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables de carré intégrable sur Ω.

$\Rightarrow \mathcal{L}^2(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable tq } \int_\Omega |f|^2 dx < +\infty \}$

Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$ définie par : $\forall (f, g) \in (\mathcal{L}^2(\Omega))^2$: $f \sim g \iff f(x) = g(x)$ p.p sur Ω

On pose $L^2(\Omega) = \dfrac{\mathcal{L}^2(\Omega)}{\sim}$ l'ensemble des classes d'équivalence ds $\mathcal{L}^2(\Omega)$ de la relation $\sim$.

Soit $[f] \in L^2(\Omega)$ $[f] = \{ g \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ tq } g(x) = f(x) \text{ p.p. sur } \Omega \}$

Remarque : Dans la suite, on associera $[f] \in L^2(\Omega)$ à son représentant $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, et on considérera $[f]$ notée f, comme une fonction.

Theorème : $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle , \rangle_{L^2(\Omega)}$ défini par :

$$\langle , \rangle_{L^2,\Omega} : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$(f,g) \mapsto \int_\Omega fg \, dx$$

de norme associée $\| \|_{L^2(\Omega)} : L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$
$$f \mapsto \int_\Omega |f|^2 dx$$

est un espace de Hilbert, à savoir un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et complet par la norme associée à ce prod scalaire).

CTD 2 :

proposition : Soit $u \in L^2(\Omega)$

Si $\exists\ c > 0$ tq $\forall i \in [\![1, n]\!]$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ \left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leqslant c \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$

alors u admet une dérivée faible d'ordre 1.

définition : Soit $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tq $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $\sigma_i \in L^2(\Omega)$

On notera $\sigma \in [L^2(\Omega)]^n$

σ admet une divergence faible si :

$\exists\, w \in L^2(\Omega)$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\int_\Omega \sigma . \nabla \varphi \, dx = -\int_\Omega w \varphi \, dx$

avec la notation $\sigma(x).\nabla\varphi(x) := \sigma(x)^T \nabla \varphi(x)$

$= \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)$ On notera $\operatorname{div} \sigma := w$

proposition : Soit $\sigma \in [L^2(\Omega)]^n$

Si $\exists\, c > 0$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ $\left| \int_\Omega \sigma . \nabla \varphi \, dx \right| \leqslant c \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$

alors σ admet une divergence faible.

II. Compléments sur les espaces de Hilbert.

1) Suite de Cauchy, partie complète :

A. déf. Suite de Cauchy.

Soit E un espace vectoriel normé (e.v.n)

Soit $(U_n) \in E^{\mathbb{N}}$

(U_n) est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$

$p \geqslant n_0, q \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geqslant n_0$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\|U_{n+p} - U_n\| < \varepsilon$

proposition : i) Toute suite de Cauchy est bornée.

ii) Toute suite convergente est de Cauchy.

Remarque : Les suites de Cauchy ne sont pas nécessairement convergentes.

B. déf : partie complète :

Soit E e.v.n

Soit $X \subset E$ non vide, X est dite complète si toute suite de Cauchy de X converge dans X.

déf : Banach. Soit E e.v.n

Si E est complet, E sera appelé Banach.

ex : $\mathbb{R}$ est complet (pour $|\ |$)

($\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, evn de dim $< +\infty$) sont complets.

prop : E evn, Toute partie complète de E est fermée.

prop : Soit E Banach, Alors ses parties complètes sont exactement ses parties fermées.

proposition : Soit E e.v.n

Toute partie compacte est complète

prop : Tout e.v.n de dim $< +\infty$ est complet.

prop : $L^2(\Omega)$ est complet pour $\| \ \|_{L^2(\Omega)}$

2) Espace de Hilbert :

déf : i) un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

ii) un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire.

déf : Soit H un espace de Hilbert

Soit $F \subset H$, $F \neq 0$.

On appelera orthogonal de F dans H, noté $F^\perp$, la partie $F^\perp = \{x \in H \text{ tq } \forall y \in F \ \langle x, y \rangle = 0\}$

prop : Soit H un espace de Hilbert

Soit $F \subset H$, $F \neq \emptyset$

Alors $F^\perp$ est un s.e.v fermé de H.

Théorème : Projection sur une partie convexe fermée non vide.

Soit H un espace de Hilbert

Soit $\mathcal{C} \subset H$ convexe, fermée, non vide

$\forall x \in H \quad \exists! \, a_x \in \mathcal{C}$ tq $\|x - a_x\| = \inf\limits_{y \in \mathcal{C}} \|x - y\|$

On notera $a_x = \Pi_{\mathcal{C}}(x)$ la projection orthogonale de x sur $\mathcal{C}$.

proposition : Sous les mêmes hypothèses, $\Pi_{\mathcal{C}}$ est 1-Lipschitzienne

$\forall (x,y) \in H^2 \quad \|\Pi_{\mathcal{C}}(x) - \Pi_{\mathcal{C}}(y)\| \leq \|x - y\|$

Théorème : Projection sur un s.e.v fermé.

Soit H un espace de Hilbert.

Soit F s.e.v fermé de H

On a :

i) $\forall x \in H \quad \Pi_F(x)$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} \Pi_F(x) \in F \\ \forall y \in F \quad \langle x - \Pi_F(x), y \rangle = 0 \end{cases}$$

ii) Π_F est linéaire

iii) $H = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$

Théorème : Théorème de représentation de Riez :

Soit H un espace de Hilbert.

Soit f une forme linéaire continue sur H.

Alors $\exists! \, a \in H$ tq $\forall x \in H$, $f(x) = \langle x, a \rangle$

De plus $|||f||| = \|a\|$

prop : $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle , \rangle_{L^2(\Omega)}$ défini par $\forall (f,g) \in L^2(\Omega)^2$, $\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f g \, dx$ est un espace de Hilbert.

III - Espace de Sobolev :

1) Espace $H^1(\Omega)$ et ses généralisations :

déf : On note $H^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ admettant une derivée faible (d'ordre 1)

On écrira : $H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \text{ tq } \forall i \in [\![1, n]\!] \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)\}$ → dans ce cours, cette notation voudra tjs dire dérivée faible sauf si on précise le contraire.

* avec la notation "$\forall i \in [\![1, n]\!] \ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$" pour "$v$ admet une derivée faible".

prop : $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle , \rangle_{H^1(\Omega)}$, défini par $\forall (u,v) \in H^1(\Omega)^2$, $\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \rangle_{L^2(\Omega)}$

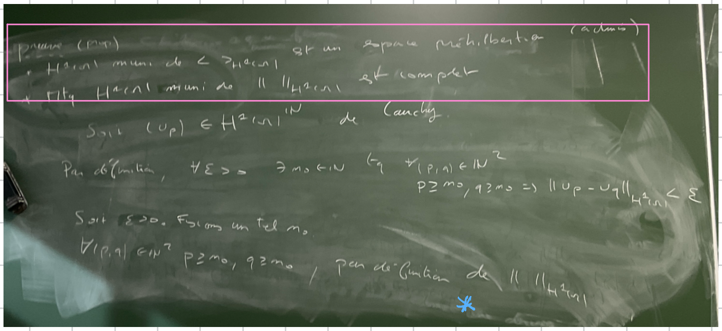
et de norme associée $\| \ \|_{H^1(\Omega)}$ définie par : $\forall u \in H^1(\Omega)$, $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}}$ est un espace de Hilbert

Remarque : On notera $\forall u \in H^1(\Omega)$, $|u|^2_{1,\Omega} := \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}$

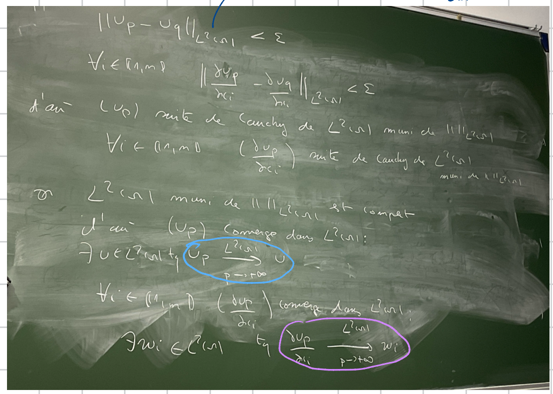
$|\ |_{1,\Omega}$ est une semi-norme sur $H^1(\Omega)$ $\left(|u|_{1,\Omega}=0 \not\Rightarrow u=0\right)$.

$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}}$

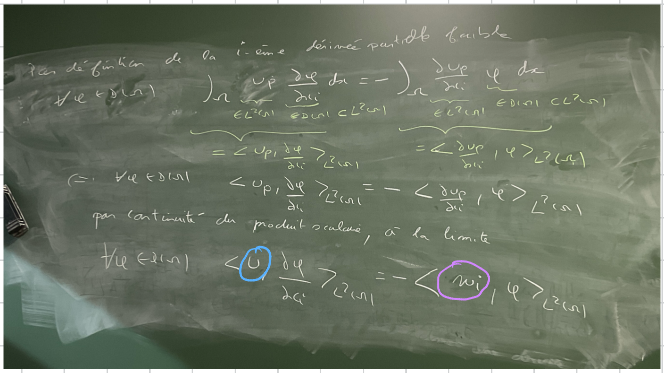
1



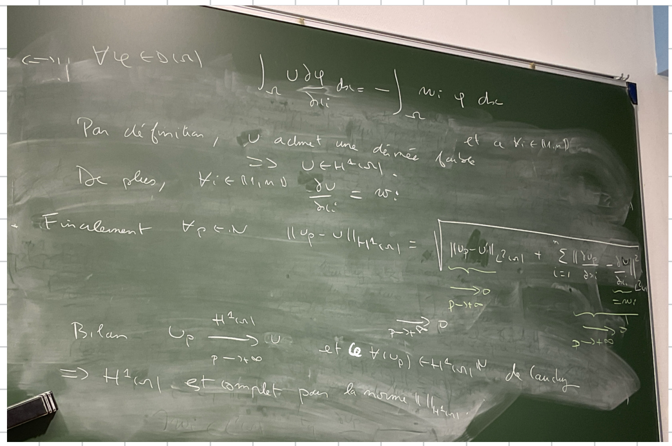
2



3



4



Remarque : i) On suppose Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($\neq \emptyset$) non vide alors, $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$

ii) $H^1(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$: $\exists v \in L^2(\Omega)$ tq $v \notin H^1(\Omega)$
inclus strictement

iii) $D(\Omega)$ est un s.e.v de $H^1(\Omega)$

Mais $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$

2) Espace $H^1_0(\Omega)$

Def : $H^1_0(\Omega)$ est la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\ \|_{H^1(\Omega)}$

$$H^1_0(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$
$$= \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tq } \exists (v_p) \in D(\Omega)^{\mathbb{N}} \text{ tq } \lim_{p\to+\infty} \|v_p - v\|_{H^1(\Omega)} = 0 \right\}$$

Théorème : Inégalité de Poincaré

Soit Ω ouvert borné (non vide)

$\exists C_\Omega > 0$ tq $\forall v \in H^1_0(\Omega)$, $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\ |v|_{1,\Omega}$ avec $|v|_{1,\Omega} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)}}$

dépend uniquement de Ω

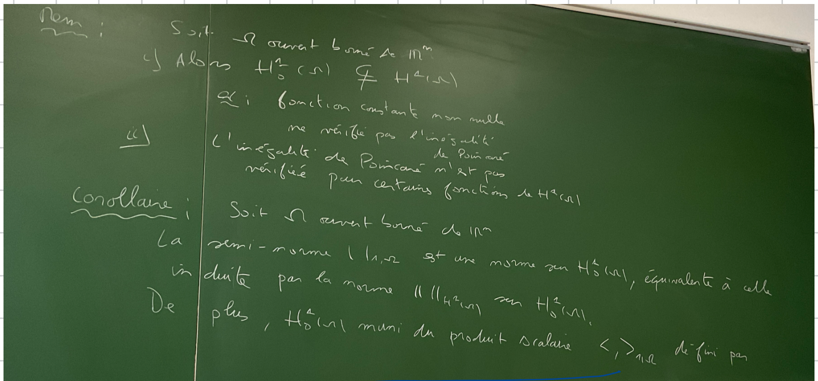
Inégalité de Poincaré :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

$|v|_{1,\Omega} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)}}$

$\exists\, C_\Omega > 0$ tq $\forall v \in H^1_0(\Omega)$

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega |v|_{1,\Omega}$$



$\forall (u,v) \in H^1_0(\Omega)^2$ $\langle u, v\rangle_{1,\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

preuve : Soit $v \in H^1_0(\Omega)$

* Par définition de $\| \ \|_{H^1(\Omega)}$, $\|v\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|^2_{1,\Omega}}$

$$\Rightarrow |v|_{1,\Omega} \leqslant \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

* De plus, par inégalité de Poincaré, $\exists\, C_\Omega > 0$ tq $\forall w \in H^1_0(\Omega)$, $\|w\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\Omega |w|_{1,\Omega}$

En particulier, $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{C_\Omega^2 |v|^2_{1,\Omega} + |v|^2_{1,\Omega}}$

$$\leqslant \sqrt{1 + C_\Omega^2}\ |v|_{1,\Omega}$$

$$|v|_{1,\Omega} \leqslant \|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \sqrt{1 + C_\Omega^2}\ |v|_{1,\Omega}$$

En particulier $| \ |_{1,\Omega}$ est définie $\left(|v|_{1,\Omega} = 0 \Rightarrow \|v\|_{H^1(\Omega)} = 0 \right.$
$\left. \Rightarrow v = 0 \right)$

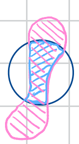
et $| \ |_{1,\Omega}$ est une norme, équivalente à celle induite par $\| \ \|_{H^1(\Omega)}$ sur $H^1_0(\Omega)$

déf : On appelle domaine de $\mathbb{R}^n$ une partie ouverte, bornée, de frontière Lipschitzienne.

déf : $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est l'ensemble des restrictions à Ω de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont à support compact dans Ω.

ex :



supp φ avec $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$\tilde{\varphi} = \varphi_{|\Omega}$

Supp $\tilde{\varphi} \subset \bar{\Omega}$

prop : Soit Ω domaine de $\mathbb{R}^n$

Alors $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$

déf : On définit $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $H^m(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega)$ tq $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| \leqslant m$
$D^\alpha v \in L^2(\Omega) \}$

Rem : Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$