5.11

Thursday, 30 September 2021 13:14

Exercício 5.11 *Mostre que a aplicação*

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - y_1 x_2 + 4 x_2 y_2$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, *onde* $u = (x_1, x_2)$ *e* $v = (y_1, y_2)$. *Determine a matriz do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *com relação à base canônica do* $\mathbb{R}^2$.

1° Passo: Mostrar que é produto interno.

a) Simetria

$$\langle v, u \rangle = y_1 x_1 - y_1 x_2 - x_1 y_2 + 4 y_2 x_2$$
$$= x_1 y_1 - x_1 y_2 - y_1 x_2 + 4 x_2 y_2 = \langle u, v \rangle$$

b) Positividade

$$\langle u, u \rangle = x_1^2 - x_1 x_2 - x_1 x_2 + 4 x_2^2$$
$$= x_1^2 - 2 x_1 x_2 + 4 x_2^2 \quad *$$

Completando quadrados:

$$* = (x_1 - x_2)^2 + 3 x_2^2 \geq 0$$

Note que $\langle u, u \rangle = 0 \iff (x_1 - x_2)^2 + 3 x_2^2 = 0$

$$\iff x_1 = x_2 = 0 \iff u = 0$$

c) Distributividade

$$\langle u + v, w \rangle = (x_1 + y_1) w_1 - (x_1 + y_1) w_2 - w_1 (x_2 + y_2) + 4 (x_2 + y_2) w_2$$

$$= x_1 w_1 - x_1 w_2 - w_1 x_2 + 4 x_2 w_2 + y_1 w_1 - y_1 w_2 - y_2 w_1 + 4 y_2 w_2$$

$$= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

d) Homogeneidade

$$\langle \lambda u, v \rangle = (\lambda x_1) y_1 - (\lambda x_1) y_2 - y_1 (\lambda x_2) + 4 \lambda x_2 y_2$$
$$= \lambda (x_1 y_1 - x_1 y_2 - y_1 x_2 + 4 x_2 y_2)$$
$$= \lambda \langle u, v \rangle$$

2º Passo: Matriz do produto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 - 0 - 0 + 4 \cdot 0 = 1$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 - 0 - 0 + 4 \cdot 1 = 4$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 - 1 + 0 + 0 = -1$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -1 \quad \text{(simetria ?)}$$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ é a matriz do produto interno relativa à β.