07/10 MONITORIA PED

5- $\dim V < \infty$, $\psi : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V^*)$

$$A \mapsto \left| A^T : V^* \to V^* \right.$$
$$f \mapsto \left| A^T f : V \to \mathbb{F} \right.$$
$$v \mapsto (A^T f) v = f(Av)$$

- ψ é linear.

$$\psi(A+\alpha B) f v = f((A+\alpha B)v) = f(Av + \alpha B v) = f(Av) + \alpha f(Bv)$$
$$= \psi(A) f v + \alpha \psi(B) v$$

- ψ é injetora

$A \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\psi(A) \equiv 0 \Rightarrow \psi(A) f v = 0 \quad \forall f \in V^*, v \in V$

$\Rightarrow f(Av) = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Ker} f$

Se $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ é base de V e $\alpha^* = \{v^1, \dots, v^n\}$. Então

$\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Ker} v^1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} v^n = \{0\} \Rightarrow \operatorname{Im} A = \{0\} \Rightarrow A = 0$

- ψ é sobrejetora

Como $\dim V = \dim V^* \Rightarrow \dim \mathcal{L}(V) = \dim \mathcal{L}(V^*)$

Logo, ψ é isomorfismo.

Outra forma: $\quad T : V^* \to V^*$, $T(v^i) v_j := a_j \in \mathbb{F}$

$A : V \to V$, $A v_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v^k$, $\quad v^j(A v_i) = T(v^j) v_i$

1- $$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -C & A+xI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A+xI & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+xI & B \\ -CA+AC & -CB+AD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+xI & B \\ 0 & AD-BC \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det(A) \det \begin{pmatrix} A+xI & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(AD-BC)$$

$A+xI \qquad\qquad A+xI$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} A+xI & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det((A+xI)D - BC)$$

Tomando $x=0$ temos o resultado.

3- Ver Teorema 4 do Hoffman (p. 160). Não invertível em $\mathbb{F}[x]$, mas em $\mathbb{F}(x)$.

4- Ver notas do Kawê.

2- $V = M_n$, B fixa

$$R_B : V \longrightarrow V$$
$$A \longmapsto AB$$

$\underline{n=2}$

$$e_{ij} B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jn} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow i \quad \text{tome } \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$$

$$R_B(e_{11}) = e_{11} B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = b_{11} e_{11} + b_{12} e_{12}$$

$$R_B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{21} \\ 0 & 0 & b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^t & 0 \\ 0 & B^t \end{pmatrix} \Rightarrow \det(R_B) = (\det B)^2$$

Supõe que vale para M_{n-1}.

$$R_B(e_{nj}) = e_{nj} B = b_{j1} e_{n1} + \dots + b_{jn} e_{nn}$$

e temos o desejado.

$$R_B = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix} \qquad \det R_B = \det S \det B^T = \det B^n$$

Considere $T: V \longrightarrow V$, $\dim(V) < \infty$, $T \leftrightarrow A$, $A: \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$

$$V = \bigoplus_{i \in I} Ker((T - \lambda_i)^m)$$

Cayley-Hamilton: $C_T(T) = 0$

$A_T = \{h \in \mathbb{F}[x] : h(T) = 0\} \neq \{0\} =$

Def (Ideal). Dado R anel comutativo com unidade, um subconjunto $I \subseteq R$ é dito ser um ideal se

1) $\forall x, y \in I \Rightarrow x + y \in I$
2) $\forall x \in I, z \in R \Rightarrow xz \in I$

$(I \trianglelefteq R)$

Ex. $A_T \trianglelefteq \mathbb{F}[x]$

$h \in \mathbb{F}[x]$, $g \in A_T$, $gh(T) = hg(T) = 0 \Rightarrow gh \in A_T$

Teo. Dado $I \trianglelefteq \mathbb{F}[x]$, existe $h \in I$ tal que $I = \mathbb{F}[x]h = \langle h \rangle_{\mathbb{F}[x]}$

Algo. divisão em $\mathbb{F}[x]$

Dados $f, g \in \mathbb{F}[x]$, $\exists!\, q, r \in \mathbb{F}[x]$ t.q. $f = qg + r$, onde $r \equiv 0$ ou $\deg r < \deg g$.

Assim,

$$A_T \trianglelefteq \mathbb{F}[x],\ A_T \neq \{0\} \Rightarrow A_T = \langle m_T \rangle_{\mathbb{F}[x]}, \text{ algum } m_T$$

Obs: • $m_T(T) \equiv 0$

• Se h é q.q. elemento tal que $h(T) = 0$, então $m_T | h$ (em particular $m_T | c_T$)

Tomando m_T mônico, m_T é chamado polinômio mínimal de T. É o polinômio de menor grau que anula T.

Seja $v \in V \setminus \{0\}$, $\dim V = n \Rightarrow \dim End(V) = n^2$.

Observe que $\{v, Tv, T^2 v, \dots, T^m v, \dots\} \subseteq V$ $\quad (*)$

$\{I, T, T^2, \dots, T^m, \dots\} \subseteq End(V)$ $\quad (**)$

$(*)$ $\exists l \in \mathbb{N}$ tal que $T^{l+1}(v) = \sum_{i=0}^{l} a_i T^i(v)$

$$m_{T,v}(x) = x^{l+1} - \sum_{i=0}^{l} a_i x^i, \quad m_{T,v}(T)v = 0$$

$$h \in \mathbb{F}[x]: h(T)v = 0, \quad h = q m_{T,v} + r$$

Se $r \not\equiv 0$ e $r(T)v = 0$ e $\deg r < \deg m_{T,v}$. Absurdo.

Logo, $m_{T,v} | h$. Em particular, $m_{T,v} | m_T | c_T$.

$C_T(v) = span\{v, \dots, T^l(v)\}$ é T-cíclico e T-invariante.

Ex. $m_{T|_{C_T(v)}} = m_{T,v}$

Suponha $V = C_T(v)$.

$\alpha = \{ \underset{\overset{\shortparallel}{w_0}}{v}, \underset{\overset{\shortparallel}{w_1}}{T(v)}, \dots, \underset{\overset{\shortparallel}{w_\ell}}{T^\ell(v)} \}$ base de V

então

$T(w_0) = w_1,\ T(w_1) = w_2, \dots, T(w_\ell) = -b_0 w_0 - \dots - b_\ell w_\ell$

$$[T]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & -b_0 \\ 1 & 0 & & -b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & & -b_\ell \end{pmatrix}$$

matriz de Frobenius / Companheira de T