02/09 MONITORIA 2

COORDENADAS

como relacioná-las?

Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $\underbrace{\mathcal{B}=\{v_1, \dots, v_n\} \text{ e } \mathcal{B}'=\{w_1, \dots, w_n\}}$ bases de V.

Para cada $k=1,2,\dots,n$

$$v_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} w_i \; ; \qquad P := (a_{ij}) \quad \text{matriz mudança de base}$$

Assim, para $v \in V$,

$$v = \sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j = \sum_j b_{jk}\left(\sum_i a_{ij} w_i\right) = \sum_i \left(\sum_j a_{ij} b_j\right) w_i$$

Ou seja,

$$[v]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} [v]_{\mathcal{B}'}$$

de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$

TEOREMA. Suponha que $P \in GL(n, \mathbb{F})$ e V um espaço vetorial de dimensão n e $\mathcal{B}$ uma base de V. Então existe uma única base $\mathcal{B}'$ de V tal que:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = P[v]_{\mathcal{B}}$$

$$[v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}'}$$

Exercício. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V. Considere os vetores $w_1, \dots, w_k$ em V, com

$$w_j = \sum_i b_{ij} v_i$$

Então $w_1, \dots, w_k$ é L.I. sse. os vetores $x_j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}) \in \mathbb{F}^n$ são L.I.

6

Demonstração. Escreva $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ e defina para cada $j = 1, \dots, n$,

$$w_j := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$$

Afirmação. $\{w_1, \dots, w_n\}$ é base de V. Seja $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$.

É suficiente ver que $\operatorname{span} \mathcal{B}' = V$, o que segue imediatamente se mostrarmos que

$$e_j \in \operatorname{span} \mathcal{B}', \quad \forall j$$

Definimos $P^{-1} = (b_{ij})$ e temos que

$$\sum_j b_{jk} w_j = \sum_j b_{jk} \left(\sum_i a_{ij} e_i \right) = \sum_j \sum_i b_{jk} a_{ij} e_i$$

$$= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right) e_i = \sum_j a_{kj} b_{jk} e_k = e_k$$

$\square$

Exercício 3.

(F) Pelo Teorema do Núcleo e Imagem.

(F) $\operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(V) \cong M_n(\mathbb{Q})$. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_A(x) = (x^2+1)(x^2+2) \text{ não possui raízes em } \mathbb{Q}$$

(V) Lembre que $P : V \to V$ é operador de projeção sobre W se

$$\operatorname{Im}(P) = W \quad \text{e} \quad P^2 = P$$

Exercício. Se $W, U \subseteq V$ e $\dim V = \dim W + \dim U$ então

a) $V = U \oplus W \iff U \cap W = \{0\}$

Note que

$$v = (v - P(v)) + P(v)$$

e

$$P(v - P(v)) = P(v) - P^2(v) = 0$$

ou seja,

$$V = \operatorname{Ker} P + \operatorname{Im} P$$

Se $x \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P$,

$x \in \operatorname{Im} P \Rightarrow x = P(z)$

$x \in \operatorname{Ker} P \Rightarrow P(x) = 0$

$\therefore 0 = P(x) = P(P(z)) = P(z) = x$

Logo, $V = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$

Teorema. (Cayley-Hamilton). Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $T \in End(V)$. Então, se $c_T(x) \in \mathbb{F}[x]$ é o polinômio característico de T, então

$$c_T(T) = 0$$

Aplicação. Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

expresse a matriz inversa de A como uma combinação de potências de A.

Note que

$$c_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2 = (x^2-2x+1)(x^2-4x+4)$$
$$= x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$$

Pelo Teorema, $c_A(A) = 0$. Então

$$A^4 - 6A^3 + 13A^2 - 12A = -4I \iff A(A^3 - 6A^2 + 13A - 12I) = -4I$$

Isto é,

$$A\left[\frac{(A^3 - 6A^2 + 13A - 12I)}{-4}\right] = I$$

Logo,

$$A^{-1} = \frac{-1}{4}(A^3 - 6A^2 + 13A - 12I)$$

(V) Pelo Teorema de Cayley-Hamilton.

(F) $\ell = \{(x_i)_i : x_i \in \mathbb{R}\}$ espaço das sequências

$T: \ell \to \ell, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \longmapsto (0, x_1, x_2, \dots)$

Suponha que exista $g \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ da forma

$$g(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

8

E suponha que $g(T) = 0$. Então

$$a_n T^n + \dots + a_0 I \equiv 0$$

Tomando

$$(x_i)_i = (1, 0, 0, \dots) = e_1 \Rightarrow g(T)(e_1) = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \neq 0$$

(V) Como temos n autovalores distintos, segue que eles formam uma base de V (pois $E_\lambda \cap E_\mu = \{0\}$) e, portanto, T é diagonalizável.

(V) Note que $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 1$, mas 0 tem dim 3.

(F) E.g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(V) Pois $\dim(\operatorname{Ker}(B)) \neq 0$.

(V) Os autovalores formam uma base de V.

(V) pois um dos autovalores deveria ter multiplicidade geométrica dois.