09/09 Monitoria PED

4. Relembre que W k-dimensional, existem $n-k$ funcionais $f_{k+1}, \dots, f_n$ tais que

$$W = \bigcap_{j=1}^{n-k} N_{f_{k+j}}$$

A matriz associada ao sistema é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R$$

Resolvendo o sistema $Rw = 0$, onde $w = (a, b, c, d)^t$ obtemos que

$$a = 3d, \quad b = -d, \quad c = -d$$

Portanto, $w \in W$,

$$w = d(3, -1, -1, 1)$$

Logo,

$$W = \text{span}\{(3, -1, -1, 1)\}$$

Vamos fazer o processo inverso. Isto é, dado $W = \text{span}\{(3, -1, -1, 1)\}$, vamos encontrar W^0.

Como $\dim V = \dim W^0 + \dim W$, sabemos que $\dim W^0 = 3$.

Se $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ é da forma

$$f = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4$$

então $f \in W^0$ sse.

$$3\alpha - \beta - \gamma + \delta = 0 \Rightarrow \delta = -3\alpha + \beta + \delta$$

Logo,

$$f = \alpha(x_1 - 3x_4) + \beta(x_2 - x_4) + \gamma(x_3 - x_4)$$

Dessa forma, W^0 é gerado pelos vetores

$$g_1 = x_1 - 3x_4$$

$$g_2 = x_2 - x_4$$

$$g_3 = x_3 - x_4$$

Revisão Base dual

Seja $\alpha = \{e_1, \dots, e_n\}$ base de V. Existe $\{e^1, \dots, e^n\}$ base de V^* tal que $e^j(e_i) = \delta_{ij}$.

Como construir essa base?

$$e^1 : V \longrightarrow F$$

$$\left.\begin{array}{l} e^1(e_1) = 1 \\ e^1(e_2) = 0 \\ \quad\vdots \\ e^1(e_n) = 0 \end{array}\right\} \text{extende por linearidade}$$

Ex: Seja $V = \mathbb{R}^n$ com base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$. Vamos construir $V^* = (\mathbb{R}^n)^*$ dual à base canônica.

Defina $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 1, & j = i \end{cases}$$

Dado $j = 1, \dots, n$, escreva

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

$$f_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_j(e_i) = x_j f_j(e_j) = x_j$$

Logo, uma base de $(\mathbb{R}^n)^*$ é dada por

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base de V e $\{e^1, \dots, e^n\}$ é sua base dual, então

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

e

$$e^j(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^j(e_i) = a_j e^j(e_j) = a_j$$

$$\therefore \quad v = \sum_{i=1}^{n} e^i(v)\, e_i$$

Tome $f \in V^*$. Então

$$f = \sum_{i=1}^{n} b_i e^i \quad \text{e} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i e^i(e_j) = b_j$$

logo,

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e^i$$

Pergunta. Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita e $\{e_i\}_{i \in I}$ um conjunto L.I.

1) Pode-se construir um conjunto L.I. $\{f_i\}_{i \in I}$ em V^* tal que $f_j(e_i) = \delta_{ij}$?

2) Tal conjunto é necessariamente base de V^*?

1) Pelo Lema de Zorn, existe β base de V tal que $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq \beta$.

Então, dado $j \in I$, defina

$$\begin{cases} f_j(v) = 0, & v \in \beta,\ v \neq e_j \\ f_j(e_j) = 1 \end{cases}$$

e extenda por linearidade.

Vamos mostrar que tal conjunto é L.I. Tome $f_{i_1}, \dots, f_{i_m}$ quaisquer em $\{f_i\}_{i \in I}$ e considere a combinação linear nula

$$\alpha_1 f_{i_1} + \dots + \alpha_n f_{i_n} = 0$$

Aplicando e_{ij} acima, temos que $\alpha_j = 0$ por arbitrariedade de j.

d) Falso. Tome $V = \mathbb{R}[x]$. Uma base de V é dada por

$$\alpha = \{1, \overset{=e_1}{x}, \overset{=e_2}{x^2}, \dots, x^n, \dots\}$$

Suponha que existam $f_1, \dots, f_n, \dots$ tais que $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ formam base de V^* e $f_j(e_i) = \delta_{ij}$.

Seja $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e defina

$$f_a : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$p(x) \longmapsto p(a)$$

Sem perda de generalidade, suponha que $f_a = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m$ e aplique $e_{m+1} = x^{m+2}$ em f_a. Logo, $a^{m+2} = 0$, o que é uma contradição.

8. Atiyah: versão geral desse exercício.

Para $k=2$, vamos verificar que $(V_1 \oplus V_2)^* = V_1^* \oplus V_2^*$.

Em dimensão finita, é imediato.

Defina o mapa

$$\psi : V_1^* \oplus V_2^* \longrightarrow (V_1 \oplus V_2)^*$$
$$(f, g) \longmapsto \psi(f,g) : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \mathbb{F}$$

onde $\psi(f,g) : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \mathbb{F}$ é definida por

$$\psi(f,g)(v_1 + v_2) = f(v_1) + g(v_2)$$

- $\psi((f,g))$ é funcional linear:

$$\psi(f,g)((v_1+v_2) + \alpha(w_1+w_2)) = \psi(f,g)((v_1+\alpha w_1) + (v_2 + \alpha w_2))$$
$$= f(v_1 + \alpha w_1) + g(v_2 + \alpha w_2) = f(v_1) + g(v_2) + \alpha(f(w_1) + g(w_2))$$
$$= \psi(f,g)(v_1+v_2) + \alpha\, \psi(f,g)(w_1+w_2)$$

Logo, ψ é bem definida.

- Vamos verificar que se (f, g) e (f', g') estão em $V_1^* \oplus V_2^*$ então

$$\psi((f,g)+\alpha(f',g'))(v_1+v_2) = \psi(f+\alpha f', g+\alpha g')(v_1+v_2)$$

$$= (f+\alpha f')(v_1) + (g+\alpha g')(v_2) = f(v_1) + g(v_2) + \alpha(f'(v_1) + g'(v_2))$$

$$= \psi(f,g)(v_1+v_2) + \alpha\psi(f',g')(v_1+v_2)$$

ou seja, ψ é linear.

Finalmente, vamos mostrar que ψ é isomorfismo.

- ψ é injetora

Seja $(f,g) \in V_1^* \oplus V_2^*$ tal que $\psi(f,g) \equiv 0$, i.e., $f(v_1) + g(v_2) = 0$ para todos $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$.

Logo, $v_2 = 0$ implica $f(v_1) = 0$, $\forall v_1 \in V_1$, ou seja, $f \equiv 0$. Analogamente, $g \equiv 0$.

Portanto, ψ é injetora.

- ψ é sobrejetora

Tome $\varphi: V_1 \oplus V_2 \to \mathbb{F}$. Decompomos

$$V_1 \xrightarrow{i_1} V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{F}$$

$$V_2 \xrightarrow{i_2} V_1 \oplus V_2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{F}$$

onde $i_1: V_1 \to V_1 \oplus V_2$; $i_2: V_2 \to V_1 \oplus V_2$
$v \mapsto (v, 0)$; $w \mapsto (0, w)$

Defina

$$\varphi_1: V_1 \to \mathbb{F}, \quad \varphi_1 = \varphi \circ i_1 \in V_1^*$$

$$\varphi_2: V_2 \to \mathbb{F}, \quad \varphi_2 = \varphi \circ i_2 \in V_2^*$$

Note que

$$\psi(\varphi_1, \varphi_2)(v_1, v_2) = \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2) = \varphi \circ i_1(v_1) + \varphi \circ i_2(v_2)$$

$$= \varphi(v_1, 0) + \varphi(0, v_2) = \varphi(v_1, v_2)$$

Logo, ψ é sobrejetora.

Suponha que o resultado é válido para $k-1 > 2$. Vamos mostrá-lo para k.

$$(V_1 \oplus \dots \oplus V_k)^* = [(V_1 \oplus \dots \oplus V_{k-1}) \oplus V_k]^*$$

Pelo caso $k=2$,

$$(V_1 \oplus \dots \oplus V_k)^* \cong [V_1 \oplus \cdots \oplus V_{k-1}]^* \oplus V_k^*$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$(V_1 \oplus \dots \oplus V_k)^* \cong V_1^* \oplus \dots \oplus V_k^*$$