Resumo MM719

Kauê Orlando Pereira- RA: 200608

28 de Setembro de 2022

Conteúdo

1 Forma canônica de Jordan via decomposição primária

Dado $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T \in End_{\mathbb{F}}(V)$, defina

$$V_p := \{v \in V : p(T)v = 0\}$$

e

$$\mathcal{A}_T = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T) \equiv 0\}.$$

É de imediata verificação que o conjunto V_p acima é na realidade um subespaço de V. Afirmamos agora que se $\mathcal{A}_T =\neq \{0\}$, então $\mathcal{A}_T$ é um ideal do anel de polinômios $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. Com efeito, notemos que se $p, q \in \mathcal{A}_T$, então

$$(p-q)(T) = p(T) - q(T) \equiv 0.$$

Por outro lado, se $r \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $p \in \mathcal{A}_T$ segue que

$$p \cdot r(T) = r \cdot p(T) \equiv 0.$$

Agora, como $\mathcal{P}(\mathbb{F}) := \mathbb{F}[x]$ e $\mathbb{F}$ é um corpo, tem-se que $\mathbb{F}[x]$ é um domínio euclidiano, portanto um domínio principal e assim, existe $m_T \in \mathcal{A}_T$ tal que

$$\mathcal{A}_T = \langle m_T \rangle.$$

Exemplo 1.1. *(Contraexemplo quando $dim(V) = \infty$) Suponha que $V = \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $T : V \to V$ é definido por*

$$T : V \to V, \quad f(x) \mapsto xf(x)$$

então, tem-se que $\mathcal{A}_T = \{0\}$. Com efeito, seja $p \in \mathcal{A}_T$ onde

$$p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

então, temos que

$$p(T)f(x) = a_0 f(x) + a_1(T(f(x))) + ... + a_n(T^n(f(x)))$$

por outro lado

$$T^k(f(x)) = \underbrace{T \circ T \circ .... \circ T}_{k}(f(x)) = x^k f(x)$$

e assim, segue que

$$p(T)(f(x)) = p(x) \cdot f(x)$$

como f é arbitrário, temos que $p \equiv 0$.

Observação: Se caso $\mathcal{A}_T = \{0\}$, define-se $m_T \equiv 0$. Além disso, nesse caso, tem-se que

$$V = V_{m_T}.$$

Lema 1.2. *Se $S \in End_{\mathbb{F}}(V)$ e além disso*

$$ST = TS$$

então, $V_S := Ker(S)$ é $T-$invariante.

Demonstração. Basta notarmos que se $v \in V_S$ então

$$S(T(v))) = T(S(v)) = T(0) = 0.$$

□

Observação: O lema acima garante-nos que V_p é T-invariante para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Agora, notemos que se $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ então $V_p \subseteq V_{qp}$. Em particular, segue que

$$V_{p^k} \subseteq V_{p^{k+1}}, \quad k \geq 0.$$

Portanto

$$V_p^\infty = \bigcup_{k \geq 0} V_{p^k}$$

é um subespaço $T-$invariante. Ademais, caso $p(x) = x - a$ por algum $a \in \mathbb{F}$, o subespaço V_p^∞ é chamado de **autoespaço generalizado associado a** a.

O próximo resultado visa descrever o conjunto

$$\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : V_p \neq 0\}.$$

Proposição 1.3. *Se $\mathcal{A}_T \neq 0$ e p é irredutível então, $V_p \neq 0$ se, e somente se, $p \mid m_T$.*

Demonstração. Notemos inicialmente que se f e g são polinômios coprimos, então a restrição, $f(T)_{|V_g}$ é injetora. Com efeito, se $(f, g) = 1$ existem $r, s \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

$$rf + sg = 1$$

implicando que se $x \in V_g$ e $f(T)x = 0$, então

$$x = r(T)f(T)x + s(T)g(T)x = 0.$$

Agora, podemos já demonstrar nosso resultado. Vamos começar mostrando a recíproca. Suponha que $m_T \mid p$ e $V_p = \{0\}$. Portanto, temos que para todo $u \in V \setminus \{0\}$

$$p(T)u \neq 0.$$

Agora, seja

$$f = \frac{m_T}{p}$$

e assim, temos que

$$0 = m_T(T)v = p(T)f(T)v, \quad \text{para qualquer } v \in V.$$

Por outro lado, se $f(T)v \neq 0$, tem-se que $p(T)(f(T)v) \neq 0$, portanto a igualdade acima só faz sentido se $f(T)v = 0$ para todo $v \in V$. Porém isso é um absurdo pela minimalidade do grau de m_T.

Agora, suponha que $V_p \neq \{0\}$ e p não divide m_T. Dessa forma, teríamos que $(p, m_T) = 1$ uma vez que p é irredutível. E assim, pela observação anterior, $m_T(T)$ restrito a V_p é injetor. Como $m_T(T) \equiv 0$, tem-se que $V_p = \{0\}$. □

A proposição anterior contou-nos que para um polinômio irredutível ser tal que $V_p \neq 0$ deve-se necessariamente ter p como um fator de m_T.

Teorema 1.4. *Se $dim(V) < \infty$, então $\mathcal{A}_T \neq 0$.*

Demonstração. A prova é imediata uma vez que se $dim(V) = n$, $dim(End_{\mathbb{F}}(V)) = n^2$ e portanto, o conjunto $T^0 = Id_V, T^1, ..., T^{n^2}$ é linearmente dependente. Logo, pode-se construir um polinômio f que anula T apenas escolhendo-se o menor índice m tal que a família $T^0, T^1, ..., T^m$ seja linearmente independente. E além disso mais uma vez por minimalidade tem-se que $f = m_T$. □

1.1 Subespaços cíclicos

Dado $v \in V$, a sequência de vetores

$$v_0 = v, v_1 = T(v), v_2 = T^2(v), ..., v_k = T^k(v), ...$$

é chamada $T-$ciclo gerado por v e denotada por $\mathscr{C}_T^{\infty} = (v_i)_{i \geq 0}$.

O espaço $C_T(v)$ gerado pela família acima, é chamado de espaço $T-$cíclico gerado por v. Além disso, é claro que se $dim(V) < \infty$ há uma quantidade finita de vetores (diferentes) em $\mathscr{C}_T^{\infty}$. Em outros termos, se $v \neq 0$, existe $m \geq 1$ mínimo tal que a família

$$v_0, v_1, ..., v_{m-1}$$

é linearmente independente. Portanto, existem constantes $a_0, ..., a_{m-1} \in \mathbb{F}$ tais que

$$T^m(v) = v_m = \sum_{k=0}^{m-1} a_k v_k = \sum_{k=0}^{m-1} T^k(v)$$

o qual dá origem ao polinômio mônico que anula $T(v)$

$$m_{T,v} = x^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k$$

chamado de polinômio mínimo de v com respeito a T. Além disso, como $V_{m_{T,v}}$ é T-invariante, segue que $C_T(v) \subseteq V_{m_{T,v}}$.

Proposição 1.5. *Para todo $v \in V$, $m_{T,v} \mid m_T$.*

Notemos que se $v_0, v_1, ..., v_{m-1}$ formar uma base de V, então $m_{T,v} = m_T$. Com efeito, basta mostrarmos que $m_T \mid m_{T,v}$. Para tal feito, é suficiente mostrar que $m_{T,v}(T)(T^j(v)) = 0$ para todo $1 \leq j \leq m-1$. Assim, notemos que

$$m_{T,v}(T)(T^j(v)) = T^m(T^j(v)) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k(T^j(v)) = T^j(T^m(v) - \sum_{k=0}^{m-1} T^k(v)) = T^j(0) = 0.$$

Mais adiante, vamos mostrar que sempre existe um vetor $v \in V$ satisfazendo $m_{T,v} = m_T$.

Vamos relembrar rapidamente alguns resultados relacionados a soma direta.

Lema 1.6. *Seja V um espaço de dimensão finita e $W_1, W_2, ..., W_m$ subespaços de V. Assim, se $W = W_1 + W_2 + ... + W_m$, as seguintes condições são equivalentes*

a) $W_1, ..., W_m$ são independentes

b) Para cada j, com $2 \leq j \leq m$, tem-se que

$$W_j \cap (W_1 + W_2 + ... + W_{j-1}) = \{0\}.$$

c) Se $\mathcal{B}_i$ é base de W_i, a sequência $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_m)$ é uma base de W.

Proposição 1.7. *Se $p_1, p_2, ..., p_m$ são dois a dois relativamente primos, então a soma*

$$V_{p_1}^{\infty} + V_{p_1}^{\infty} ... + V_{p_m}^{\infty}$$

é direta.

Proposição 1.8. *Sejam $f_1, f_2, ..., f_m \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ dois a dois relativamente primos. Então, se $f = f_1 f_2 ... f_m$, tem-se que*

$$V_f = V_{f_1} \oplus V_{f_2} \oplus .... \oplus V_{f_m}$$

Demonstração. Vamos inicialmente demonstrar para o caso em que $m = 2$. Segue da primeira linha pós a primeira observação que

$$V_{f_1} + V_{f_2} \subseteq V_f$$

e além disso, pelo resultado anterior, tal soma é direta. Precisamos mostrar agora que, dado $v \in V_f$, existem v_1, v_2, com $v_1 \in V_{f_1}$ e $v_2 \in V_{f_2}$ tais que

$$v = v_1 + v_2.$$

Como $(f_1, f_2) = 1$, segue que existem $g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1.$$

Dessa forma, se $S = T_{|V_f}$ definimos

$$h_i = g_i f_i, \quad i \in \{1, 2\}$$

e além disso

$$P_j = h_j(S), \quad j \in \{1, 2\}.$$

Notemos agora que

$$f(S) = f(T_{|V_f}) = 0$$

e

$$P_1 + P_2 = Id_{V_f}.$$

Ademais, notemos que

$$P_1 P_2(v) = g_1(S) f_1(S) g_2(S) f_2(S)(v) = 0 = g_2(S) f_2(S) g_1(S) f_1(S)(v), \quad \text{para todo } v \in V_f$$

assim, segue em particular que $P_i^2 = P_i$, para $i \in \{1, 2\}$. (cf. Hoffman and Kunze-Linear Algebra, pag 212). □

Teorema 1.9. *(Teorema da decomposição primária) Suponha que $dim(V) < \infty$ e sejam $p_1, p_2, ..., p_m$ fatores irredutíveis distintos de m_T em $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. Se k_j é a multiplicidade de p_j em m_T, segue que*

$$V = V_{p_1^{k_1}} \oplus V_{p_1^{k_2}} \oplus ... \oplus V_{p_m^{k_m}}$$

Demonstração. Basta tomar $f_j = p_j^{k_j}$ como na proposição acima. □

Vamos agora trabalhar em direção a demonstrar o teorema da decomposição cíclica.

Proposição 1.10. *Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $dim(V_p) < \infty$, existem $l \geq 0$ e $v_1, ..., v_l \in V_p$ tais que $V_p = C_T(v_1) \oplus C_T(v_2) \oplus ... \oplus C_T(v_l)$.*

A ideia da proposição acima é bastante simples, "quebrar"o espaço V_p como soma direta de "bons espaços", afim de podermos decompor em particular a transformação T em outras mais "fáceis "de se trabalhar. Por exemplo, suponha que $V = V_p$, $l = 2$ e além disso que

$$dim(C_T(v_i)) = 2, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Dessa forma, temos que existem constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tais que

$$T^2(v_1) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 T(v_1)$$

e

$$T^2(v_2) = \beta_1 v_2 + \beta_2 T(v_2).$$

Assim, a forma matricial A de T na base $\{v_1, T(v_1), v_2, T(v_2)\}$ é

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Lema 1.11. *Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $u, v \in V$ satisfazem*

$$m_{T,v} = m_{T,u} = p$$

então exatamente uma das opções ocorre
i) $C_T(u) = C_T(v)$
ou
ii) $C_T(u) \cap C_T(v) = \{0\}$.

Demonstração. Denotamos por $m_v := m_{T,v}$ e $m_u := m_{T,u}$. Vamos mostrar inicialmente que se f é um polinômio irredutível, então f é o polinômio minimal do operador $F = T_{|V_f}$. Seja m_F polinômio minimal de F. Como $f(F)x = 0$ para todo $x \in V_f$, temos que $m_F \mid f(F)$, porém f como irredutível, tem-se que $m_F = f$.

Agora, suponha que exista $x \in C_T(u) \cap C_T(v)$, vamos mostrar que $m_{T,x} = m_u$. Sabe-se que $m_u = m_F$, onde $F = T_{|V_{m_u}}$, resta-nos mostrar que $m_{T,x} \mid m_u$. Para isso, veja que se $x = a_0 u + a_1 T(u) + ... + T^{m-1}(u)$, então

$$m_u(T)x = \sum_{k=0}^{m-1} a_k m_u(T) T^k(u) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k T^k m_u(T)(u) = 0$$

e consequentemente $x \in V_{m_u}$. Assim, como V_{m_u} é T-invariante, temos pela proposição 1.5 que $m_{T,x} \mid m_u$. E com isso, concluímos que $C_T(x) = C_T(u)$ e analogamente, $C_T(x) = C_T(v)$. □

A demonstração da proposição acima pode ser encontrada na pagina 259 do livro de Adriano Moura.

Proposição 1.12. *Se $p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ é irredutível e $dim(V_p^\infty)$ é finita, $deg(p) \mid dim(V_p^\infty)$. Além disso*

$$\frac{dim(V_p^\infty)}{deg(p)} \geq min\{k : V_p^\infty = V_{p^k}\}.$$

Valendo a igualdade se, e somente se V_p^∞ for T-cíclico.

Demonstração. Suponha que V_p^∞ seja T-cíclico. Assim, existe $v \in V_p^\infty$ tal que $V_p^\infty = C_T(v)$. Ademais, seja m o menor número na qual a sequência V_{p^k} se estabiliza. Em outras palavras, m é o maior número no qual $V_{p^{m-1}} \neq V_{p^m}$. Seja além disso S a restrição de T a V_p^∞. Por minimalidade de m segue de imediato que $m_S = m_v = p^m$, e como

$$dim(V_p^\infty) = dim(C_T(v)) = \deg(m_v) = m \deg(p)$$

o resultado segue.

Agora, vamos proceder por indução em $n = dim(V_p^\infty)$. É imediato o caso em que $n = 1$. Suponha o resultado válido para $n > 1$ e considere o enunciado da hipótese de indução

Se S é um operador num espaço W tal que $dim(W_p^\infty) < n$ (aqui estamos abusando da notação, mas na realidade seria $W_p^\infty = W_{p(S)}^\infty$) $\deg(p) \mid dim(W_p^\infty)$ e

$$\frac{dim(W_p^\infty)}{deg(p)} \geq min\{k : W_p^\infty = W_{p^k}\}.$$

Suponha que $m = 1$. Dessa forma, pode-se escrever V_p^∞ como soma direta de espaços T-cíclicos e portanto, como $\deg(p)$ divide cada espaço T-cíclico (pelo primeiro caso) temos que $\deg(p) \mid dim(V_p^\infty)$ e a desigualdade é imediata.

Suponha então que $m > 1$ e considere $W := V_{p^{m-1}}$ o qual é um subespaço T-invariante próprio e não trivial. Seja além disso, $S = T_{|W}$. Notando agora que

$$W_{p^m} = \{v \in V_{p^{m-1}} : p(S)v = 0\} = V_{p^{m-1}}$$

concluímos que

$$W = W_{p(S)}^{\infty} = V_{p^{m-1}}.$$

Assim, por hipótese de indução, temos que

$$\deg(p) \mid dim(W)$$

e

$$\frac{dim(W)}{\deg(p)} \geq m - 1.$$

Por outro lado, como $Ker(p^{m-1}(T_{|V_p^\infty})) = V_{p^{m-1}} = W$ temos pelo teorema núcleo imagem que

$$\dim(V_p^\infty) = dim(W) + dim(Im(T_{|V_p^\infty})).$$

Assim, para concluir que $\deg(p) \mid dim(V_p^\infty)$, precisamos mostrar que $\deg(p) \mid Im(T_{|V_p^\infty})$. Dado que $T_{|V_p^\infty} \circ T = T \circ T_{|V_p^\infty}$ em V_p^∞ pode-se mostrar que $Im(T_{|V_p^\infty})$. Ademais, tem-se que $Im(T_{|V_p^\infty}) \subseteq V_p^\infty$. Assim, da mesma forma como que no caso $m = 1$, completa-se a demonstração. □

Vamos agora falar um pouco sobre o polinômio característico. Seja $n = dim(V)$ e $p_j^{k_j}$ os fatores primários de T. Dessa forma, temos que

$$\deg(m_T) = \sum_{j=1}^{m} k_j \deg(p_j) \leq \sum_{j=1}^{m} dim(V_{p_j^{k_j}}) = n$$

Defina

$$n_j = \frac{dim(V_{p_j^{k_j}})}{\deg(p_j)} \geq k_j$$

e defina

$$c_T = \prod_j p_j^{n_j}$$

tal é chamado de polinômio característico de T. Por definição, $c_T \in \mathcal{A}_T$ e $\deg(c_T) = n$. Iremos mostrar mais adiante que na realidade tal definição é a mesma que a definição clássica de polinômio característico.

Observação: Para calcularmos cada k_j, pode-se analisar a sequência de núcleos

$$V_{p_j} \subseteq V_{p_j^2} \subseteq ... \subseteq V_{p_j^{n_j}} ...$$

Bases Cíclicas

Suponha que $m_v = (t - \mu)^m$ por algum $\mu \in \mathbb{F}$ e $m \in \mathbb{N}$. Nosso objetivo, será olhar mais de perto a restrição $S = T_{|C_T(v)}$. Pois bem, defina para cada $j \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ os vetores

$$w_j := (T - \mu I)^j v$$

afirmamos que $w_0, w_1, ..., w_{m-1}$ constituem uma base de $C_T(v)$. Com efeito dado uma combinação linear igualada a zero, se aplicarmos j vezes o operador $(T - \mu I)$ a ambos os lados de tal combinação, terá necessariamente o primeiro coeficiente nulo, prosseguindo deste mesmo modo, mostra-se que na realidade todos os coeficiente devem ser nulos.

Agora notemos que

$$\mu w_j + w_{j+1} = \mu(T - \mu I)^j v + (T - \mu I)^{j+1} v = (T - \mu I)^j \big(\mu v + T(v) + \mu v\big)$$

ou seja

$$\mu w_j + w_{j+1} = (T - \mu I)^j \big(T(v)\big) = T\big((T - \mu I)^j)v\big) = T(w_j)$$

e portanto, para todo $j \in \{0, 1, 2, ..., m - 1\}$ tem-se que

$$T(w_j) = \mu w_j + w_{j+1}$$

e com isso a matriz de S em tal base é dada por

$$S = J_m(\mu) := \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & \mu & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & \mu & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \mu \end{pmatrix}$$

uma sequência de elementos na base de $C_T(v)$ como a estabelecida acima é chamada de um T-ciclo de Jordan de comprimento m. Uma base formada por uma união de T-ciclos é dita ser **uma base de Jordan**.

Se $\mathcal{B}$ é uma base de Jordan de um operador T, segue que a matriz de T em tal base é uma matriz diagonal em blocos, onde cada bloco é da forma como descrito acima.

Teorema 1.13. *(Teorema da Decomposição de Jordan) Existe uma base de Jordan com respeito a T para V se, e somente se, os fatores irredutíveis de m_T tem todos grau 1. Além disso, quaisquer duas bases de Jordan de V com respeito a T , a quantidade de T-ciclos de Jordan de comprimento k e autovalor λ coincidem quaisquer que sejam k e λ.*

Observação: Se os espaços T-primários forem todos T-cíclicos basta escolhermos para cada espaço um gerador do mesmo e prosseguir como acima.

Devemos agora tentar resolver o problema para quando os espaços T-primário não forem T-cíclicos. E além disso, devemos também resolver o caso em que os fatores irredutíveis do polinômio minimal tenham grau maior do que 1. (e.g, $m_T = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 3)$).

Teorema 1.14. *(Teorema da Decomposição Cíclica) Existem $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e $v_1, v_2, ..., v_m \in V \setminus \{0\}$ tais que*

$$V = C_T(v_1) \oplus C_T(v_2) \oplus C_T(v_3) \oplus ... \oplus C_T(v_m)$$

e além disso

$$m_{v_{j+1}} \mid m_{v_j} \text{ para todo } j \in \{1, 2, ..., m - 1\}.$$

Além disso, tal decomposição é única.

- Os polinômios m_{v_j} são chamados de fatores invariantes de T.
- (Matriz Companheira ou Matriz de Frobenius) Se $v, T(v), T^2(v), ..., T^{n-1}(v)$ são elementos da base de $C_T(v)$, então existem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ tais que

$$m_v = x^n - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j x^j$$

e portanto, segue que a matriz de $S = T_{|C_T(v)}$ em tal base é dada por

$$[S]_{C_T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & \alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & \alpha_3 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Uma base formada por conjuntos da forma acima é chamada de uma base racional (ou de Frobenius) de V com respeito a T.

Corolário 1.15. $m_{v_1} = m_T$

Demonstração. Já sabemos que $m_{v_1} \mid m_T$. Precisamos então mostrar que $m_T \mid m_{v_1}$. Para isso, é suficiente mostrar que $m_{v_1}(T)v = 0$ para todo $v \in V$. Do teorema da decomposição cíclica tem-se que dado $v \in V$, existem únicos $w_1, ..., w_m$ com $w_j \in C_T(v_j)$ tais que

$$v = w_1 + ... + w_m$$

portanto, basta mostrarmos que $m_{v_1}(T)w_j = 0$ para todo $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Porém isso é imediato do fato de que $m_{v_j} \mid m_{v_1}$ para todo $j \in \{1, 2, ..., m\}$. □

Notemos que se T possui FCJ, seus autovalores distintos são λ_j, $1 \leq j \leq l$, e k_j é a soma soma dos tamanhos dos blocos com autovalor λ_j, temos que

$$c_T = \prod_{j=1}^{l} (x - \lambda_j)^{k_j}.$$

Definição 1.16. *Um subespaço W T-invariante é dito ser T-admissível se sempre que $f(T)v \in W$, para algum $v \in V$ e $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, existe $\widehat{v} \in W$ tal que*

$$f(T)v = f(T)\widehat{v}.$$

Definição 1.17. *Dado um espaço T-invariante W, o conjunto*

$$\mathscr{C}_{T,v}(W) = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : p(T)v \in W\}$$

é chamado o T-condutor de v em W. Não é difícil mostrar que existe único polinômio mônico $c(v, W)$ que divide todo mundo em $\mathscr{C}_{T,v}$, pois este é um ideal de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ o qual é um PID. É imediato também que $m_v \mid c(v, W)$.

- Se $W \subseteq W'$, então $c(v, W) \mid c(v, W')$ e portanto, $c(v, W) \mid m_v$. Ademais, $c(v, W) = 1$ se $v \in W$.

Proposição 1.18. *Sejam W um subespaço próprio de um espaço vetorial V de dimensão finita n, e $T \in End_{\mathbb{F}}(V)$. Se W é T-invariante e T-admissível, então existe $x \in V$ tal que a soma $W + C_T(x)$ é direta, isto é*

$$W \cap C_T(x) = \{0\}.$$

Demonstração. Seja $y \in V \setminus W$ e considere o T-condutor $\mathscr{C}_{T,y}$ e seu gerador $c(y, W)$. Em particular

$$w := c(y, W) \in W.$$

Dado que W é T-admissível, existe $\widehat{y} \in W$ tal que

$$w = c(y, W)(T)y = c(y, W)(T)\widehat{y}.$$

Agora, defina

$$x = y - \widehat{y}$$

e seja $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ polinômio qualquer. Como $y - x \in W$, segue que $g(T)y \in W$ se, e somente se, $g(T)x \in W$, isto é, se, e somente se, $c(x, W) = c(y, W)$, logo tem-se que $\mathscr{C}_{T,y} = \mathscr{C}_{T,x}$. Porém, $c(x, W) = 0$, e assim, $g(T)x \in W$ se, e somente se, $g(T)x = 0$, donde segue que $W \cap C_T(x) = \{0\}$ e além disso, $c(x, W) = m_x$. □

Teorema 1.19. *(Teorema da decomposição cíclica) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e $T \in End_{\mathbb{F}}(V)$ e seja W_0 um subespaço próprio T-admissível de V. Então, existem $v_1, ..., v_r \in V$ tais que*

a)

$$V = W_0 \oplus C_T(v_1) \oplus C_T(v_2) \oplus \cdots \oplus C_T(v_r)$$

b)

$$m_{v_r} \mid m_{v_{r-1}} \mid \cdots m_{v_1}.$$

Ademais, $r \in \mathbb{Z}$, $m_{v_1}, ..., m_{v_r}$ são unicamente determinados por $a), b)$ e pelo fato de que nenhum dos $v_i's$ é nulo.

Iremos demonstrar o teorema acima utilizando uma série de lemas. Em cada um, as hipóteses serão as mesmas de 1.19.

Lema 1.20. *Existem vetores não nulos $w_1, ..., w_r \in V$ tais que*

$$V = W_0 + C_T(w_1) + \cdots C_T(w_r).$$

Além disso, definindo para cada $1 \leq k \leq r$

$$W_k = W_0 + C_T(w_1) + \cdots C_T(w_k)$$

então o T-condutor $p_k(x) := c(w_k, W_{k-1})(x)$ tem a propriedade

$$\deg p_k = \max_{v \in V} \deg(c(v, W_{k-1})).$$

Demonstração. Dado $v \in V$, sabe-se que

$$c(v, W_0) \mid m_v \mid m_T \mid c_T$$

e em particular, $0 < \deg c(v, W_0) < \dim V$, dessa forma

$$0 < \max_{v \in V} \deg(v, W_0) \leq \dim V$$

e portanto pelo hipótese do supremo, existe $w \in V$ tal que

$$\deg c(w, W_0) = \max_{v \in V} \deg c(v, W_0).$$

Ademais, $W_0 + C_T(w)$ é um subespaço T-invariante tal que

$$\dim(W_0 + C_T(w)) > \dim W.$$

Com isso, pode-se tomar $w_1 := w$ e neste caso $W_1 = W + C_T(w_1)$. Se $W_1 \subsetneq V$ então pode-se aplicar o processo acima com W_1 no lugar de W_0 e obter w_2 e W_2 como no enunciado, e assim por diante. Após $1 \leq k \leq \dim V$ construções

$$\deg(c(w_k, W_{k-1})) = \max_{v \in V} \deg(c(v, W_{k-1})).$$

□

Lema 1.21. *Sejam $u_1, ..., u_r \in V$ os quais satisfazem as condições do lema 1.20. Fixando $1 \leq k \leq r$, seja $u \in V$ vetor qualquer e $f(x) := c(u, W_{k-1})(x)$. Se*

$$f(T)u = u_0 + \sum_{j=1}^{k-1} g_i(T)u_j, \; onde \quad g_j \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \; e \quad u_j \in W_j, \; para\ cada\ 1 \leq j \leq k-1$$

então

$$f \mid g_j, \; para\ cada\ 1 \leq j \leq k-1$$

e além disso

$$u_0 = f(T)y_0, \; onde\ y_0 \in W_0.$$

Demonstração. Se $k = 1$, então como $f(T)u \in W_0$ e W_0 é T-admissível, segue que $u_0 = f(T)u = f(T)y_0$, onde $y_0 \in W_0$. Agora, suponha que $k > 1$. Pelo algoritmo da divisão de Euclides, segue que

$$g_j = fh_j + r_j, \text{ com } r_j \equiv 0 \text{ ou } \deg r_j < \deg f \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq k-1.$$

Defina

$$\gamma := u - \sum_{j=1}^{k-1} h_j(T)u_j.$$

Como W_{k-1} é T-invariante, $\gamma - u \in W_{k-1}$ e portanto

$$c(\gamma, W_{k-1})(T)u \in W_{k-1} \text{ e } c(u, W_{k-1})(T)\gamma \in W_{k-1}$$

donde tem-se que

$$c(\gamma, W_{k-1}) \mid c(u, W_{k-1}) \text{ e } c(u, W_{k-1}) \mid c(\gamma, W_{k-1})$$

e assim

$$c(\gamma, W_{k-1}) = c(u, W_{k-1}) = f(x).$$

Notemos também que

$$f(T)\gamma = f(T)u - \sum_{j=1}^{k-1} f(T)h(T)u_j = u_0 + \sum_{j=1}^{k-1}(g_j(T) - f(T)h_j(T))u_j$$

o qual é equivalente a

$$f(T)\gamma = u_0 + \sum_{j=1}^{k-1} r_j(T)u_j.$$

Suponha por absurdo que $r_a \neq 0$, para algum $1 \leq a \leq k-1$. Sem perda de generalidade pode-se supor que $1 \leq a \leq k-1$ é o maior índice no qual $r_a \neq 0$. Então, a escrita acima se torna

$$f(T)\gamma = u_0 + \sum_{j=1}^{a} r_j(T)u_j. \tag{1}$$

Seja $p(x) = c(\gamma, W_{a-1})$. Dado que

$$W_{a-1} \subseteq W_{k-1}$$

e portanto

$$c(\gamma, W_{k-1}) \mid p$$

logo, existe $g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $p = fg$. Aplicando $g(T)$ de ambos os lados de 1 obtemos

$$p(T)\gamma = g(T)f(T)\gamma = g(T)r_a(T)u_a + g(T)u_0 + \sum_{j=1}^{a-1} g(T)r_j(T)u_j$$

e assim, como $p(T)\gamma \in W_{a-1}$ e

$$g(T)u_0 + \sum_{j=1}^{a-1} g(T)r_j(T)u_j \in W_{a-1}$$

segue que

$$p(T)r_a(T)u_a \in W_{a-1}.$$

Agora, notemos que

$$\deg(pr_a) \geq \deg(c(u_a, W_{a-1})) \overset{def}{=} \deg p_a$$

e pelo lema 1.20

$$\deg(pr_a) \geq \deg(c(\gamma, W_{a-1})) = \deg p = \deg(fg)$$

e portanto

$$\deg(r_a) \geq \deg(f)$$

o qual é um absurdo. Consequentemente

$$f \mid g_j \text{ para cada } 1 \leq j \leq k-1.$$

E assim, em particular por 1, segue que

$$f(T)\gamma = u_0 \in W_0$$

e como W_0 é T-admissível, existe $y_0 \in W_0$ tal que

$$u_0 = f(T)y_0.$$

□

O lema acima implica que cada um dos $W_1, ..., W_r$ são T-admissíveis. De fato, seja $1 \leq k \leq r$, $h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ e $u \in V$ tal que $h(T)u \in W_{k-1}$. Considere $f(x) = c(u, W_{k-1})$, então $h = sf$ e além disso, pelo lema acima

$$f(T)u = f(T)w, \text{ onde } w \in W_{k-1}$$

e assim segue que

$$h(T)w = s(T)f(T)w = s(T)f(T)u = h(T)u.$$

Vamos então para a demonstração do teorema 1.19.

Demonstração. (Teorema da decomposição cíclica) Considere $w_1, ..., w_r \in V$ vetores como no lema 1.20 e fixe $1 \leq k \leq r$. Fazendo $u = w_k$ e $f = p_k$ no lema 1.21 obtemos

$$p_k(T)w_k = p_k(T)y_0 + \sum_{j=1}^{k-1} p_k(T)h_j(T)w_j.$$

Agora, defina

$$v_k = w_k - y_0 - \sum_{j=1}^{k-1} h_j(T)w_j$$

como $w_k - v_k \in W_{k-1}$, segue que

$$c(v_k, W_{k-1}) = c(w_k, W_{k-1}) = p_k.$$

Suponha que $W_{k-1} \cap C_T(v_k) \neq \{0\}$, então existe $y \in W_{k-1}$ tal que $y = g(T)v_k$ e em particular, $g \in \mathscr{C}_{T,v_k}$, donde segue que $g = hp_k$ e portanto

$$y = g(T)v_k = h(T)p_k(T)v_k = 0.$$

Logo

$$W_{k-1} \cap C_T(v_k) = \{0\}.$$

Afirmamos que

$$W_1 = W_0 \oplus C_T(v_1).$$

De fato, já vimos que $W_0 \cap C_T(v_1) = \{0\}$, precisamos mostrar que

$$W_0 + C_T(v_1) = W_0 + C_T(w_1).$$

Já vimos que $w_1 - v_1 \in W_0$, logo, segue que $v_1 = (v_1 - w_1) + w_1$ e assim

$$W_0 + C_T(v_1) \subseteq W_0 + C_T(w_1).$$

A recíproca é análoga. Por indução mostra-se que para cada $1 \leq k \leq r$

$$W_k = W_0 \oplus C_T(v_1) \oplus ... \oplus C_T(v_k).$$

Notemos ainda que para cada $1 \leq k \leq r$, $p_k = c(v_k, W_{k-1}) = m_{v_k}$. De fato, como $m_{v_k}(T)v_k = 0 \in W_{k-1}$, segue que $p_k \mid m_{v_k}$. Reciprocamente, como $p_k(T)v_k = 0$, segue que $m_{v_k} \mid p_k$.

Por fim, precisamos mostrar que

$$m_{v_r} \mid m_{v_{r-1}} \mid \cdots m_{v_2} \mid m_{v_1}$$

ou equivalentemente que

$$p_r \mid p_{r-1} \mid \cdots p_2 \mid p_1.$$

Sabe-se que

$$v_1 - w_1 = w_0, \text{ onde } w_0 \in W_0$$

e assim

$$0 = p_2(T)v_2 = p_1(T)v_1 = p_1(T)(w_0) + p_1(T)w_1$$

e pelo lema 1.21 tem-se que $p_2 \mid p_1$. Procedendo desta mesma forma para os demais $k \in \{1, 2, ..., r\}$ concluí-se o resultado.

Precisamos mostrar agora a unicidade. Suponha que existam $w_1, ..., w_s \in V$ e respectivos $g_1, ..., g_s$ T-anuladores tais que

$$V = W_0 \oplus C_T(w_1) \oplus \cdots C_T(w_s)$$

e além disso

$$g_s \mid g_{s-1} \mid \cdots g_2 \mid g_1.$$

Precisamos mostrar que $r = s$ e $p_1 = m_{v_1}, ..., p_r = m_{v_r}$. Denotemos por $S(V, W_0)$ o conjunto

$$C(V, W_0) = \{f \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) : \quad f(T)(V) \subseteq W_0\}.$$

Não é difícil ver que $C(V, W_0)$ é um ideal não nulo de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. A primeira afirmação é imediata pois $m_T \in C(V, W_0)$ e a segunda é verificada por contas canônicas. Vejamos agora que dado $w \in W$, pode-se escrever

$$w = w_0 + f_1(T)w_1 + \cdots f_s(T)w_s$$

e assim

$$g_1(T)w = g_1(T)w_0 + g_1 f_1(T)w_1 + \cdots g_1(T)f_s(T)w_s.$$

Por outro lado, como cada $g_i \mid g_1$, tem-se em particular que $g_1(T)w_i = 0$ para cada $1 \leq i \leq s$ e portanto

$$g_1(T)w = g_1(T)w_0$$

donde segue que $g_1 \in C(V, W_0)$. Se $C(V, W) = \langle h \rangle$, então em particular $h(T)w_1 \in W_0$, logo $g_1 \mid h$, consequentemente, $g_1 = h$. Pelo mesmo argumento, $C(V, W_0) = \langle p_1 \rangle$, implicando então que $p_1 = g_1$ pois ambos são polinômios mônicos. Considere agora 3 fatos:

1) $f(T)(C_T(v)) = C_T(f(T)v)$

2) Se $V = V_1 \oplus \cdots V_k$, onde cada V_i é T-invariante, então

$$f(T)V = f(T)V_1 \oplus \cdots f(T)V_k.$$

3) Sejam $v, w \in V$ tais que $m_v = m_w$. Então

$$m_{f(T)v} = m_{f(T)w}$$

e além disso

$$\dim C_T(f(T)v) = \dim C_T(f(T)w).$$

Iremos argumentar apenas na demonstração de 2) e 3) pois 1) é imediato da definição. Para 2), dado $v \in V$, escreva $v = v_1 + \cdots v_k$ e assim

$$f(T)v = f(T)v_1 + \cdots f(T)v_k$$

logo segue que $f(T)V = f(T)V_1 + \cdots + f(T)V_k$. Por fim, dado $1 \leq j \leq k$, suponha que exista $y \in V$ tal que

$$y \in (f(T)V_1 + \cdots f(T)v_{j-1}) \cap f(T)V_j\ .$$

Por um lado

$$y = f(T)v_j, \text{ onde } v_j \in V_j$$

e

$$y = f(T)x_1 + \cdots f(T)x_{j-1}$$

e assim como $f(T)y \in V_j$ tem-se que

$$f(T)x_i = 0, \text{ para todo } 1 \leq i \leq j-1$$

donde segue que $y = 0$. Seja g o T-anulador de $f(T)v$, então

$$g(T)f(T)v = 0$$

isto é, $gf(T)v = 0$ e portanto $m_v \mid gf$, ou seja, existe $h \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $gf = m_v h = m_w h$ e assim em particular g anula $f(T)w$, consequentemente $m_{f(T)w} \mid g$. Analogamente mostra-se que $g \mid m_{f(T)w}$.

Vamos agora proceder por indução para mostrar que $r = s$ e $p_i = g_i$, para cada $2 \leq i \leq r$. Vamos mostrar que se $r \geq 2$, então $p_2 = g_2$. Suponha então que $r \geq 2$. Dessa forma

$$\dim V > \dim W_0 + \dim C_T(v_1) = W_1.$$

Dado que $p_1 = g_1$, tem-se que

$$\dim C_T(v_1) = \dim C_T(w_1)$$

e assim

$$\dim V > \dim W_0 + \dim C_T(w_1).$$

Por conta da decomposição de V, de 1) e 2)

$$p_2(T)V = p_2(T)W_0 \oplus C_T(p_2(T)w_1) \oplus \cdots C_T(p_2(T)w_s)$$

e ademais, como $p_2(T)v_i = 0$, para cada $2 \leq i \leq r$, concluí-se que

$$p_2(T)V = p_2(T)W_0 \oplus C_T(p_2(T)v_1).$$

Por 3), sabemos que

$$\dim C_T(p_2(T)v_1) = \dim C_T(p_2(T)w_1)$$

logo, para cada $2 \leq i \leq r$

$$\dim C_T(p_2(T)w_i) = 0.$$

Em particular, $p_2(T)w_2 = 0$ e assim, $g_2 \mid p_2$. Analogamente mostra-se que $p_2 \mid g_2$. O resultado geral segue por indução.

□

Corolário 1.22. *Se $T \in End_{\mathbb{F}}(V)$ é um operador linear num espaço vetorial de dimensão finita n, então qualquer subespaço W_0 de V o qual é T-admissível admite um complementar W_0' T-admissível.*

Demonstração. Se $W_0 = V$, tome $W_0' = \{0\}$. Caso contrário o resultado segue de imediato do teorema da decomposição cíclica. □

Corolário 1.23. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e $T \in End_{\mathbb{F}}(V)$. Então:*
a) Existe um vetor $v \in V$ tal que

$$m_v = m_T.$$

b) Existe $u \in V$ tal que $V = C_T(u)$ se, e somente se, $m_T = c_T$.

Demonstração. Se $V = \{0\}$ o resultado é imediato. Suponha que $V \neq \{0\}$ e tome $W_0 = \{0\}$, então pelo teorema da decomposição cíclica, existe $v_1, ..., v_r \in V$ tais que

$$V = C_T(v_1) \oplus \cdots C_T(v_r)$$

e além disso

$$m_{v_r} \mid m_{v_{r-1}} \mid \cdots m_{v_2} \mid m_{v_1}.$$

Notemos que

$$m_{v_i}(T)v_i = 0, \text{ para cada } \quad 2 \leq i \leq r$$

e por outro lado, como $m_{v_i} \mid m_{v_1}$, pode-se escrever

$$m_{v_1} = h_i m_{v_i}, \text{ para cada } \quad 2 \leq i \leq r$$

em particular, $m_{v_1}(T)v_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq r$ e assim, $m_{v_1} = m_T$.
b) Se existe $v \in V$ tal que $V = C_T(v)$, então $m_v = m_T$ e além disso

$$\deg m_T = \dim C_T(v) = \dim V = \deg c_T$$

e como $m_T \mid c_T$ e ambos são polinômios mônicos, concluí-se que $m_T = c_T$. Reciprocamente, se $v \in V$ é tal que $m_v = m_T = c_T$, então $\dim C_T(v) = \dim V$, donde tem-se que $V = C_T(v)$. □

Uma base formada pela união das bases cíclicas de um operador T num espaço vetorial de dimensão finita é chamada de base racional. Essencialmente, utiliza-se o teorema da decomposição primária e o teorema da decomposição cíclica, onde este último pode ser pensado como sendo um refinamento do da decomposição primária.

Teorema 1.24. *(Teorema generalizado de Cayley-Hamilton) Sejam V espaço vetorial de dimensão finita n e $T \in End_{\mathbb{F}}(V)$. Então*
a) $m_T \mid c_T$
b) c_T e m_T tem os mesmos fatores irredutíveis a menos de multiplicidades.
c) Se

$$m_T = f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k}$$

então

$$c_T = f_1^{d_1} \cdots f_k^{d_k}$$

onde

$$d_i = \dim V_{f_j^{r_j}}, \text{ para cada } j \in \{1, 2, ..., k\}.$$

Demonstração. Se $V = \{0\}$ não há nada para provar. Caso contrário, existem vetores $v_1, ..., v_r \in V$ tais que

$$V = C_T(v_1) \oplus \cdots C_T(v_r)$$

além disso, como já vimos no corolário acima

$$m_{v_1} = m_T.$$

Agora, para cada $1 \leq j \leq r$ considere o operador restrição

$$\widetilde{T}_j := T_{|C_T(v_j)} : C_T(v_j) \to C_T(v_j).$$

Mais uma vez pelo corolário acima

$$m_{v_j} = m_{\widetilde{T}_j} = c_{\widetilde{T}_j} \quad , 1 \leq j \leq r.$$

Dessa forma, segue que

$$c_T = m_{v_1} \cdots m_{v_r}.$$

Em particular $m_{v_1} \mid c_T$, isto é, $m_T \mid c_T$ o qual prova a). Com isso, concluí-se também que cada fator mônico irredutível que divide m_T deve também dividir c_T. Por outro lado, seja f_i um fator irredutível de c_T, então $f_i \mid m_{v_j}$, para algum $1 \leq j \leq r$, e assim

$$f_i \mid m_{v_j} \mid m_{v_1} = m_T$$

o qual prova b). Pelo teorema da decomposição primária, pode-se escrever

$$V = V_{f_1^{r_1}} \oplus \cdots \oplus V_{f_k^{r_k}}$$

e se para cada $1 \leq i \leq r$

$$T_i := T_{|V_{f_i^{r_i}}} : V_{f_i^{r_i}} \to V_{f_i^{r_i}}$$

então

$$m_{T_i} = f_i^{r_i}, \text{ para } 1 \leq i \leq k.$$

Agora, pela parte b), c_{T_i} é da forma

$$c_{T_i} = f_i^{d_i}$$

e portanto

$$\dim V_{f_i^{r_i}} = d_i \deg f_i$$

isto é

$$d_i = \frac{\dim V_{f_i^{r_i}}}{\deg f_i}.$$

Consequentemente

$$c_T = f_1^{d_1} \cdots f_k^{d_k}.$$

□

• Os vetores $m_{v_1}, ..., m_{v_r}$ do teorema da decomposição cíclica são chamados de fatores invariantes.

• Os vetores $f_1, ..., f_k$ do teorema acima são chamados de fatores irredutíveis.

Observação 1.25. *Suponha que*

$$m_T = f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k}.$$

Sejam $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, ..., \mathcal{S}_k$ *subconjuntos linearmente independentes de* $V_{f_1^{r_1}}, ..., V_{f_k^{r_k}}$ *respectivamente. Então, afirmamos que*

1) $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j = \emptyset$.

2) $\mathcal{S}_1 \cup \cdots \mathcal{S}_j$ *é linearmente independente, onde* $j \leq k$.

A afirmação 1) é imediata, para 2) é suficiente ver que se $w_1 \in V_{f_1^{r_1}}, ..., w_k \in V_{f_k^{r_k}}$*, então* $\{w_1, ..., w_k\}$ *são linearmente independentes. Se* $k = 1$ *o resultado é imediato, suponha que o resultado seja válido para* $k - 1 > 0$*, e assim aplicando* $f_k r^k(T)$ *a ambos os lados da combinação linear*

$$\alpha_1 w_1 + \cdots \alpha_k w_k$$

concluí-se que $\alpha_1 = ... = \alpha_{k-1} = 0$ *e portanto* $\alpha_k = 0$.

Vamos agora definir o diagrama de pontos de cada polinômio irredutível do polinômio característico de um operador $T : V \to V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Tal irá nos auxiliar na construção da forma canônica racional.

Antes porém iremos fazer um embasamento de algumas ideias. Seja $T : V \to V$ um operador linear num espaço de dimensão finita n, e $f(t)$ um fator irredutível de c_T e V_{f^r} como no teorema da decomposição primária. Notemos que se $g(t)$ é outro fator irredutível de V, então se V_{g^s} é o fator relacionado a g que aparece no teorema da decomposição primária, então

$$f(T)_{|V_{g^s}} : V_{g^s} \to V_{g^s}$$

é um isomorfismo. Considere U a restrição de $f(T)$ à V_{f^r}. Então, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $U^q = 0$. De fato, basta ver que se $q \geq r$, então para todo $x \in V_{f^r}$, $f(T)^q x = 0$. Portanto, o polinômio característico de U é da forma $c_U = x^m$, onde $m = \dim V_{f^r}$. Dessa forma, como iremos ver na próxima seção, V_{f^r} é o autoespaço generalizado associado a $\lambda = 0$ e assim, U tem uma forma canônica de Jordan.

Seja agora $\mathcal{B}$ uma base racional para T (formada pela união de bases T-cíclicas como no teorema da decomposição cíclica). Além disso, sejam $\mathcal{B}_{v_1}, ..., \mathcal{B}_{v_k}$ as bases T-cíclicas que estão em V_{f^r}, isto é, $\mathcal{B}_{v_1} \cup \cdots \cup \mathcal{B}_{v_k}$ forma uma base de V_{f^r}. Considere $\mathcal{B}_{v_j}$ e suponha que $m_{v_j} = f^{l_j}$, onde $l_j \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, se $d = \deg f$, segue que

$$|\mathcal{B}_{v_j}| = \deg m_{v_j} = l_j d.$$

Considere γ_i o ciclo de autovetores generalizados de U, correspondentes a $\lambda = 0$, cujo vetor final é $T^i(v_j)$. Logo, pode-se escrever

$$\gamma_i = \{f(T)^{l_j - 1}(T^i(v_j)), f(T)^{l_j - 2}(T^i(v_j)), \cdots, f(T)(T^i(v_j)), T^i(v_j)\}.$$

É claro que $\gamma_i \subseteq C_T(v_i)$, além disso, γ_i é um conjunto $l.i.$ De fato, considere a combinação linear nula

$$\sum_{s=1}^{l_j} \alpha_s f(T)^{l_j - s} T^i(v_j) = 0$$

então, aplicando $f(T)^{l_j - 1}$ a ambos os lados da igualdade acima concluí-se que

$$\alpha_{l_j} f(T)^{l_j - 1} T^i v_j = 0.$$

Por outro lado, como $f(t)^{l_j}$ e t^i são relativamente primos, segue que existem $h, g \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tais que

$$1 = f(t)^{l_j} h(t) + g(t) t^i$$

e assim

$$I = f^{l_j}(T) h(T) + g(T) T^i$$

dessa forma, T^i restrito à $V_{f^{l_j}}$ é injetora e portanto, como $f^{l_j-1} v_j \neq 0$, segue que

$$T^i f(T)^{l_j-1} v_j \neq 0$$

donde tem-se que

$$\alpha_{l_j} = 0.$$

Procedendo dessa forma, concluí-se que todos os outros coeficientes são nulos.

Lema 1.26. *Com a mesma notação acima, defina*

$$\mathcal{C}_j = \gamma_0 \cup \cdots \gamma_{d-1}$$

então

$$|\mathcal{C}_j| = l_j d$$

e além disso, $\mathcal{C}_j$ é uma base de $C_T(v_j)$.

A demonstração do teorema acima se faz utilizando vetores iniciais (basta aplicar em qualquer combinação linear nula $f(T)^{l_j-1}$). Posteriormente, utiliza o mesmo argumento acima, usando o fato de que $f(t)^{l_j}$ é relativamente primo com qualquer polinômio $h(t)$ diferente de qualquer potência de $f(t)$.

Observação 1.27. *Como cada $\mathcal{C}_j$, $1 \leq j \leq k$, é uma base de $C_{T(v_j)}$ concluí-se que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \mathcal{C}_k$ é uma base de V_{f^r} e assim, por construção, esta é formada por autovetores generalizados de U e assim, $\mathcal{C}$ é base de Jordan.*

2 Forma canônica de Jordan via espaços quocientes

Teorema 2.1. *(Teorema de Cayley Hamilton) O polinômio característico de um operador $f : V \to V$ anula f.*

Exemplo 2.2. *Suponha que f seja um bloco de Jordan $J_r(\lambda)$. Então, é imediato que o polinômio característico de f tem a forma $p_f(x) = (x - \lambda)^r$. Vamos calcular o seu polinômio minimal. Para isso, vamos usar o bloco auxiliar $J_r(0)$. Assim, temos que*

$$J_r(\lambda) = \lambda I_r + J_r(0)$$

além disso, como

$$J_r(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

tem-se que para $1 \leq k \leq r-1$ temos que $J_r(0)^k$ é a matriz cujas k primeiras colunas são nulas e a "diagonal"começa a partir da $k+1$ coluna. Além disso, para $k \geq r$, tem-se que $J_r(0)^k = 0$. Isso implica que $(J_r(\lambda) - \lambda I_r)^k = 0 \Leftrightarrow J_r(0)^k = 0$. Suponha que o polinômio minimal $m_{J_r(\lambda)}$ seja da forma $m_{J_r(\lambda)}(x) = (x-\lambda)^p$, então tem-se que

$$0 = m_{J_r(\lambda)}(J_r(\lambda)) = (J_r(\lambda) - \lambda I_r)^p = J_r(0)^p$$

donde segue que $p = r$. Portanto, o polinômio minimal de um bloco de Jordan, é o polinômio característico deste bloco.

Vamos introduzir mais uma notação que já havíamos definido anteriormente apenas por questões de seguir a literatura clássica aqui, a saber o livro de Alexei Kostrikin- Linear Algebra and Geometry. Dado $f : V \to V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, define-se $I \equiv I_{dim(V)}$ e além disso

$$L(\lambda) = \{v \in V : \exists r \in \mathbb{N} \quad , (f - \lambda I)^r v = 0\}$$

Proposição 2.3. *O conjunto $L(\lambda)$ definido acima é um subespaço vetorial de V. Além disso, $L(\lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ é um autovalor.*

A próxima proposição é essencialmente o teorema da decomposição primária.

Proposição 2.4. *(Teorema da Decomposição Primária) Suponha que $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ são os autovalores do operador f. Então, tem-se que*

$$L = L(\lambda_1) \oplus L(\lambda_2) \oplus ... \oplus L(\lambda_k).$$

A demonstração de tal teorema é exatamente a mesma feita anteriormente, por conta disso, não iremos fornecer outra demonstração. Sabe-se além disso que $f_{|L(\lambda_j)}$ induz um operador linear em $L(\lambda_j)$. Por essa razão, iremos nos concentrar aqui em demonstrar a existência de uma base de Jordan para um operador f com apenas um autovalor λ e $V = L(\lambda)$. Ademais, é suficiente supor que $\lambda = 0$. Com efeito, se existe uma base de Jordan para $(f - \lambda I)$, então imediatamente tem-se que f também está na forma de Jordan, uma vez que λI apenas acrescenta λ na diagonal da matriz da forma canônica de $(f - \lambda I)$.

Proposição 2.5. *Seja f um operador linear nilpotente em um espaço vetorial de dimensão finita V. Então, f possui uma base de Jordan e além disso, a matriz de f em tal base é uma combinação de blocos da forma $J_r(0)$.*

Se já temos em mãos a base de Jordan de f, é interessante denotarmos tal pelo diagrama seguinte

$$\begin{array}{cccc}
\bullet & \bullet & & \\
\downarrow & \downarrow & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}$$

o qual deve-se considerar o seguinte:

- Os pontos são os elementos da base
- As flechas indicam a ação de f
- A última linha é representada pelos autovetores de f, portando tais retornam 0 mediante a aplicação de f
- Os pontos de cada coluna representam os elementos da base do respectivo bloco de Jordan de f. Além disso, o espaço gerado por tais vetores é um espaço f-cíclico, o qual tem dimensão igual a quantidade de pontos na coluna.

Notemos também que se $\{e_1, e_2, ..., e_h\}$ é base de um desses espaços f-cíclicos e além disso tem-se a propriedade

$$f(e_j) = e_{j-1}, \quad f(e_1) = 0$$

então a matriz de g (f restrito ao espaço gerado pelos vetores acima) é dada por

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}.$$

Vamos então demonstrar a proposição acima utilizando espaços quocientes.

Demonstração. Suponha que $dim(V) = n$. Para demonstrar a existência da base de Jordan, vamos proceder por indução em n.

Se $n = 1$, então V é em particular um auto-espaço associado ao autovalor $\lambda = 0$, portanto, nesse caso não há nada para demonstrar uma vez que nesse caso, $f \equiv 0$.

Suponha que o resultado seja válido para todo espaço vetorial de dimensão $1 < m < n$. Ademais, se L_0 é o espaço dos autovetores de f (o qual tem dimensão > 0, uma vez que estamos supondo que $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado) considere o espaço vetorial quociente $W := V/L_0$ e notemos que

$$dim(W) = dim(V) - dim(L_0) = n - dim(L_0)$$

e assim, W é um espaço vetorial de dimensão estritamente menor que n e portanto, podemos aplicar a hipótese de indução sobre W. Antes porém, precisamos fazer uma "boa"escolha de operador linear para encontrarmos a base de Jordan, pois bem, para isso utilizamos o operador induzido por f, o qual é definido por

$$\overline{f} : W \to W, \quad x + L_0 \mapsto f(x) + W.$$

Logo, por hipótese de indução, $\overline{f}$ tem uma base de Jordan. (Aqui estamos suponho que W não seja vazio, pois caso contrário $L = L_0$).

Para construir o diagrama de pontos de $\overline{f}$, basta levarmos o maior vetor de cada coluna como sendo o primeiro elemento de tal, o qual é denotado por $\overline{e_i} := e_i + L_0$, para $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e posteriormente considerar as aplicações de $\overline{f}$ de cima pra baixo. (Aqui, o natural m denota a quantidade de $\overline{f}$-ciclos). Vamos então agora construir o diagrama de pontos D de f. Para isso, vamos impor que a i-ésima coluna do diagrama D vai consistir de cima pra baixo dos vetores

$$e_i, f(e_i), f^2(e_i), ..., f^{h_i}(e_i)$$

respectivamente.(O número h_i é a quantidade de pontos na i-ésima coluna de $\overline{D}$)

Como os vetores $\overline{f}^{h_i-1}(\overline{e_i}) \neq 0$ são tais que $\overline{f}^{h_i}(\overline{e_i}) = 0$, tem-se que $f^{h_i}(e_i) \in L_0$ e portanto, $f(f^{h_i}(e_i)) = 0$, ou seja, $f^{h_i+1}(e_i) = 0$.

Notemos agora que os vetores $\{f^{h_1}(e_1), ..., f^{h_m}(e_m)\}$ são l.i. Com efeito

$$0 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f^h(e_j)$$

se, e somente se,

$$0 = f\Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j f^{h_j-1}(e_j)\Big)$$

implicando que

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j f^{h_j-1}(e_j) \in L_0$$

e portanto
$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \overline{f}^{h_j-1}(e_j) = 0$$
ou seja, $\alpha_j = 0$ para todo $j \in \{1, 2, ..., m\}$ pois os vetores da última combinação são l.i.

Agora, estendemos $\{f^{h_1}(e_1), ..., f^{h_m}(e_m)\}$ até uma base de L_0 e com isso, formamos a última linha (de baixo) do diagrama de pontos D. (Claro, se for preciso acrescentar mais vetores ao conjunto acima afim de completar uma base de L_0, então as colunas relacionadas a tais vetores são colunas unitárias).

Por fim, precisamos mostrar que de fato, os elementos de D formam uma base de V.

Primeiro vamos mostrar que tais elementos de fato geram V. Dado $v \in V$, $\overline{v} \in W$ e portanto existem $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$ tais que
$$\overline{v} = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=0}^{h_i-1} \alpha_{ij} f^j(e_i) \Big)$$
portanto, como L_0 é f-invariante, segue que
$$v - \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=0}^{h_i-1} \alpha_{ij} f^j(e_i) \Big) \in L_0$$
e assim, se $\{f^{h_1}(e_1), ..., f^{h_m}(e_m), x_{m+1}, ..., x_l\}$ é base de L_0, temos que existem $\beta_1, ..., \beta_l$ tais que
$$v - \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=0}^{h_i-1} \alpha_{ij} f^j(e_i) \Big) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k f^{h_k}(e_m) + \sum_{k=m+1}^{l} \beta_k x_k$$
donde temos que
$$v = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=0}^{h_i-1} \alpha_{ij} f^j(e_i) \Big) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k f^{h_k}(e_m) + \sum_{k=m+1}^{l} \beta_k x_k$$
e portanto, os elementos de D geram V.

Para ver que os elementos todos de D são linearmente independentes, basta ver que se h é a última linha do diagrama de pontos, a aplicação do operador f^{h-1} em qualquer combinação linear dos vetores de D igualados a zero resulta numa combinação entre os elementos da base de L_0 igualados a zero. Repetindo esse processo um número finito de vezes observa-se que de fato, os elementos de D são l.i. O que completa a demonstração. $\square$

Observação: Suponha dado uma base de Jordan para o operador f. Então, a matriz de f nessa base é composta por blocos Jordan correspondentes a cada autovalor. Suponha que existam m colunas correspondentes ao autovalor λ e além disso, cada coluna tenha tamanho $h_i + 1$ $(1 \leq i \leq m)$. Ademais, os vetores correspondentes a cada sub-bloco são dados em ordem crescente da esquerda para a direita por
$$e_1, (f-\lambda)(e_1), ..., (f-\lambda)^{h_1}(e_1)$$
$$e_2, (f-\lambda)(e_2), ..., (f-\lambda)^{h_2}(e_2)$$

.

.

.
$$e_m, (f-\lambda)(e_m), ..., (f-\lambda)^{h_m}(e_m).$$

Agora, seja L_λ o espaço gerado pelos vetores acima. Se $r = \max\{h_1, ..., h_m\}$, então segue que

$$(f - \lambda)^{r+1}(v) = 0, \text{ para todo } v \in L_\lambda.$$

Portanto, temos que

$$L_\lambda \subseteq L(\lambda).$$

Agora, se $\lambda_1, ..., \lambda_k$ são os autovalores de f, por definição da base de Jordan, temos que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} L_{\lambda_j}.$$

Por outro lado, pelo teorema da decomposição primária, segue que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} L(\lambda_i)$$

logo, segue que $\dim(L_{\lambda_i}) = \dim(L(\lambda_i))$ e assim, $L_{\lambda_i} = L(\lambda_i)$. Isso significa que a soma das dimensões dos blocos de Jordan correspondentes a cada λ_i é independente da escolha da base, bem como seu espaço gerado.

Utilizando o argumento da observação acima, pode-se mostrar a unicidade da base de Jordan. (c.f página 63 Livro do Kostrikin) Ademais, nessa mesma demonstração, mostra-se que a primeira linha do diagrama de pontos (linha de baixo) gera o auto-espaço associado ao autovalor λ.

Teorema 2.6. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado, V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ e $f : V \to V$ um operador linear. Então*
a) Existe uma base de Jordan para f.
b) A matriz de Jordan J de f é única a menos de permutação de seus blocos.

Método para encontrar a forma canônica de Jordan de uma matriz: Seja f um operador linear em V e A a matriz de f em alguma base de V. Resumindo o que foi visto até aqui, para se encontrar a forma canônica de A podemos proceder da seguinte forma:

- Encontre o polinômio característico c_A de A bem como suas raízes

- Para cada raiz λ de c_A, construa o respectivo diagrama de pontos, o qual como vimos, é tal que a primeira linha (de baixo pra cima) tem tamanho $\dim(Ker(A - \lambda I))$, a segunda $\dim(Ker(A - \lambda I)^2) - \dim(Ker(A - \lambda I))$, e assim por diante. Isto é, se $j > 1$, a $j-$ésima linha tem tamanho l_j dado por

$$l_j = \dim(Ker(A - \lambda I)^j) - \dim(Ker(A - \lambda I)^{j-1}).$$

Calculo do polinômio minimal a partir da forma canônica de Jordan:

Já vimos no exemplo 2.2 que o polinômio minimal de $J_r(\lambda)$ é exatamente igual ao polinômio minimal deste bloco, isto é, $m_{J_r(\lambda)} = (x - \lambda)^r$. Agora, suponha que tenhamos m blocos associados ao autovalor λ, isto é,

$$J_{r_1}(\lambda), ..., J_{r_m}(\lambda)$$

são os blocos que Jordan que compõem o bloco associado a λ, isto é, a matriz de $f_{|L_\lambda}$. Suponha que $m_{L_\lambda} = (x - \lambda)^p$ e seja $r = max\{r_1, r_2, ..., r_m\}$. Vamos mostrar que $m_{L_\lambda} = (x - \lambda)^r$.

Seja $B = A_{|L_\lambda}$ e note que para todo $l \in L_\lambda$, $(B - \lambda I)^r(l) = 0$, consequentemente, temos que $(x - \lambda)^p \mid (x - \lambda)^r$ e portanto, $p \leq r$. Suponha por absurdo que $p < r$. Dessa forma, temos que existe $k \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que

$$p < r_k$$

e portanto, não se pode ter $(B - \lambda I)^p(e_k) = 0$, porém isso é um absurdo. Concluímos então que $p = r$. Isto é

$$m_{L_\lambda} = (x - \lambda)^{max\{r_1,\ldots,r_m\}}.$$

Observação: Suponha que o diagrama de pontos de uma matriz A seja dado. Então, para escolhermos um vetor para iniciar o ciclo da primeira coluna do diagrama de pontos em geral procedemos da seguinte forma:

- Assumindo que o tamanho das colunas está em forma decrescente com tamanhos

  $$h_1 + 1 \geq h_2 + 1 \geq .... \geq h_p + 1$$

  então escolha como o primeiro vetor e_1, um vetor na base de $Ker((A - \lambda I)^{h_1})$ que não esteja em $Ker((A - \lambda I)^{h_1 - 1})$.

- Para a escolha do vetor e_2 que inicia a segunda coluna, escolha e_2 de forma que

  $$e_2 \in Ker((A - \lambda I)^{h_2}) \setminus Ker((A - \lambda I)^{h_2 - 1})$$

  e

  $$v^1, e_2 \text{ sejam l.i, onde } v^1 \text{ é o último vetor da coluna } e_1$$

- Continue o processo para os outros vetores

Exemplo 2.7. *Considere a matriz A dada por*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

vamos encontrar a forma canônica de Jordan de A, e uma base de Jordan de $\mathbb{R}^4$ associada a A.

Analisando $det(A - xI)$ e aplicando processos de escalonamento, pode-se mostrar que

$$c_A(x) = (x - 2)^2(x - 4)^2.$$

Assim, temos as seguintes possibilidades de polinômio minimal

- *1)* $m_A(x) = (x - 2)(x - 4)$
- *2)* $m_A(x) = (x - 2)^2(x - 4)$
- *3)* $m_A(x) = (x - 2)(x - 4)^2$
- *4)* $m_A(x) = c_A(x)$

Agora, analisando o operador $(A - 2I)$, concluímos que

$$Ker((A - 2I)) = span\{(0, 1, 2, 0), (2, 1, 0, 2)\}$$

e

$$Ker((A - 2I)^2) = span\{(0, 1, 2, 0), (1, 0, -1, 1)\}.$$

Analogamente, para $(A - 4I)$, temos

$$Ker(A-4I) = span\{(0,1,1,1)\}$$

e

$$Ker((A-4I)^2) = span\{(1,0,0,1),(-1,1,1,0)\}.$$

Assim, o diagrama de pontos de $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = 4$ *são dados respectivamente por*

$$\lambda_1 : \ \bullet \ \ \bullet$$

e

$$\lambda_2 : \ \begin{matrix}\bullet \\ \bullet\end{matrix}$$

Consequentemente, a forma canônica de Jordan J_A *de* A*, é dada por*

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Com isso, concluímos que o polinômio minimal da matriz A*, é dado pela terceira opção acima. Por fim, para selecionarmos uma base de Jordan para a matriz* A*, basta tomarmos uma base de* $Ker(A-2I)$ *para o bloco correspondente a* λ_1 *e para* λ_2*, podemos escolher* $e_1 := (1,0,0,1)$ *e assim, segue que*

$$(A-4I)(e_1) = (0,1,1,1)$$

portanto

$$\mathcal{B}_J := \{(0,1,2,0),(2,1,0,2),e_1,(A-4I)(e_1)\}$$

é uma base de Jordan para A*.*

EQ-1- 2001- Seja $V = \mathbb{C}^n$ com produto escalar usual e seja G um conjunto de transformações unitárias em V. Mostre que se as transformações de G comutam dois a dois, então existe uma base de V que diagonaliza simultaneamente os elementos de G.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que exista $f \in G$ com pelo menos dois autovalores diferentes, pois caso contrário, todos os elementos em G seriam da forma $T = \mu I$ e assim, a base canônica $\{e_1, ..., e_n\}$ poderia ser escolhida como base simultânea de diagonalização.

Dado $f \in G$ com pelo menos dois autovalores diferentes, pelo teorema espectral, existe uma base $\mathcal{B}$ ortogonal de V constituída por autovetores de f. Suponha que

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$$

seja tal base. O resultado é imediato se $n = 1$. Vamos então supor que tal afirmação é válida para todo espaço de dimensão $m < n$, onde estamos assumindo que $n > 1$. Assim, se $\lambda_1, ..., \lambda_k$ são os autovalores de f e V_{λ_i} seu respectivo auto-espaço associado, temos que

$$V = V_{\lambda_1} \oplus .... \oplus V_{\lambda_k}.$$

Agora, notemos que se v_i é um autovalor associado a λ_i, então para qualquer $g \in G$

$$f(g(v_i)) = g(f(v_i)) = \lambda_i g(v_i)$$

ou seja, $g(v_i) \in V_{\lambda_i}$, implicando então que V_{λ_i} é g-invariante. Isto é, a restrição de g a V_{λ_i} é um operador linear.

Agora, precisamos mostrar que $g_{|V_{\lambda_i}}$ é diagonalizável em V_{λ_i}. Para isso, seja $\{u_1, ..., u_p\}$ uma base de V_{λ_i} e complete tal até uma base de V, portanto, o operador g nessa base, tem a forma

$$[g] = \begin{pmatrix} [g_{|V_{\lambda_i}}] & \cdot \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

consequentemente, como o polinômio minimal de g é invariante pela escolha de base, temos que

$$m_g(x) = m_{g_{|V_{\lambda_i}}}(x)p(x)$$

onde $p \in \mathbb{C}[x]$ é um outro polinômio. Consequentemente, como m_g se fatora em fatores irredutíveis de grau 1 (pois g é diagonalizável), temos que $m_{g_{\lambda_i}}$ também, donde concluímos que $g_{|V_{\lambda_i}}$ também é diagonalizável.

Assim, por hipótese de indução, segue que existe base $\mathcal{B}_i := \{l_{1,i}, ..., l_{p_i,i}\}$ de V_{λ_i} que diagonaliza simultaneamente todos os elementos de g. Por fim, se tomarmos a base

$$\mathcal{D} := \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$$

concluímos que $\mathcal{D}$ diagonaliza todos os elementos de g.

Na realidade, pode-se ainda encontrar uma base ortonormal. Com efeito, basta notarmos que se $u, v \in V_{\lambda_i}$, então

$$\langle v, u\rangle = \langle g(v), g(u)\rangle = \langle g_{|V_{\lambda_i}}(v), g_{|V_{\lambda_i}}(u)\rangle$$

portanto, $g_{|V_{\lambda_i}}$ é um operador unitário e assim, mais uma vez por hipótese de indução, as bases $\mathcal{B}_i$ podem ser tomadas como bases de autovetores ortonormais. Agora, como auto-espaços de diferentes autovalores de transformações unitárias são mutualmente ortogonais, tem-se que os elementos de $\mathcal{B}_i$ são ortogonais aos elementos de $\mathcal{B}_j$ sempre que $i \neq j$, donde segue que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V cujos autovetores são autovetores para toda transformação de G.

□

EQ-3-2001- Determine se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:
Afirmação:
Seja $A \in \mathbb{M}_{17}(\mathbb{F})$ uma matriz nilpotente, tal que

$$\dim(Ker(A)) = 6, \dim(Ker(A^2)) = 10, \dim(Ker(A^3)) = 13, \dim(Ker(A^4)) = 15$$

. Então, o polinômio minimal de A pode ser $m_A(x) = x^4$.

Demonstração. Notemos que se $k \in \mathbb{N}$ é o índice de nilpotência de A, então o polinômio minimal de A é exatamente x^k. Se $A^4 = 0$, teríamos que $\dim(Ker(A^4)) = 17$, o qual é um absurdo. Portanto, tem-se que x^4 não pode ser o polinômio minimal de A. □

EQ-4-2019
Seja

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$$

a) Ache a correspondente decomposição primária de $\mathbb{R}^4$ e o polinômio minimal de T.
b) Ache uma base de Jordan com respeito a T.
c) Ache uma decomposição cíclica de $\mathbb{R}^4$ com respeito a T.
d) Ache a forma racional de T

Demonstração. Usando a definição de polinômio característico, concluímos que

$$c_T(x) = (x-2)^4.$$

Vamos calcular o diagrama de pontos de $\lambda = 2$.

$$\bullet\ Ker(T-2I) = Ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

portanto, temos que

$$Ker(T-2I) = span\{(1,1,0,0),(1,0,0,1)\}.$$

$\bullet\ Ker((A-2I)^2) = Ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ o que implica que

$$Ker((T-2I)^2) = span\{e_1, e_2, e_4\}.$$

Finalmente, chegamos que

$$Ker((T-2I)^3) = \mathbb{R}^4.$$

Dessa forma, concluímos que o diagrama de pontos de $\lambda = 2$ é dado por

$$\begin{array}{cc} \bullet & \\ \bullet & \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

consequentemente, o polinômio minimal de T é dado por

$$m_T(x) = (x-2)^3$$

e a respectiva decomposição primária de $\mathbb{R}^4$ é

$$\mathbb{R}^4 = Ker((T-2I)^3).$$

Além disso, a forma canônica de Jordan $J_T(2)$ de T é

$$J_T(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Antes de prosseguirmos, note que se $v = e_1 + e_3$, então $(T-2I)^2(v) \neq 0$. Agora, note que

$$T(v) = (e_1 - e_4) + e_1 + 2e_2 + 2e_3 = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 - e_4 = (2,2,2-1)$$

$$T^2(v) = T((2,2,2-1)) = 5e_1 + 8e_2 + 4e_3 - 3e_4 = (5,8,4,-3)$$

e

$$T^3(v) = 14e_1 + 24e_2 + 8e_3 - 6e_4 = (14,2,8,-6).$$

Por outro lado

$$8v - 12T(v) + 6T^2(v) = T^3(v)$$

portanto, concluímos que $m_v = m_T$.

Escolha $v_1 := e_1 + e_3$ e $v_2 := (1,1,0,0)$, então

$$\mathcal{B}_J := \{v_1, (T-2I)v_1, (T-2I)^2v_1, v_2\}$$

é uma base de Jordan de T

Agora, seja $v_{1,1} := v_1$ e $v_{1,2} := v_2$ e defina

$$w_1 := v_{1,1}$$

e

$$w_2 = v_{1,2}$$

portanto, temos que

$$\mathbb{R}^4 = C_T(w_1) \oplus C_T(w_2)$$

é a decomposição cíclica de $\mathbb{R}^4$ com respeito a T. Além disso, sua forma racional é dada por

$$R_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercício 5- P1 Francesco Matucci Suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ e seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensão finita. Além disso, suponha que $T : V \to V$ seja umas transformação linear cujos fatores invariantes sejam os polinômios

$$f_1(t) = t^2(t^2+9)(t+4)^2, \quad f_2(t) = t(t+4)^2 \text{ e } f_3(t) = t+4$$

a) Encontre o polinômio mínimo e característico de T
b) Encontre uma forma canônica de Jordan para T sobre $\mathbb{C}$.

Demonstração. a) Dado que $f_3 \mid f_2 \mid f_1$, concluímos que $m_T(t) = f_1(t)$. Além disso

$$c_T(t) = f_1(t)f_2(t)f_3(t) = t^3(t+4)^4(t^2+9).$$

b) Sobre $\mathbb{C}$, o polinômio c_T se decompõe da seguinte forma

$$c_T(t) = t^3(t+4)^5(t-3i)(t+3i)$$

e além disso

$$m_T(t) = t^2(t+4)^2(t-3i)(t+3i)$$

implicando que a decomposição primária correspondente é

$$V = V_{t^2} \oplus V_{(t+4)^2} \oplus V_{t-3i} \oplus V_{t+3i}.$$

Os blocos correspondentes a V_{t-3i} e V_{t+3i} são blocos unitários da forma $(3i)$ e $(-3i)$ respectivamente. Precisamos analisar $V_{(t+4)^2}$ e V_{t^2}.

Em V_{t^2}, a maior (primeira) coluna tem tamanho 2, portanto ou as outras tem tamanho 2 ou tamanho 1. Porém, dado que o o polinômio t tem grau 3 no polinômio característico, não se pode ter uma outra coluna de tamanho 2. Consequentemente, o diagrama de pontos de $\lambda = 0$ tem duas colunas, uma de tamanho 2 e a outra de tamanho 1.

Em $V_{(t+4)^2}$, a primeira coluna tem tamanho 2, e portanto, por conta dos fatores invariantes, as outras devem ter 2 pontos e 1 ponto respectivamente.

Dessa forma, dado que $\dim(V_{t^2} \oplus V_{(t+4)^2}) = 3+5 = 8$ e $\dim(V) = 10$, concluímos que só existem mais dois blocos unitários, a saber, $(3i)$ e $(-3i)$. Assim, a forma canônica de Jordan é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}$$

$\square$

3 Funcionais Lineares e Adjuntos

Relembremos rapidamente aqui alguns principais resultados relacionado à funcionais lineares e adjuntos.

- $V^* := Hom_{\mathbb{F}}(V, \mathbb{F})$.
- Se $V = \mathbb{F}[x]$, e $\alpha \in \mathbb{F}$, então

$$\phi_\alpha : V \to \mathbb{F}, \quad p \mapsto p(\alpha)$$

é um funcional linear.

- O traço de uma matriz quadrada é um funcional linear.
- $\dim_{\mathbb{F}}(V) = \dim_{\mathbb{F}}(V^*)$

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$, e seja $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ uma base de V. Nosso objetivo será construir uma base $\mathcal{B}^*$ de V^* que esteja relacionada a base $\mathcal{B}$. Para isso, para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$ defina

$$e^j : V \to \mathbb{F}, \quad e^j(e_k) = \delta_{jk}.$$

Com isso, temos bem definidos n funcionais lineares em V^*

$$e^1, e^2, ..., e^n.$$

Notemos que se

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

então

$$e^j(v) = \alpha_j, \quad \text{para todo } j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Portanto, pode-se escrever

$$v = \sum_{i=1}^{n} e^j(v) e_j.$$

O significado crucial de lembrar aqui é que e^j aplicado em cada vetor $v \in V$, retorna a j-ésima coordenada deste com respeito a base $\mathcal{B}$.

Proposição 3.1. *Com a notação acima, $\mathcal{B}^* := \{e^1, e^2, ..., e^n\}$ é uma base de V^*.*

Demonstração. Seja $f \in V^*$, então f é caracterizado por seu valor nos vetores de uma base de V, em particular nos valores de $\mathcal{B}$. Assim, existem $c_1, ..., c_n \in \mathbb{F}$ tais que

$$f(e_j) = c_j.$$

Assim, se

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

temos que

$$f(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i = \sum_{i=1}^{n} c_i e^i(v)$$

consequentemente

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i e^i$$

implicando que de fato $f \in span\{e^1, ..., e^n\}$.

Por fim, sejam $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{F}$ tais que

$$\beta_1 e^1(v) + ... + \beta_n e^n(v) = 0, \quad \text{para todo } v \in V.$$

Em particular, para $v = e_j$, implicando então que $\beta_j = 0$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$. □

Pode-se mostrar que os elementos $e^1, ..., e^n$ são únicos com a propriedade acima, dando origem então ao seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ e seja $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Então existe uma única base $\mathcal{B}^* = \{f_1, ..., f_n\}$ de V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, para todos $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.*

- A base $\mathcal{B}^* = \{e^1, ..., e^n\}$ definida acima, é chamada de a **base dual** a $\mathcal{B}$.
- Se $v \in V$, então as coordenadas de v com repeito a $\mathcal{B}$ são exatamente os números

$$e^1(v), e^2(v), ..., e^n(v).$$

Por outro lado, dado $f \in V^*$, as coordenadas de f em relação a $\mathcal{B}^*$ são precisamente os números

$$f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n).$$

Exercício 6: Contra-exemplo Se V for um espaço vetorial de dimensão finita e $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i \in I}$ for uma base de V, podemos também construir um conjunto $\mathcal{B}^* = \{e^i\}_{i \in I}$ tal que $e^i(e_j) = \delta_{ij}$, para $i, j \in I$. Tal conjunto será l.i, porém não será uma base de V.

Seja $V = \mathbb{R}[x]$ e seja $\mathcal{B} = \{1, x^j : j \geq 1\}$ base canônica de V. Considere $\mathcal{B}^* = \{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ base construída como acima. Vamos ver que $\mathcal{B}^*$ não gera todo V^*. Para cada $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considere o funcional

$$f_\alpha : V \to \mathbb{R}, \quad p(t) \mapsto p(\alpha).$$

Suponha que $f_\alpha \in span(\mathcal{B}^*)$. Então, existem constantes $c_1, ..., c_m \in \mathbb{F}$ e $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_\alpha(p(t)) = \sum_{j=1}^{m} c_j f_j(p(t)).$$

Seja agora $e_{m+1}(x) := x^{m+1}$ elemento básico de $\mathcal{B}$, então segue que

$$\alpha^{m+1} = f_\alpha(e_{m+1}(x)) = 0$$

o que é um absurdo, dado que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercício 7: Flávio Coelho Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $f, g \in V^*$. Suponha que h, definida por $h(u) = f(u)g(u)$, para cada $u \in V$, também seja um funcional linear sobre V. Mostre que se $\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}_2$, então $f = 0$ ou $g = 0$. O que acontece se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$?

Demonstração. Notemos que:

$f(u)g(u) + f(v)g(v) = h(u + v) = f(u + v)g(u + v) = (f(u) + f(v))(g(u) + g(v)) = f(u)g(u) + f(u)g(v) + f(v)g(u) + f(v)g(v)$. Portanto, temos que

$$f(u)g(v) + f(v)g(u) = 0$$

em particular, se $v = u$, temos que

$$2f(u)g(u) = 0$$

como $\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}_2$, segue que $f(u) = 0$ ou $g(u) = 0$, por arbitrariedade de $u \in V$, segue que $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, $2 = 0$, portanto não se pode concluir que $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$. $\square$

Vamos relembrar agora um pouco sobre o **espaço bidual**.

Definição 3.3. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. O espaço bidual a V é definido por*

$$V^{**} := (V^*)^*.$$

Agora, defina a função

$$\Phi : V \to V^{**}, v \mapsto \left(\Phi(v) : V^* \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \Phi(v)(f) = f(v) \right)$$

Teorema 3.4. *Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, Φ definida acima é um isomorfismo.*

Seja V espaço vetorial de dimensão finita e seja $\mathcal{C} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ uma base de V^*. Vamos descrever os passos para construir uma base $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{B}^* = \mathcal{C}$. Considere a base dual a $\mathcal{C}$,$\mathcal{C}^*$, dada por

$$\mathcal{C}^* = \{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\} \subseteq V^{**}$$

tal que

$$\phi_i(f_j) = \delta_{ij}.$$

Como Φ definida acima é um isomorfismo, segue que

$$\{\Phi^{-1}(\phi_1), \Phi^{-1}(\phi_2), ..., \Phi(\phi_n)\}$$

é uma base de V. Agora, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ defina

$$v_i := \Phi^{-1}(\phi_i).$$

E assim, por definição temos que

$$\Phi(v_i) = \phi_i = \phi_{v_i}.$$

Por fim, notemos que

$$f_j(v_i) = \phi_{v_i}(f_j) = \phi_i(f_j) = \delta_{ij}$$

implicando que de fato, $\mathcal{B} := \{v_1, ..., v_n\}$ é tal que

$$\mathcal{B}^* = \mathcal{C}.$$

Exercício 8: Contra-exemplo Vamos dar um exemplo de um espaço vetorial V tal que este e seu dual V^{**} não são isomorfos. Tome $V = \mathbb{R}[x]$ e para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, defina o funcional f_α por

$$f_\alpha(p(x)) = p(\alpha)$$

e considere a família de funcionais $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$. Afirmamos que tal família é linearmente independente. Com efeito, considere $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ (elementos diferentes) e $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$c_1 f_{\alpha_1}(p(x)) + ... + c_n f_{\alpha_n}(p(x)) = 0, \quad \text{para todo } p(x) \in V$$

em particular, se $p(x) = (x - \alpha_2)(x - \alpha_3)...(x - \alpha_n)$ temos que

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)...(\alpha_1 - \alpha_n) = 0$$

implicando que $c_1 = 0$. Procedendo dessa forma, concluímos que $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$. Dessa forma, concluímos que a família $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ é linearmente independente e pelo lema de Zorn, está contida em alguma base de V^*. Concluímos então que uma base de V^* não é enumerável. Assim, seja $\mathcal{C}$ uma base arbitrária de V^* contendo a família descrita acima. Dessa forma, em particular, $\mathcal{C}^*$ não pode ser enumerável, porém é um conjunto linearmente independente. Mais uma vez pelo argumento do lema de Zorn, V^{**} tem uma base não enumerável.

Com isso concluímos que V não pode ser isomorfo a V^{**}, uma vez que V possui uma base enumerável.

Exercício 8: Seja $V = \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ e $f \in V^*$ tal que

$$f(AB) = f(BA) \quad \text{para todos } A, B \in V.$$

Mostre que existe $\lambda \in \mathbb{F}$ tal que $f(A) = \lambda tr(A)$.

Demonstração. Sejam $\mathcal{B}$ base canônica e E_{ij} respectivas matrizes canônicas de V e lembremos que a i-ésima linha do produto $E_{ij}E_{kl}$ é obtida por multiplicar a por 1 a linha j de E_{kl}. Portanto, esta não será nula somente se $j = k$, neste caso o produto de ambas é E_{il}. Em outros termos, podemos escrever

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}.$$

Em particular, se $i \neq l$, então

$$E_{ij}E_{jl} = E_{il}$$

porém

$$E_{jl}E_{il} = 0.$$

Agora, seja

$$\mathcal{B}^* = \{E^{ij} : (i,j) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,n\}\}$$

base dual a $\mathcal{B}$. Sabe-se que

$$tr = \sum_{i=1}^{n} E^{ii}$$

e sejam $(\beta_{ij}) \subseteq \mathbb{F}$ tais que

$$f = \sum_{i,j} \beta_{ij}E^{ij}.$$

Dessa forma, dado que $E_{ij}E_{ji} = E_{ii}$ e $E_{ji}E_{ij} = E_{jj}$ e além disso pela propriedade de f, segue que

$$\beta_{ii} = \lambda, \quad \text{para todos } i \in \{1,2,...,n\} \text{ e algum } \lambda \in \mathbb{F}.$$

Agora, se $i \neq l$, pelas contas acima concluímos que

$$\beta_{il} = 0, \quad \text{para todo } i \neq l$$

implicando então que $f = \lambda tr$. □

Hiperplanos Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensão $n \geq 1$. Se $W \subseteq V$ é um subespaço de dimensão $n-1$, dizemos que W é um hiperplano de V.

Proposição 3.5. *O subespaço W é um hiperplano $\Leftrightarrow$ W tem a seguinte propriedade: Se W' é um subespaço de V tal que $W \subseteq W'$, então $W = W'$.*

Se $f \in V^*$ é um funcional não nulo, então $Ker(f)$ é um hiperplano em V. O próximo resultado nos diz que existe uma função sobrejetiva entre V^* e o conjunto dos hiperplanos em V, o qual iremos denotar por $\mathcal{H}$.

Teorema 3.6. *Seja V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita $n \geq 1$ sobre $\mathbb{F}$. Dado $H \subseteq V$ um hiperplano, existe um funcional não nulo $f \in V^*$ tal que*

$$Ker(f) = H.$$

4 Formas Bilineares

Definição 4.1. *Sejam V, W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$. O mapa $B : V \times W \to \mathbb{F}$ é dito ser uma forma bilinear se para cada $x \in V, y \in W$, $B(x, \cdot)$ e $B(\cdot, y)$ são funcionais lineares. Além disso, dizemos que B é **simétrica** se*

$$B(x,y) = B(y,x) \quad \text{para todo } (x,y) \in V \times W$$

*e **antissimétrica** se*

$$B(x,y) = -B(y,x) \quad \text{para todo } (x,y) \in V \times W.$$

Observação: Denota-se por $B_{\mathbb{F}}(V,W)$ o espaço das formas bilineares com valores em $\mathbb{F}$. Contudo, como vamos manter o corpo $\mathbb{F}$ fixado por enquanto, tal conjunto será denotado apenas por $B(V,W)$.

$*$ Daqui em diante todos os espaços vetoriais que vamos trabalhar são de dimensão finita.

Sejam $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_m\}$ e $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\}$ bases de V e W respectivamente. Dada $\phi \in B(V,W)$

$$[\phi]_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \Big(\phi(v_i, w_j)\Big)_{ij}.$$

Não é difícil ver que

$$\phi(v,w) = [v]^t_{\mathcal{A}}[\phi]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}[w]_{\mathcal{B}}, \quad \text{para todos } v \in V \text{ e } w \in W.$$

• Se $\dim(V) = m, \dim(W) = n$, então $B(V,W) \cong \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{F})$.

• Suponha que $W = V$ e denote por $B(V)$ o espaço $B(V,V)$. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de V. Então, pode-se mostrar também que se $[I]_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$ é a matriz mudança de base de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$, então para $\phi \in B(V)$

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = \big([I]_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}\big)^t [\phi]_{\mathcal{B}'} \big([I]_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}\big).$$

Agora, para $\phi \in B(V,W)$ defina

$$L_\phi : V \to W^*, \quad v \mapsto L_\phi(v) = \phi(v, \cdot)$$

e

$$R_\phi : W \to V^*, \quad w \mapsto R_\phi(w) = \phi(\cdot, w)$$

tais são transformações lineares e além disso, $Ker(L_\phi)$ e $Ker(R_\phi)$ são chamados de o radical à esquerda e à direita de ϕ respectivamente.

Se $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_m\}$ e $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_n\}$ e $\mathcal{A}^*, \mathcal{B}^*$ são as respectivas bases duais, pode-se mostrar que

$$[R_\phi]_{\mathcal{B} \to \mathcal{A}^*} = [\phi]_{\mathcal{A} \to \mathcal{B}}$$

e

$$[L_\phi]_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}^*} = \Big([R_\phi]_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}^*}\Big)^t.$$

• Das igualdades acima segue que

$$rank(R_\phi) = rank(L_\phi) = rank(\phi).$$

Terminar escrevendo a parte que está na pasta com nome (Propriedade dos radicais e bases hiperbólicas)

Bases ortogonais

Teorema 4.2. *Se $char(\mathbb{F}) \neq 2$, $V \neq \{0\}$ e $0 \neq \phi \in B_s(V)$, existe base de V ortogonal com respeito a ϕ.*

Demonstração. Dado que ϕ não é alternada, segue que existe $v_1 \in V$ tal que $\phi(v_1, v_1) \neq 0$. Assim, como v_1 não é isotrópico, segue que $V_1 := span\{v_1\}$ é não degenerada e assim

$$V = V_1 \oplus V_1^\perp.$$

Dado que $\phi_{|V_1^\perp}$ é simétrica, por indução, existe base ortogonal de $V_1^\perp$ com respeito a $\phi_{|V_1^\perp}$. E assim, basta unirmos tal base com $\{v_1\}$ para se ter uma base de V ortogonal com respeito a ϕ. □

Seja W um subespaço complementar a $V^\perp$ e $\mathcal{B} = \{w_1, ..., w_p\}$ base ortogonal de W com respeito a ϕ.

Além disso, suponha que para todo $1 \leq i \leq p$, existam $a_i \in \mathbb{F}$ tal que

$$a_i^2 = \frac{1}{\phi(w_i, w_i)}$$

Portanto, tomando $v_i = w_i a_i$, segue que

$$\phi(v_i, v_i) = \phi(a_i v_i, a_i v_i) = a_i^2 \phi(w_i, w_i) = 1, \quad i \in \{1, 2, ..., p\}$$

e com isso, segue que $\mathcal{D} = \{v_1, ..., v_p\}$ é uma base de ϕ ortonormal com respeito a ϕ. Assim, se $\mathcal{E}$ é base de $V^\perp$ segue que

$$\mathcal{A} = \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$$

é uma base de V na qual a matriz de ϕ tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}.$$

Observação: Se ϕ é não degenerada, $V^\perp = \{0\}$ e portanto segue que $\mathcal{A}$ é uma base ortonormal de ϕ.

Se caso $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, pode existir $w \in V$ tal que $\phi(w, w) < 0$ e neste caso, pode-se escolher $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$a^2 = \frac{-1}{\phi(w, w)}$$

e assim, se $v = aw$, segue que $\phi(v, v) = -1$. Com isso, concluímos que se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e $p = rank(\phi)$, existe $k \in \{1, 2, ..., p\}$ e base $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\}$ de V tais que a matriz de ϕ nessa base tem a forma

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & I_{p-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 4.3. *Suponha que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $\phi \in B_s(V)$ é* ***semi-definida positiva*** *se*

$$\phi(v,v) \geq 0, \quad \textit{para todo } v \in V$$

*e **positiva definida** se*

$$\phi(v,v) > 0, \quad \textit{para todo } v \in V \setminus \{0\}.$$

• Se $\mathcal{A}$ é uma base de ϕ, então ϕ é positiva definida $\Leftrightarrow$ todos os autovalores de $[\phi]_{\mathcal{A}}$ são todos positivos. (Note que ainda estamos supondo $\phi \in B_s(V)$).

• Notação: Escreve-se $\phi > 0$ se ϕ for positiva definida e $\phi < 0$ for negativa definida.

Agora, definimos o **índice de negatividade** de ϕ por

$$\mathbf{i}(\phi) = \max\{\dim(W) : W \subseteq V, \quad \phi_{|W} < 0\}$$

note que $\mathbf{i}(\phi) \leq rank(\phi)$. De fato, basta ver que podem existir subespaços W de V nos quais $\phi_{|W} > 0$.

Definição 4.4. *A **assinatura** de ϕ é definida como sendo*

$$\boldsymbol{sign}(\phi) := rank(\phi) - 2\boldsymbol{i}(\phi).$$

Teorema 4.5. *(Teorema da Inércia de Sylvester) Suponha que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $\phi \in B_s(V)$ e $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V ortogonal com respeito a ϕ. Então*

$$\boldsymbol{i}(\phi) = \Big|\{k : \phi(v_k, v_k) < 0\}\Big|.$$

Demonstração. Seja

$$k := \Big|\{k : \phi(v_k, v_k) < 0\}\Big|$$

então imediatamente segue que $k \leq p := rank(\phi)$. Além disso, com uma boa ordenação dos vetores da base, pode-se supor que $\phi(v_j, v_j) = 0$ sempre que $j > p$ e que $\phi(v_j, v_j) < 0$ para $j \in \{1, 2, ..., k\}$. Agora, defina

$$W^- := span\{v_1, v_2, ..., v_k\}$$

e

$$W^+ := span\{v_{k+1}, ..., v_p\}.$$

Como a base é ortonormal, o valor de $\phi(v,v)$ depende somente de $\phi(v_j, v_j)$ para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$, portanto segue que $\phi_{|W^-} < 0$ e como $k = \dim(W^-)$, segue que $k \leq \mathbf{i}(\phi)$. Para se conseguir a outra desigualdade devemos mostrar que para todo subespaço W no qual $\phi_{|W} < 0$ tem-se $\dim(W) \leq k$.

Afirmação: Se $W \cap (V^\perp \oplus W^+) = 0$, então $\dim(W) \leq k$.

Demonstração afirmação: É imediato que $V^\perp = span\{v_{p+1}, ..., v_n\}$ e que $V = W^- \oplus W^+ \oplus V^\perp$ dessa forma, como por hipótese $W + (V^\perp \oplus W^+)$ é soma direta, segue que

$$n \geq \dim(W) + \dim(V^\perp) + \dim(W^+) = \dim(W) + (n-p) + (p-k) = \dim(W) + n - k$$

implicando que $\dim(W) - k \leq 0$, ou seja, $\dim(W) \leq k$.

Com isso, para se concluir o resultado, basta mostrarmos que a afirmação acima é verificada. Seja $w \in W \cap (V^\perp \oplus W^+)$ e escreva, $w = v + w^+, v \in V^\perp$ e $w^+ \in W^+$. Portanto, segue que

$$\phi(w,w) = \phi(w^+, w^+) + 2\phi(w^+, v) + \phi(v,v) = \phi(w^+, w^+) \geq 0$$

e portanto, $w = 0$ pois $\phi_{|W} < 0$. $\square$

Algumas vezes o teorema acima vem enunciado no contexto das formas quadráticas, a quais em breve iremos revisar.

Lembremos que se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ são duas bases de V, então

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = ([I]_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}})^t[\phi]_{\mathcal{A}}[I]_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}}.$$

Disso segue que

• Uma matriz antissimétrica A com diagonal não nula, é congruente a uma matriz da forma do teorema de bases hiperbólicas. (A congruente a B significa que existe P invertível tal que $A = P^tBP$.)

• Se o corpo em questão é quadraticamente fechado e de característica diferente de 2, então toda matriz simétrica é congruente a matriz

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dica de como encontrar uma base ortogonal:

$1^{\underline{o}}$) Tomar um vetor não isotrópico $v_1 \in V$ e considerar $W_1 := span\{v_1\}^{\perp_\phi}$.

$2^{\underline{o}}$) Seja $\phi_1 := \phi_{|W_1}$. Encontre um vetor $v_2 \in W_1$ não isotrópico e considere

$$W_2 := W_1 \cap span\{v_2\}^{\perp_\phi}$$

isto é, $W_2 = span\{v_2\}^{\perp_{\phi_1}}$.

$3^{\underline{o}}$) Repita os passos anteriores. Note que na k-ésima etapa, com $1 < k < \dim(V)$, encontramos $\{v_1, ..., v_{k-1}\}$ vetores ortogonais, agora escolha um vetor não isotrópico (com respeito a $\phi_{|W_{k-1}}$) e considere

$$W_k := W_{k-1} \cap span\{v_k\}^{\perp_\phi}.$$

isto é, $W_k = span\{v_k\}^{\perp_{\phi_{k-1}}}$.

Exemplo 10: Considere $V = \mathbb{R}^3$ e

$$[\phi]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{onde } \mathcal{A} \text{ é a base canônica de } V.$$

Vamos encontrar uma base de V ortogonal com respeito a ϕ.

Dado que e_2 é não isotrópico, escolha $v_1 := e_2$. Agora, seja $W_1 = span\{v_1\}^{\perp}$, o qual por contas canônicas é o conjunto

$$W_1 = \{(x, y, z) \in V : y = x - 4z\} = span\{u, u'\}, \text{ onde } u = (1, 1, 0) \text{ e } u' = (0, -4, 1).$$

Agora, devemos analisar como será a forma matricial de $\phi_1 := \phi_{|W_1}$. Para isso, note que

$$\phi(u, u) = 2$$

$$\phi(u, u') = 5$$

e

$$\phi(u', u') = -14.$$

Assim, segue que

$$[\phi_1]_{\{u,u'\}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -14 \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos escolher $v_2 := u$ e considerar $W_2 = span\{v_2\}^{\perp_{\phi_1}}$. Para encontrarmos W_2 basta lembrarmos que estamos em W, portanto, $\hat{v} = \alpha_1 u + \alpha_2 u' \in span\{v_2\}^{\phi_1}$ se, e somente se

$$\phi(\hat{v}, u) = 0$$

ou seja

$$\alpha_1\phi(u,u) + \alpha_2\phi(u',u) = 0$$

isto é

$$2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0$$

portanto, fazendo $\alpha_2 = (-2/5)\alpha_1$ segue que

$$\hat{v} = \alpha_1 u + (-2/5)\alpha_1 u' = \alpha_1(u + (-2/5)u')$$

portanto, $W_2 = span\{v_2\}^{\perp} = span\{\hat{v}\}$, onde

$$\hat{v} = (1, \tfrac{13}{5}, \tfrac{-2}{5}).$$

Por fim, tome $v_3 := \hat{v}$ e note que

$$\phi(v_3, v_3) = \tfrac{-106}{25}.$$

Com isso, se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ temos que

$$[\phi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-106}{25} \end{pmatrix}.$$

Daqui em diante, usaremos $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ e iremos supor que $\dim(V) = n$.

Definição 4.6. *Uma função $f : V \to \mathbb{R}$ chama-se uma forma quadrática quando existe uma forma bilinear $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ tal que $f(v) = \phi(v,v)$, para todo $v \in V$.*

• Na definição acima, não há perda de generalidade em se pedir que a forma bilinear ϕ seja simétrica. Com efeito, para $v, w \in V$ quaisquer, defina

$$\psi(v,w) = \frac{1}{2}(\phi(v,w) + \phi(w,v))$$

e com isso segue que

$$f(v) = \phi(v,v) = \frac{1}{2}(2\phi(v,v)) = \psi(v,v).$$

Lema 4.7. *(Polarização) Se $\phi \in B_s(V)$, todos seus valores podem ser determinados a partir de $f(v) = \phi(v,v)$.*

Demonstração. Note que

$$\frac{\phi(v+w, v+w) - \phi(v,v) - \phi(w,w)}{2} = \frac{1}{2}(2\phi(v,w)) = \phi(v,w)$$

isto é

$$\phi(v,w) = \frac{1}{2}(f(v+w) - f(v) - f(w)).$$

A expressão acima é conhecida como **fórmula de polarização.** □

Teorema 4.8. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita provido de produto interno. Para cada forma bilinear $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ existe um único operador linear $T \in End_{\mathbb{R}}(V)$ tal que*

$$\langle u, T(v)\rangle = \phi(u,v), \quad \text{para todo } (u,v) \in V \times V.$$

Além disso, ϕ é simétrica $\Leftrightarrow$ T é simétrico.

O teorema acima fornece uma demonstração alternativa do teorema 4.2 para o caso em que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Com efeito, se $\phi \in B_s(V)$ então segue que existe um operador simétrico T tal que

$$\langle u, T(v)\rangle = \phi(u, v).$$

Pelo teorema espectral, existe uma base ortonormal de V $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\}$ formada por autovetores de T. Além disso, é imediato que tal base seja ortonormal com respeito a ϕ. Uma importante observação, é que os autovalores de T se dizem autovalores de ϕ por conta da expressão de mudança de base de uma forma bilinear.

Mantendo fixados $\phi \in B_s(V)$, $f(v) = \phi(v, v)$ e a base ortonormal de V $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\}$ com respeito a ϕ, se $v = y_1 v_1 + ... + y_n v_n$ então denotando por $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq .... \leq \lambda_n$ os autovalores de ϕ segue que

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^2.$$

Lema 4.9. *O menor autovalor λ_1 e o maior autovalor λ_m são também o valor mínimo e valor máximo assumidos pela forma quadrática f entre os vetores unitários de V. Isto é, para todo vetor u com $\|u\| = 1$, segue que*

$$\lambda_1 \leq f(u) \leq \lambda_2.$$

Definição 4.10. *O índice $i(f)$ de uma forma quadrática f é a maior dimensão de um subespaço vetorial de V restrito ao qual a forma é negativa. (Análoga a definição do índice de uma forma bilinear).*

O teorema da inércia de Sylvester aparece no contexto de formas quadráticas. (Na realidade ele é um caso particular do também chamado teorema da inércia de Sylvester visto acima, por isso o próximo resultado será chamado de **Lei da inércia de Sylvester**.).

Teorema 4.11. *(Lei da Inércia de Sylvester) Se existir uma base $\mathcal{V} = \{v_1, ..., v_n\}$ de V tal que para todo $v = \sum x_j v_j$ se tem*

$$f(v) = -x_1^2 - x_2^2 - ... - x_i^2 + x_{i+1}^2 + ... + x_r^2.$$

Então, a forma quadrática f tem índice i e posto r.

A maneira como encontramos a base acima é essencialmente discutida logo após o teorema 4.2.

Definição 4.12. *Um conjunto $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ chama-se uma **quádrica central** quando existe uma forma quadrática $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que Σ é definido pela equação $\phi(v) = 1, \quad v \in \mathbb{R}^n$.*

Transformações Ortogonais e Simpléticas

Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e $\phi \in B(V)$ e $\psi \in B(W)$. Diz-se que a transformação linear $T \in Hom_{\mathbb{F}}(V, W)$ é compatível com o par (ϕ, ψ) se

$$\psi(T(u), T(v)) = \phi(u, v), \text{ para todo par } (u, v) \in V \times V.$$

• Se ϕ, ψ forem simétricas e não degeneradas, a transformação T acima é dita ser **ortogonal**. Se ambas ϕ, ψ forem alternadas, T é dita **simplética**.

Proposição 4.13. *São equivalentes*

a) T é compatível com o par (ϕ, ψ)

b) Para toda $\mathcal{A}$ base de V, $[\phi]_{\mathcal{A}} = [\psi]_{T(\mathcal{A})}$.

c) Existe uma base $\mathcal{A}$ de V tal que $[\phi]_{\mathcal{A}} = [\psi]_{T(\mathcal{A})}$.

escrever resultados preliminares antes do lema e teorema principais da seção.

Lema 4.14. *Suponha que $char(\mathbb{F}) \neq 2$. Seja $\phi \in B_s(V)$ não degenerada e suponha que $u, v \in V$ satisfaçam*

$$\phi(u,u)=\phi(v,v)\neq 0.$$

Então, existe uma reflexão simples R tal que $R(v)\in\{-u,u\}$.

Demonstração. Defina

$$w_{\pm}=v\pm u$$

e

$$W_{\pm}=span\{w_{\pm}\}.$$

Suponha que $\phi(w_-,w_-)=\phi(w_+,w_+)=0$. Então, por contas canônicas, chegaríamos que $\phi(u,u)=\pm\phi(u,v)$, implicando que $\phi(u,u)=0$ absurdo. Além disso

$$\phi(w_-,w_+)=\phi(u-v,u+v)=\phi(u,u)-\phi(v,v)=0.$$

Dessa forma, sem perda de generalidade pode-se supor que w_+ é não isotrópico e portanto, fica bem definida a reflexão $R^{\phi}_{W_+}$, a qual é tal que

$$R^{\phi}_{W_+}(w_{\pm})=w_{\mp}$$

pois $w_-\in W_+^{\perp_\phi}$. Ademais, notemos que

$$R^{\phi}_{W_+}(v)=\frac{1}{2}(w_++w_-)=-u.$$

(Se w_- é não isotrópico, $R^{\phi}_{W_-}(v)=u$). □

O próximo teorema mostra que existe uma relação biunívoca entre transformações ortogonais e reflexões simples. Mais precisamente ele nos diz que toda transformação ortogonal é produto de reflexões simples.

Teorema 4.15. *Suponha que $char(\mathbb{F})\neq 2$ e que $0\neq\dim(V)<\infty$. Sejam $\phi\in B_s(V)$ não degenerada e $T\in End_{\mathbb{F}}(V)$. Então, T é ortogonal se, e somente se, T for uma composição de reflexões simples.*

Demonstração. Vamos mostrar que se T é ortogonal, então T é produto de reflexões simples, usando indução em $n=\dim(V)\geq 1$. Se $n=1$, então $V=span\{v\}$ para todo $0\neq v\in V$ e portanto, existe $a\in\mathbb{F}$ tal que $T(v)=av$. Dado que $det(T)=\pm 1$, segue que $T=\pm I_d$. Notemos agora que

$$-I_d=R^{\phi}_V$$

e

$$I_d=(R^{\phi}_V)^2$$

portanto para $n=1$ o resultado segue. Suponha que o resultado seja verdade para todo espaço de dimensão $1\leq m<n$. Seja $u\in V$ um vetor não isotrópico. Fazendo $v:=T(u)$, pelo lema anterior, existe uma reflexão simples R satisfazendo $R(v)=\pm u$. Em particular, segue que $U=span\{u\}$ é $R\circ T$-invariante e como $U^{\perp_\phi}$ é não degenerado (por conta dos radicais) segue que $U^{\perp_\phi}$ é também $(R\circ T)$-invariante. Agora, seja

$$S:=(R\circ T)_{|U^{\perp_\phi}}.$$

Por hipótese de indução, existem $S_1,...,S_m$ reflexões simples em $U^{\perp_\phi}$ tais que

$$S=S_1\circ S_2\circ ...\circ S_m.$$

Nosso objetivo agora será definir operadores que estendem cada uma das reflexões acima, e mais ainda, precisamos construir tais de forma que sejam reflexões simples em V.

Para cada $j\in\{1,2,...,m\}$ seja R_j o único operador linear em V tal que

$$R_j(u) = u \text{ e } \quad R_j(x) = S_j(x), \quad \text{para todo } x \in U^{\perp_\phi}.$$

Além disso, defina

$$R_0 = \begin{cases} Id, & se \quad R(v) = u \\ R_U^\phi, & se \quad R(v) = -u \end{cases}.$$

Nosso objetivo será mostrar que cada um dos R_j acima é uma reflexão simples e que

$$T = R \circ R_0 \circ R_1 \circ ... \circ R_m.$$

Notemos que

$$R_0(w) = w, \quad \text{para todo } w \in U^{\perp_\phi}$$

pois se $R(v) = u$ a afirmação é óbvia, se $R(v) = -u$, então $R_0(w) = R_U^\phi(w) = w$. Portanto, em $U^{\perp_\phi}$, $R \circ T$ coincide com $R_0 \circ ... \circ R_m$. Além disso, tais operadores coincidem em U também por conta da imposição de que $R_j(u) = u$ para todo $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Dessa forma, dado que $V = U \oplus U^{\perp_\phi}$ e $R^{-1} = R$, tem-se que

$$T = R \circ R_0 \circ ... \circ R_m.$$

Agora, defina

$$\psi := \phi_{|U^{\perp_\phi} \times U^{\perp_\phi}}.$$

Para cada $j \in \{1, 2, ..., m\}$, seja $w_j \in U^{\perp_\phi}$ tal que

$$S_j = R_{W_j}^\psi, \text{ onde } W_j = span\{w_j\}.$$

Nosso objetivo será mostrar que $R_j = R_{W_j}^\phi$. Como $w_j \in U^{\perp_\phi}$ segue imediatamente que ambos operadores acima coincidem em U. Por outro lado, se $x \in U^{\perp_\phi}$, tem-se que

$$R_{W_j}^\phi(x) = x - 2\frac{\phi(x, w_j)}{\phi(w_j, w_j)} w_j = x - 2\frac{\psi(x, w_j)}{\phi(w_j, w_j)} = S_j(x) = R_j(x)$$

concluindo então que de fato, $R_j = R_{W_j}^{\perp_\phi}$.

$\square$

Dica de como escrever qualquer transformação ortogonal como um produto de reflexões simples:

1º) Tome um vetor não isotrópico $u \in V$.

2º) Considerando os vetores

$$w_\pm = T(u) \pm u$$

escolha dentre eles aquele que não é isotrópico.

3º) Se por exemplo o vetor não isotrópico de 2º) é w_+, então defina $W_+ = span\{w_+\}$ e considere a reflexão simples

$$R_{W_+}^\phi(v) = v - 2\frac{\phi(v, w_+)}{\phi(w_+, w_+)} w_+$$

4º) Usando o processo de Gram-Schmidt por exemplo, encontre uma base ortogonal $\mathcal{B}_+$ de $W_+^\perp$ e note que o operador $R_{W_+}^\phi \circ T$ em relação a base $\mathcal{B} := \{w_+\} \cup \mathcal{B}_+$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

onde B_1 é uma matriz de tamanho $(n-1)\times(n-1)$.

5º) Aplique o processo acima considerando agora o operador $S := R^{\phi}_{W_+} \circ T$ e o espaço vetorial $U := W_+^{\perp}$.

6°) Em alguma k-ésima etapa, obtém-se uma matriz formada por ± 1 em sua diagonal. Dessa forma, dada que tal matriz sempre pode ser escrita como um produto de reflexões simples, basta agora retornarmos para o operador ortogonal T via multiplicação de inversas de reflexões simples.

Antes de fazermos a demonstração do próximo exercício, é interessante relembrarmos alguns resultados sobre matrizes de Gram e algumas coisas sobre operadores auto-adjuntos.

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bases de V. Então recordemos que

$$\langle v, u\rangle = [u]^*_{\mathcal{B}} G_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}$$

e portanto, se $[I]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ é a matriz mudança de base de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ segue que

$$[u]_{\mathcal{B}} = [I]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} [u]_{\mathcal{A}}$$

e

$$[v]_{\mathcal{B}} = [I]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{A}}$$

consequentemente

$$\langle v, u\rangle = \big([I]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}[u]_{\mathcal{A}}\big)^* G_{\mathcal{A}} \big([I]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{A}}\big) = [u]^*_{\mathcal{A}} \big([I]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\big)^* G_{\mathcal{B}} [I]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{A}}$$

implicando que

$$G_{\mathcal{A}} = \big([I]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}\big)^* G_{\mathcal{B}} [I]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \qquad (\star).$$

Se o corpo em questão for $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$ por conta da simetria, a escrita do produto interno em termos da matriz de Gram e relativo a base $\mathcal{A}$ se torna

$$\langle v, u\rangle = [v]^t_{\mathcal{A}} G_{\mathcal{A}} [u]_{\mathcal{A}} \qquad (\star\star).$$

Agora, suponha que em $V = \mathbb{R}^n$ tenhamos a seguinte igualdade

$$\langle T(v), u\rangle = \phi(v, u), \quad \text{para todo } (v, u) \in V \times V$$

onde ϕ é alguma forma bilinear simétrica. Dessa forma, se $\mathcal{A}$ é base de V, segue de $(\star\star)$ que

$$[T(v)]^t_{\mathcal{A}} G_{\mathcal{A}} [u]_{\mathcal{A}} = [v]^t_{\mathcal{A}} [\phi]_{\mathcal{A}} [u]_{\mathcal{A}}.$$

Por outro lado tem-se que

$$[T(v)]_{\mathcal{A}} = [T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} [v]_{\mathcal{A}}$$

donde temos que

$$[v]^t_{\mathcal{A}} \big([T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}\big)^t G_{\mathcal{A}} [u]_{\mathcal{A}} = [v]^t_{\mathcal{A}} [\phi]_{\mathcal{A}} [u]_{\mathcal{A}}$$

ou seja

$$[\phi]_{\mathcal{A}} = ([T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}})^t G_{\mathcal{A}}, \qquad (\star\star\star).$$

Segue imediato de $(\star\star\star)$ que se $[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$ e $G_{\mathcal{A}}$ forem diagonais, então $[\phi]_{\mathcal{A}}$ será diagonal. Por fim, suponha que $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base ortonormal de V (em relação ao produto interno usual). Dessa forma segue de imediato que se $v \in V$, então

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i.$$

Com isso, se T é um operador linear em V, segue direto da ultima igualdade que se

$$[T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = (a_{ij})_{ij}$$

então

$$a_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle \text{ para cada } 1 \leq i, j \leq n.$$

EQ-11-2018: Considere a forma quadrática em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$q(x, y, z) = 2(xy + xz + yz) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

e seja ϕ uma forma bilinear simétrica tal que $q(v) = \phi(v, v)$. Considere também o operador linear T em $\mathbb{R}^3$ tal que $\langle T(e_i), e_j \rangle = \phi(e_i, e_j)$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq 3$ sendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ base canônica e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produto interno usual do $\mathbb{R}^3$.

a) Encontre base β de $\mathbb{R}^3$ tais que as matrizes de T e ϕ nestas bases sejam diagonais.

b) Calcule a assinatura de ϕ.

c) Dê exemplo de uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que ϕ em tal base é diagonal mas T não é.

Demonstração. a) Dado que a base canônica $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ é ortonormal com relação ao produto interno usual, pelas observações feitas antes do exercício, segue que se $[T]_\alpha^\alpha = (a_{ij})$, então

$$a_{ij} = \langle T(e_j), e_i \rangle = \phi(e_j, e_i), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Vamos encontrar a matriz de ϕ em relação a base canônica. Para isso, veja que

$$q(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde segue que

$$[\phi]_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que poderíamos obter a matriz de ϕ apenas utilizando a fórmula de polarização, embora este não seja o caminho mais rápido. Ademais, em relação a base canônica α, $[\phi]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha$. Notemos também que uma base diagonal para T pode ser transformada numa base ortogonal em relação ao produto interno (ainda mantendo T diagonal base), donde segue que ϕ nessa base também será diagonal. Assim, dado que T é simétrica, vamos encontrar uma base que diagonalize T.

O polinômio característico de T é

$$c_T(x) = (3 + x)^2 (3 - x)$$

portanto os autovalores de T são

$$\lambda_1 = -3, \quad \text{com multiplicidade algébrica igual a 2}$$

$$\lambda_2 = 3, \quad \text{com multiplicidade algébrica igual a 1.}$$

Fazendo as contas canônicas concluímos que

$$Ker(T + 3I) = span\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

e que

$$Ker(T - 3I) = span\{(1, 1, 1)\}.$$

Portanto, se $\beta = \{(-1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)\}$ segue que a matriz de T é diagonal em relação a esta. Agora, considere $v_1 = (-1,1,0)$ e $v_2 = (-1,0,1)$. Aplicando Gram-Schmidt a tais, chegamos aos vetores $u_1 = v_1$ e

$$u_2 = v_2 - proj_{u_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{|u_1|^2}u_1 = (-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right).$$

Com isso, segue que em relação a base $\beta := \{u_1, u_2, (1,1,1)\}$, T e ϕ são diagonais. Mais precisamente

$$[\phi]_\beta = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{-9}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

b) Dado que a base $\mathcal{B}$ é uma base ortogonal de ϕ, pelo teorema de Sylvester segue que $\mathbf{i}(\phi) = 2$ e $rank(\phi) = 3$, implicando que

$$\mathbf{sign}(\phi) = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$

c) Agora, vamos utilizar o método descrito para encontrar uma base ortogonal de ϕ e testar se a matriz de T em relação a esta é ou não diagonal.

Tome $v_1 = e_1$ e note que v_1 é não isotrópico com relação a ϕ. Considerando $span\{v_1\}$ segue que seu complemento ortogonal W_1 (em relação a ϕ) é dado por

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y + 2z = 0\}$$

isto é

$$W_1 = span\{(2,1,0), (2,0,1)\}.$$

Agora, notemos que se $u = (2,1,0)$ e $u' = (2,0,1)$ então

$$\phi(u,u) = 3, \quad \phi(u,u') = 6, \quad \phi(u',u') = 3.$$

Assim, podemos escolher $v_2 := u$ e notar que se $\hat{v} = \alpha_1 u + \alpha_2 u'$, então

$$\phi(\hat{v}, u) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1\phi(u,u) + \alpha_2\phi(u,u') = 0$$

isto é

$$3\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0$$

ou seja

$$\alpha_1 = -2\alpha_2.$$

Portanto temos que

$$\hat{v} \in W_1 \cap span\{u\}^{\perp_\phi} \Leftrightarrow \hat{v} = -2\alpha_2 u + \alpha_2 u' = \alpha_2(-2u + u') = \alpha_2(-2,-2,1)$$

concluindo então que

$$W_1 \cap span\{u\}^{\perp_\phi} = span\{(-2,-2,1)\}.$$

Dessa forma, tomando $v_3 = (-2,-2,1)$, a base

$$\gamma := \{v_1, v_2, v_3\}$$

é uma base ortogonal para ϕ. Agora, veja por exemplo que

$$T(-2,-2,1) = (0,0,-9) = 18v_1 - 18v_2 - 9v_3$$

implicando que a matriz de T em relação a γ não é diagonal.

Por fim, vejamos que

$$[\phi]_\gamma = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

mostrado mais uma vez que se fato $\mathbf{sign}(\phi) = 3 - 2.2 = -1$. $\square$

5 Produtos Tensoriais

Propriedade universal do quociente: Relembremos a propriedade universal do quociente: Dado $T : V \to W \in Hom_{\mathbb{F}}(V, W)$, se U é um subespaço de V tal que $U \subseteq Ker(T)$, então existe um único mapa induzido

$$\widetilde{T} : V/U \to W$$

dado por $T(v + U) = T(v)$.

Propriedade universal de bases: Sejam A um conjunto não vazio, $\mathcal{V}$ o conjunto dos espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$, $\mathcal{F}$ família de funções cujo domínio é A, e $\mathcal{H}$ conjunto das transformações lineares. Dessa forma, se V_A é um espaço vetorial com base A, isto é, o conjunto de todas as combinações lineares formais de membros de A, então o par

$$(V_A, \mathbf{i}_A : A \to V_A), \quad \text{onde} \quad \mathbf{i}_A(a) = a, \quad a \in A$$

é um par universal para $(\mathcal{F}, \mathcal{H})$. Isto é, para qualquer $g : A \to V_A$ em $\mathcal{F}$, existe uma única transformação linear $T_g : V_A \to V_A$ tal que $g = T_g \circ \mathbf{i}_A$.

Vamos agora mostrar a existência do produto tensorial. Nesse breve resumo iremos começar com a construção via o que é chamado de **método da coordenada livre**[1]. Dado dois espaços vetoriais U, V sobre um corpo $\mathbb{F}$, seja

$$F_{U\times V} := \bigoplus_{(u,v)\in U\times V} M_{(u,v)}, \quad \text{onde } M_{(u,v)} = \mathbb{F} \quad \text{para todo } (u,v) \in U \times V.$$

Note que se $\iota_{(u,v)} : \mathbb{F} \to F_{U\times V}$ é a injeção canônica, então denotando por $e_{(u,v)} := \iota_{(u,v)}(1)$, pode-se escrever qualquer elemento $v \in F_{U\times V}$ da forma

$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i e_{(x_i, y_i)}.$$

Seja agora $\mathscr{S}$ o subespaço de $F_{U\times V}$ gerado pelos vetores da forma

- $re_{(u,v)} + se_{(u',v)} - e_{(ru+su',v)}$

e

- $re_{(u,v)} + se_{(u,v')} - e_{(u,rv+sv')}$

onde $r, s \in \mathbb{F}$, $u, u' \in U$ e $v, v' \in V$.

Dessa forma, definimos o produto tensorial de U por V como sendo o espaço

$$U \otimes V := F_{U\times V}/\mathscr{S}.$$

Veja que se fizemos um abuso de notação e identificarmos $e_{(u,v)}$ com (u, v), os elementos em $U \otimes V$ são da forma

$$\sum_{i\in I} r_i(u_i, v_i) + \mathscr{S}$$

[1] O nome coordenada livre é em virtude de que tal construção não se utiliza uma base. Além disso, o nome é por conta de que esta se faz utilizando o que se conhece por módulo livre.

e além disso, em $U \otimes V$ temos

$$\sum_{i \in I} r_i(u_i, v_i) + \mathscr{S} = \sum_{i \in I} r_i \Big((u_i, v_i) + \mathscr{S} \Big).$$

Agora defina

$$u \otimes v := (u, v) + \mathscr{S}$$

e dessa forma, por conta da definição de $U \otimes V$, podemos escrever qualquer elemento x em $U \otimes V$ da seguinte maneira

$$x = \sum_{i \in I} u_i \otimes v_i.$$

Ademais, podemos definir

$$\otimes : U \times V \to U \otimes V, \quad \otimes(u, v) = u \otimes v$$

a qual é bilinear por conta da construção de $U \otimes V$.

Teorema 5.1. *(Propriedade universal) Sejam V, U, W espaços vetoriais, dado qualquer função bilinear $f : U \times V \to W$, existe uma única transformação linear $\widetilde{f} : U \otimes V \to W$ tal que*

$$\widetilde{f} \circ \otimes = f.$$

Isto é, $\widetilde{f}(x \otimes y) = f(x, y)$ para qualquer par $(x, y) \in U \times V$.

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes"'] & W \\
U \otimes V \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Primeiramente devemos ter de forma bem solidificada as duas propriedades universais acima (i.e bases e quocientes). Dessa forma, se $\pi : F_{U \times V} \to U \otimes V$ é a projeção canônica e $\mathbf{i}_{U \times V}$ é a inclusão natural, isto é

$$\mathbf{i}_{U \times V} : U \otimes V \to F_{U \times V}, \quad (x, y) \mapsto e_{(x,y)}$$

então iremos nos apoiar no seguinte diagrama para a construção de $\widetilde{f}$.

$$\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[r, "i_{U \times V}"] \arrow[rr, bend left, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & F_{U \times V} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dotted, "\sigma"'] & U \otimes V \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

É imediato por conta da definição de $\otimes$ que

$$\otimes = \pi \circ \mathbf{i}_{U \times V}.$$

Além disso, por conta da propriedade universal de bases existe um mapa $\sigma : F_{U \times V} :\to W$ tal que $\sigma \circ \mathbf{i}_{U \times V} = f$. Nosso objetivo então é construir um mapa $\widetilde{f}$ tal que

$$\widetilde{f} \circ \pi \circ \mathbf{i}_{U \times V} = \sigma \circ \mathbf{i}_{U \times V} = f.$$

Não é difícil ver que o subespaço $\mathscr{S}$ da construção acima é tal que $\mathscr{S} \subseteq Ker(\sigma)$ e portanto pela propriedade universal de quocientes segue que existe um mapa linear induzido

$$\widetilde{f} : U \otimes V \to W \text{ tal que } \widetilde{f} \circ \pi = \sigma.$$

Dessa forma, concluímos que

$$\widetilde{f} \circ \otimes = \widetilde{f} \circ \pi \circ \mathbf{i}_{U \times V} = (\widetilde{f} \circ \pi) \circ \mathbf{i}_{U \times V} = \sigma \circ \mathbf{i}_{U \times V} = f.$$

Por fim, vamos verificar a unicidade de $\widetilde{f}$. Suponha que $g : U \otimes V \to W$ seja outro mapa linear que satisfaça as mesmas condições que $\widetilde{f}$. Em outras palavras, suponha que $g \circ \otimes = f$. Dessa forma, $\mu := g \circ \pi$ satisfaz

$$\mu \circ \mathbf{i}_{U \times V} = g \circ \pi \circ \mathbf{i}_{U \times V} = g \circ \otimes = f$$

e portanto segue que

$$\sigma \circ \mathbf{i}_{U \times V} = \mu \circ \mathbf{i}_{U \times V}$$

e assim, temos por conta da unicidade de σ que $\sigma = \mu$. Consequentemente

$$g \circ \pi = \widetilde{f} \circ \pi$$

implicando que $g = \widetilde{f}$. □

Construção alternativa via bases: Seja $\{v_i : i \in I\}$ base para V e $\{u_j : j \in J\}$ uma base para U. "inventando"o símbolo $v_i \otimes u_j$, considere o espaço vetorial T com base o conjunto

$$\{u_i \otimes v_j : i \in I, j \in J\}.$$

Agora, defina a forma bilinear t nos elementos da base de $U \times V$ por $t(u_i, v_j) := u_i \otimes v_j$ e estenda por bilinearidade. Dessa forma, se $v = \sum_{i \in I_v} a_i v_i$ e $u = \sum_{j \in J_u} b_j u_j$, tem-se que

$$t(u, v) = \sum_{i \in J_u} \sum_{j \in I_v} b_i a_j t(u_i, v_j) = \sum_{(i,j) \in J_u \times I_v} b_i a_j u_i \otimes v_j.$$

Proposição 5.2. *O par $(T; t)$ com T e t como definidos acima, é um par universal para a propriedade descrita no teorema acima.*

Demonstração. Dada $g : V \times U \to W$ uma função bilinear, a condição $g = \tau \circ t$, para uma função linear $\tau \in Hom_{\mathbb{F}}(T, W)$, equivale a $g(u, v) = \tau(u \otimes v)$. Por outro lado, g é unicamente determinada pelos elementos da base de $U \times V$ e assim segue que τ existe e é única. □

Na primeira construção de produto tensorial construímos um par $(U \otimes V; \otimes)$ que é universal segundo a condição imposta no enunciado de 5.1, e além disso mostramos logo na seguida que existe um outro par $(T; t)$ que satisfazem a mesma propriedade. Dessa forma, dado que t e $\otimes$ são bilineares concluí-se que deve existir um isomorfismo de espaços vetoriais $h : U \otimes V \to T$ tal que $h \circ t = \otimes$.

Teorema 5.3. *Sejam U, V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Então se $B_{\mathbb{F}}(V, U; W)$ é o conjunto das formas bilineares $f : V \times U \to W$, então segue que*

$$B_{\mathbb{F}}(V, U; W) \cong Hom_{\mathbb{F}}(V, Hom_{\mathbb{F}}(U, W)) \cong Hom_{\mathbb{F}}(V \otimes U, W).$$

Demonstração. Seja $f \in B_{\mathbb{F}}(V, U; W)$ e defina

$$\psi(f) : V \to Hom_{\mathbb{F}}(U, W)$$

por

$$\psi(f)v = f(v, \cdot) \in Hom_{\mathbb{F}}(U, W).$$

Dessa forma, fica bem definido o mapa

$$\psi : B_{\mathbb{F}}(V, U; W) \to Hom_{\mathbb{F}}(V, Hom_{\mathbb{F}}(U, W)), \quad f \mapsto \phi(f).$$

Notemos agora que se $\alpha \in \mathbb{F}$ e $f, g \in B_{\mathbb{F}}(V, U; W)$ então

$$\psi(f + \alpha g)v = (f + \alpha g)(v, \cdot) = f(v, \cdot) + \alpha g(v, \cdot) = \psi(f)v + \alpha\psi(g)v, \quad \text{para todo } v \in V$$

portanto concluímos que ψ é linear. Por outro lado, dado $g \in Hom_{\mathbb{F}}(V, Hom_{\mathbb{F}}(U, W))$, defina

$$\widehat{\psi}(g)(v, u) := b_g(v, u) = g(v)(u).$$

É imediato da definição que $\widehat{\psi}$ é bilinear e além disso note que

$$\psi \circ \widehat{\psi}(f)(v, u) = \psi(\widehat{\psi}(f)(v, u)) = \psi(b_f(v, u)) = \psi(b_f)(v)(u) = b_f(v, u) = f(v)(u)$$

ou seja

$$\psi \circ \widehat{\psi}(f) = f, \quad \text{para qualquer } f \in Hom_{\mathbb{F}}(V, Hom_{\mathbb{F}}(U, W))$$

analogamente

$$\widehat{\psi} \circ \psi(g) = g, \quad \text{para qualquer } g \in B_{\mathbb{F}}(V, U; W)$$

e portanto temos que

$$B_{\mathbb{F}}(V, U; W) \cong Hom_{\mathbb{F}}(V, Hom_{\mathbb{F}}(U, W)).$$

Sabemos que para toda $f \in B_{\mathbb{F}}(V, U; W)$ existe única $\widetilde{f} \in Hom(V \otimes U; W)$ tal que $\widetilde{f} \circ \otimes = f$. Dessa forma, fica bem definido a função

$$\phi : B_{\mathbb{F}}(V, U; W) \to Hom_{\mathbb{F}}(V \otimes U; W), \quad f \mapsto \widetilde{f}.$$

Note que se $\alpha \in \mathbb{F}$, $f, g \in B_{\mathbb{F}}(V, U; W)$ então

$$(\widetilde{f} + \alpha\widetilde{g})(v \otimes u) = \widetilde{f}(v \otimes u) + \alpha\widetilde{g}(v \otimes u) = f(v, u) + \alpha g(v, u), \quad \text{para todo } (v, u) \in V \times U$$

portanto por unicidade segue que

$$\phi(f + \alpha g) = \widetilde{f + \alpha g} = \widetilde{f} + \alpha\widetilde{g} = \phi(f) + \alpha\phi(g)$$

donde segue que ϕ é linear. A injetividade de ϕ é imediato pois se $\phi(f) = 0$ então $f = \phi(f) \circ \otimes = 0$. Além disso, dado $g \in Hom(V \otimes U; W)$ defina

$$g_1(v, u) := g(v \otimes u)$$

e assim segue por unicidade que $\phi(g_1) = g$, consequentemente ϕ é sobrejetora. Com isso concluímos que de fato, ϕ é um isomorfismo. □

Observação: Segue da bilinearidade do produto tensorial que dado $v \in V$, $v \otimes 0 = v \otimes (0 + 0) = v \otimes 0 + v \otimes 0$ e assim segue que $v \otimes 0 = 0$.

Teorema 5.4. *Sejam $v_1, ..., v_n$ vetores linearmente independentes em V e $u_1, ..., u_n$ vetores arbitrários em U. Então*

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i = 0 \Rightarrow u_i = 0, \quad \textit{para todo } i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Em particular

$$v \otimes u = 0 \Rightarrow v = 0 \textit{ ou } u = 0.$$

Demonstração. Dados $\alpha \in V^*$ e $\beta \in U^*$ defina

$$h : V \times U \to \mathbb{F}, \quad (v, u) \mapsto \alpha(v)\beta(u)$$

segue direto da definição que h é uma forma bilinear. Segue da propriedade universal que existe $\widetilde{h}$ tal que $\widetilde{h} \circ \otimes = h$ e além disso

$$0 = \widetilde{h}(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i) = \sum_{i=1}^{n} h(v_i \otimes u_i) = \sum_{i=1}^{n} h(v_i, u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(v_i)\beta(u_i).$$

Por outro lado, dado que $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\}$ são linearmente independentes considere $V_0 = span\{v_1, ..., v_n\}$ e seja $\mathcal{B} = \{v^1, ..., v^n\}$ base de V_0^* dual a $\mathcal{A}$. Dessa forma, dado $k \in \{1, 2, ..., n\}$ ponha $\alpha = v^k$ e assim temos que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} v^k(v_i)\beta(u_i) = \beta(u_k).$$

Dado que β é arbitrário segue que $u_k = 0$. Portanto, concluímos que

$$u_1 = u_2 = ... = u_n = 0.$$

□

Teorema 5.5. *Seja $\mathcal{A} = \{v_i : i \in I\}$ base de V e $\mathcal{B} = \{u_j : j \in J\}$ base de U, então*

$$\mathcal{D} = \{v_i \otimes u_j : i \in I, j \in J\}$$

é uma base de $V \otimes U$.

Corolário 5.6. *Se V e U tiverem ambos dimensões finitas, digamos m, n respectivamente, então,*

$$dim(V \otimes U) = dim(V)dim(U)$$

. O próximo resultado permite-nos definir o chamado de **posto de um tensor**.

Teorema 5.7. *Cada $z \in V \otimes U$ tem uma expressão da forma*

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

onde $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq V$ e $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq U$ são conjuntos linearmente independentes.

Demonstração. Sejam $\mathcal{A} = \{v_i : i \in I\}$ e $\mathcal{B} = \{u_j : j \in J\}$ bases de V e U respectivamente. Dessa forma, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que z pode ser escrito da forma

$$z = \sum_{i=1}^{m} v_i \otimes y_i, \quad y_i \in U, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Se o conjunto $\{y_1, ..., y_m\}$ é linearmente independente acabou. Caso contrário reindexando se necessário pode-se supor que

$$y_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j y_j.$$

E portanto, tem-se que

$$z = \sum_{i=1}^{m} v_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{m-1} v_i \otimes y_i + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i v_m \otimes y_i = \sum_{i=1}^{m-1} (v_i + \alpha_i v_m) \otimes y_i$$

e além disso não é difícil ver que os vetores $\{v_i + \alpha_i v_m : i \in \{1, 2, ..., m-1\}\}$ são linearmente independentes. Se os vetores $\{y_1, ..., y_{m-1}\}$ são linearmente independentes acabou, caso contrário repita mais uma vez esse processo.

□

A quantidade mínima de parcelas na escrita de um tensor z como acima é chamada de o **posto** de z e denotado por $rank(z)$.

Lema 5.8. *Sejam* $m, p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\alpha = \{v_1, ..., v_m\}$, $\quad \alpha^{'} = \{v_1^{'}, ..., v_m^{'}\}$ *família de vetores em* V *e* $\beta = \{w_1 ... w_p\}$, $\quad \beta^{'} = \{w_1^{'}, ..., w_p^{'}\}$ *famílias em* U *tais que*

$$\sum_{j=1}^{m} v_j \otimes w_j = \sum_{i=1}^{p} v_i^{'} \otimes w_i^{'}$$

Se, $\alpha, \alpha^{'}, \beta^{'}$ *são vetores l.i, então,*

$$span(\beta) \subseteq span(\beta').$$

A prova do lema acima é feita por indução e pode ser encontrada na página 339 do livro de Adriano Moura.

Proposição 5.9. *Sejam* $\{v_1, ..., v_n\}$ *e* $\{u_1, ..., u_n\}$ *duas famílias de vetores linearmente independentes tais que o elemento* $z \in V \otimes U$ *é escrito da forma*

$$z = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i.$$

Então segue que

$$rank(z) = n.$$

Para a demonstração da proposição acima basta supor que $p = rank(z) \leq n$ e usar o lema 5.8.

Se $z \in V \otimes U$ é um tensor de posto 1, isto é, pode-se escrever z da forma $z = x \otimes y$, então z é dito ser um **tensor puro**.

Teorema 5.10. *Existe uma única transformação linear* $\Phi : V^* \otimes U \to Hom_{\mathbb{F}}(V, U)$ *satisfazendo*

$$\Phi(f \otimes u)(v) = f(v)u \text{ para quaisquer } v \in V, u \in U, f \in V^*.$$

Além disso:

a) Φ *é injetora, ou seja* $V^* \otimes U$ *mergulha em* $Hom_{\mathbb{F}}(V, U)$.

b) Para todo $z \in V^* \otimes U$, $rank(\Phi(z)) = rank(z)$.

c) $T \in Im(\Phi)$ *se, e somente se,* $rank(T) < \infty$.

d) Φ *é sobrejetora se, e somente se,* $\dim(V) < \infty$ *ou* $\dim(U) < \infty$.

Demonstração. A existência de Φ se dá por conta da propriedade universal aplicada a função bilinear

$$g : V^* \times U \to Hom_{\mathbb{F}}(V, U), \quad (f, u) \mapsto g(f, u)v = f(v)u.$$

a) Agora, seja $z \in Ker(\Phi)$ e escolha uma expressão da forma

$$z = \sum_{j=1}^{m} f_j \otimes u_j$$

onde $\{f_1, ..., f_m\}$ e $\{u_1, ..., u_m\}$ são linearmente independentes. Se $m > 0$ seja $v \in V$ tal que $f_1(v) \neq 0$, dessa forma segue que

$$0 = \sum_{j=1}^{m} f_j(v) u_j$$

contrariando o fato de $\{u_1, ..., u_m\}$ ser um conjunto l.i.

b) Dado $z \in V^* \otimes U$, escolha uma expressão para z como acima e seja $W' = span\{u_1, ..., u_m\}$. Da proposição 5.9 tem-se que $\dim(W') = rank(z)$. Por outro lado, $\Phi(z)$ é um mapa linear e portanto

$$rank(\Phi(z)) = \dim Im(\Phi(z))$$

dessa forma, basta mostrar que $\dim Im(\Phi(z)) = \dim(W')$. Além disso, dado que $Im(\Phi(z)) \subseteq W'$, é suficiente mostrar que $w_j \in Im(\Phi(z))$ para todo $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Note porém que por conta da observação feita após o teorema 3.4 (com uma leve modificação, considere o espaço $V_1 \subseteq V^*$ gerado pelos vetores $\{f_1, ..., f_m\}$) existem vetores $\{v_1, ..., v_m\}$ em V tais que $f_j(v_i) = \delta_{ij}$. E portanto tem-se que

$$\Phi(z)(v_j) = w_j$$

donde segue que $w_j \in Im(\Phi(z))$.

c) Seja $\mathcal{F}$ o subespaço de $Hom_{\mathbb{F}}(V, U)$ das transformações lineares de posto finito. Segue do item b) que $Im(\Phi) \subseteq \mathcal{F}$. Por outro lado, se $T \in \mathcal{F}$ e $rank(T) = m$, tome $\{w_1, ..., w_m\}$ base de $Im(T)$ e considere $(e_i)_{i \in I}$ uma base de V. Dessa forma, para cada $j \in I$ podemos escrever

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \quad a_{ij} \in \mathbb{F}, \quad i \in \{1, 2, ..., m\}$$

Agora, para cada $i \in \{1, 2, ...m\}$ e $j \in I$, defina o funcional

$$f_i : V \to \mathbb{F}, \quad v_k \mapsto 0, \quad se \quad k \neq j \text{ e } \quad v_j \mapsto a_{ij}$$

com isso, segue que

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{m} f_i \otimes w_i\right)(v_j) = T(v_j)$$

e portanto concluímos que

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{m} f_i \otimes w_i\right) = T$$

donde segue que $T \in Im(\Phi)$.

d) Notemos que para cada $T \in Hom_{\mathbb{F}}(V, U)$ tem-se

$$\dim(Im(T)) \leq \{\dim(V), \dim(U)\}$$

dessa forma, se $\dim(V) < \infty$ ou $\dim(U) < \infty$ pela parte c) tem-se que $T \in Im(\Phi)$, e assim segue que Φ é sobrejetora. Supondo que $\dim(V) = \infty$ e $\dim(U) = \infty$, pode-se construir uma transformação linear T que não tem posto finito, e portanto não está em $Im(\Phi)$. $\square$

Em particular o conteúdo do teorema acima diz essencialmente que $V^* \otimes V$ pode ser identificado com o conjunto dos operadores lineares em V com posto finito. Além disso, no caso em que $\dim(V) < \infty$ e $\dim(U) < \infty$ pode-se explicitamente calcular o posto de um elemento de $V^* \otimes W$ via matrizes. De fato, sejam $\mathcal{A} = \{v_1, ..., v_n\}$ base de V, $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_m\}$ base de W e $\mathcal{A}^* = \{v^1, ..., v^n\}$ base de V^* dual a $\mathcal{A}$. Com isso note que

$$\Phi(v^k \otimes u_i)(v_j) = \delta_{jk} u_i$$

e portanto segue que

$$[\Phi(v^k \otimes u_j)]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = E_{jk}$$

e assim, se A é a matriz de $T \in Hom_{\mathbb{F}}(V, U)$ em relação as bases acima temos que

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v^j \otimes u_i\right)(v_l) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Phi(v^j \otimes u_i)(v_l) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v^j(v_l)u_i = \sum_{i=1}^{m} a_{il}u_i = T(v_l)$$

e portanto concluímos que

$$T = \Phi\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v^j \otimes u_i\right)$$

donde segue em particular que

$$\dim(T) = \dim\left(\Phi\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v^j \otimes u_i\right)\right)$$

Dessa forma, se $f \otimes u$ é um elemento em $V^* \otimes U$, então segue que o posto de $f \otimes u$ pode ser calculado encontrando-se o posto da corresponde T.

Teorema 5.11. *Sejam V, U espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então segue que*

$$(V \otimes U)^* \cong V^* \otimes U^*$$

onde é isomorfismo é dado pela transformação linear

$$\tau : V^* \otimes U^* \to (V \otimes U)^*, \quad \tau(f \otimes g)(v \otimes u) = f(v)g(u).$$

Nosso próximo passo será definir o produto tensorial de transformações lineares bem como derivar alguns resultados extremamente importantes. Antes porém relembremos um resultado elementar que será utilizado para mostrar uma propriedade envolvendo o núcleo do produto tensorial de transformações lineares.

Teorema 5.12. *Uma função $f : A \to B$ tem uma inversa à direita se, e somente se, f é sobrejetora.*

A demonstração do teorema acima é feita utilizando-se o axioma da escolha.

• Dado qualquer função $f : A \to B$, a função $f : A \to f(A)$ é sobrejetora, portanto admite inversa à direita.

Sejam V_1, V_2, W_1, W_2 espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$, e T_1, T_2 transformações lineares em $Hom_{\mathbb{F}}(V_1, W_1)$ e $Hom_{\mathbb{F}}(V_2, W_2)$ respectivamente. Veja que a função

$$\varphi : V_1 \times V_2 \to W_1 \otimes W_2, \quad (v_1, v_2) \mapsto T_1(v_1) \otimes T_2(v_2)$$

é bilinear, portanto existe uma função linear induzida

$$\varphi_{T_1,T_2} : V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$$

tal que

$$\varphi_{T_1,T_2}(v_1 \otimes v_2) = T_1(v_1) \otimes T_2(v_2).$$

Agora, defina

$$\psi : Hom_{\mathbb{F}}(V_1, W_1) \times Hom_{\mathbb{F}}(V_2, W_2) \to Hom_{\mathbb{F}}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2), \quad (T_1, T_2) \mapsto \varphi_{T_1,T_2}$$

não é difícil ver que ψ é bilinear (veja que é suficiente verificar isso em elementos da forma $x \otimes y$), dessa forma mais uma vez existe uma função linear induzida

$$\widehat{\psi} : Hom_{\mathbb{F}}(V_1, W_1) \otimes Hom_{\mathbb{F}}(V_2, W_2) \to Hom_{\mathbb{F}}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$$

tal que

$$\widehat{S \otimes T} = \varphi_{T,S}.$$

Notação: Fazendo um abuso de notação, iremos denotar a função linear φ_{T_1,T_2} acima por $T_1 \otimes T_2$.

Baseado na notação acima, dados $T \in Hom_{\mathbb{F}}(V_1, W_1)$ e $S \in Hom_{\mathbb{F}}(V_2, W_2)$ temos

$$T \otimes S(v_1 \otimes v_2) = T(v_1) \otimes S(v_2), \quad \text{para quaisquer } v_1 \in V_1 \text{ e } v_2 \in V_2.$$

Ademais, $T \otimes S$ é dito ser o produto tensorial das transformações lineares T e S.

Produto de Kronecker: Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, e considere $\{e_1, ..., e_n\}$ base canônica de $\mathbb{F}^n$. Dado que $\{e_i \otimes e_j : i, j \in \{1, 2, ..., n\}\}$ é uma base de $\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^n$, vamos encontrar uma expressão para em $A \otimes B$ em termos de tal base. Se $j \in \{1, 2, ..., n\}$ escreva

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

e

$$Be_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i.$$

Agora, ordene os elementos da base de $\mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^n$ da seguinte forma

$$\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_1 \otimes e_3, ..., e_n \otimes e_n\}$$

e observe que se $j, k \in \{1, 2, ..., n\}$, então

$$A \otimes B(e_i \otimes e_k) = Ae_j \otimes Be_k = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \right) \otimes Be_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (e_i \otimes Be_k) = \sum_{i,l} a_{ij} b_{lk} (e_i \otimes e_l).$$

Para-se ver uma expressão mais “amigável”para $A \otimes B$, escolha por exemplo a primeira linha e note que os primeiros n elementos da linha são $a_{11}b_{11}, a_{11}b_{12}, ..., a_{11}b_{1n}$. Da mesma maneira os n primeiros elementos da primeira coluna são $a_{11}b_{11}, a_{11}b_{21}, ..., a_{11}b_{n1}$. Procedendo com esse raciocínio, concluímos que $A \otimes B$ tem a forma

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n}B \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

O produto tensorial $A \otimes B$ acima é chamado de produto de Kronecker das matrizes A, B.

Proposição 5.13. *Sejam $T_1 \in Hom_{\mathbb{F}}(V_1, W_1)$ e $T_2 \in Hom_{\mathbb{F}}(V_2, W_2)$, então*

a) $Im(T_1 \otimes T_2) = Im(T_1) \otimes Im(T_2)$.

b) Se $N_1 := Ker(T_1) \otimes V_2$ e $N_2 := V_1 \otimes Ker(T_2)$, então

$$Ker(T_1 \otimes T_2) = N_1 + N_2.$$

Demonstração. a) Se $z = T_1(v_1) \otimes T_2(v_2)$, então $z = T_1 \otimes T_2(v_1 \otimes v_2)$, e portanto segue que $Im(T_1) \otimes Im(T_2) \subseteq Im(T_1 \otimes T_2)$. A outra inclusão é imediata.

b) É claro que

$$N_j \subseteq Ker(T_1 \otimes T_2), \quad \text{para todo } j \in \{1, 2\}$$

e portanto temos que

$$N_1 + N_2 \subseteq Ker(T_1 \otimes T_2).$$

Seja $\pi : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2/N_1 + N_2$ a projeção canônica. O problema está resolvido se mostrarmos a existência de um mapa linear

$$f : Im(T_1) \otimes Im(T_2) \to V/N_1 + N_2$$

tal que $f \circ (T_1 \otimes T_2) = \pi$. De fato, note que

$$Ker(T_1 \otimes T_2) \subseteq Ker(f \circ (T_1 \otimes T_2)) = Ker(\pi) = N_1 + N_2.$$

Pelo teorema 5.12, existem h_1, h_2 inversas à direita para T_1 e T_2 respectivamente (claro, definidas em $Im(T_1)$ e $Im(T_2)$ respec.). Além disso, por verificação imediata tem-se que para cada $i \in \{1, 2\}$

$$h_i(T_i(v)) - v \in Ker(T_i).$$

Agora, defina

$$h : Im(T_1) \times Im(T_2) \to V_1 \otimes V_2/N_1 + N_2$$

por

$$h(v_1, v_2) = \pi(h_1(v_1) \otimes h_2(v_2)).$$

Se h for bilinear, pro conta da propriedade universal do produto tensorial, existe uma função linear f tal que $f \circ \otimes = h$. Afirmamos que f satisfaz $f \circ (T_1 \otimes T_2) = \pi$. Com efeito, pela igualdade acima, dados $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, existem $v_1' \in Ker(T_1)$ e $v_2' \in Ker(T_2)$ tais que

$$h_i(T_i(v_i)) = v_i + v_i', \quad i \in \{1, 2\}.$$

Dessa forma, segue que

$$f(T_1(v_1) \otimes T_2(v_2)) = \pi(h_1(T_1(v_1)) \otimes h_2(T_2(v_2))) = \pi((v_1 + v_1') \otimes (v_2 + v_2'))$$

e portanto segue que

$$f(T_1(v_1) \otimes T_2(v_2)) = \pi(v_1 \otimes v_2).$$

A demonstração de que h é linear é canônica e utiliza o fato de que h_i é linear módulo $N_1 + N_2$. Esta pode ser encontrada na página 349 do livro de Adriano Moura. □

• Segue imediato da proposição acima que se T_1 e T_2 forem injetoras, então $T_1 \otimes T_2$ também é.

Proposição 5.14. *A função ψ definida acima por $\psi(T_1, T_2) = T_1 \otimes T_2$ é injetora. Em outras palavras, $Hom_{\mathbb{F}}(V_1, W_1) \otimes Hom_{\mathbb{F}}(V_2, W_2)$ mergulha em $Hom_{\mathbb{F}}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$.*

Demonstração. Se $\psi(T_1, T_2) \equiv 0$, então para quaisquer $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$ segue que

$$T_1(v_1) \otimes T_2(v_2) = 0.$$

Se $T_2 \equiv 0$, então $T_1 \otimes T_2 \equiv 0$. Suponha então que exista $\widehat{v}_2$ tal que $u := T_2(\widehat{v}_2) \neq 0$, dessa forma segue que para qualquer $v \in V_1$

$$T_1(v) \otimes u = 0$$

e assim, pelo teorema 5.4 tem-se que $T_1(v) = 0$ e por arbitrariedade de $v \in V_1$ concluí-se que $T_1 \equiv 0$, donde $T_1 \otimes T_2 \equiv 0$. □

• É imediato de 5.14 que se $\dim(V_1) < \infty, \dim(V_2) < \infty, \dim(W_1) < \infty$ e $\dim(W_2) < \infty$, então

$$Hom_{\mathbb{F}}(V_1, W_1) \otimes Hom_{\mathbb{F}}(V_2, W_2) \cong Hom_{\mathbb{F}}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2).$$

Para o próximo exemplo, vamos relembrar um resultado extremamente importante.

Resultado ($\diamond$): Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $f_1, ..., f_m \in V^*$. Dessa forma, se

$$W := \bigcap_{i=1}^{m} Ker(f_i)$$

tem-se que

$$\dim(V/W) \leq m.$$

Demonstração. ($\diamond$) Basta ver que a função

$$\vartheta : V \to \mathbb{F}^m, \quad v \mapsto (f_1(v), ..., f_m(v))$$

é linear. Portanto, dado que $Ker(\vartheta) = W$, segue pelo primeiro teorema do isomorfismo que $\dim(V/W) \leq m$.

□

• A respeito do **resultado** ($\diamond$), se $f_1, ..., f_m$ são linearmente independentes, então segue que existem $v_1, ..., v_m \in V$ tais que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ e assim segue que

$$\vartheta(v_i) = e_i, \quad \text{onde } e_i \text{ é o } i\text{-ésimo vetor da base canônica de } \mathbb{F}^m, \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Portanto, dado $x \in \mathbb{F}^m$, existem $a_1, ..., a_m \in \mathbb{F}$ tais que

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i = \sum_{i=1}^{m} \vartheta(v_i) = \vartheta(z), \quad \text{onde } z = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i$$

donde segue que ϑ é sobrejetora. Consequentemente, $\dim(V/W) = m$.

Exemplo 12:(Contraexemplo) Se um dos espaços do item anterior tiver dimensão infinita, não é mais verdade que $(T_1, T_2) \mapsto T_1 \otimes T_2$ é sempre sobrejetora. Com efeito, seja $V = \mathbb{R}[x]$ espaço vetorial dos polinômios de uma variável sobre $\mathbb{R}$ (uma base por exemplo é $\{1, x, ..., x^k, ...\}$), e mantendo a notação da proposição anterior, defina

$$V_1 = V_2 = V \text{ e } W_1 = W_2 = \mathbb{R}.$$

Portanto, usando o isomorfismo $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, podemos supor sem perda de generalidade que ψ é dada por

$$\psi : V^* \otimes V^* \to (V \otimes V)^*, \quad f \otimes g(v, u) \mapsto f(v)g(u).$$

Dado $\rho \in (V \otimes V)^*$, considere

$$N_\rho := \{v \in V : h(v \otimes u) = 0 \quad para \quad todo \quad u \in V\}$$

subespaço de V. Suponha que $\rho \in Im(\psi)$, portanto existem $f_1, ..., f_m, g_1, ..., g_m \in V^*$ tais que

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} f_i \otimes g_i.$$

E portanto, se

$$N := \bigcap_{i=1}^{m} Ker(f_i)$$

segue que $N \subseteq N_\rho$. Seja

$$\pi : V \to V/N_\rho, \quad \text{projeção canônica}$$

e note que

$$N \subseteq Ker(\pi) = N_\rho$$

e portanto, existe mapa linear induzido $\overline{\pi} : V/N \to V/N_\rho$, o qual é sobrejetor. Dessa forma, pelo **resultado**($\diamond$) tem-se que

$$\dim(V/N_\rho) \leq \dim(V/N) \leq m$$

em particular, mostramos que

$$\dim(V/N_\rho) < \infty, \quad \text{para todo } \rho \in Im(\psi).$$

Dessa forma, para mostrar que ψ não é sobrejetora, basta construir $\rho \in (V \otimes V)^*$ tal que $\dim(V/N_\rho) = \infty$. Para isso, seja $\mathcal{A} = \{v_i\}_{i \in I}$ uma base de V e se $\iota_i(v)$ é definido como sendo o mapa que envia v para a sua coordenada em relação a v_i, segue pela propriedade universal que existe $\rho \in (V \otimes V)^*$ tal que

$$\rho(v \otimes u) = \sum_{i \in I} \iota_i(v)\iota_i(u).$$

Portanto, concluímos que se $k \in I$

$$\rho(v \otimes v_k) = \iota_k(v), \quad \text{para todo } v \in V.$$

Dessa forma, segue que se $v \in N_\rho$ então $\iota_k(v) = 0$ para todo $k \in I$ e assim, $v = 0$. Portanto temos que

$$\dim(V/N_\rho) = \dim(V) = \infty$$

e assim, segue que $\rho \notin Im(\psi)$.

Observação: De maneira análoga se constrói o produto tensorial de uma família $V_1, ..., V_k$ de espaços vetoriais, e além disso obtém-se os mesmos resultados acima.

Vamos agora falar sobre **espaços tensoriais**, e posteriormente definir a chamada de **álgebra tensorial** de um espaço vetorial V.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ e considere p, q dois inteiros não negativos. Dessa forma, define-se o **espaços dos tensores** do tipo (p, q) como sendo o produto tensorial

$$T^p_q(V) := \underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes ... \otimes V^*}_{q} = V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$$

além disso, p é chamado de **tipo contravariate** e q é **tipo covariante.**

Dado que $V \cong V^{**}$ temos

$$T^p_q(V) = V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q} \cong ((V^*)^{\otimes p} \otimes V^{\otimes q})^* \cong Hom_{\mathbb{F}}((V^*)^{\times p} \times V^{\times q}; \mathbb{F})$$

onde na última igualdade utilizamos a generalização natural do teorema 5.3. Dessa forma, tensores do tipo (p, q) podem ser definidos via funcionais multilineares. Em outras palavras, cada $v_1 \otimes ... \otimes v_p \otimes f_1 \otimes ... \otimes f_q$ corresponde a um funcional multilinear

$$\varphi_{v_1 \otimes ... \otimes v_p \otimes f_1 \otimes ... \otimes f_q} : V^{\times p} \times (V^*)^{\times q} \to \mathbb{F}.$$

Por conta das propriedades vistas acima temos:

- $\dim(T^p_q(V)) = \dim(V)^{p+q}$

e

- $T^p_q(V) \otimes T^s_r(V) = T^{p+s}_{q+r}(V).$

• Tensores do tipo $(p, 0)$ são chamados de contravariantes. Por outro lado, os do tipo $(0, q)$ são ditos covariantes.

Argumentar acima sobre a associatividade dos produtos tensoriais e além disso terminar de escrever a respeito da escolha de vetores ativos e funcionais ativos.

Agora, considere os espaços vetoriais contravariantes

$$T^p(V) = T_0^p(V) = V^{\otimes p}, \quad p > 0$$

definindo $T_0^0 = \mathbb{F}$, podemos formar a soma direta externa $T(V)$ dada por

$$T(V) = \bigoplus_{p \geq 0} T^p(V).$$

O espaço vetorial $T(V)$ por conta da identificação acima tem a propriedade de que

$$T^p(V) \otimes T^r(V) = T^{p+r}(V), \quad \text{para todos } p, r \geq 0.$$

Dessa forma, $T(V)$ é uma $\mathbb{F}$-álgebra e além disso chamada de **álgebra tensorial** sobre V.

Vamos relembrar algumas coisas sobre o grupo simétrico S_n. Uma permutação dos números $\{1, 2, ..., n\}$ é uma bijeção

$$\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}.$$

Se $\circ$ é a composição usual de funções, o conjunto das permutações em $\{1, 2, ..., n\}$ junto com tal operação é um grupo, e além disso chamado de **grupo simétrico** S_n.

• Um r-ciclo em S_n é uma permutação σ da forma $(i_1, i_2, ..., i_r)$ a qual envia i_j para i_{j+1} sempre que $j \in \{1, 2, ..., r-1\}$ e $\sigma(i_r) = i_1$. Podemos representar graficamente da seguinte forma

$$\sigma : i_1 \longrightarrow i_2 \longrightarrow ... \longrightarrow i_r \longrightarrow i_1.$$

• O 2-ciclo (i, j) é chamado de transposição. Agora, dado um r-ciclo $\sigma = (i_1, i_2, ..., i_r)$ podemos escrever

$$\sigma = (i_1, ..., i_{r-1})(i_{r-1}, i_r) = (i_1, ..., i_{r-2})(i_{r-2}, i_{r-1})(i_{r-1}, i_r) = ...(i_1, i_2)(i_2, i_3)...(i_{r-1}, i_r).$$

• O resultado acima é mais geral: Qualquer permutação é um produto de transposições. Tal é em virtude do clássico resultado que diz que toda permutação ou é um cilo ou é um produto de ciclos disjuntos.

• O número de transposições que compõem uma permutação σ é chamado de sinal de σ e denotado por $\mathbf{sign}(\sigma)$.

• Dado uma função multilinear $f : V^n \to W$ define-se a ação de S_n em f da seguinte forma

$$\sigma \cdot f(x_1, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

• Se $V^n := V^{\times n}$, então a função multilinear $f : V^n \to W$ é simétrica se, e somente se, para cada permutação $\sigma \in S_n$ tem-se $\sigma \cdot f = f$.

• Se $V^n := V^{\times n}$, então a função multilinear $f : V^n \to W$ é alternada se, e somente se, para cada permutação $\sigma \in S_n$ tem-se $\sigma \cdot f = \mathbf{sign}(\sigma) f$.

Vamos então agora falar um pouco da **álgebra tensorial simétrica.**

Note que para cada $\sigma \in S_p$ o mapa

$$f_\sigma(v_1, ..., v_p) = v_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(p)}$$

é bilinear e portanto pela propriedade universal existe um mapa linear λ_σ definido em $T^p(V)$ tal que

$$\lambda_\sigma(v_1 \otimes ... \otimes v_p) = v_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes v_{\sigma(p)}.$$

• Dado que λ_σ leva base em base, segue que λ_σ é um isomorfismo em $T^p(V)$.
• Um tensor $t \in T^p(V)$ é simétrico se $\lambda_\sigma(t) = t$, para toda $\sigma \in S_p$.
• Veja que λ_σ permuta a posição das coordenadas e não os índices. Por exemplo, se $p = 3$, $\sigma = (1, 3)$ então se $\{e_1, e_2, e_3\}$ é base de V

$$\lambda_\sigma(e_3 \otimes e_1 \otimes e_2) = \lambda_\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 = e_2 \otimes e_1 \otimes e_3.$$

Com isso defina

$$ST^p(V) = \{t \in T^p(V) : \lambda_\sigma(t) = t, \quad \forall \sigma \in S_p\}.$$

• $ST^p(V)$ é um subespaço de $T^p(V)$.
terminar de escrever sobre a álgebra simétrica em característica 0.(Ver arquivo na "qualificações"com o nome "álgebra simétrica em char 0").

Vamos falar agora sobre a **álgebra exterior**. Iremos aqui utilizar a mesma construção que o livro do Kostrikin faz.

....

Exame de Qualificação 2008: Algumas questões

Observação 5.15. *Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ e considere sua transposta A^t. Vamos mostrar que A e A^t são semelhantes. Isto é, possuem as mesmas formas canônicas de Jordan. Dado que o polinômio minimal e característicos de A e A^t são os mesmos (a primeira afirmação segue do fato de que $(A^k)^t = (A^t)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$), é suficiente mostrar que se λ é um autovalor de A, então para todo $r \geq 1$*

$$\dim(Ker(A - \lambda I)^r) = \dim(Ker(A^t - \lambda I)^r).$$

Sabe-se que o posto linha e posto coluna de uma matriz são os mesmos, portanto, segue que

$$\dim(Im(A - \lambda I)) = \dim(Im(A - \lambda I)^t).$$

Por outro lado $(A - \lambda I)^t = A^t - \lambda I$, e assim segue que

$$\dim(Im(A - \lambda I)) = \dim(Im(A^t - \lambda I))$$

donde segue que

$$\dim(Ker(A - \lambda I)) = \dim(Ker(A^t - \lambda I)).$$

Se $r > 1$, basta vermos que

$$(A - \lambda I)^r = (A^t - \lambda I)^r$$

e utilizarmos o mesmo argumento acima.

Questão 3- Responda se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

a) Se $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tal que $PAP^{-1} = A^t$.

(Verdadeira) Sejam J_A e J_{A^t} formas canônicas de Jordan de A e A^t respectivamente. Pela observação 5.15 segue que $J_A = J_{A^t} = J$ e assim, existem matrizes $Q, R \in GL_n(\mathbb{C})$ tais que

$$A = RJR^{-1}, \quad \text{e } A^t = QJQ^{-1}$$

e portanto tem-se que

$$J = R^{-1}AR$$

donde segue que

$$A^t = Q(R^{-1}AR)Q^{-1}$$

consequentemente, se $P := QR^{-1}$, tem-se que

$$A^t = PAP^{-1}.$$

b) Sejam A uma matriz $m \times n$ e B matriz $n \times m$. Se $n < m$, então necessariamente tem-se $\det(AB) = 0$.

(Verdadeira) Veja que A, B correspondem aos operadores lineares

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

e

$$S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

respectivamente. Dessa forma, podemos escrever

$$n = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)), \quad \text{e} \quad m = \dim(Ker(S)) + \dim(Im(S))$$

além disso, tem-se

$$Ker(S) \subseteq Ker(TS), \quad \text{e } Im(TS) \subseteq Im(T).$$

Com isso, temos que

$$m = \dim(Ker(TS)) + \dim(Im(TS)) \leq \dim(Ker(TS)) + \dim(Im(T))$$

consequentemente

$$0 < m - n \leq \dim(Ker(TS)) - \dim(Ker(T))$$

ou seja

$$\dim(Ker(TS)) > \dim(Ker(T)) \geq 0.$$

Em particular, $Ker(TS) \neq \{0\}$ e assim, $\det(AB) = 0$.

c) (Feito em "Arquivo escrito ".)

d) A imagem de uma função bilinear sempre é um subespaço vetorial do seu contra-domínio.

(Falsa) Seja $V = \mathbb{R}^2$ e considere

$$P : V^* \times V^* \to B(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad P(f, g)(x, y) = f(x)g(y).$$

Não é difícil ver que $P(\cdot, \cdot)$ é bem definida e além disso bilinear. Considere $\{e^1, e^2\}$ base de V^* dual a base canônica $\{e_1, e_2\}$ de V. Além disso, veja que

$$P(e^1, e^1) = e^1e^1, \quad \text{e } P(e^2, e^2) = e^2e^2.$$

Vamos mostrar que o elemento $\varphi := e^1e^1 + e^2e^2 \notin Im(P)$. Suponha por absurdo que existam $f, g \in V^*$ tais que $P(f, g) = \varphi$. Dessa forma, teríamos

$$\varphi(v, u) = P(f, g)(v, u) = f(v)g(u), \quad \text{para todos } v, u \in V.$$

Porém isso implicaria que

$$f(e_1)g(e_1) = 1, \quad f(e_2)g(e_2) = 1 \text{ e } f(e_1)g(e_2) = 0$$

o qual é um absurdo pois teríamos $g(e_2) = 0$ e $g(e_2) = 1$.

Questão 9: Mostre que se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é anti-hermitiana, então A é unitariamente diagonalizável e seus autovalores são puros imaginários.

Demonstração. Seja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ operador tal que a matriz de T na base canônica de $\mathbb{C}^n$ seja A. Considerando em $\mathbb{C}^n$ produto interno usual, segue que a base canônica de $\mathbb{C}^n$, $\{e_1, ..., e_n\}$ é ortonormal e portanto, $T^\star$ (adjunto de T) é exatamente $A^* = -A$, donde segue que $T^\star = -T$. Feito essa observação, vamos mostrar que os autovalores de T são todos imaginários puros. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de T e note que se $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor associado a λ, então

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle T(v), v\rangle = \langle v, T^\star\rangle = \langle v, -T(v)\rangle = \langle v, -\lambda v\rangle = -\overline{\lambda}\langle v, v\rangle$$

donde segue $\mathcal{R}_e(\lambda) = 0$, ou seja, λ é imaginário puro. Vamos agora utilizar indução para mostrar que T tem uma base ortonormal de autovetores. Se $n = 1$, o resultado é claro, pois se v é um autovetor de T, $\alpha = v/|v|$ é a base procurada.

Suponha o resultado válido para todo operador anti-hermitiano $S : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, com $m < n$. Dado λ autovalor de T e $v \in \mathbb{C}^n$ autovetor associado, considere

$$W := span_{\mathbb{C}}\{v\}$$

e $W^\perp$ seu complemento ortogonal em $\mathbb{C}^n$. Notemos agora que se $w \in W^\perp$ então

$$\langle T(w), v\rangle = -\langle w, T(v)\rangle = -\lambda\langle w, v\rangle = 0$$

implicando então que $W^\perp$ é T-invariante, ou seja, é bem definido e além disso hermitiano o operador $S = T_{|W^\perp}$, e assim por hipótese de indução existe uma base ortonormal de $W^\perp$ $\{u_1, ..., u_{n-1}\}$ formada por autovetores de S. Consequentemente, $\{v, u_1, ..., u_{n-1}\}$ é a base procurada. $\square$

....

Relembrando transposta de transformações lineares:

Definição 5.16. *(Anulador) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e seja $\mathcal{S} \subseteq V$. O conjunto*

$$\mathcal{S}^0 := \{f \in V^* : f(s) = 0, \quad para \quad todo \quad s \in \mathcal{S}\}$$

é chamado de anulador de $\mathcal{S}$.

- $\mathcal{S}^0$ é um subespaço vetorial de V^*.

Teorema 5.17. *Sejam V espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ e $W \subseteq V$ subespaço vetorial. Então*

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^0).$$

A demonstração do teorema acima é canônica, pois bastar tomar

$$\mathcal{A} = \{w_1, ..., w_k, w_{k+1}, ..., w_n\}$$

base de V cujos primeiros k elementos formam uma base de W. Agora, considere

$$\mathcal{A}^* = \{f_1, ..., f_n\} \text{ base de } V^* \text{ dual a } \mathcal{A}.$$

Dessa forma, é suficiente mostrar que $\{f_{k+1}, ..., f_n\}$ é uma base de W^0, isto é, $\{f_{k+1}, ..., f_n\}$ gera W^0 (pois tal conjunto já é l.i.). Veja que esse resultado segue de imediato do fato de que para $f \in V^*$, os seus coeficientes em relação a $\mathcal{A}^*$, são $f(w_i)$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sejam U, V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $T : U \to V \in End_{\mathbb{F}}(U, V)$. Agora, defina

$$T^t : V^* \to U^*$$

da seguinte forma

$$T^t(f)(u) = f(T(u)), \quad \text{para todo } f \in V^*, u \in U.$$

• Para cada $T \in End_{\mathbb{F}}(U, V)$, a transformação T^t definida acima é única e além disso é chamada de a transposta de T.

Teorema 5.18. *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$, ambos de dimensão finita. Além disso, sejam $\mathcal{B}$ base de V, $\mathcal{B}^*$ base de V^* dual a $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ base de W e $\mathcal{C}^*$ respectiva base dual de W^*. Então*

$$\Big([T]_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\Big)^t = [T^t]_{\mathcal{C}^*\to\mathcal{B}^*}.$$

Corolário 5.19. *Se A é uma matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{F}$, então o posto coluna de A é igual ao posto linha de A.*

Algumas observações a respeito da forma canônica de Jordan e forma canônica Racional.

Seja $T : V \to V$ um operador linear num espaço de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{F}$. Suponha que o corpo em questão seja algebricamente fechado, portanto T admite forma de Jordan. Nesse ponto surge uma questão natural: A partir de uma base de Jordan, como encontrar uma base racional? E como fazer o processo inverso? Afim de enfatizar o processo prático, trabalharemos quando conveniente em dimensões baixas.

Suponha inicialmente que $n = 4$ e que a forma canônica de Jordan de T seja

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

e o respectivo diagrama de pontos seja

$$\begin{array}{ll} v_4 : & \bullet \\ & \downarrow \\ v_3 : & \bullet \\ & \downarrow \\ v_2 : & \bullet \\ & \downarrow \\ v_1 : & \bullet \end{array}$$

Notemos também que o polinômio minimal de J é $m_J(x) = (x-\lambda)^4 = c_J(x)$ e além disso, $m_{v_4} = m_J$. Vejamos também que os elementos da base acima são

$$v_4, \quad v_3 = (T-\lambda)v_4, \quad v_2 = (T-\lambda I)^2 v_4, \quad v_1 = (T-\lambda)^3 v_4.$$

Analisando o último vetor, pode-se ver que

$$0 = (T-\lambda)^4 v_4 = T^3(v_4) - 3\lambda T^2(v_4) + 3\lambda^2 T(v_4) - \lambda^3 v_4$$

e assim segue que na base $\mathcal{B}_R := \{v_4, T(v_4), T^2(v_4), T^3(v_4)\}$ a matriz R de T em tal é

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda^4 \\ 1 & 0 & 0 & 4\lambda^3 \\ 0 & 1 & 0 & -6\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4\lambda \end{pmatrix}$$

ou seja, R é a matriz companheira de $m_{v_4}(x) = (x-\lambda)^4$ e portanto $\mathcal{B}_R$ é uma base racional de T. Este processo pode ser feito para um bloco de Jordan de tamanho n, ou seja, toma-se o "maior vetor"da coluna do respectivo diagrama de pontos e a partir dele começa-se o ciclo. Em particular a forma racional será a matriz companheira de $(x-\lambda)^n$.

Vamos então para o caso geral donde a matriz de Jordan J de T é composta por blocos da seguinte forma

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_1) & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

onde $J_1(\lambda_j), J_2(\lambda_2), ..., J_{m_j}(\lambda_j)$ são os blocos de Jordan relacionados ao autovalor λ_j, para todo $j \in \{1, 2, ..., k\}$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k$ e considere também $m := \max\{m_j : j \in \{1, 2, ..., k\}\}$. Lembre-se que o diagrama de pontos para o conjunto de blocos de Jordan relacionado ao autovalor λ_j é da forma

$$\lambda_j : \quad \begin{array}{cccc} \bullet & \bullet & & \\ \downarrow & \downarrow & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

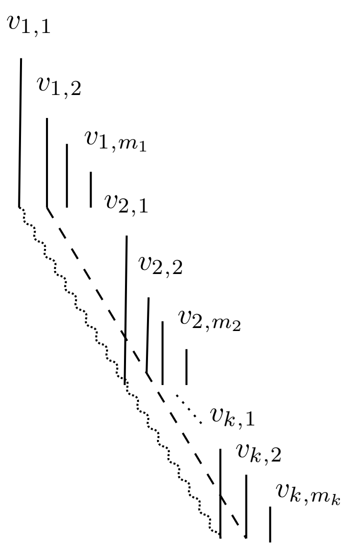
Para um $j \in \{1, 2, ..., k\}$ fixado, denote por $v_{j,1}, ..., v_{j,m_j}$ os vetores que iniciam os T-ciclos de Jordan (como descrito no caso particular) para o autovalor λ_j. Pode-se supor também que

$$m_{v_{j,i}} \mid m_{v_{j,i-1}}, \quad i \in \{2, ..., m_j\}.$$

Agora, se $m_j < i \leq m$, coloque $v_{j,i} = 0$ e defina também

$$v_i = v_{1,i} + v_{2,i} + ... + v_{k,i}.$$

De forma intuitiva estamos fazendo assim:



$$\begin{array}{cccc} v_1 = & v_2 = & & \\ v_{1,1} & v_{1,2} & & \\ + & + & & \\ v_{2,1} & v_{2,2} & & \\ + & + & & .... \\ . & . & & \\ . & . & & \\ . & . & & \\ + & + & & \\ v_{k,1} & v_{k,2} & & \end{array}$$

Veja com essa definição, temos

$$V = \bigoplus_{p=1}^{m} C_T(v_p) \text{ com } m_{v_{p+1}} \mid m_{v_p}, \quad \text{para todo } p \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Vamos fazer a verificação para o caso em que J tem apenas 4 blocos. continuar...

....

Existência do produto exterior:

Uma das formas de se definir o produto exterior, é via a propriedade universal. Entretanto, embora a definição seja "rápida", precisa-se mostrar sua existência.

Definição da k-ésima potência exterior via a propriedade universal:

Se V espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$, diz-se que o par $(\wedge, U)$ formado por um espaço vetorial U e uma k-função multilinear alternada $\wedge : V \times ... \times V \to U$, é uma k-ésima potência exterior para V se: Dado $g : V \times ... \times V \to W$, k-função multilinear alternada, e W espaço vetorial, existe $f : U \to W$ linear tal que

$$f \circ \wedge = g.$$

Resultado 5.20. *(Existência de uma k-ésima potência exterior)*

Seja V espaço vetorial sobre corpo $\mathbb{F}$, denote por

$$V^{\otimes k} := \underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{k}.$$

Em $V^{\otimes k}$, considere o conjunto S formado pelos vetores homogêneos $v_1 \otimes ... \otimes v_k$, tais que existam $1 \leq i < j \leq n$ satisfazendo $v_i = v_j$. Assim, considere $N = \langle S \rangle_{\mathbb{F}}$, espaço vetorial gerado pelo conjunto S e o mapa natural

$$\pi : V^{\otimes k} \to V^{\otimes k}/N, \quad x \mapsto x + N.$$

Considerando o produto tensorial

$$\otimes : V \times ... \times V \to V^{\otimes k}, \quad (v_1, ..., v_k) \mapsto v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_k$$

vamos mostrar que o mapa

$$\wedge : V \times ... \times V \to V^{\otimes k}/N, \quad \boldsymbol{v} \mapsto \pi \circ \otimes(\boldsymbol{v})$$

é uma k-ésima potência exterior para V.

$\wedge$ é uma k-função multilinear alternada: *Vamos verificar apenas que $\wedge$ é alternada, pois a multilinearidade segue de imediato da definição. Suponha que $\boldsymbol{v} = (v_1, ..., v_k)$ é um vetor tal que $v_i = v_j$, para $j > i$. Dessa forma, segue que*

$$\wedge(\boldsymbol{v}) = \pi \circ \otimes(\boldsymbol{v}) = v_1 \otimes ... v_i \otimes ... \otimes v_i \otimes ... \otimes v_k + N = N = 0_{V^{\otimes k}/N}$$

portanto temos que de fato, $\wedge$ é alternada.

$\wedge$ satisfaz a propriedade universal descrita: *Seja $g : V \times ... \times V \to W$ função multilinear alternada e $\{e_i\}_{i \in I}$ uma base de V e $\{w_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ base de W. Dado que elementos da forma*

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes ... \otimes e_{i_k}, \quad i_1, ..., i_k \in I$$

formam uma base de $V^{\otimes k}$, defina

$$\widetilde{f} : V^{\otimes k} \to W, \quad \widetilde{f}(e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_k}) = g(e_{i_1}, ..., e_{i_k})$$

e estenda $\widetilde{f}$ por linearidade. Por conta de g ser alternada e k-linear, segue que se $\boldsymbol{v} \in N$, então $f(\boldsymbol{v}) = 0$, consequentemente

$$N \subseteq Ker(\widetilde{f})$$

e assim, $\widetilde{f}$ induz uma função linear

$$f : V^{\otimes k}/N \to W$$

tal que $f \circ \pi = \widetilde{f}$. Por fim, notemos que

$$f \circ \wedge = f \circ (\pi \circ \otimes) = (f \circ \pi) \circ \otimes = \widetilde{f} \circ \otimes = g$$

....

Determinantes:

Notação: Denote por $V^{\times k} = \underbrace{V \times ... \times V}_{k}$.

Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ base canônica de $\mathbb{F}^n$. Dessa forma, dado que

$$\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{F}^n)) = \binom{n}{n} = 1$$

segue que

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{F}^n) = span\{e_1 \wedge e_2 \wedge ... \wedge e_n\}$$

portanto, por conta da propriedade universal, existe uma única forma alternada $e : V^{\times k} \to \mathbb{F}$ tal que

$$e(e_1, e_2 ..., e_n) = 1.$$

Agora, se A é uma matriz em $M_n(\mathbb{F})$ cujas colunas são $v_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{nj})$, então definimos o determinante de A como sendo

$$\det(A) = \det[v_1, ..., v_n] := e(v_1, ..., v_n).$$

Resultado 5.21. *Os vetores $v_1, ..., v_n \in \mathbb{F}^n$ são linearmente independentes se, e somente se,* $\det[v_1, ..., v_n] \neq 0$.

Sejam agora V, W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{F}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Para $k \geq 0$, defina

$$T^* : \mathcal{A}_r(V, \mathbb{F}) \to \mathcal{A}_r(W, \mathbb{F}), \quad \phi \mapsto T^*(\phi)$$

onde

$$T^*(\phi)(v_1, ..., v_k) = \phi(T(v_1), ..., T(v_k)).$$

• T^* é bem definida e linear.

Agora, se $W = V$ e $\dim(V) = n$, então existe $\delta(T) \in \mathbb{F}$ tal que

$$T^*(\phi) = \delta(T)\phi$$

pois $\dim(\mathcal{A}_n(V)) = 1$. A constante $\delta(T)$ é chamada de o **determinante** de T.

• Segue da definição de $\delta(T)$ que se $S : V \to V$ é outro operador linear

$$\delta(T \circ S) = \delta(T)\delta(S).$$

Teorema 5.22. *Seja $T : V \to V$ um operador linear num espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{F}$. Se $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de V e $A = [T]_{\mathcal{B}}$, então*

$$\delta(T) = \det(A) = \det(T).$$

A demonstração do teorema acima é canônica, e pode ser encontrada na página 37 do livro de análise volume 3-Elon Lima.

Agora, utilizando o fato de que $\det[e_1, ..., e_n] = 1$ e de que $\det(\cdot)$ é uma função k-linear alternada em suas colunas, segue que se $A = (a_{ij})_{ij}$, então

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} ... a_{1,\sigma(n)}.$$

• Segue da última expressão de $\det(\cdot)$, que $\det(A) = \det(A^t)$, consequentemente, $\det(\cdot)$ é n-multilinear e alternada nas linhas de uma matriz.

Observação 5.23. *Por conta da definição de* $det(\cdot)$, *segue que se* $f : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ *é uma outra forma* n*-multilinear alternada nas colunas de uma matriz, então* $f(A) = f(I_n)\det(A)$. *De fato, veja que* $f = \alpha e$ *e portanto,* $f(e_1, ..., e_n) = \alpha e(e_1, ..., e_n) = \alpha$, *donde segue que se* $v_1, ..., v_n$ *são as colunas de uma matriz* A

$$f(A) = f(v_1, ..., v_n) = \alpha e(v_1, ..., v_n) = f(I_n)\det(A)$$

Exercício: Se $A_1, ..., A_k$ são matrizes quadradas e B_{ij} tem tamanhos apropriados, mostre que se

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{1k} \\ 0 & A_2 & B_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{2k} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & A_k \end{pmatrix}$$

então

$$\det(A) = \det(A_1)\det(A_2)...\det(A_k).$$

Demonstração. Por indução, é suficiente provar o resultado para matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

onde $A \in M_r(\mathbb{F})$, $B \in M_{r\times n-r}(\mathbb{F})$, $0 \in M_{n-r,r}(\mathbb{F})$ e $C \in M_{n-r}(\mathbb{F})$. Fixe $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{F})$ e defina

$$f : M_r(\mathbb{F}) \times M_{n-r}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}, \quad (A, B) \mapsto \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Por definição, segue que f é r-multilinear e alternada nas colunas de A e $n-r$-multilinear nas linhas de C. Em outras palavras, dado $B \in M_{n-r}(\mathbb{F})$, a função

$$g : M_r(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}, \quad g(\cdot) = f(\cdot, B)$$

é uma forma n-multilinear alternada, e assim, pela observação 5.23 segue que

$$g(A) = \det(A)g(I_r)$$

ou seja

$$f(A, B) = g(A) = \det(A)f(I_r, B).$$

Analogamente a construção da função g, definimos h da seguinte forma

$$h : M_{n-r}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}, \quad h(\cdot) = f(I_r, \cdot)$$

e assim, mais uma vez utilizando a observação 5.23, segue que

$$f(A, B) = \det(A)f(I_r, B) = \det(A)h(B) = \det(A)\det(B)h(I_{n-r}) = \\ \det(A)\det(B)f(I_r, I_{n-r}).$$

Escreva os elementos de $f(I_r, I_{n-r})$ como (δ_{ij}) e seja $\sigma \in S_n$ uma permutação que envia por exemplo i para j, com $i \neq j$. Por um lado, como $f(I_r, I_{n-r})$ é triangular, $\delta_{ij} = 0$ ou $\delta_{ji} = 0$. Dessa forma, o correspondente termo na soma do determinante é

$$\cdots\delta_{i\sigma(i)}\cdots\delta_{j\sigma(j)}\cdots = \cdots\delta_{ij}\cdots\delta_{ji}\cdots = 0$$

implicando então que todos os membros da soma $\sum_\sigma \delta_{1\sigma(1)}...\delta_{n\sigma(n)}$ são nulos, exceto quando $\sigma = 1 \in S_n$, donde segue que $f(I_r, I_{n-r}) = 1$, e assim

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(B).$$

Agora, escrevendo a matriz do enunciado da forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A_k \end{pmatrix}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{1(k-1)} \\ 0 & A_2 & B_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{2(k-1)} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & A_{k-1} \end{pmatrix}, \quad \text{e } B = \begin{pmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{(k-1)k} \end{pmatrix}$$

por hipótese de indução e pela primeira parte do exercício, segue que

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{1k} \\ 0 & A_2 & B_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & B_{2k} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & A_k \end{pmatrix} = \det(A_1)\det(A_2)...\det(A_k).$$

□

....

Subespaços invariantes por um operador :

O próximo exercício fornece-nos uma expressão em soma direta para subespaços T-invariantes de operador linear $T : V \to V$ dado.

Exercício: Seja $T : V \to V$ um operador linear num espaço vetorial de dimensão finita V. Suponha que o polinômio minimal de T seja $m_T(x) = p_1^{r_1}...p_k^{r_k}$ e além disso

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_k$$

seja a decomposição primária de T. Mostre que se W é um subespaço T-invariante, então

$$W = (W \cap V_1) \oplus W \cap V_2 \oplus ... \oplus (W \cap V_k).$$

Demonstração. Se W é T invariante, então $m_S \mid m_T$, onde $S = T_{|W}$ e m_S é o polinômio minimal de W. Dessa forma, sem perda de generalidade, pode-se supor que

$$m_S(x) = p_1^{s_1}...p_m^{s_m}, \quad \text{onde } s_i \leq r_i \text{ para todo } i \in \{1, 2, ..., m\} \text{ e } m \leq k.$$

Pelo teorema da decomposição primária aplicada a S, tem-se que

$$W = Ker(p_1^{s_1}(S)) \oplus ... \oplus Ker(p_m^{s_m}(S)).$$

Dado que para cada $j \in \{1, 2, ..., m\}$

$$Ker(p_j^{s_j}(S)) = W \cap Ker(p_j^{s_j}(T))$$

e além disso

$$Ker(p_j^{s_j}(T)) \subseteq Ker(p_j^{r_j}(T)) = V_j$$

tem-se que

$$W = Ker(p_1^{s_1}(S)) \oplus ... \oplus Ker(p_m^{s_m}(S)) = (W \cap Ker(p_1^{s_1}(T))) \oplus ... \oplus (W \cap Ker(p_m^{s_m}(T)))$$

e portanto

$$W = (W \cap Ker(p_1^{s_1}(T))) \oplus ... \oplus (W \cap Ker(p_m^{s_m}(T))) \subseteq (W \cap V_1) \oplus ... \oplus (W \cap V_k) \subseteq W$$

donde segue que

$$W = (W \cap V_1) \oplus ... \oplus (W \cap V_k).$$

$\square$

- Segue do exercício acima que se W é um subespaço T-invariante unidimensional, então

$$W \subseteq V_j \text{ por algum } j \in \{1, 2, ..., k\}.$$

- Caso $\dim(W) = 2$, então ou existem $i, j \in \{1, 2..., k\}$ tais que

$$W = W \cap V_i \oplus W \cap V_j$$

e nesse caso $\dim(W \cap V_i) = \dim(W \cap V_j) = 1$, ou existe $p \in \{1, 2, ...k\}$ tal que

$$W \subseteq V_p.$$

Baseado nesse exercício, se o espaço vetorial V tiver dimensão baixa (e.g $\dim(V) = 2, 3, 4$) então pode-se descrever completamente todos os subespaços T invariantes baseado apenas na decomposição primária de T.

....

Exame de Qualificação: Algumas questões

Exercício: Determine a veracidade da afirmação abaixo:

($Verdadeira$) Se V é um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno e $T \in \mathcal{L}(V, V)$, então existe um operador linear auto-adjunto S tal que

$$S^2 = T^* \circ T.$$

Demonstração. Suponha que $n = \dim(V)$. Notemos que se $0 \neq v \in V$ é um autovetor associado a um autovalor λ, então

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle T^* \circ T(v), v\rangle = \langle T(v), T(v)\rangle \geq 0$$

e portanto, todos os autovalores de $T^* \circ T$ são não negativos. Além disso

$$(T^* \circ T)^* = T^* \circ (T^*)^* = T^* \circ T$$

e portanto segue que $T^* \circ T$ é auto-adjunto. Dessa forma, existem $P \in GL_n(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal D, com elementos não negativos em sua diagonal, tais que

$$T^* \circ T = PDP^t.$$

Escreva $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ e defina $E = diag(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$. Dessa forma, tem-se que a matriz $S := PEP^t$ é auto-adjunta e além disso

$$T^* \circ T = S^2.$$

$\square$

Exercício: Uma transformação linear $P : V \to V$ no espaço vetorial V é projeção se $P^2 = P$; uma transformação linear $S : V \to V$ em V é involução se $S^2 = I$, a identidade.

a) Assumindo o corpo F tal que $1 \neq -1$, mostrar que P é projeção se, e somente se $S = I - 2P$ é uma involução.

b) Mostrar que se P é uma projeção em V então existe uma base de V que consiste de autovetores de P. (A dimensão de V não precisa ser finita!)

c) Seja $\dim(V) = \infty$. Para todo número natural k, mostrar que existem $P_1, ..., P_k$ projeções em V tais que $P_iP_j = P_jP_i$ para quaisquer i e j.

Demonstração. a) Notemos que

$$S^2 = (I - 2P)(I - 2P) = I - 4P + 4P^2$$

logo, tem-se que $S^2 = I \Leftrightarrow P^2 = P$.

b) Se $P \equiv 0$ não há nada a provar. Caso contrário, existe $x \in V$ tal que $P(x) \neq 0$ e assim, se $y = P(x)$ tem-se que $P(y) = y$, donde segue que y é um autovetor de P, associado ao autovalor $\lambda = 1$. Por outro lado, se v é um autovetor associado a $\lambda = 1$, tem-se que

$$v = P(v) = P(P(v))$$

donde segue que $v \in Im(P)$. Logo, concluímos que $Im(P)$ é o auto-espaço associado a $\lambda = 1$. Por fim, para concluirmos esse item, basta verificarmos que $V = Im(P) \oplus Ker(P)$. Veja que se $v \in V$, então podemos escrever

$$v = P(v) + (v - P(v))$$

dado que $P(v - P(v)) = 0$, segue que $v \in Im(P) + Ker(P)$. Além disso, dado que se $v \in Im(P)$, então $P(v) = v$ segue que $Im(P) \cap Ker(P) = \{0\}$ e assim concluímos que

$$V = Im(P) \oplus Ker(P).$$

c) Seja $\mathcal{A} = \{e_i\}_{i \in I}$ uma base de V indexada por um conjunto infinito. Dado $k \in \mathbb{N}$ escolha (usando o axioma da escolha) $e_1, ..., e_k$ vetores em $\mathcal{A}$. Se $U = span\{e_i : i \in I \setminus \{1, 2, ..., k\}\}$ e $V_j = span\{e_j\}$, para $j \in \{1, 2, .., k\}$ tem-se que

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus U$$

dessa forma, dado $x \in V$, denotando por $x_1, ..., x_k$ as componentes de x que pertencem a $V_1, ..., V_k$ respectivamente, definimos para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$

$$P_i(x) = x_i$$

é imediato por definição que para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, P_i é linear. Além disso para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$

$$P_i^2(x) = P_i(x_i) = x_i = P_i(x)$$

e se $i \neq j$, então

$$P_i P_j(x) = P_i(x_j) = 0 = P_j(x_i) = P_j P_i(x).$$

$\square$

Observação 5.24. *(Projeção Ortogonal) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e U um subespaço de V, com dimensão $m < n$. Sabe-se que em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pode-se escrever*

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

e assim, definimos o operador projeção ortogonal a U como sendo o operador

$$P_U : V \to V, \quad x + y \in U \oplus U^{\perp} \mapsto x \in U.$$

Segue por definição que $|P_U(v)| \leq |v|$, para todo $v \in V$, onde $| \cdot |$ é a norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sugestivamente, é interessante as vezes escrever qualquer elemento $v \in V$ como

$$v = P_U(v) + P_{U^{\perp}}(v).$$

Notemos também que se $u \in U$ é arbitrário, então

$$|v - P_U(v)|^2 \leq |v - P_U(v)|^2 + |P_U(v) - u|^2$$

por outro lado, dado que $P_U(v) - u \in U$ e $v - P_U(v) \in U^{\perp}$, segue pela igualdade de Pitágoras que

$$|v - P_U(v)|^2 \leq |(v - P_U(v)) + (P_U(v) - u)|^2 = |v - u|^2.$$

E portanto, concluímos que

$$|v - P_U(v)| \leq |v - u| \text{ para todo } u \in U.$$

Em particular

$$|v - P_U(v)| \leq |v|.$$

Exercício: Seja V um espaço vetorial real com produto interno e sejam $a_1, a_2, ..., a_k \in V$, o determinante de Gram $\Gamma(a_1, a_2, ..., a_k)$ é o determinante da matriz $k \times k$ que tem na entrada (i, j) o produto interno (a_i, a_j). (Denotaremos tal matriz por $G(a_1, ..., a_k)$).

a) Mostrar que $\Gamma(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 0$, com igualdade se, e somente se os vetores $a_1, ..., a_k$ são linearmente dependentes.

b) Mostrar que $\Gamma(a_1, ..., a_k) \leq |a_1|^2|a_2|^2...|a_k|^2$. Quais são os casos onde se tem igualdade?

Demonstração. a) Vamos verificar que $\Gamma(a_1, ..., a_k) \geq 0$. Considere $V' = span\{a_1, ..., a_k\}$ e $\mathcal{A} = \{e_1, ..., e_r\}$ uma base ortonormal de V'. Escreva

$$a_i = \alpha_{1i}e_1 + \cdots \alpha_{ri}e_r, \quad \text{para cada } i = 1, 2, ..., k.$$

Então, tem-se que

$$(a_i, a_j) = \sum_t \sum_s \alpha_{ti}\alpha_{sj}(e_t, e_s) = \sum_{t=1}^{r} \alpha_{ti}\alpha_{tj}$$

e assim, $G(a_1, ..., a_k) = C^T C$, onde

$$C = (\alpha_{ij})_{ij}$$

donde tem-se que

$$\Gamma(a_1, ..., a_k) = \det C^T C = \det(C)^2 \geq 0.$$

Se $a_1, ..., a_k$ são l.d, sem perda de generalidade, podemos supor que existam $\alpha_2, .., \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 = \sum_{i=k}^{k} \alpha_i a_i$ e portanto, se $l_1, ..., l_k$ são as linhas de $G(a_1, ..., a_k)$ tem-se que

$$l_1 = \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + ... + \alpha_k l_k$$

donde segue que $\Gamma(a_1, ..., a_k) = 0$. Por outro lado, suponha que $a_1, ..., a_k$ sejam l.i. e além disso, $\Gamma(a_1, ..., a_k) = 0$. Dado que $\Gamma(a_1, ..., a_k) = 0$, pode-se mais uma vez sem perda de generalidade supor que existam $\beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$l_1 = \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + ... + \beta_k l_k$$

donde segue que para cada $j \in \{1, 2, ..., k\}$

$$\left(a_1 - \sum_{i=2}^{k} \beta_i a_i, a_j\right) = 0.$$

Agora, seja $U := span\{a_1, ..., a_k\}$, então $G(a_1, ..., a_k)$ é a matriz de Gram do produto interno induzido em U e além disso pela última expressão tem-se que

$$\left(a_1 - \sum_{i=2}^{k} \beta_i a_i, u\right) = 0, \quad \text{para todo } u \in U$$

e assim segue que

$$a_1 = \sum_{i=2}^{k} \beta_i a_i$$

absurdo. Portanto, concluímos que $\Gamma(a_1, ..., a_k) > 0$.

b) Se a_1 é ortogonal aos vetores $a_2, ..., a_k$, então

$$G(a_1,...,a_k)=\begin{pmatrix}|a_1|^2 & 0\\ 0 & G(a_2,...,a_k)\end{pmatrix}$$

e assim, segue que

$$\Gamma(a_1,...,a_k)=|a_1|^2\Gamma(a_2,...,a_k).$$

Utilizando o mesmo raciocínio, se $a_1,...,a_k$ são ortogonais, então $\Gamma(a_1,...,a_k)=|a_1|^2...|a_k|^2$. Para o caso geral, vamos proceder por indução em k. Se $k=1$ o resultado é imediato, se $k=2$

$$\Gamma(a_1,a_2)=|a_1|^2|a_2|^2-(a_1,a_2)^2\leq|a_1|^2|a_2|^2.$$

Suponha por indução que o resultado seja válido para $k-1>0$. Se $a_1,...,a_k$ são l.d o resultado é imediato, logo pode-se supor que estes são l.i, e assim, seja $V':=span\{a_1,...,a_k\}$ e $U=span\{a_2,...,a_k\}$. Em relação ao produto interno $(\cdot,\cdot)$ pode-se escrever

$$V'=W\oplus W^{\perp}.$$

Por outro lado, definindo $b_1:=a_1-P_U(a_1)$, segue que

$$b_1\perp a_j,\quad \text{para todo } j\in\{2,...,k\}$$

e assim, tem-se que

$$\Gamma(a_1,...,a_k)=\Gamma(b_1+P_U(a_1),...,a_k)=\Gamma(P_U(a_1),a_2,...,a_k)+\Gamma(b_1,a_2,...,a_k)=\Gamma(b_1,a_2,...,a_k)$$

onde a última igualdade acima segue do fato de que $P_U(a_1)\in U$ e portanto

$$\Gamma(P_U(a_1),a_2,...,a_k)=0.$$

E assim, pela primeira parte do item b), tem-se que

$$\Gamma(a_1,...,a_k)=|b_1|^2\Gamma(a_2,...,a_k)$$

e assim, utilizando o final da observação 5.24 e a hipótese de indução, concluímos que

$$\Gamma(a_1,...,a_k)\leq|a_1|^2|a_2|^2...|a_k|^2.$$

□

Exercício: Seja $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ uma transformação linear.

a) Mostrar que T é uma involução (i.e $T^2=I$) se, e somente se, $\mathbb{R}^n$ é uma soma direta de subespaços V_0 e V_1 tais que $T_{|V_0}=I$ e $T_{|V_1}=-I$.

b) Mostrar que existe uma base de $\mathbb{R}^n$ que consiste de autovetores de T.

c) Demonstre que T é normal se, e somente se V_0 é ortogonal a V_1.

d) Sejam $T_1,..,T_k$ involuções distintas duas a duas, em $\mathbb{R}^n$ tais que $T_iT_j=T_jT_i$ para quaisquer $i,j\in\{1,2,...,k\}$, Mostre que $k\leq 2^n$.

Demonstração. a) Suponha que T seja uma involução. Dessa forma, o polinômio característico de T é $c_T(x)=x^2-1=(x-1)(x+1)$ e portanto seus autovalores são $\lambda=1$ e $\mu=-1$. Além disso, o polinômio minimal de T deve ser igual a c_T, pois m_T possui as mesmas raízes que c_T. Dessa forma, tem-se pelo teorema da decomposição primária que

$$\mathbb{R}^n=Ker(T-I)\oplus Ker(T+I)$$

donde segue que se $V_0:=Ker(T-I)$ e $V_1=Ker(T+I)$, então $T_{|V_0}=I$ e $T_{|V_1}=-I$. Reciprocamente, existe uma base α de $\mathbb{R}^n$ na qual $[T]^2_\alpha=I$. Dessa forma, se β é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ existe $P\in GL_n(\mathbb{R})$ tal que

$$[T]_\gamma=P[T]_\alpha P^{-1}$$

e portanto

$$[T]^2_\gamma=P[T]^2_\alpha P^{-1}=PP^{-1}=I.$$

Dessa forma, concluímos que $T^2 = I$.

b) Segue imediatamente do item anterior.

c) Lembremos que se S é um operador normal, e λ é um autovetor de S, então $\overline{\lambda}$ é um autovetor de S^*.

Suponha que T seja normal, $v_0 \in V_0$ e $v_1 \in V_1$. Dessa forma, temos que $T(v_0) = v_0$ e $T(v_1) = -v_1$ e assim segue que

$$\langle T(v_0), v_1 \rangle = \langle v_0, T^*(v_1) \rangle = \langle v_0, v_1 \rangle.$$

Por outro lado

$$\langle T(v_0), v_1 \rangle = \langle -v_0, v_1 \rangle = -\langle v_0, v_1 \rangle$$

portanto tem-se que $\langle v_0, v_1 \rangle = 0$ e por arbitrariedade de $v_0 \in V_0$ e $v_1 \in V_1$, tem-se que V_0 é ortogonal a V_1. A reciproca é imediata usando o mesmo argumento utilizado no final de a).

d) Veja que se $T_iT_j = T_jT_i$, então como cada T_i é diagonalizável, como ja visto em exercícios anteriores, existe uma base de V que diagonaliza todos os T_i, para $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Portanto, precisamos contar de quantas formas podemos construir um operador com $1's$ e $-1's$ em sua diagonal. Dessa forma, é suficiente contar a quantidade k de $-1's$, a qual é exatamente $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, portanto concluímos que $k \leq 2^n$. $\square$

Exercício: Sejam V_1, V_2, V_3, V_4 espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $R : V_1 \to V_2$, $S : V_2 \to V_3$, $T : V_3 \to V_4$ transformações lineares.

$a)$ Mostrar que $p(TS) = p(S) - \dim(Im(S) \cap N(T))$.

$b)$ Mostrar que $p(TS) + p(SR) \leq p(S) + p(TSR)$ (Desigualdade de Frobenius).

Aqui $p(T)$ é o posto de T, $Im(T)$ e $N(T)$ são a imagem e o núcleo respectivamente.

Demonstração. $a)$ Defina

$$\psi : Im(S) \to V_4$$

dada por $\psi(S(x)) = TS(x)$. Vejamos que ψ é linear. Com efeito, note que

$$\psi(S(x) + \alpha S(z)) = \psi(S(x + \alpha z)) = TS(x + \alpha z) = TS(x) + \alpha TS(z) = \psi(S(x)) + \alpha\psi(S(z))$$

para quaisquer $x, z \in V_2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Além disso se $y \in Ker(\psi)$ segue que $y = S(x)$ e $TS(x) = 0$, portanto concluímos que $Ker(\psi) = Im(S) \cap N(T)$. Dessa forma, pelo primeiro teorema do isomorfismo segue que

$$Im(S)/(Im(S) \cap N(T)) \cong Im(\psi)$$

e dado que $Im(\psi) = Im(TS)$ segue que

$$p(TS) = p(S) - \dim(Im(S) \cap N(T)).$$

$b)$ Notemos que pela parte $a)$ tem-se as igualdades

$$p(TSR) = p(SR) - \dim(Im(SR) \cap N(T))$$

$$p(TS) = p(S) - \dim(Im(S) \cap N(T)).$$

Por outro lado, $Im(SR) \subseteq Im(S)$ e portanto

$$p(TSR) \geq p(SR) - \dim(Im(S) \cap N(T))$$

isto é

$$p(TSR) + p(S) \geq p(SR) + p(S) - \dim(Im(S) \cap N(T)) = p(SR) + p(TS)$$

donde segue a desigualdade de Frobenius. $\square$

Exercício: Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A^k = I$ para algum k natural e $|tr(A)| = n$. Então, $A = I$.

Demonstração. Dado que $A^k = I$, a forma de Jordan de A não pode ter blocos de ordem maior que 2, portanto tem-se que A é diagonalizável e além disso, seus autovalores são raízes da unidade. Dado que $|tr(A)| = n$, segue que os únicos autovalores de A são 1 e assim, pelo teorema da decomposição primária $\mathbb{C}^n = Ker(A - I)$, donde segue que $A = I$. $\square$

....

Exame de qualificação álgebra linear-2021:
Exercício 1: Dada a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Encontre a forma de Jordan de A e uma base de Jordan para a mesma.

Demonstração. Notemos que

$$c_A(x) = (x-2)^3(x-3)$$

portanto os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Vejamos que

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto tem-se que $Ker(A - \lambda_1 I) = span\{e_1, e_2\}$. Além disso

$$(A - \lambda_1 I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e portanto segue que $Ker((A - \lambda_1 I)^2) = span\{e_1, e_2, e_3\}$. Dado que $\dim(A - \lambda_2 I) = 1$, segue que $Ker((A - \lambda_1 I)^3) = Ker((A - \lambda_1 I)^2)$. Donde tem-se que o diagrama de pontos de $\lambda_1 = 2$ é

$$\begin{array}{cc} \bullet & \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

e assim, o polinômio minimal de A é $m_A = (x-2)^2(x-3)$. Dessa forma, a forma canônica de Jordan de A, J_A é

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por fim, notemos que

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e assim, segue que $Ker(A - \lambda_2 I) = span\{(-3, 6, 0, 1)\}$. Dessa forma, se $v_1 = (A - \lambda_1 I)v_2, v_2 = e_3$ e $v_3 = (-3, -6, 0, 1)$ tem-se que $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de Jordan de A. $\square$

Exercício 2: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$ com $\dim_{\mathbb{Q}}(V) < \infty$ e seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T^2 = -I$. Suponha que V contenha um subespaço T-invariante W que seja próprio e não nulo.

$a)$ Ache o polinômio mínimo de T.

$b)$ Demonstre que a menor possível dimensão de tal espaço tem de ser 4.

Demonstração. $a)$ Vejamos que $T^2 + I = 0$, portanto dado que $T \neq I$, e $x^2 + 1 \mid m_T$ segue do fato de $x^2 + 1$ ser irredutível em $\mathbb{Q}[x]$ que o polinômio minimal de T é $m_T(x) = x^2 + 1$.

$b)$ Devemos mostrar que $\dim(V) \geq 4$. Dado que $m_T(x) = x^2 + 1$, necessariamente deve-se ter $c_T(x) = (t^2 + 1)^k$, por algum $k \in \mathbb{N}$. Se $k = 1$, então $\dim_{\mathbb{Q}}(W) = 1$, absurdo pois isso implicaria a existência de autovetores de T, o qual é um absurdo. Dessa forma, segue que $k \geq 2$ e portanto, $\deg(c_T) \geq 4$, donde segue que $\dim_{\mathbb{Q}}(V) \geq 4$. □

O próximo exercício é uma ferramenta de extrema importância para calcular o posto de um tensor. Anteriormente, já o enunciamos como um imediato corolário de um lema anterior (a saber, lema 5.8), entretanto vamos refaze-lo de uma outra forma.

Exercício Auxiliar: Sejam V, W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$. Lembrando que o posto de um vetor $u \in V \otimes W$ é o menor inteiro $m \geq 0$ tal que existem $v_1, ..., v_m \in V$, $w_1, ..., w_m \in W$ satisfazendo

$$u = \sum_{j=1}^{m} v_j \otimes w_j.$$

Mostre que se numa tal expressão tivermos $v_1, ..., v_m$ linearmente independentes, então o posto de u é a dimensão de $span\{w_1, ..., w_m\}$.

Demonstração. Se $m = 1$, então é claro que se $u = v_1 \otimes w_1$ então $\dim span\{w_1\} = 1 = rank(u)$. Considere agora a hipótese de indução

<u>*H.I*</u> : Se $1 < p < m$ e $v'_1, ..., v'_p \in V$ são linearmente independentes e $w'_1, ..., w'_p \in W$, então

$$rank(v'_1 \otimes w'_1 + ... + v'_p \otimes w'_p) = \dim span\{w'_1, ..., w'_p\}.$$

Seja então $v_1, ..., v_m \in V$ vetores linearmente independentes e suponha que $w_1, ..., w_m \in W$ sejam arbitrários. Se $w_1, ..., w_m$ são linearmente independentes segue que $\{v_1 \otimes w_1, ..., v_m \otimes w_m\}$ fazem partes de uma base de $V \otimes W$, e assim $rank(u) = m$. Agora, suponha sem perda de generalidade suponha que w_m seja l.d com $w_1, ..., w_{m-1}$. Dessa forma, existem $a_1, ..., a_{m-1} \in \mathbb{F}$ tal que

$$w_m = a_1 w_1 + ... + a_{m-1} w_{m-1}$$

e assim, tem-se que

$$u = \sum_{i=1}^{m} v_i \otimes w_i = \sum_{j=1}^{m-1} (v_j + a_j v_m) \otimes w_j.$$

Além disso, não é difícil ver que $v_1 + a_1 v_m, ..., v_{m-1} + a_{m-1} v_m$ são linearmente independentes. Repetindo esse processo, chegamos a uma expressão de u da forma

$$u = \sum_{i=1}^{p} v'_i \otimes w_i$$

onde $p < m$ e assim por hipótese de indução segue que

$$rank(u) = \dim span\{w_1, ..., w_p\} = \dim span\{w_1, ..., w_m\}.$$

□

‘ **Exercício 5:** Sejam V_1, V_2, W_1, W_2 espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $T_1 : V_1 \to W_1$ e $T_2 : V_2 \to W_2$ transformações lineares.

a) Dê um exemplo no qual

$$rank(T_1 \otimes T_2) \neq rank(T_1) + rank(T_2).$$

b) Mostre que

$$rank(T_1 \otimes T_2) = rank(T_1) \otimes rank(T_2).$$

Demonstração. Dado que existe uma correspondência biunívoca entre transformações lineares e matrizes, é suficiente provar o exercício para o produto de Kronecker.

a) Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

então tem-se que $rank(A) = 1$ e $rank(B) = 2$. Por outro lado

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & I_2 \\ 0_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \end{pmatrix}$$

consequentemente segue que

$$rank(A \otimes B) = 2 \neq rank(A) + rank(B).$$

b) Por definição, segue que se A, B, C, D são matrizes de tamanhos apropriados, então

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD).$$

Em particular, se A, B são invertíveis

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I.$$

Agora, por conta do algoritmo de escalonamento, existem matrizes invertíveis P_A, Q_A, P_B, Q_B e números inteiros $r, s \geq 0$ tais que

$$P_A A Q_A = E_r$$

e

$$P_B B Q_B = E_s$$

onde E_l é a matriz que é a identidade até a linha l e a matriz 0 nas restantes. Por fim, lembremos que se R, S são matrizes e R é invertível, então $rank(RS) = rank(S)$ e $rank(SR) = rank(S)$. Para ilustrar, provaremos a primeira igualdade. Veja que se $x \in Im(RS)$ então $x = RS(v)$, donde segue que $S(v) = R^{-1}(x)$ e portanto se $y_1, ..., y_m$ formam uma base de $Im(RS)$, $\{R^{-1}(y_1), ..., R^{-1}(y_m)\}$ é base de $Im(S)$.

Com isso, tem-se que

$$rank(A \otimes B) = rank((P_A \otimes P_B)(A \otimes B)(Q_A \otimes Q_B)) = rank((P_A A Q_A) \otimes (P_B B Q_B))$$

e portanto

$$rank(A \otimes B) = rank(E_r \otimes E_s) = rank(E_{rs}) = rs.$$

□

Exercício 7: Mostre que existe um único mapa linear

$$\Psi : V_1^* \otimes ... \otimes V_k^* \to (V_1 \otimes ... \otimes V_k)^*, \quad (f_1 \otimes ... \otimes f_k)(v_1 \otimes ... \otimes v_k) \mapsto \prod_{j=1}^{k} f_j(v_j).$$

Além disso, se $\dim(V_j) < \infty$ para todo $j \in \{1, 2, ..., k\}$, então Ψ é um isomorfismo.

Demonstração. Por indução, é suficiente mostrar o resultado para $k = 2$. Dessa forma, defina

$$\psi : V_1^* \times V_2^* \to (V_1 \otimes V_2)^*, \quad (f_1, f_2)(v_1 \otimes v_2) \mapsto f_1(v_1)f_2(v_2)$$

então, ψ é linear e portanto pela propriedade universal, existe Ψ como no enunciado. Agora, suponha que $\dim(V_1) < \infty, \dim(V_2) < \infty$ e sejam $\{f_1, ..., f_n\}$ e $\{g_1, ..., g_m\}$ bases de V_1^* e V_2^* respectivamente. Seja

$$z = \sum_{i,j} a_{ij} f_i \otimes g_j$$

tal que $\Psi(z) = 0$. Isto é para todos $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$

$$0 = \sum_{i,j} a_{ij} f_i(v_1) g_j(v_2) = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} f_i(v_1) \right) g_j(v_2)$$

e portanto

$$0 = \sum_i a_{ij} f_i(v_1), \text{ para todo } j \in \{1, 2, ..., m\}$$

donde segue que $a_{ij} = 0$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ e $j \in \{1, 2, ..., m\}$. Notemos também que dado que $\dim(V_1^* \otimes V_2^*) = \dim(V_1 \otimes V_2)^*$ tem-se que Ψ é um isomorfismo. □

6 Decomposição de Jordan-Chevalley

Tal seção é basicamente uma generalização da forma de Jordan para corpos de quaisquer característica, porém algebricamente fechados. Daqui em diante, suponha $\mathbb{K}$ um corpo de característica p, onde p pode ser tanto um primo $\neq 0$ ou $p = 0$. Além disso, fixe um espaço vetorial V de dimensão k.

Definição 6.1. *Dado $T \in End(V)$, diz-se que T é **semissimples** se as raízes do polinômio minimal m_T são todas distintas.*

Observação 6.2. *Se $\mathbb{K}$ é um corpo de característica 0 e algebricamente fechado, então T é semissimples se, e somente se, T é diagonalizável.*

Antes de prosseguirmos, relembremos o famoso teorema chinês do resto.

Teorema 6.3. *(Teorema chinês dos restos) Sejam A um anel comutativo com unidade, e $I_1, ..., I_m$ ideais em A. Então*
a) A função

$$\phi : A \to A/I_1 \times A/I_2 \times \cdots A/I_m, \quad x \mapsto (x + I_1, x + I_2, ..., x + I_m)$$

é um homomorfismo de módulos.
b) Caso os ideais $I_1, ..., I_m$ sejam mutuamente coprimos, isto é

$$I_i + I_j = A, \quad \textit{para quaisquer } i \neq j$$

então o homomorfismo acima é sobrejetivo. Em outras palavras, o sistema

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \quad mod(I_1) \\ x &\equiv a_2 \quad mod(I_2) \\ &\cdots \\ &\cdots \\ &\cdots \\ x &\equiv a_m \quad mod(I_m) \end{aligned}$$

possui uma solução.

Exemplo 6.4. *Seja $A = \mathbb{K}[x]$. Como $\mathbb{K}$ é um corpo, então A é um PID, e portanto, se $f, g \in \mathbb{K}[x]$ são relativamente primos, isto é, $(f, g) = 1$, então pelo teorema de Bezout*

$$\langle f \rangle + \langle g \rangle = A$$

onde $\langle f \rangle = Af$ e $\langle g \rangle = Ag$.

Teorema 6.5. *Considere $T \in End(V)$.*

a) Existem $T_s, T_n \in End(V)$ tais que T_s é semissimples, T_n é nilpotente e além disso

$$T = T_s + T_n.$$

b) Existem polinômios $p, q \in \mathbb{K}[x]$ tais que $p(0) = q(0) = 0$ e

$$T_s = p(T),\ T_n = q(T).$$

Em particular, se $S \in End(V)$ é tal que $TS = ST$, então $T_sS = ST_s$ e $T_nS = ST_n$.

c) Se $A \subseteq B \subseteq V$ são subespaços e $T \in Hom(B, A)$ então

$$T_s, T_n \in Hom(B, A).$$

Demonstração. Sejam $a_1, ..., a_k$ os autovalores distintos de c_T, com respectivas multiplicidades, $m_1, ..., m_k$. Então, como $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado, pode-se escrever

$$c_T = (x - a_1)^{m_1} \cdots (x - a_k)^{m_k}.$$

Além disso, sabe-se também que

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots V_k$$

onde

$$V_i = Ker((T - a_iI)^{m_i}), \text{ para qualquer } i \in \{1, 2, ..., k\}.$$

Suponha que nenhum dos autovalores acima seja nulo, então para qualquer $j \in \{1, 2, ..., k\}$, $((x-a_j)^{m_j}, x) = 1$, então pelo exemplo 6.4 e pelo teorema chinês do restos, existe uma solução para o sistema

$$\begin{array}{cc} y \equiv a_1 & mod((x - a_1)^{m_1}) \\ y \equiv a_2 & mod((x - a_2)^{m_2}) \\ & \cdots \\ & \cdots \\ & \cdots \\ y \equiv a_k & mod((x - a_k)^{m_k}) \\ y \equiv 0 & mod(x) \end{array}$$

tal solução iremos denotar por $p(x)$. Caso um dos autovalores seja nulo, a última congruência se torna uma das outras acima.

Além disso, defina

$$q(x) = x - p(x).$$

Dado que $p(x) \equiv 0 \mod (x)$, segue em particular que $x \mid p(x)$ e portanto, $p(0) = q(0) = 0$. Agora, defina

$$T_s := p(T) \quad e \quad T_n := q(T).$$

Por definição de T_s e T_n tais comutam com quaisquer endomorfismos. Notemos também que por definição de $p(x)$, tem-se que para todo $j \in \{1, 2, ..., k\}$, $(p(T) - a_iI)$ tem a forma

$$p(T) - a_jI = r(T)((T - a_jI)^{m_j}).$$

Em particular

$$(p(T) - a_j I)_{|V_i} \equiv 0, \text{ para qualquer } i \in \{1, 2, ..., k\}$$

donde tem-se que T_s age diagonalmente em V, implicando que T_s é semissimples. Por definição $T_n = T - T_s$, analisemos $T_n \mid_{V_i}$, onde $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Vejamos que

$$T_n(v_i) = T(v_i) - T_s(v_i) = (a_i - a_i)v_i = 0$$

donde segue que T_n é nilpotente.

$\square$