20

16/09 MONITORIA PED

Relembrando

Espaço bidual. Seja V esp. vetorial, $\dim(V) = n < \infty$. A função

$$\Phi : V \to V^{**} \quad \text{é um isomorfismo de espaços vetoriais}$$
$$v \mapsto \varphi_v$$

Aqui, $\varphi_v \in \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{F})$ é definido por $\varphi_v(f) = f(v)$.

Obs. Se $\dim V = \infty$, não é verdade que $V \cong V^{**}$.

QUALI. Contra-exemplo. Tome $V = \mathbb{R}[x]$. Uma base de V é dada por $\beta = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$. Logo, $|\beta| = |\mathbb{N}|$ implica que β é enumerável.

Agora note que se $\alpha \in \mathbb{R}$, a função

$$f_\alpha : V \to \mathbb{F} \quad \text{é linear}$$
$$p \mapsto p(\alpha)$$

e $\{f_\alpha\}_\alpha$ é l.i. Assim, V^* não tem base enumerável e V^{**} também não.

Exercício. Seja $W = M_n(\mathbb{F})$ e $W_0 = \mathrm{span}\{AB - BA : A, B \in W\} = \{C : \mathrm{tr}\, C = 0\} = sl$.

provar

$W_0 \subseteq sl$ $(\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA))$. $sl = f_{\mathrm{tr}}^{-1}(0) = \mathrm{Ker}\, f_{\mathrm{tr}}$. $\dim sl = n^2 - 1$

$[A, B] := AB - BA$; $[\cdot, \cdot] : W \to W_0$.

$$A = \sum \alpha_{ij} e_{ij}, \quad B = \sum \beta_{ij} e_{ij}$$

$$[A + \alpha A_1, B] = (A + \alpha A_1)B - B(A + \alpha A_1) = [A, B] + \alpha [A_1, B]$$

$$[A, B] = \Big[\sum_{i,j} \alpha_{ij} e_{ij}, \sum_{k\ell} \beta_{k\ell} e_{k\ell}\Big] = \sum_{i,j,k,\ell} \alpha_{ij} \beta_{k\ell} [e_{ij}, e_{k\ell}]$$

$W_0 = \mathrm{span}\{[e_{ij}, e_{k\ell}] : i, j, k, \ell\}$

Obs.

$a + d = 0 \iff a = -d$

$$sl \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c e_{21} + b e_{12} + a(e_{11} - e_{22})$$

$\mathfrak{sl} = \text{span}\underbrace{\{e_{ij} : i \neq j\} \cup \{h_i, i = 1, \ldots, n\}}_{A}$, onde $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$

Veja que A é l.i.

$$\alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_n h_n = 0 \iff \alpha_1(e_{11} - e_{22}) + \ldots + \alpha_n(e_{n-1,n-1} - e_{nn}) = 0$$

$$\iff \alpha_1 e_{11} + (\alpha_2 - \alpha_1)e_{22} + \ldots + (\alpha_n - \alpha_{n-1})e_{n-1,n-1} - \alpha_n e_{nn} = 0$$

$$\therefore \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Portanto, A é l.i., $\mathfrak{sl} = \text{span } A$. Vamos contar $|A|$.

$$|\{e_{ij}, i \neq j\}| = n^2 - n; \quad |\{h_i, i\}| = n - 1 \implies |A| = n^2 - 1$$

É suficiente ver que $A \subseteq W_0$. Se $i \neq j$, note que

$$[e_{ij}, e_{jj}] = e_{ij}e_{jj} - e_{jj}e_{ij} = e_{ij} \quad \left(\text{pois } e_{ij}e_{k\ell} = \delta_{jk}e_{i\ell}\right)$$

$$-[e_{21}, e_{12}] = -(e_{21}e_{12} - e_{12}e_{21}) = -(e_{22} - e_{11}) = h_1$$

$$\vdots$$

$$[e_{i,i+1}, e_{i+1,i}] = e_{i,i+1}e_{i+1,i} - e_{i+1,i}e_{i,i+1} = e_{ii} - e_{i+1,i+1}, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

~~Espaço Quociente~~

Suponha que $\overset{=\beta}{\{f_1, \ldots, f_n\}}$ é base de V^* e queremos encontrar base $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, tal que α seja dual a β.

Seja $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ base de V^{**} dual a $\{f_1, \ldots, f_n\}$.

Note que existem $v_1, \ldots, v_n$ tais que $\varphi_{v_j} = \varphi_j$, pois $v_j = \Phi^{-1}(\varphi_j)$, $\forall j$.

Afirmação. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de V que satisfaz as propriedades acima.

De fato,

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \iff \alpha_1 \Phi^{-1}(\varphi_1) + \ldots + \alpha_n \Phi^{-1}(\varphi_n) = 0$$

Aplicando Φ dos dois lados

$$\alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_n \varphi_n = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$$

Logo,

$$f_j(v_i) = \varphi_{v_i}(f_j) = \varphi_i(f_j) = \delta_{ij}$$

$\square$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Phi"'] & V^{*} \arrow[d, "\psi"] \\ V^{**} \arrow[r, "\eta"'] & V^{***} \end{tikzcd}$$

se todas as transformações são canônicas, então o diagrama comuta.

$[a] = \{b \in A : b \sim a\}$; $A = \bigsqcup_{i \in I} [a_i]$

↑ representante da classe de equiv.

$[A] \cap [B] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$

Espaços Quocientes

Def (Relação de Equivalência) Seja A um conjunto e $\sim$ uma relação tal que

1) $a \sim a$, $\forall a \in A$; 2) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, 3) $a \sim b \sim c \Rightarrow a \sim c$, $\forall a, b, c \in A$

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e W um subespaço de V. Defina $v \equiv w \pmod{W}$ se $v - w \in W$.

$$[v] = \bar{v} = \{u \in V : v - u \in W\}$$

$$v + W = \{\overset{u=}{v + w} : w \in W\}$$

$$u \in [v] \Rightarrow v - u \in W \Rightarrow v - u = w \Rightarrow v = u + w \Rightarrow u \in v + W$$

$$\Rightarrow [v] \subseteq v + W$$

Portanto, como $v + W \subseteq [v] \Rightarrow v + W = [v]$.

Denote por V/W o conjunto das classes de equivalência de $V \pmod{W}$.

Defina

$$[v] + [u] := [v + u] \quad \text{e} \quad \alpha[v] := [\alpha v]$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi_N"] \arrow[d, "T"'] & V/W \arrow[dl, "\tilde{T}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] \\ V & \end{tikzcd}$$

A soma está bem definida. De fato,

$$[v] = [v'] \Leftrightarrow v - v' \in W, \quad [u] = [u'] \Leftrightarrow u - u' \in W$$

e

$$(v + u) - (v' + u') = (v - v') + (u - u') \in W \Leftrightarrow [v + u] = [v' + u']$$

Análogo para multiplicação por escalar. E V/W é subespaço vetorial.

~~Produto~~ **Propriedade Universal do Quociente** Seja V esp. vetorial e $T \in \mathrm{End}(V)$. Se $N \subseteq \mathrm{Ker}\, T$, então T induz um mapa linear $\tilde{T} : V/N \to V$ tal que $\tilde{T} \circ \pi_N = T$. Onde π é a proj. canônica $\pi_W : V \to V/W$, mapeando v em $v + W$.