23/09 MONITORIA PED

Revisão Determinantes

$$D : M_n(K) \longrightarrow K, \quad M_n(K) = \underset{\substack{\shortparallel \\ K^n}}{A_1} \oplus \cdots \oplus \underset{\substack{\shortparallel \\ K^n}}{A_n}$$

$$A = [a_1, \ldots, a_n]$$

$D$ é uma função determinante se $D$ é n-linear, alternada

$$D[v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_i, \ldots, v_n] = 0$$

e

$$D(I) = D[e_1, \cdots, e_n] = 1 \in K$$

Teo. Existe det em $M_n(K)$.

Expansão de Laplace.

$A = (a_{ij})$, $A(i|j)$

Fixe $j$,

$$E_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D(A(i|j))$$

Como det é n-linear,

$$\det[a_1, \ldots, a_n] = \det\left[\sum_{k_1} \alpha_{k_1} e_{k_1}, \ldots, \sum_{k_n} \alpha_{k_n} e_{k_n}\right]$$

$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \cdots \alpha_{nk_n} \det[e_{k_1}, \cdots, e_{k_n}]$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} \det[e_{\sigma(1)} \cdots e_{\sigma(n)}]$$

Lembre que, se

cíclica

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)(4)$$

$$I = [e_1, e_2, e_3, e_4], \quad B = [e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}, e_{\sigma(4)}] = [e_2, e_3, e_1, e_4]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E(2 \to 3) E(2 \to 1) I$$

$$\det(B) = (-1)^2 \det(I)$$

Assim,

$$\overset{D}{\cancel{\det}}[a_1, \dots, a_n] = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{1\sigma(1)} \cdots \alpha_{n\sigma(n)} \underbrace{(-1)^{\sigma}}_{\text{sign}(\sigma)} D[e_1, \dots, e_n] = \det A \, D(I)$$

Obs: det gera um espaço (das transformações alternadas)

Logo,

$$D(A) = \det A \, D(I)$$

Ex. (Hoffman 8) Seja $B \in M_n(K) = V$ e defina $T_B : V \longrightarrow V$ onde $x \longmapsto [B, x]$.

Mostre que $\det T_B = 0$.

$T_B(B) = 0$. Logo, $\operatorname{Ker} T_B \neq \{0\}$ e $T_B$ é não invertível.

Maior dimensão possível para a imagem.

$T_B \subseteq sl_n$

Obs. (Projeção Ortogonal). Seja $V$ esp. de dimensão finita $n$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em $V$. Se $U$ é um subespaço de $V$,

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

Denota-se por $P_U, P_{U^\perp}$ as projeções de $V$ em $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^\perp$ resp.

$$P_{\mathcal{U}} : V \longrightarrow \mathcal{U} \qquad P_{\mathcal{U}^\perp} : V \longrightarrow \mathcal{U}^\perp$$
$$u + u' \longmapsto u \qquad u + u' \longmapsto u'$$

$|\cdot|$: norma induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Note que $|P_{\mathcal{U}}(v)| \leq |v|$. E $v = P_{\mathcal{U}}(v) + P_{\mathcal{U}^\perp}(v)$.

Seja $u \in \mathcal{U}$.

$$P_{\mathcal{U}}(v) - u \in \mathcal{U}, \quad v - P_{\mathcal{U}}(v) \in \mathcal{U}^\perp$$

Então,
$$|v - P_{\mathcal{U}}(v)|^2 \leq |v - P_U(v)|^2 + |P_{\mathcal{U}}(v) - u|^2$$
$$= |v - P_U(v) + P_{\mathcal{U}}(v) - u|^2 = |v - u|^2$$

Pitágoras

Logo,

$$|v - P_U(v)| \leq |v - u| \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

Ex. (Quali 2018) Seja $V$ um espaço vetorial real com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e sejam $a_1, \dots, a_k \in V$.

O determinante de Gram $\Gamma(a_1, \dots, a_k)$ é definido por

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = \det((a_i, a_j))_{ij} =: \det G$$

a) Mostre que $\Gamma \geq 0$. E mostre que $\Gamma(a_1, \dots, a_k) = 0$ sse. $a_1, \dots, a_k$ são l.d.

b) Mostre que

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) \leq |a_1|^2 \cdots |a_k|^2$$

Quais os casos tem igualdade?