MA602 Análise 2 - Exercícios P2

Adair Neto

22 de maio de 2023

Os teoremas clássicos do Cálculo Integral

Capítulo 11, Seção 1, Exercício 1

Questão: Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável, contínua à direita no ponto $x_0 \in [a,b)$. Prove que $\mathrm{F} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

é derivável à direita no ponto x_0 com $\mathrm{F}'_+(x_0) = f(x_0)$.

Dê exemplos com f integrável, descontínua no ponto x_0, nos quais:

1. Existe $\mathrm{F}'(x_0)$.
2. Não existe $\mathrm{F}'(x_0)$.

Resolução:

- Por definição,

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0) = \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^a f(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt$$

- Note que F é contínua em $[a,x]$ e diferenciável em (a,x).
- Pelo Teorema do Valor Médio, para cada $x \in [x_0,x]$, existe $c_x \in (x_0,x)$ tal que

$$\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} = f(c_x)$$

- Logo,

$$\mathrm{F}'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f(c_x) = f(x_0)$$

- Existe $\mathrm{F}'(x_0)$.:
  - Considere

    $$f(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

    para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.
  - Então

    $$\mathrm{F}(x) = x^2 \sin(x^{-2}), \quad \mathrm{F}(0) = 0$$

  - E f é descontínua em 0.
- Não existe $\mathrm{F}'(x_0)$.
  - Considere

    $$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

  - Temos que $\int_0^1 f = 0, f$ é descontínua em $x = 0$ e não existe F'.

Capítulo 11, Seção 1, Exercício 2

Questão: Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável com f' integrável. Mostre que, para quaisquer $x, c \in [a,b]$ tem-se

$$f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\ dt$$

Resolução:

- Seja $\mathrm{P} = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = c\}$ uma partição de $[a,c]$.
- Temos que

$$f(c) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})]$$

- Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $i = 0, 1, \ldots, n$, existe $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que

$$f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = f(t_i) - f(t_{i-1})$$

- Substituindo,

$$f(c) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)\Delta t_i$$

- Como f' é integrável,

$$m_i' \leq f'(\xi_i) \leq \mathrm{M}_i' \implies s(f', \mathrm{P}) \leq f(c) - f(a) \leq \mathrm{S}(f', \mathrm{P})$$

- Como P é arbitrário,

$$f(c) = f(a) + \int_a^c f'(t)\ dt$$

Capítulo 11, Seção 1, Exercício 5

Questão: Sejam $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua $\alpha, \beta : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deriváveis. Defina $\varphi : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\ dt, \quad \forall\ x \in \mathrm{I}$$

Prove que φ é derivável e

$$\varphi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

Resolução:

- Como f é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, f possui primitiva F:

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\ dt = \mathrm{F}(\beta(t)) - \mathrm{F}(\alpha(t))$$

- Como F é primitiva, F é derivável com $\mathrm{F}' = f$. Pela regra da cadeia,

$$\varphi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

Capítulo 11, Seção 1, Exercício 6

Questão: Sejam $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ é fração irredutível },\ q > 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Mostre que f e g são integráveis, porém $g \circ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ não é integrável.

Resolução:

- Vimos que f é integrável (de fato, o conjunto de seus pontos de descontinuidade são os racionais, que têm medida nula).
- Como g tem apenas um ponto de descontinuidade e g é limitada, g é integrável.
- Temos que

$$g \circ f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & x = p/q \end{cases}$$

- Portanto, dada uma partição P de $[0,1]$ qualquer,

$$s(g \circ f, \mathrm{P}) = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{S}(g \circ f, \mathrm{P}) = 1$$

- Logo, $g \circ f$ não é integrável.

Questão 3 (P1 2020)

Questão: Enuncie a Fórmula do Valor Médio para Integrais e o Teorema do Valor Médio de Lagrange. Utilize a Fórmula do Valor Médio para Integrais para provar o Teorema do Valor Médio de Lagrange no caso em que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1.

Resolução:

1. Fórmula do Valor Médio para Integrais.
   - Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua.
   - Existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)(b-a)$$

2. Teorema do Valor Médio de Lagrange.
   - Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b).
   - Existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$$

3. Demonstrar Teorema do Valor Médio de Lagrange.
   - Pela fórmula do valor médio para integrais, $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)(b-a)$$

   - Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

   - em que $\mathrm{F}' = f$.
   - Assim, temos a seguinte identidade:

$$f(c)(b-a) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

   - Derivando-se a expressão acima,

$$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$$

Integrais Impróprias

Capítulo 11, Seção 4, Exercício 4

Questão: Mostre que

$$\int_0^{+\infty} x \sin(x^4)\ dx$$

converge, embora a função $x\sin(x^4)$ seja ilimitada.

Resolução:

0. Ideia: analisar a série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, em que $a_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} |x\sin(x^4)|\ dx$, e aplicar o Teorema de Leibniz.
1. Estimar a área da integral.
   - Tome $a = \sqrt[4]{n\pi}$ e $b = \sqrt[4]{(n+1)\pi}$
   - Então
   $$\int_a^b |x\sin(x^4)|\ dx$$
   - é menor do que a área do retângulo de base $(b-a)$ e altura b.
   - Para calcular a área $b(b-a)$, note que
   $$b^4 - a^4 = \pi = (b-a)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$
   - Isso nos dá
   $$b(b-a) = \frac{b\pi}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
2. Mostrar que a sequência é decrescente.
   - Seja $c = \sqrt[4]{(n+2)\pi}$.
   - Fazemos a mudança de variáveis $x = \sqrt[4]{u^4 + \pi}$.
   - Assim,
   $$a_{n+1} = \int_b^c |x\sin(x^4)|\ dx = \int_a^b |u\sin(u^4)| \frac{u^2}{\sqrt[4]{(u^4+\pi)^2}}\ du$$
   - O que implica que $a_{n+1} < a_n$.
3. Aplicar Teorema de Leibniz.
   - Ou seja, (a_n) é uma sequência decrescente que tende para zero.
   - Pelo Teorema de Leibniz,
   $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$
   - converge para a integral desejada.

Capítulo 11, Seção 4, Exercício 5

Questão: Seja $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, positiva, monótona não-crescente. Prove que se $\int_a^{\infty} f(x)\ dx$ converge, então $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

Resolução:

- Defina
$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x f(x)\ dx$$
- Por hipótese, existe $\mathrm{L} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{F}(x)$.
- Assim, dado $\varepsilon > 0$, temos que existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tal que
$$x > \mathrm{N} \implies |\mathrm{F}(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon \iff \mathrm{L} - \varepsilon < \mathrm{F}(x) < \mathrm{L} + \varepsilon$$
- Particularmente, se $x > 2\mathrm{N}$,
$$x/2 > \mathrm{N} \implies \mathrm{L} - \varepsilon < \mathrm{F}(x/2) < \mathrm{L} + \varepsilon$$
- Como f é positiva não-crescente,
$$x/2 > \mathrm{N} \implies \mathrm{L} - \varepsilon < \mathrm{F}(x/2) \leq \mathrm{F}(x) < \mathrm{L} + \varepsilon$$
- Portanto,
$$x/2 > \mathrm{N} \implies \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x/2) = \int_{x/2}^{x} f(x)\ dx < 2\varepsilon$$

- Por outro lado, como a função é não-crescente, sua área é maior ou igual do que a do retângulo de base $x-x/2$ e altura $f(x)$, i.e.,
$$\int_{x/2}^{x} f(x)\ dx \geq \frac{x}{2} f(x)$$
- Dessa forma,
$$\frac{x}{2} f(x) < 2\varepsilon \iff x f(x) < \varepsilon$$
- Logo,
$$\lim_{x\to\infty} x f(x) = 0$$

Capítulo 11, Seção 4, Exercício 6 (Critério de Cauchy para Integrais)

Questão: Seja $f : [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável em cada intervalo limitado $[a,x]$. Prove que a integral imprópria
$$\int_a^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\ dt$$
existe sse. para todo $\varepsilon > 0$, existe $\mathrm{A} > 0$ tal que
$$\mathrm{A} < x < y \implies \left| \int_x^y f(t)\ dt \right| < \varepsilon$$

Resolução:

1. ($\Rightarrow$) Suponha que a integral existe.
   - Tome $\mathrm{F}(x)$ e L como no exercício 11.4.5.
   - Dado $\varepsilon > 0$, existe $\mathrm{A} > 0$ tal que
   $$x > \mathrm{A} \implies |\mathrm{F}(x) - \mathrm{L}| < \varepsilon/2$$
   - Então
   $$y > x > \mathrm{A} \implies \left| \int_x^y f \right| = \left| \int_a^y f - \int_a^x f \right| = \left| \left(\int_a^y f - \mathrm{L} \right) - \left(\int_a^x f - \mathrm{L} \right) \right| < \varepsilon$$
2. ($\Leftarrow$)
   - Seja $n \in \mathbb{N}$ e defina
   $$a_n = \int_a^n f(x)\ dx$$
   - Dado $\varepsilon > 0$, existe $\mathrm{A} > 0$ tal que
   $$n > m > \mathrm{A} \implies |a_n - a_m| = \left| \int_m^n f(x)\ dx \right| < \varepsilon$$
   - Isso mostra que (a_n) é de Cauchy.
   - Seja $\mathrm{L} = \lim a_n$.
   - Assim, existe $\mathrm{B} > 0$ tal que
   $$n > m > \mathrm{B} \implies |a_m - \mathrm{L}| < \varepsilon/2 \quad \text{e} \quad \left| \int_m^n f(x)\ dx \right| < \varepsilon/2$$
   - Dessa forma,
   $$\begin{aligned} \left| \int_a^n f(t)\ dt - \mathrm{L} \right| &= \left| \left(\int_a^m f(t)\ dt - \mathrm{L} \right) + \int_m^n f(t)\ dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^m f(t)\ dt - \mathrm{L} \right| + \left| \int_m^n f(t)\ dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$
   - Logo,
   $$\lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\ dt = \mathrm{L}$$

Sequências e Séries de Funções

Convergência Simples e Convergência Uniforme

Capítulo 12, Seção 1, Exercício 1

Questão: Mostre que a sequência de funções $f_n : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$, converge simplesmente. Determine a função limite e mostre que a convergência não é uniforme.

Resolução:

1. (f_n) converge simplesmente.
   - Observe que
   $$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{x^n}{x^n(1+1/x^n)} = \frac{1}{1+1/x^n}$$
   - Se $x \in [0, 1)$, temos que $f_n(x) \to 0$.
   - Se $x > 1$, então $f_n(x) \to 1$.
   - Se $x = 1$, então $f_n(x) = 1/2$.
2. Função limite f.
   $$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1/2, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$
3. A convergência não é uniforme.
   - Note que cada f_n é contínua, mas f não é contínua.

Capítulo 12, Seção 1, Exercício 2

Questão: Prove que a sequência de funções $f_n : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = x^n/(1+x^n)$ converge uniformemente em todos os intervalos do tipo $[0, 1-\delta]$ e $[1+\delta, +\infty)$, $0 < \delta < 1$.

Resolução:

1. Intervalos $[0, 1-\delta]$.
   - Como $[0, 1-\delta] \subseteq [0, 1)$, temos que $f_n(x) \to f(x) \equiv 0$ (pelo ex. 12.1.1).
   - Como $[0, 1-\delta]$ é compacto, cada f_n é contínua e (f_n) é monótona ($f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_n \geq \cdots$), segue do Teorema de Dini que $f_n \to f$ uniformemente.
2. Intervalos $[1+\delta, +\infty)$.
   - Pelo ex. 12.1.1, temos que $f_n(x) \to f(x) \equiv 1$.
   - Como (f_n) é crescente ($f_{n+1} \geq f_n$), temos
   $$x \geq 1+\delta \implies f(x) \geq f(1+\delta)$$
   - Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$,
   $$|f_n(1+\delta) - 1| < \varepsilon \implies 1 - f_n(1+\delta) < \varepsilon \implies f_n(1+\delta) > 1 - \varepsilon$$
   - Assim,
   $$f_n(x) \geq 1 - \varepsilon \implies 1 - f_n(x) \leq \varepsilon \implies |f_n(x) - 1| \leq \varepsilon$$
   - para todo $x \in [1+\delta, +\infty)$.
   - Logo, a convergência é uniforme.

Capítulo 12, Seção 1, Exercício 3

Questão: Prove que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$ converge quando x pertence ao intervalo $(-1, 1]$. Mostre que a convergência é uniforme em todos os intervalos do tipo $[-1+\delta, 1-\delta]$, onde $0 < \delta < 1/2$.

Resolução:

- Defina $a = 1 - \delta$.

- Então $x \in [-1+\delta, 1-\delta]$ significa que $|x| \leq a < 1$.
- Assim, $|x|^k \leq a^k < 1$ implica $|1-x^k| \leq 1 + |x^k| \leq 2$.
- Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^n(1-x^n)| \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} |x^n| \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{2a}{1-a}$$

- Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq \mathrm{N} \implies \sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} |x^n(1-x^n)| = \frac{2a^{\mathrm{N}}}{1-a} < \varepsilon$$

- Ou seja, a convergência é uniforme.
- Por fim, note que para $x = 1$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n(1-1^n) = 0$$

- Logo, a série converge para todo $x \in (-1, 1]$.

Capítulo 12, Seção 1, Exercício 4 (Critério de Cauchy)

Questão: A fim de que a sequência de funções $f_n : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ convirja uniformemente, é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

qualquer que seja $x \in \mathrm{X}$.

Resolução:

1. ($\Rightarrow$) Suponha que $f_n \to f$ uniformemente.
   - Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in \mathrm{X}$,

   $$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

   - Assim, para todo $x \in \mathrm{X}$,

   $$n, m > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

2. ($\Leftarrow$) Suponha que (f_n) é de Cauchy.
   - Como (f_n) é de Cauchy, para todo $x \in \mathrm{X}$, temos que $f_n(x) \to f(x)$.
   - Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in \mathrm{X}$,

   $$m, n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

   - Tomando $m \to \infty$,

   $$\lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

   - Logo, $f_n \to f$ uniformemente.

Capítulo 12, Seção 1, Exercício 5

Questão: Se a sequência de funções $f_n : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, prove que f é limitada se, e somente se, existem $\mathrm{K} > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_0 \implies |f_n(x)| \leq \mathrm{K}$$

para todo $x \in \mathrm{X}$.

Resolução:

0. Preparo.

- Como $f_n \to f$ uniformemente, dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in X$,
$$n > n_0 \implies \big|\,|f_n(x)| - |f(x)|\,\big| \leq |f_n(x) - f(x)| \leq 1$$

1. ($\Rightarrow$) Suponha que f é limitada.
    - Então existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$.
    - Assim,
    $$|f_n(x)| \leq \big|\,|f_n(x)| - |f(x)|\,\big| + |f(x)| \leq 1 + |f(x)| \leq 1 + K$$
    - Logo, a f_n é limitada para $n \geq n_0$.
2. ($\Leftarrow$) Suponha que, se $n \geq n_0$, então $|f_n(x)| \leq K$.
    - Note que
    $$|f(x)| \leq \big|\,|f_n(x)| - |f(x)|\,\big| + |f_n(x)| \leq 1 + |f_n(x)| \leq 1 + K$$
    - Logo, f é limitada.

Capítulo 12, Seção 1, Exercício 6

Questão: Se a sequência de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $f_1 \geq f_2 \geq \ldots \geq f_n \geq \ldots$ e $f_n \to 0$ uniformemente em X, mostre que a série $\sum (-1)^n f_n$ converge uniformemente em X.

Resolução:

- Seja S_N a soma parcial $S_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n f_n$.
- E seja F_N a soma parcial $F_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n$.
- Note que $|F_n| \leq 1 =: K$ pois
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ ímpar} \end{cases} \implies \left|\sum_{i=1}^{n} (-1)^i\right| \leq 1$$
- Com isso, se $N > M$,
$$\begin{aligned} |S_N(x) - S_M(x)| &= \left|\sum_{n=M+1}^{N} [F_n(x) - F_{n-1}(x)] f_n(x)\right| \\ &= |F_N(x) f_N(x) - F_M(x) f_{M+1}(x)| + \left|\sum_{n=M+1}^{N-1} F_n(x)[f_n(x) - f_{n+1}(x)]\right| \\ &\leq K\left(|f_N(x)| + |f_{M+1}(x)| + \sum_{n=M+1}^{N-1} [f_n(x) - f_{n+1}(x)]\right) \\ &= K\big(|f_N(x)| + |f_{M+1}(x)| + f_{M+1}(x) - f_N(x)\big) \end{aligned}$$
- Tomando M suficientemente grande (o que é possível, já que $f_n \to 0$), essa expressão pode ser tomada uniformemente pequena.
- Logo, $\sum (-1)^n f_n$ converge uniformemente em X.
- Obs: o argumento acima funciona para $\sum g_n$ com somas parciais uniformemente limitadas no lugar de $(-1)^n$.

Capítulo 12, Seção 1, Exercício 7

Questão: Se $\sum |f_n(x)|$ converge uniformemente em X, prove que $\sum f_n(x)$ também converge uniformemente em X.

Resolução:

- Pelo Critério de Cauchy, como $\sum |f_n(x)|$ converge uniformemente em X, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in X$,
$$n, m > n_0 \implies \left|\sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| - \sum_{j=1}^{n} |f_j(x)|\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{m} |f_i(x)|\right| < \varepsilon$$
- Com isso,
$$\left|\sum_{i=n+1}^{m} f_i(x)\right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |f_i(x)| < \varepsilon$$
- Logo, pelo Critério de Cauchy, $\sum f_n(x)$ converge uniformemente.

Questão 2 (P2 2020)

Questão: Seja $f : [1,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função não-negativa, contínua, não-crescente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $a_n = f(n)$. Prove que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge } \implies \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

Resolução:

- Note que se $x \in (n, n+1)$, então $a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n$.
- Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_n^{n+1} a_{n+1}\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} a_n\,dx \iff a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq a_n$$

- Seja $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Então

$$S_{n+1} - a_1 \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n$$

- Como a série converge, S_{n+1} e S_n convergem. Logo, a integral converge.

Questão 3 (P2 2020)

Questão: Sejam $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em X se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n > n_0 \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

Resolução:

1. Suponha que a série converge uniformemente.
   - Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in X$,

$$n > n_0 \implies \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon/2$$

   - Portanto, se $m > n > n_0$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

2. Suponha que a “volta” é válida.
   - Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m > n > n_0 \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

   - Como a sequência das somas parciais é de Cauchy, temos que ela converge.
   - Portanto, fixando n e tomando $m \to \infty$,

$$\lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{m} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \varepsilon$$

   - Logo, a série converge uniformemente.

Propriedades da convergência uniforme

Capítulo 12, Seção 2, Exercício 1a

Questão: Suponha que $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente no conjunto X. Mostre que $f_n + g_n \to f + g$ uniformemente em X.

Resolução:

- Como $f_n \to f$ uniformemente, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_f \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_f \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2, \quad \forall\, x \in \mathrm{X}$$

- E como $g_n \to g$ uniformemente, existe $n_g \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_g \implies |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon/2, \quad \forall\, x \in \mathrm{X}$$

- Tome $\mathrm{N} = \max\{n_f, n_g\}$ e suponha $n \geq \mathrm{N}$.
- Então

$$|(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in \mathrm{X}$$

- Logo, $f_n + g_n \to f + g$ uniformemente.

Capítulo 12, Seção 2, Exercício 1b

Questão: Suponha que $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente no conjunto X. Mostre que se f e g forem limitadas, então $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ uniformemente em X.

Resolução:

- Como f e g são limitadas, f_n e g_n são limitadas para n suficientemente grande.
- Considere L e K tais que $|f(x)| \leq \mathrm{L}$ e $|g(x)| \leq \mathrm{K}$ para todo $x \in \mathrm{X}$.
- Tomemos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n| \leq \mathrm{L}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|g_n| \leq \mathrm{K}$ para todo $x \in \mathrm{X}$.
- Como $f_n \to f$ uniformemente, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_f \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_f \implies |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{K}}, \quad \forall\, x \in \mathrm{X}$$

- E como $g_n \to g$ uniformemente, existe $n_g \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_g \implies |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mathrm{L}}, \quad \forall\, x \in \mathrm{X}$$

- Tome $\mathrm{N} = \max\{n_1, n_2, n_f, n_g\}$ e suponha $n \geq \mathrm{N}$.
- Então

$$\begin{aligned}
|f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \\
&= |f_n(x)[g_n(x) - g(x)] + g(x)[f_n(x) - f(x)]| \\
&\leq |f_n(x)|\,|g_n(x) - g(x)| + |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)| \\
&< \mathrm{L}\frac{\varepsilon}{2\mathrm{L}} + \mathrm{K}\frac{\varepsilon}{2\mathrm{K}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Capítulo 12, Seção 2, Exercício 1c

Questão: Suponha que $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente no conjunto X. Mostre que, se existir $c > 0$ tal que $|g(x)| \geq c$ para todo $x \in \mathrm{X}$, então $1/g_n \to 1/g$ uniformemente em X.

Resolução:

- Como $|g(x)| \geq c$, $1/|g(x)| \leq c$.
- Note que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/|g_n(x)| \leq \mathrm{K}$.
- Assim,

$$\frac{1}{|g(x)|\,|g_n(x)|} \leq \frac{\mathrm{K}}{c}$$

- Como a convergência é uniforme, podemos tomar

$$|g_n(x) - g(x)| < c\varepsilon/K$$

- Portanto,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g_n(x)}\right| = \left|\frac{g_n(x) - g(x)}{g_n(x)g(x)}\right| \leq \frac{K}{c}\frac{c\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

Capítulo 12, Seção 2, Exercício 2

Questão: Seja $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ um polinômio de grau ≥ 1. Mostre que a sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f_n(x) = p(x) + 1/n$, converge uniformemente para $p \in \mathbb{R}$, porém (f_n^2) não converge uniformemente para p^2.

Resolução:

- Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1/\varepsilon$.
- Então, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$n \geq n_0 \implies |p(x) + 1/n - p(x)| = |1/n| = 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$$

- Logo, $f_n \to f$ uniformemente.
- Note que $f_n^2 = p^2 + 2p/n + 1/n^2$.
- Escreva $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$.
- Com isso,

$$|p^2(x) + 2p(x)/n + 1/n^2 - p^2(x)| = |2p(x)/n + 1/n^2| = \frac{1}{n}2(a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k) + \frac{1}{n^2}$$

- Tomando $x = n$, se $\deg p = 1$, temos que (f_n^2) converge para 2_a. E se $\deg p > 1$, (f_n^2) diverge.
- Tomando $x = n^2$, temos que (f_n^2) diverge.

Capítulo 12, Seção 2, Exercício 3

Questão: Seja a sequência de funções $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$. Mostre que (f_n) converge uniformemente para 0, mas a sequência das derivadas f_n' não converge em ponto algum do intervalo $[0,1]$.

Resolução:

1. (f_n) converge uniformemente para 0
   - Basta notar que

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

2. Sequência das derivadas.
   - Note que

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$$

   - Como $\sqrt{n} \to \infty$, o limite $\lim f_n'$ só existe se $\lim \cos(nx) = 0$.
   - Mas observe que $\cos(2nx) = \cos^2(nx) - \sin^2(nx)$
   - E $\cos^2(nx) = 1 - \sin^2(nx)$.
   - Assim, se $\lim \cos(nx) = 0$, teríamos que $0 = -1$.
   - Logo, f_n' não converge.

Capítulo 12, Seção 2, Exercício 4

Questão: Mostre que a sequência de funções $g_n(x) = x + x^n/n$ converge uniformemente no intervalo $[0,1]$ para uma função derivável g e a sequência das derivadas g_n' converge simplesmente em $[0,1]$, mas $g' \neq \lim g_n'$.

Resolução:

1. $g_n \to g$ uniformemente.
   - Mostremos que $g_n(x) \to g(x) = x$.

$$\left|x + \frac{x^n}{n} - x\right| = \left|\frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$$

- E note que $g(x) = x$ é derivável com $g'(x) = 1$.

2. g_n' converge simplemente.
    - Temos que $g_n'(x) = 1 + x^{n-1}$.
    - Se $x = 0$, então $g_n'(x) \to 1$.
    - Se $x = 1$, então $g_n'(x) \to 2$.
    - Se $x \in (0,1)$, então $g_n'(x) \to 1$ pois $\lim x^{n-1} = 0$.
    - Assim, g_n' converge simplesmente em $[0,1]$, mas $g' \neq \lim g_n'$.

Capítulo 12, Seção 2, Exercício 8

Questão: A sequência de funções $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$, converge, porém não uniformemente. Mostre que, apesar disso,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$$

Resolução:

1. (f_n) converge simplesmente.
    - Se $x = 0$, então $nx(1-x)^n = 0$.
    - Se $x = 1$, então $nx(1-x)^n = 0$.
    - Se $x \in (0,1)$, então $nx(1-x)^n \to 0$.
2. (f_n) não converge uniformemente.
    - Tome $x = 1/n$.

$$|f_n(1/n)| = \left| n\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \right| = \left| \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \right| \to \frac{1}{e}$$

    - Como podemos tomar n suficientemente grande tal que

$$|f_n(1/n)| \geq 1/3$$

    - Temos $1/3 \leq |f_n(1/n)| < 1/e$.
    - Logo, a convergência não é uniforme.
3. A integral do limite é o limite da integral.
    - Façamos a mudança de variáveis $y = 1-x$.
    - Então

$$\begin{aligned}\int_0^1 nx(1-x)^n\,dx &= \int_0^1 n(1-y)y^n\,dy = \int_0^1 ny^n\,dy - \int_0^1 ny^{n+1}\,dy \\ &= \left[\frac{ny^{n+1}}{n+1} - \frac{ny^{n+2}}{n+2}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2} \to 0\end{aligned}$$

    - Por outro lado, $f_n \to 0$.
    - Logo,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$$