Determinantes (Aula 16/09)

Def: Um anel R, é uma ~~par~~ tripla $(R, \cdot, +)$ onde R é um conjunto no qual as operações satisfazem

a) $(R, +)$ é um grupo abeliano

b) $(xy)z = x(yz)$ (Associatividade)

c) $x(y+z) = xy + xz$, $(y+z)x = yx + zx$

Se $xy = yx$ $\forall x, y \in R$ diz-se que R é um anel comutativo. Se $\exists 1 \in R$ tal que $x1 = 1x = x$ $\forall x \in R$, diz-se que R é um anel com unidade.

Def: Seja K um anel comutativo com identidade e $n \in \mathbb{N}$ e

$$D: M_n(K) \longrightarrow K$$
$$A \mapsto D(A)$$

Escrevendo A em termos de suas colunas

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

então D é dita ser n-linear se D é linear em cada coluna da matriz a qual ~~para~~ está sendo feito a avaliação. O mesmo se dá (i.e mesma notação) usando linhas ao invés de colunas.

- Combinação linear de funções n-lineares é n-linear.

Def: Seja D função n-linear. Diz-se que D é alternada se:

a) $D(A) = 0$ sempre que duas ~~es~~ linhas de A são iguais.

b) Se $A' = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_n)$ e

$A = (\alpha_1, \dots, \alpha_j, \alpha_i, \dots \alpha_n)$

então

$$D(A) = -D(A').$$

• D, função n-linear alternada é uma função determinante se $D(I) = 1$.

Alguns exercícios

<u>Exercício 10</u>: seja v autovetor de T associado a λ. Então, em particular $\dim \operatorname{Ker}(T - \lambda I) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(T - \lambda I) \subsetneq V$ isto é, $\dim \operatorname{Im}(T - \lambda I) < n$, e assim $\dim \operatorname{Im}(T^t - \lambda I) < n$ donde segue que $\operatorname{Ker}(T^t - \lambda I) \neq 0 \Rightarrow \exists f \in V^*$ tal que

$$T^t f = \lambda f.$$

Observação: $(T + \alpha S)^t : V^* \longrightarrow V^*$

$$f \mapsto \left[\begin{array}{l} (T+\alpha S)^t f : V \longrightarrow \mathbb{F} \\ \qquad v \mapsto f((T + \alpha S)v) \end{array} \right.$$

Logo, notemos que

$$(T + \alpha S)^t f(v) = f(T(v)) + \alpha f(S(v))$$
$$= T^t f(v) + \alpha S^t f(v)$$

e assim $(T + \alpha S)^t f = T^t f + \alpha S^t f \quad \forall f$

$$\Rightarrow (T + \alpha S)^t = T^t f + \alpha S^t.$$

Exercício 11: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(e_1) = 6e_1 + e_2$$
$$T(e_2) = e_2 - 2e_1$$
$$T(e_3) = e_1 - e_2$$

Notemos que $Im(T^t) = (\ker(T))^\circ$ e
$\ker T^t = (Im(T))^\circ$

Vejamos que
$$T = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Im\, T = span\{6e_1 + e_2,\ e_2 - 2e_1,\ e_1 - e_2\} = span\{e_2 - 2e_1, e_1 - e_2\}$

$(6, 1, 0)$
$(-2, 1, 0)$
$(1, -1, 0)$

$$\begin{aligned} -2\alpha + \gamma &= 6 \\ \alpha - \gamma &= 1 \end{aligned} \iff -\alpha = 7$$

$$\alpha = -7$$

$$\alpha - \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = \alpha - 1 = -8$$

$$-7(-2, 1, 0) - 8(1, -1, 0) = (14, -7, 0) + (-8, 8, 0)$$
$$= (6, 1, 0)$$

Notemos que se $f \in (Im\, T)^\circ$, $f = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$
temos

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$. Logo
$f = \gamma x_3 \Rightarrow \ker T^t = span\{x_3\}$.

tilibra

Agora, vejamos que

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6x - 2y + z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$8x - 3z = 0 \Rightarrow z = 8/3\, x$$

$$2x + 2y - 4 \cdot \frac{8}{3} x = 0 \Rightarrow 2y = -2x + \frac{32}{3} x \Rightarrow$$

$$y = -x + \frac{16}{3} x \Rightarrow y = +\frac{13x}{3}.$$

Logo, $\ker T = \operatorname{span}\{(1, 8/3, 13/3)\}$

Veja que $f \in (\ker T)^{\circ} \Leftrightarrow$

$$f = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$$

$$\alpha + \frac{8}{3}\beta + \frac{13}{3}\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -8/3\, \beta - 13/3\, \gamma$$

$$\Rightarrow (\ker T)^{\circ} = \operatorname{span}\{-8/3\, x_1 + x_2,\ -13/3\, x_1 + x_3\} = \operatorname{Im} T^t.$$

Ex. 5 Note que se $p(x) = a + bx + cx^2$, então

$$f_1(p) = \Big|_0^1 ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

$$f_2(p) = \Big|_0^2 ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} = 2a + 2b + \frac{8}{3}c$$

$$f_3(p) = \Big|_0^{-1} ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} = -a + \frac{b}{2} - \frac{c}{3}$$

Para parte a), tome

$$p_1(x) = 1$$
$$p_2(x) = 2x$$
$$p_3(x) = x^2 3$$

isso nos da:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ \alpha + 4\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + 8\beta - \gamma &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

Observe que:

$$\det A = -12 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

$f_j(v_i) = u_{j,i}(f_j)$

Queremos polinômios $\{p_1, p_2, p_3\}$ tais que

$$f_i(p_j) = \delta_{ij}.$$

Para isso basta resolver os sistemas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Resolvendo tais encontramos

$$p_1(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2$$
$$p_2(x) = -1/6 + 1/2\, x^2$$
$$p_3(x) = -1/3 + x - 1/2\, x^2.$$

Para c), utilize a base $\{f_1, \ldots, f_3\}$

e tente encontrar c. comb. linear de $\{f_1, f_2, f_3\}$ tais que estes sejam duais a $\{p_1, p_2, p_3\}$.