MA602 Análise 2 - Exercícios

Adair Neto

10 de abril de 2023

Integral de Riemann

Capítulo 10, Seção 2, Exercício 1

Questão: Defina $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} f(0) = 0 \\ \frac{1}{2^n}, \text{ caso } \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}, \ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Prove que f é integrável e calcule $\int_0^1 f(x)\, dx$.

Resolução:

- Vamos definir duas funções:

$$\phi_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, \text{ se } \frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n} \text{ e } 1 \leq n \leq m \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\psi_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, \text{ se } \frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n} \text{ e } 1 \leq n \leq m \\ \frac{1}{2^m}, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- Note que $\phi_m(x) \leq f(x) \leq \psi_m(x)$ para todo $x \in [0,1]$.
- Tome uma partição $\mathrm{P}_m = \{0, \frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}, \dots, \frac{1}{2}, 1\}$.
- Com isso, temos que, conforme $m \to \infty$

$$\mathrm{S}(f,\mathrm{P}) - s(f,\mathrm{P}) \leq \mathrm{S}(\psi_m, \mathrm{P}_m) - s(\phi_m, \mathrm{P}_m) = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^{m+1}} \to 0$$

- Portanto, f é integrável em $[0,1]$.
- Para calcular seu valor, tomamos o limite da soma superior

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{2^i}\left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}}\right) = \frac{1}{6}(4 - 4^{-k}) \to \frac{2}{3}$$

Capítulo 10, Seção 2, Exercício 3 (Thomae's function)

Questão: Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, \text{ se } x = \frac{p}{q} \text{ é fração irredutível }, \ q > 0 \\ f(0) = 1, \text{ se } 0 \in [a,b] \end{cases}$$

Prove que f é contínua apenas nos pontos irracionais de $[a,b]$, que é integrável e que $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

Resolução:

- f não é contínua em $x \in \mathbb{Q}$.

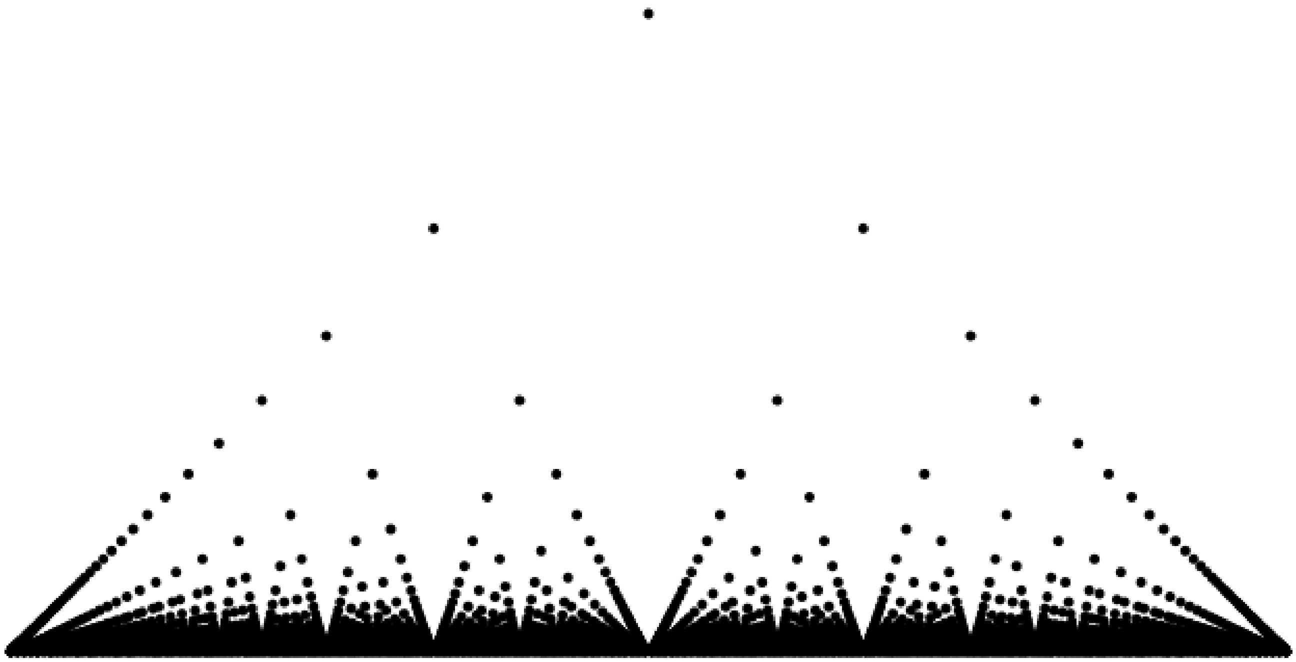

Figura 1: Thomae's function

- Considere a sequência (x_n) dada por

$$x_n = \frac{p}{q}\left(1 - \frac{1}{n\sqrt{2}}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{p}{q} = x$$

- Como cada x_n é irracional, temos que $0 = f(x_n) \not\to f(x)$. Ou seja, f não é contínua em x racional.

- f é contínua em $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
  - Seja $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$.
  - Note que o conjunto $\mathrm{C} = \{\frac{a}{b} : 1 \le b \le n,\ a \in \mathbb{Z}\}$ formado pelos racionais com denominador menor ou igual a n é finito.
  - Escolha $\delta = \min_{c \in \mathrm{C}} |x - c|$ e note que $\delta > 0$.
  - Suponha $|x - y| < \delta$.
  - Se y é irracional, é imediato: $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon$.
  - Caso y seja racional, então $y \notin \mathrm{C}$.
  - Assim, y é da forma $y = p/q$ com $q > n$. Ou seja,

$$|f(x) - f(y)| = |f(y)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

- f é integrável e $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.
  - *Observação:* note que os pontos de descontinuidade de f são os racionais, que têm medida nula. Portanto, f é integrável.
  - Note que $0 \le f(x) \le 1$, ou seja, f é limitada.
  - Dado $\varepsilon > 0$ e defina

$$\mathrm{F} = \left\{x \in [a,b] : f(x) \ge \frac{\varepsilon}{b-a}\right\}$$

  que é o conjunto das frações irredutíveis pertencentes a $[a,b]$ com denominador menor ou igual a $\frac{b-a}{\varepsilon}$. Assim, F é finito.

- Seja P uma partição de $[a,b]$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contêm algum ponto de F é menor do que ε.
- Observe que se $F \cap [t_{i-1}, t_i] = \emptyset$, então $0 \le f(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$. Assim, $M_i \le \frac{\varepsilon}{b-a}$.
- Com isso, temos a seguinte soma superior

$$S(f,P) = \sum M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum M'_i(t'_i - t'_{i-1}) + \sum M''_i(t''_i - t''_{i-1})$$

  em que $[t'_{i-1}, t'_i]$ são os intervalos que intersectam F e $[t''_{i-1}, t''_i]$ são os intervalos disjuntos de F.
- Como $M'_i \le 1$ e $\sum(t'_i - t'_{i-1}) < \varepsilon$ pela definição da partição, temos que

$$\sum M'_i(t'_i - t'_{i-1}) < \varepsilon$$

- E como $M''_i \le \frac{\varepsilon}{b-a}$ e $\sum(t''_i - t''_{i-1}) < b - a$, temos que

$$\sum M''_i(t''_i - t''_{i-1}) < \varepsilon$$

- Portanto, $S(f,P) < 2\varepsilon$. Assim, $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$.
- Por fim, como $f(x) \ge 0$ para todo x, temos que

$$0 \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$$

- Logo, f é integrável e $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Capítulo 10, Seção 2, Exercício 4

Questão: Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável com $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se f é contínua no ponto $c \in [a,b]$ e $f(c) > 0$, prove que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Resolução:

- Como f é contínua em c e $f(c) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(c)/2 =: m$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$.
- Tome uma partição P contendo os pontos $c - \delta$ e $c + \delta$.
- Assim, temos que $s(f,P) > 2m\delta > 0$.
- Logo, como f é integrável, $\int_a^b f(x)\,dx \ge s(f,P) > 0$.

Capítulo 10, Seção 2, Exercício 5

Questão: Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ x+1, \text{ se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Calcule as integrais (inferior e superior) de f.

Usando uma função contínua $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ em vez de x, defina agora

$$\varphi(x) = \begin{cases} g(x), \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ g(x)+1, \text{ se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Calcule as integrais (inferior e superior) de φ em termos da integral de g.

Resolução:

- Note que para uma partição P qualquer, temos a seguinte soma inferior

$$m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} x = t_{i-1} \implies \underline{\int_a^b} f = \sup_{\mathrm{P}} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{t_{i-1}+t_i}{2}(t_i - t_{i-1}) = \frac{b+a}{2}(b-a) = \frac{b^2-a^2}{2}$$

- E a seguinte soma superior

$$\mathrm{M}_i = \sup_{[t_{i-1},t_i]} x+1 = t_i + 1 \implies \overline{\int_a^b} f = \inf_{\mathrm{P}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_i \Delta t_i = \inf_{\mathrm{P}} \left(\sum_{i=1}^{n} \sup_{[t_{i-1},t_i]} x \Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \right)$$

  i.e.,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{t_{i-1}+t_i}{2}(t_i - t_{i-1}) + (b-a) = \frac{b^2-a^2}{2} + (b-a)$$

- Analogamente, usando $g(x)$ em vez de x,

$$m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} g(x) \implies \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} g$$

  e

$$\mathrm{M}_i = \sup_{[t_{i-1},t_i]} g(x) + 1 \implies \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} g + (b-a)$$

Capítulo 10, Seção 3, Exercício 2

Questão: Prove que se $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ são integráveis, então são também integráveis as funções $\varphi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ e } \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Conclua que as funções $f_+, f_- : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f_+(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } f(x) \leq 0 \\ f(x), \text{ se } f(x) > 0 \end{cases}$$

e

$$f_-(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ se } f(x) <> 0 \end{cases}$$

Resolução:

- Note que

$$\varphi = \max\{f, g\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

  e

$$\psi = \min\{f, g\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

  são integráveis.

- Como $f_+ = \max\{f, 0\}$ e $f_- = -\min\{f, 0\}$, segue que ambas são integráveis.

Capítulo 10, Seção 4, Exercício 2

Questão: Mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona é enumerável.

Resolução:

- Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona f.
- Caso f seja constante, então D é vazio e, portanto, tem medida nula.

- Suponha $D \neq \emptyset$. Para cada $a \in D$ temos que limites laterais diferem, i.e.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = a_1 \neq a_2 = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

- Tomando outro ponto em D, digamos $b \in D \setminus \{a\}$, temos que os intervalos (a_1, a_2) e (b_1, b_2) são disjuntos, porque f é monótona.
- Escolhendo um racional em cada intervalo (a_1, a_2) temos uma função injetora $D \longrightarrow \mathbb{Q}$. Logo, D é enumerável.

Capítulo 10, Seção 4, Exercício 3

Questão: Seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função limitada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se D' (conjunto dos pontos de acumulação de D) é enumerável, prove que f é integrável.

Resolução:

- Sabemos que o conjunto dos pontos isolados $D \setminus D'$ é enumerável.
- Assim, $(D \setminus D') \cup D'$ é enumerável.
- Como $D \subset (D \setminus D') \cup D'$, segue que D também é enumerável.
- Logo, D tem medida nula e, com isso, f é integrável.

Capítulo 10, Seção 4, Exercício 4

Questão: Seja $A \subsetneq [a,b]$ um conjunto de medida nula, $B = [a,b] \setminus A$ e $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $f(B) = \{0\}$. Mostre que sua integral é igual a zero.

Resolução:

- Como em qualquer subintervalo de $[a,b]$, o ínfimo de $|f|$ é zero, temos que

$$\underline{\int_a^b} |f| = 0$$

- Como f é integrável, $|f|$ também é. Assim,

$$\int_a^b |f| = 0 \implies 0 \leq \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| = 0$$

- Logo,

$$\int_a^b f = 0$$

Capítulo 10, Seção 4, Exercício 5d

Questão: Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ de conteúdo nulo. Se uma função limitada $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ coincide com uma função integrável $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ exceto num conjunto de conteúdo nulo, mostre que g é integrável e sua integral é igual à de f.

Resolução:

- Como X não pode conter um intervalo, temos que $\inf |g - f| = 0$ em qualquer intervalo.
- Ou seja, $s(g - f, P) = 0$ para qualquer partição P.
- Seja $M = \sup |g - f|$.
- Como X tem conteúdo nulo, dado $\varepsilon > 0$, existem finitos intervalos abertos I_k tais que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} |I_k| < \frac{\varepsilon}{M}$$

- Como cada $I_k \subset [a,b]$, as extremidades de I_k com a e b formam uma partição P do intervalo.
- Sejam I_j os intervalos de P que contém pontos de X.
- E observe $(g-f)(x) = 0$ para todo $x \in [a,b] \setminus X$.
- Assim,

$$S(g-f,P) = \sum_{j:[t_{i-1},t_i]=I_j} M_i \Delta t_i + \sum_{[t_{k-1},t_k]\neq I_j,\forall j} M_k \Delta t_k \leq \sum_{j:[t_{i-1},t_i]=I_j} M \Delta t_i < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

- Portanto,

$$S(g-f,P) = 0 = s(g-f,P) \implies \overline{\int_a^b}(g-f) = \underline{\int_a^b}(g-f) = 0$$

- Logo, $g-f$ é integrável e

$$\int_a^b g = \int_a^b f$$

Cálculo com Integrais

Capítulo 11, Seção 2, Exercício 2

Questão: Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Mostre que se existe $\lim_{|P|\to 0}\sum(f,P^*)$ então f é uma função limitada.

Resolução:

- Suponha f ilimitada.
- Dada uma partição P, f deve ser ilimitada em pelo menos um intervalo $[t_{i-1},t_i]$.
- I.e., existe $x_i \in [t_{i-1},t_i]$ tal que

$$|f(x_i)\Delta t_i| > \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f(\xi_j)\Delta t_j\right| + A, \quad A > 0$$

- Com isso, temos a seguinte soma de Riemann,

$$\left|\sum(f,P^*)\right| = \left|f(x_i)\Delta t_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f(\xi_j)\Delta t_j\right| \geq \left||f(x_i)\Delta t_i| - \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f(\xi_j)\Delta t_j\right|\right| > A$$

- Como A é arbitrário, o limite $\lim_{|P|\to 0}\sum(f,P^*)$ não existe.

Capítulo 11, Seção 2, Exercício 4

Questão: Sejam $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integráveis. Para toda partição $P = \{t_0,\ldots,t_n\}$ de $[a,b]$ sejam $P^* = (P,\xi)$ e $P^{\#} = (P,\eta)$ pontilhamentos de P. Prove que

$$\lim_{|P|\to 0}\sum f(\xi_i)g(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Resolução:

- Observe que

$$f(\xi_i)g(\eta_i) = f(\xi_i)g(\xi_i) + f(\xi_i)[g(\eta_i) - g(\xi_i)]$$

- Multiplicando por Δt_i e somando em i,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta t_i + \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(\eta_i) - g(\xi_i)]\Delta t_i$$

- Seja $M = \sup f$. Então, como g é integrável, dado $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(\eta_i) - g(\xi_i)]\Delta t_i \leq M \sum_{i=1}^{n}[g(\eta_i) - g(\xi_i)]\Delta t_i \leq M(S(g,P) - s(g,P)) < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

- Portanto, tomando o limite,

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta t_i = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta t_i = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

Capítulo 11, Seção 2, Exercício 5

Questão: Dadas $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, para cada partição pontilhada P^* de $[a,b]$ define-se a soma de Riemann-Stieltjes

$$\sum(f, g, P^*) = \sum f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

Mostre que se f é integrável e g possui derivada integrável, então

$$\lim_{|P|\to 0} \sum(f, g, P^*) = \int_a^b f(x)g'(x)\, dx$$

Resolução:

- Pelo Teorema do Valor Médio, para cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P, existe $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$g'(\eta_i) = \frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})}$$

- Com isso,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\eta_i)(t_i - t_{i-1})$$

- Pelo exercício anterior,

$$\lim_{|P|\to 0} \sum(f, g, P^*) = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x)g'(x)\, dx$$

Capítulo 11, Seção 2, Exercício 6

Questão: Dada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$M(f,n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + ih), \quad h = \frac{(b-a)}{n},$$

a média aritmética dos valores $f(a+h), f(a+2h), \ldots, f(a+nh) = f(b)$.

Prove que se a função f é integrável, então

$$\lim_{n\to\infty} M(f,n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Por este motivo, o segundo membro desta igualdade se chama o valor médio da função f no intervalo $[a,b]$.

Resolução:

1. Construir uma partição: Note que $P = \{a, a+h, \ldots, a+nh\}$ é uma partição de $[a,b]$.
2. Pontilhar a partição: Para cada intervalo $[a+(i-1)h, a+ih]$ tome $\xi_i = a + ih$.

3. Escreva a soma de Riemann:

$$\sum(f, \mathrm{P}^*) = \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)h = \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a+ih)$$

4. Compare com $\mathrm{M}(f,n)$:

$$\mathrm{M}(f,n) = \frac{1}{b-a} \sum(f, \mathrm{P}^*)$$

5. Tome o limite:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}(f,n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum(f, \mathrm{P}^*) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$