5.12

Thursday, 30 September 2021 13:32

Exercício 5.12 *Considere o espaço vetorial real* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *munido com o produto interno*

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

para todos $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(a) *Determine a matriz do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *em relação à base canônica*

$$\beta = \{ p_1(x) = 1 , p_2(x) = x , p_3(x) = x^2 \} .$$

(b) *Considere os polinômios* $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *dados por:*

$$p(x) = -1 + 3x + x^2 \qquad e \qquad q(x) = 4 + 2x - x^2 .$$

Determine o produto interno entre os elementos $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *utilizando a matriz do produto interno, isto é,*

$$\langle p, q \rangle = Y^t A X ,$$

onde A *é a matriz do produto interno e* $X, Y \in \mathbb{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$ *são as matriz de coordenadas dos polinômios* p, q *com relação à base canônica, respectivamente.*

(c) *Determine todos os polinômios* $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *tais que*

$$\langle p, q \rangle = 0$$

utilizando a matriz do produto interno.

a) Matriz do $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em relação à β

A matriz será da forma:

$$A = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_3, e_1 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \langle e_3, e_2 \rangle \\ \langle e_3, e_1 \rangle & \langle e_3, e_2 \rangle & \langle e_3, e_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = 1 + 1 + 1 = 3$

$\langle e_2, e_2 \rangle = \langle x, x \rangle = 1 + 0 + 1 = 2$

$\langle e_3, e_3 \rangle = \langle x^2, x^2 \rangle = 1 + 0 + 1 = 2$

$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle 1, x \rangle = -1 + 0 + 1 = 0 = \langle e_2, e_1 \rangle$

$\langle e_1, e_3 \rangle = \langle 1, x^2 \rangle = 1 + 0 + 1 = 2 = \langle e_3, e_1 \rangle$

$\langle e_2, e_3 \rangle = \langle x, x^2 \rangle = -1 + 0 + 1 = 0 = \langle e_3, e_2 \rangle$

$$\therefore \; A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Determinar $\langle p, q \rangle$

Primeiro precisamos escrever X e Y:

$p(x) = -1 + 3x + x^2 = -1\cdot(1) + 3\cdot(x) + 1\cdot(x^2)$

$\hookrightarrow X = [p(x)]_\beta = (-1, 3, 1)^T$

$q(x) = 4 + 2x - x^2 = 4\cdot(1) + 2(x) - 1(x^2)$

$\hookrightarrow Y = [q(x)]_\beta = (4, 2, -1)^T$

Agora usamos o fato que $\langle p, q \rangle = Y^T A X$:

$$[4 \;\; 2 \;\; -1] \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = [4 \;\; 2 \;\; 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = -8$$

c) Determinar $q : \langle p, q \rangle = 0$

Sabemos que $q(x)$ deve ser da forma

$$q(x) = a + bx + cx^2$$

cujas coordenadas em relação à base β são (a, b, c).

Dessa forma:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = -a + 6b$$

Portanto,

$$\langle p, q \rangle = 0 \iff -a + 6b = 0 \iff a = 6b$$

Logo,

$$q(x) = 6b + bx + cx^2, \quad b, c \in \mathbb{R}$$