30/09 MONITORIA PED

Observações. $T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $\alpha = \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$

$$X \mapsto XC$$

$$Te_{11} = e_{11}C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_{11}e_{11} + c_{12}e_{12}$$

$$e_{ij}C = \begin{pmatrix} c_{j1} & c_{j2} & \cdots & c_{jn} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$Te_{12} = e_{12}C = \begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c_{21}e_{11} + c_{22}e_{12}$$

$$Te_{21} = e_{21}C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} \end{pmatrix} = c_{11}e_{21} + c_{12}e_{22}$$

$$S = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{21} \\ 0 & 0 & c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det S = (\det C)^2$$

Lembrete: agir nas matrizes.

1. $V = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T \iff \operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^2$
2.

Suponha que

$$\operatorname{Ker} T \subsetneq \operatorname{Ker} T^2 \subsetneq \dots \subsetneq \operatorname{Ker} T^n \subsetneq \dots$$

Assim, podemos tomar um conjunto l.i. infinito. Como $\dim V < \infty$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{Ker} T^m = \operatorname{Ker} T^{m+j}, \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots$$

Analogamente,

$$\operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Im} T^2 \supseteq \dots \supseteq \operatorname{Im} T^n \supseteq \dots$$

Estabiliza por conta da dimensão

Dado que $\dim V < \infty$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{Im} T^m = \operatorname{Im} T^{m+j} \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots$$

pois $z \in \operatorname{Im} T^2$, $z = T^2(x) = T(T(x)) \Rightarrow z \in \operatorname{Im} T \Rightarrow \operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Im} T^2$

Seja $m \in \mathbb{N}$ tais que as cadeias acima estabilizam.

$$z \in V, \quad T^m(z) \in \operatorname{Im} T^{2m} \Rightarrow T^m(z) = T^{2m}(y)$$

$$\Rightarrow T^m(z) = T^m(T^m(y)) \Rightarrow T^m(z - T^m(y)) = 0$$

$$\Rightarrow z - T^m(y) \in \operatorname{Ker} T^m$$

Com isso,

$$z = (z - T^m(y)) + T^m(y) \Rightarrow V = \operatorname{Ker} T^m + \operatorname{Im} T^m$$

Como $\operatorname{Ker} T^m \cap \operatorname{Im} T^m = 0$, temos que $V = \operatorname{Ker} T^m \oplus \operatorname{Im} T^m$.

3. $V = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P \Rightarrow P$ é projeção

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = -6 \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Ker}(A) = \{0\}$$

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Im} A = 2$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \neq A$$

R: Falso.

Se $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s \Rightarrow T_1, \dots, T_s$ lineares tais que $T_i T_j = 0, \ \forall i \neq j$

e $T_1 + T_2 + \dots + T_s = I$

Seja $T_i : V \longrightarrow V, \quad v_1 + \dots + v_s \longmapsto v_i$ (projeção)

$$T_i T_j(v) = T_i(v_j) = 0, \quad i \neq j$$

R: Verdadeiro

$$v = v_1 + \dots + v_s = T_1(v) + \dots + T_s(v) = I$$

$A \in M_{m,n}$, $B \in M_{n,m}$, $n < m$, $\det(AB) = 0$

$$x \in \operatorname{Ker} B \Rightarrow Bx = 0 \Rightarrow ABx = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} AB$$

$A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$x \in \operatorname{Im} AB \Rightarrow x = AB(y) = A(B(y)) \Rightarrow \operatorname{Im} AB \subseteq \operatorname{Im} A$$

$B: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$m = \dim \operatorname{Ker} B + \dim \operatorname{Im} B \leq \dim \operatorname{Ker} AB + n$$

R. Verdadeiro

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} AB \geq m - n > 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} AB \neq 0 \Rightarrow \det(AB) = 0$$

36

4. $W_1 \oplus W_2 = V \Rightarrow V^* = W_1^0 \oplus W_2^0$

$W_1^0 \cong W_2^*, \quad W_2^0 \cong W_1^*$

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim W_1 + \dim W_2 \\ \dim V &= \dim W_1 + \dim W_1^0 \\ \dim V &= \dim W_2 + \dim W_2^0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\dim W_1^0 + \dim W_2^0 \\ &= 2\dim V - (\dim W_1 + \dim W_2) \\ &= \dim V = \dim V^* \end{aligned}$$

$\dim W_1^0 \cap W_2^0 = \dim (W_1 + W_2)^0 = \dim V^0 = 0$

$\Rightarrow W_1^0 \cap W_2^0 = 0 \Rightarrow V^* = W_1^0 \oplus W_2^0$

Defina $T: W_1^0 \to W_2^*$. Lembre que $W_1^0 = \{f \in V^* : f(w_1) = 0\}$.

Seja $\{w_1, \dots, w_p, v_1, \dots, v_q\}$ base de V. Definimos $f(w_i) = g(w_i)$, $f(v_j) = 0$.

Assim, $f \in V^*$, $g \in W^*$ e $f|_W = g$.

T é sobrejetora, pois $g \in W_2^* \Rightarrow \exists f \in V^*$, $f|_{W_2} = g$. Logo, $T(f) = f|_{W_2} = g$

T é injetora, pois

$\dim W_2^* = \dim W_2 = \dim V - \dim W_1 = \dim W_1^0$

5.

$A = [a_1, \dots, a_n] \Rightarrow \exists S_1 = \{j_1 < \dots < j_r\}$ tal que as colunas $\{a_{j_1}, \dots, a_{j_r}\}$ são l.i.

Além disso, existe $S_2 = \{i_1 < \dots < i_r\}$ tal que a submatriz associada B é tal que suas colunas são l.i. e as linhas são l.i. e mora em $M_r(K)$. Logo, $\det B \neq 0$.

Seja C submatriz de A. Então $\operatorname{rank} C \leq \operatorname{rank} A$. Logo, se C é uma matriz $l \times l$ com $\det C \neq 0$, então $l \leq r$.