Exercícios MA719-Monitorias

PED

25 de Agosto de 2022

Email PED: k200608@dac.unicamp.br

Exercício 1: Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{C}^4$ sobre $\mathbb{C}$.

a) Exiba uma base de V sobre $\mathbb{C}$ e calcule sua dimensão.

b) O espaço V pode ser considerado um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Se sim, exiba uma base deste e calcule sua dimensão.

c) Assumindo V um $\mathbb{C}$ espaço vetorial, construa um operador linear $T : V \to V$ de modo que $\dim Ker(T) = 2$, e o vetor $v_1 = (1, i, 0, 0)$ pertence a imagem de V.

d) Refaça o item anterior considerando V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 2: a) Se $M_2(\mathbb{F})$ denota o espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre um corpo $\mathbb{F}$, encontre uma base $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de $M_2(\mathbb{F})$ tal que

$$A_j^2 = A_j, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

b) Considere o espaço vetorial $V = \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$. Mostre que $\dim_{\mathbb{Q}} V = \infty$.

Exercício 3: Julgue os itens a seguir em relação a sua veracidade.

( ) Seja V um espaço vetorial com $\dim V = 10$. É possível que exista um operador linear cuja dimensão da imagem é 5 e a dimensão do núcleo é 3.

( ) Se $\dim V = 4$, todo operador linear $T \in End_{\mathbb{Q}}(V)$ possui autovalor.

( ) Se $P : V \to V$ é um operador de projeção num espaço vetorial de dimensão finita V, então

$$V = Im(P) \oplus Ker(P).$$

( ) Se V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T \in End(V)$, então o conjunto

$$\mathcal{A}(T) := \{g \in \mathbb{R}[x] : g(T) \equiv 0\}$$

é não vazio.

( ) Nas mesmas condições do item anterior, se $\dim V = \infty$, então

$$\mathcal{A}(T) := \{g \in \mathbb{R}[x] : g(T) \equiv 0\}$$

é não vazio.

( ) Se todo autovalor de uma matriz A tiver multiplicidade algébrica igual a 1 então A é diagonalizável.

( ) Seja A uma matriz 5×5 cujo polinômio característico é $p(x) = x^3(x-1)^2$. Se $posto(A) = 4$, então A não pode ser diagonalizável.

( ) Toda matriz triangular superior é diagonalizável.

( ) Seja B uma matriz 6×6 cujo polinômio característico é $p(x) = x(x-3)(x-4)^2(x-6)$. Então pode-se afirmar que B não é invertível.

( ) Se uma matriz quadrada $n \times n$ possui n autovalores distintos, então esta é diagonalizável.

( ) Seja A uma matriz 4×4 cujos autovalores são $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Se todos os autoespaços associados a estes tem dimensão 1 pode-se concluir que A não é diagonalizável.

MA/MM719 EXERCÍCIOS

26/08 MONITORIA

$GL_n(K) :=$ matrizes invertíveis

Ex: Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica 0. Mostre que $\mathbb{F}$ contém uma cópia de $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{C} = \{a+bi : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ esp. vetoriais sobre $\mathbb{Q}$)

$\iota : V \hookrightarrow V \oplus W$ (mergulho/injeção)

$v \longmapsto (v, 0)$ ι é linear, é injetor pois $(v,0) = (0,0) \iff v = 0$

$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i \subseteq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} = \mathbb{C}$

$\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}/_{Ker\,\varphi} \cong \varphi(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{C}$ onde $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$

$q \mapsto q + 0i$

1º Teo. Isomorfismo

Ex: A é dita nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$.

Mostre que existe $A \in M_2(K)$ tal que $A^2 = 0$, mas $A \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex. 1: a) Obs: $e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}$

$e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$

pois $(a_1+b_1 i, a_2+b_2 i, a_3+b_3 i, a_4+b_4 i) = (a_1+b_1 i)e_1 + \dots + (a_4+b_4 i)e_4$

e $\dim V = 4$.

b) $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (i,0,0,0)$, $e_3 = (0,1,0,0)$, $e_4 = (0,i,0,0)$

$e_5 = (0,0,1,0)$, $e_6 = (0,0,i,0)$, $e_7 = (0,0,0,1)$, $e_8 = (0,0,0,i)$

$\dim V = 8$

2

c) $T(e_1) = T(e_2) = 0,\ T(e_3) = v_1,\ T(e_4) = v$

Lembrete: estender linearmente.

2. a) Base canônica idempotente:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Suponha que $\dim_{\mathbb{Q}} V = n < \infty$. Logo, existe $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V sobre $\mathbb{Q}$. Assim,

$$\forall x \in V,\ \exists!\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q} \text{ t.q. } x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

E com isso definimos

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}^n$$
$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Como f é injetora (pois x se escreve de forma única),

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$$

o que implica que $\mathbb{R}$ é enumerável, o que é absurdo. $\square$

Def. $(\leq)$ é uma relação de ordem parcial num conjunto A se, para todo $a, b \in A$.

1) $a \leq a$; 2) $a \leq b,\ b \leq c \Rightarrow a \leq c$; 3) $a \leq b,\ b \leq a \Rightarrow a = b$

Def. Seja $(A, \leq)$ um conjunto com ordem parcial e $\Sigma \subseteq A$. Dizemos que Σ é uma cadeia se, para toda $a, b \in \Sigma$, $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Lema de Zorn. Seja $(A, \leq)$ um poset. Suponha que toda cadeia em A tenha cota superior (se Σ é cadeia em A, então existe $m \in A$ tal que $a \leq m,\ \forall a \in \Sigma$), então A possui um elemento maximal.

a é maximal se satisfaz $b \in A$, $a \leq b \Rightarrow a = b$

Teorema. Todo espaço vetorial possui uma base.

Demonstração. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e defina

$$\Omega = \{B \subseteq V : B \text{ é l.i.}\}$$

E seja Σ uma cadeia em Ω. Defina

$$\mathcal{U} = \bigcup_{A \in \Sigma} A$$

Sabe-se que $A \subseteq \mathcal{U}$, $\forall A \in \Sigma$. Vamos mostrar que $\mathcal{U} \in \Omega$. Tome $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{U}$ quaisquer e considere a combinação linear

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

Sem perda de generalidade, pode-se assumir que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_m$. Logo, $v_1, \dots, v_m \in A_m$.

Logo, como $A_m \in \Omega$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, pois, em particular, $v_1, \dots, v_m$, são l.i.

Portanto, $\mathcal{U} \in \Omega$ e assim $\mathcal{U}$ é cota superior de Σ.

Por arbitrariedade de Σ, segue pelo Lema de Zorn que existe B elemento maximal em Ω.

Vamos mostrar que B é base de V. Suponha que $V \neq \operatorname{span} B$. Então existe $v \in V \setminus \operatorname{span} B$. Assim, o conjunto

$$\mathcal{G} = B \cup \{v\} \text{ é l.i.}$$

e, portanto, $\mathcal{G} \in \Omega$. Mas $B \subsetneq \mathcal{G}$, o que é absurdo, pois B é maximal.

Consequentemente, $V = \operatorname{span} B$.

$\square$