MA446 Grupos e Representações - Exercícios

Adair Neto

16 de abril de 2023

Lista 1

Exercício 1

Questão: Seja G um grupo e $a, b \in G$. Demonstre que

1. Os elementos $b^{-1}ab$ e a têm a mesma ordem.
2. Os elementos ab e ba têm a mesma ordem.

Resolução:

1. - Sabemos que
   $$|a| = \min\{z \in \mathbb{Z} : a^z = 1_G\}$$
   - Seja $m = |a|$ e $n = |b^{-1}ab|$.
   - Note que
   $$(b^{-1}ab)^m = b^{-1}a^m b = b^{-1}1_G b = b^{-1}b = 1_G$$
   - Ou seja, $m \geq n$.
   - Por outro lado,
   $$1_G = (b^{-1}ab)^n = b^{-1}a^n b \iff b^{-1}a^n = b^{-1} \iff a^n = bb^{-1} = 1_G$$
   - Assim, $n \geq m$ e, portanto, $n = m$.
2. Pelo item anterior, ba e $b^{-1}(ba)b = (b^{-1}b)ab = ab$ têm a mesma ordem.

Exercício 3

Questão: Seja G um grupo.

1. Demonstre que se para todo $g \in G$ temos $g^{-1} = g$, então G é abeliano.
2. Demonstre que se para todos $a, b \in G$ temos $(ab)^2 = a^2b^2$, então G é abeliano.

Resolução:

1. - Lembre que
   $$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$
   - Como $g^{-1} = g$, para todo $g \in G$, segue que
   $$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$$
2. Basta notar que
   $$abab = (ab)^2 = a^2b^2 = aabb \iff bab = abb \iff ba = ab$$

Exercício 5

Questão: Sejam p primo e
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p,\ ad - bc \neq 0 \text{ em } \mathbb{Z}_p \right\}$$
Demonstre que G é grupo com respeito à multiplicação de matrizes e calcule a ordem de G.

Resolução:

1. Verificar que é grupo.
   - Elemento neutro: matriz identidade
   - Inversa:
$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
   - Associatividade: segue da associatividade das matrizes e de $\mathbb{Z}_p$.
2. Ordem $|G|$.
   - Para montar uma base de G, temos (p^2-1) opções para a primeira coluna e (p^2-p) para a segunda, pois queremos eliminar possíveis combinações lineares da primeira.
   - Logo,
$$|G| = (p^2-1)(p^2-p) = (p^2-1)(p-1)p$$

Exercício 6

Questão: Seja G um grupo.

1. Sejam $H \leq G$ e $N \triangleleft G$. Mostre que $H \cap N \triangleleft H$.
2. Sejam $N,\ M$ ambos subgrupos normais de G tais que $M \cap N = 1$. Mostre que, para $m \in M$ e $n \in N$, temos $mn = nm$.

Resolução:

1. - Queremos mostrar que, para todo $h \in H$ temos que
$$h(H \cap N)h^{-1} \subseteq H \cap N$$
   - Por um lado, como $N \triangleleft G$ e $h \in G$,
$$h(H \cap N)h^{-1} \subseteq hNh^{-1} \subseteq N$$
   - Por outro,
$$h(H \cap N)h^{-1} \subseteq hHh^{-1} = H$$
   - Logo, $h(H \cap N)h^{-1} \subseteq H \cap N$.
2. - Pela normalidade de N e M, temos
$$N \triangleleft G \implies mN = Nm, \quad \forall\ m \in M \subseteq G$$
     e
$$M \triangleleft G \implies nM = Mn, \quad \forall\ n \in N \subseteq G$$
   - Assim, temos que
$$m^{-1}(nm)n^{-1} \in m^{-1}NmN = Nm^{-1}mN = N$$
     e
$$m^{-1}(nm)n^{-1} \in MnMn^{-1} = Mnn^{-1}M = M$$
   - Isto é, $m^{-1}(nm)n^{-1} \in M \cap N = 1$.
   - Logo,
$$m^{-1}(nm)n^{-1} = 1 \iff m^{-1}nm = n \iff nm = mn$$

Exercício 7

Questão: Seja $\mathbb{Z}$ o grupo cíclico infinito com operação + e $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$.

1. Ache o número de geradores de G como função de n.
2. Ache todos os elementos de ordem 36 em $\mathbb{Z}_{36}$.
3. Ache a ordem do elemento $20 + 36\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}_{36}$.
4. Ache todos os elementos em $\mathbb{Z}_{36}$ de ordem 9.

Resolução:

1. Geradores de G:

- Seja $g \in \mathrm{G}$. Sabemos que a ordem de g^z é n sse. z e n são coprimos, pois

$$|g^z| = \frac{n}{\mathrm{mdc}(n,z)}$$

- Assim, temos $\varphi(n)$ geradores de G.

2. Elementos de ordem 36 em $\mathbb{Z}_{36}$:
   - São todos os elementos coprimos com 36, i.e.,

$$1,5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35$$

   - Note que são exatamente $\varphi(36) = 12$ elementos.
3. Ordem do elemento $20 + 36\mathbb{Z}$:
   - Podemos calcular na mão, fazendo $20i$, $1 \leq i \leq 35$, e tirando os restos $\mod 36$ até encontrar o primeiro elemento congruente a zero.
   - Ou, simplesmente,

$$\frac{36}{\mathrm{mdc}(36,20)} = \frac{36}{4} = 9$$

   - Portanto, a ordem desejada é 9.
4. Elementos de ordem 9.
   - Como queremos

$$9 = \frac{36}{\mathrm{mdc}(36,k)} \implies \mathrm{mdc}(36,k) = 4$$

   - Temos que os elementos de ordem 9 são os números $k = 4t$ com t e 9 coprimos.

Exercício 8

Questão: Seja

$$\mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix} : a,b,d \in \mathbb{C},\ ad \neq 0 \right\}$$

grupo com respeito à multiplicação de matriz e

$$\mathrm{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{C} \right\}$$

Mostre que $\mathrm{N} \lhd \mathrm{G}$ e G/N é abeliano.

Resolução:

1. Para mostrar que $g\mathrm{N}g^{-1} \subseteq \mathrm{N}$, basta ver que

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{-b}{ad} & \frac{1}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b'd}{a} & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{N}$$

2. Para mostrar que G/N é abeliano, usaremos o teorema do isomorfismo.
   - Considere

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{G} &\longrightarrow \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix} &\longmapsto (a,d) \end{aligned}$$

   - Verifique que φ é um homomorfismo.
   - Claramente φ é epimorfismo.
   - Calcule o núcleo:

$$\ker(\varphi) = \{g \in \mathrm{G} : \varphi(g) = (1,1)\} = \mathrm{N}$$

     pois

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix} \in \ker(\varphi) \iff a = 1 = d$$

   - Pelo teorema do isomorfismo, temos que

$$\mathrm{G}/\mathrm{N} \simeq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$$

   - Como $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ é abeliano, temos que G/N é abeliano.

Exercício 11a

Questão: Sejam G um grupo e $H \leq G$. Demonstre que $\bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ é um subgrupo normal de G.

Resolução:

- Seja $t \in G$. Queremos verificar que $tMt^{-1} \subseteq M$, em que $M = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$.
- Para isso, note que

$$tMt^{-1} = t\left(\bigcap_{g\in G} gHg^{-1}\right)t^{-1} = \bigcap_{g\in G} tgHg^{-1}t^{-1}$$

- Chamando $s = tg$ temos que $s \in G$ e $g^{-1}t^{-1} = s^{-1} \in G$.
- Portanto,

$$\bigcap_{g\in G} tgHg^{-1}t^{-1} = \bigcap_{s\in G} sHs^{-1} = M$$

- Logo, M é subgrupo normal de G.

Exercício 11b

Questão: Sejam G o grupo $\mathbb{C}^*$ com operação multiplicação e H o grupo

$$H = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0\right\}$$

com a operação multiplicação de matrizes. Demonstre que existe isomorfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow H$.

Resolução:

- Construa φ da seguinte forma

$$\varphi : \mathbb{C}^* \longrightarrow H$$
$$z = a + ib \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

- Verifique que φ é homomorfismo.
- φ é injetora, pois

$$\ker(\varphi) = \left\{z \in \mathbb{C}^* : \varphi(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

  e

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff z = 1 \implies \ker(\varphi) = 1$$

- Por fim, φ é claramente sobrejetora, pois toda matriz em H com $a^2+b^2 \neq 0$ é imagem de um elemento $z = a+ib \in \mathbb{C}^*$.

Exercício 12

Questão: Seja G um grupo. Mostre que

1. Cada subgrupo característico de G é subgrupo normal de G.
2. Se H é subgrupo normal de G e N é subgrupo característico de H, então N é subgrupo normal de G.

Resolução:

1.
   - Seja H um subgrupo característico de G.
   - Vimos que $\varphi_g : G \longrightarrow G$, dada por $\varphi_g(k) = gkg^{-1}$ é automorfismo.
   - Como $H \blacktriangleleft G$,

$$\varphi_g(H) = gHg^{-1} \subseteq H \implies H \triangleleft G$$

2.
   - Como $H \triangleleft G$,

$$\varphi_g(H) = gHg^{-1} = H$$

   - Defina $\theta = \varphi_g|_H$, i.e., a restrição de φ_g a H.
   - Note que θ é:
     - Homomorfismo, pois é restrição de homomorfismo a um subgrupo.

- Sobrejetora por definição.
- Injetora, pois φ_g é injetora.
- Assim, θ é um automorfismo.
- Como $\mathrm{N} \blacktriangleleft \mathrm{H}$,

$$\theta(\mathrm{N}) = g\mathrm{N}g^{-1} \subseteq \mathrm{N} \implies \mathrm{N} \lhd \mathrm{G}$$

Exercício 13

Questão: Seja p um número natural primo.

1. Demonstre que S_p tem exatamente $(p-1)!$ elementos de ordem p.
2. Quantos elementos x tem em S_{101} tais que $x^{101} = 1$?
3. Quantos elementos x tem em S_9 tais que $x^9 = 1$?

Resolução:

1. Elementos de ordem p:
   - Decomponha g, um elemento de ordem p, em produto de ciclos independentes:

$$g = g_1 \cdots g_k$$

   - Como $p = |g| = \mathrm{mmc}(|g_1|, \ldots, |g_k|)$, temos que $|g_1| = \cdots = |g_k| = p$.
   - Mas $|\sup(g_1)| \geq p$ e $g_i \in \mathrm{S}_p$, temos que $k = 1$.
   - Ou seja,

$$g = g_1 = (i_1, i_2, \ldots, i_p) = (1, i_2, \ldots, i_p)$$

   - Como $i_2, \ldots, i_p$ é permutação arbitrária de $2, 3, \ldots, p$, temos $(p-1)!$ possibilidades.
2. Elementos em S_{101} tais que $x^{101} = 1$:
   - Note que
     - $p = 101$ é primo
     - $x^{101} = 1 \iff |x| \mid 101$.
   - Assim, $|x| = 101$ ou $|x| = 1$.
   - Caso $|x| = 101$, temos, pelo item anterior, $(101-1)! = 100!$ possibilidades.
   - Caso $|x| = 1$, temos $x = 1_{\mathrm{S}_{101}}$.
   - Portanto, temos $100! + 1$ possibilidades.
3. Elementos em S_9 tais que $x^9 = 1$:
   - Como 9 não é primo, refazemos a decomposição em ciclos independentes:

$$x = g_1 \cdots g_k$$

   - Temos que

$$|x| = \mathrm{mmc}(|g_1|, \ldots, |g_k|) \quad \text{e} \quad |x| \mid 9$$

   - Assim, temos três possibilidades.
   1. Se $|x| = 1$, então $x = 1_{\mathrm{S}_9}$.
   2. Se $|x| = 3$, como 3 é primo, temos que $|g_1|, \ldots, |g_k| = 3$.
      - Se $k = 1$, pelo primeiro item temos $(3-1)! = 2$ possibilidades.
      - Se $k = 2$, i.e., $x = g_1 g_2 = g_2 g_1$, temos o seguinte número de possibilidades:

$$\frac{2\binom{9}{3}\binom{6}{3}2}{2} = 2\binom{9}{3}\binom{6}{3} = 3360$$

      - Se $k = 3$, temos o seguinte número de possibilidades:

$$\frac{2\binom{9}{3}2\binom{6}{3}2\binom{3}{3}}{3!} = \frac{2\binom{9}{3}2\binom{6}{3}}{3} = 2240$$

   3. Se $|x| = 9$, temos $k = 1$ e $|g_1| = 9$. Assim, pelo primeiro item, temos $8!$ possibilidades.
   - Somando todas as possibilidades, temos o seguinte número de possibilidades:

$$1 + 2 + 3360 + 2240 + 8! = 45923$$

- *Solução alternativa para elementos de ordem p*:
  - Note que os elementos de ordem p são os p-ciclos.
  - Como cada p-ciclo é uma lista da forma $(a_1\ a_2\ \cdots\ a_p)$, $1 \le a_i \le p$, temos exatamente $p!$ listas.
  - Porém, um mesmo ciclo pode ser representado em p listas diferentes.
  - Assim, temos exatamente $\frac{p!}{p} = (p-1)!$ elementos de ordem p.

Exercício 15a

Questão: 1. O ciclo $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\end{pmatrix}$ é elemento de A_n?

2. Escreva os elementos em produto de ciclos independentes e encontre as ordens de todos os elementos.

Resolução:

1. Decomponha $g = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\end{pmatrix}$ em um produto de transposições.

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$$

   - Assim, temos
$$g = \begin{pmatrix}1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}$$
   - Como temos cinco transposições, segue que a permutação é ímpar, i.e., não está em A_n.

2. Escrever em ciclos independentes.
$$g = \begin{pmatrix}1 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$$

3. Ordem:
$$|g| = \mathrm{mmc}\left(\left|\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\end{pmatrix}\right|,\ \left|\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\right|\right) = \mathrm{mmc}(3,2) = 6$$

Outros

Pequeno teorema de Fermat

Teorema. Se p é primo e $z \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, então $z^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Demonstração.

- Aplique o teorema de Lagrange a $G = \mathbb{Z}_p^\times$:
$$|z| \mid |G| = p - 1$$
- Reescreva $p - 1 = |z| \cdot m$, para algum inteiro m.
- Use a definição de ordem:
$$z^{|z|m} = (z^{|z|})^m = 1_G^m = 1_G \quad \text{e} \quad z^{|z|m} = z^{p-1}$$
- Logo,
$$z^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

Questão 1 (P1 2020)

Enunciado.

1. Dê definição de grupo e ordem de elemento de grupo.
2. Seja $\varphi : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Mostre que $|\varphi(g)| \mid |g|$. Se $|G| = 100$ e $|H| = 81$, mostre que $\mathrm{Im}(\varphi) = 1_H$.

Solução.

1.
   - Um grupo é um conjunto munido de uma operação satisfazendo associatividade, existência de elemento neutro e existência de inversa.
   - A ordem de um elemento g de grupo G é a ordem do subgrupo gerado pelo elemento, em que esse subgrupo é o menor subgrupo de G que contém o elemento g. A ordem de um grupo G é a cardinalidade de G enquanto conjunto.
2.
   1. Vamos mostrar que $|\varphi(g)| \mid |g|$.

   - Seja $|g| = n$ e $k = |\varphi(g)|$.
   - Então $g^n = 1 \implies \varphi(g^n) = 1 = \varphi(g)^n$.
   - Pelo o algoritmo de Euclides,
$$n = kq + r, \quad 0 \le r < k$$
   - Denotando $\varphi(g) = x$,
$$1 = x^n = x^{kq+r} = (x^k)^q x^r = 1^q x^r \implies x^r = 1$$
   - Como isso contradiz a minimalidade de k, temos que $r = 0$.
   - Logo, $n = kq$ e $k \mid n$.
2. Mostrar que $\mathrm{Im}(\varphi) = 1_{\mathrm{H}}$.
   - Note que
$$|g| \mid |\mathrm{G}| = 100 \quad \text{e} \quad |\varphi(g)| \mid |\mathrm{H}| = 81$$
   - Como $|\varphi(g)| \mid |g|$, temos que
$$|\varphi(g)| \mid 81 \quad \text{e} \quad |\varphi(g)| \mid 100$$
   - Mas $\mathrm{mdc}(100, 81) = 1$.
   - Portanto, $|\varphi(g)| = 1 \implies \varphi(g) = 1_{\mathrm{H}}$ para todo $g \in \mathrm{G}$.
   - Logo, $\mathrm{Im}(\varphi) = 1_{\mathrm{H}}$.

Questão 2 (P1 2020)

Enunciado. Seja G um grupo com dois subgrupos normais N e M tais que $\mathrm{G} = \mathrm{NM}$ e $\mathrm{N} \cap \mathrm{M} = 1$.

1. Mostre que $nm = mn$ para todos $n \in \mathrm{N}$ e $m \in \mathrm{M}$.
2. Mostre que $\varphi : \mathrm{N} \times \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{G}$ dado por $\varphi((n,m)) = nm$ é um isomorfismo de grupos.

Solução.

1. Ver exercício 6b.
2. 1. φ é homomorfismo.
      - Por um lado,
$$\varphi((n_1, m_1)(n_2, m_2)) = \varphi((n_1 n_2, m_1 m_2)) = n_1 n_2 m_1 m_2$$
      - Por outro,
$$\varphi((n_1, m_1))\varphi((n_2, m_2)) = n_1 m_1 n_2 m_2 \overset{mn=nm}{=} n_1 n_2 m_1 m_2$$
   2. φ é monomorfismo.
      - Note que
$$(n,m) \in \ker(\varphi) \iff \varphi((n,m)) = nm = 1_{\mathrm{G}}$$
      - Como $\mathrm{N} \cap \mathrm{M} = 1$,
$$nm = 1_g \iff n = 1 = m$$
   3. φ é epimorfismo.
      - Seja $nm \in \mathrm{G} = \mathrm{NM}$.
      - Tomando $(n,m) \in \mathrm{N} \times \mathrm{M}$, temos que $\varphi(n,m) = nm$.
      - Logo, φ é sobrejetora.

Questão 3 (P1 2020)

Enunciado.

1. Dê as definições dos grupos S_n e A_n. Calcule $|\mathrm{S}_n|$ e $|\mathrm{A}_n|$. Quais dos elementos $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ são elementos de A_6?
2. Demonstre que $\sigma\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \dots & i_k\end{pmatrix}\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}\sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_k)\end{pmatrix}$. Ache $\sigma \in \mathrm{S}_{10}$ tal que $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho'$ para
$$\rho = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5\end{pmatrix}, \quad \rho' = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

Solução.

1. 1. Definições de S_n e A_n:
      - Seja $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Então $S_n = \{f : X \longrightarrow X : f \text{ é bijetora}\}$ é chamado grupo simétrico, em que a operação é a composição de funções.
      - $A_n = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ é par}\}$, i.e., σ é produto de um número par de transposições.
   2. Ordens:
      - $|S_n| = n!$ pois existem $n!$ possibilidades de permutar os elementos $1, 2, \dots, n$.
      - $|A_n| = \frac{n!}{2}$ pois $[S_n : A_n] = 2$.
        - De fato, supondo $n \geq 2$, tome $\tau \in S_n$ uma permutação ímpar.
        - Assim, $S_n = A_n \cup \tau A_n$.
        - Vamos verificar que τA_n é o conjunto de todas as permutações ímpares.
        - Por um lado, todos os elementos de τA_n são ímpares, pois são o produto de uma permutação ímpar com uma permutação par em A_n.
        - Por outro, se σ é permutação ímpar, $\tau^{-1}\sigma$ é par.
        - Ou seja, toda permutação ímpar está em τA_n:

$$\tau^{-1}\sigma \in A_n \iff \sigma \in \tau A_n$$

   3. Elementos de A_6:
      - Como $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}$ é produto de um número par de transposições, temos que esse elemento pertence a A_6.
      - Como $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ é produto de um número par de transposições, esse elemento pertence a A_6.
2. 1. Mostrar que $\sigma\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \dots & i_k\end{pmatrix}\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}\sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \dots & \sigma(i_k)\end{pmatrix}$.
      - Calculado em $\sigma(i_j)$,

$$\sigma\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \dots & i_k\end{pmatrix}\sigma^{-1}(\sigma(i_j)) = \sigma\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \dots & i_k\end{pmatrix}(i_j) = \sigma(i_{j+1})$$

      - Ou seja, $\sigma(i_j) \longrightarrow \sigma(i_{j+1})$, o que mostra a igualdade desejada.
   2. Achar $\sigma \in S_{10}$ tal que $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho'$.
      - Note que $\sigma\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\end{pmatrix}\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}$.
      - Assim, pelo tipo de decomposição, temos que

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 4 & 6 & 5 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Questão 4 (P1 2020)

Enunciado.

1. Enuncie a primeira parte do teorema de isomorfismos.
2. Seja $G = GL_5(\mathbb{R}) = \{a \in M_5(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ e $H = SL_5(\mathbb{R}) = \{A \in GL_5(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$. Demonstre que H é um subgrupo normal de G e G/H é um grupo abeliano.

Solução.

1. Seja $\varphi : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Então existe um único isomorfismo

$$\psi : G/\ker(\varphi) \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi)$$

   tal que $\varphi = \psi \circ \pi$, em que $\pi : G \longrightarrow G/\ker(\varphi)$ é a projeção canônica. Isto é, $\psi(\ker(\varphi)g) = \varphi(g)$.
2. 1. Mostrar que $H \lhd G$, i.e., $gHg^{-1} \subseteq H$, para todo $g \in G$.
      - Seja $g \in G$ e $h \in H$. Então

$$\det(ghg^{-1}) = \det(g)\det(h)\det(g^{-1}) = \det(h) = 1$$

      - Isto é, $ghg^{-1} \in H$ e, portanto, $H \lhd G$.
   2. Mostrar que G/H é abeliano, i.e., $g_1g_2H = g_1Hg_2H = g_2Hg_1H = g_2g_1H$.
      - Note que

$$g_1g_2(g_2g_1)^{-1} = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$$

- E
$$\det(g_1g_2(g_2g_1)^{-1}) = \det(g_1)\det(g_2)\frac{1}{\det(g_1)}\frac{1}{\det(g_2)} = 1$$
- Assim, temos que $g_1g_2(g_2g_1)^{-1} \in \mathrm{H}$.
- Ou seja,
$$g_2g_2\mathrm{H} = g_2g_1\mathrm{H}$$
- Logo, G/H é abeliano.

Questão 5 (P1 2020)

Enunciado. Seja $\mathrm{G} = \{g \in \mathbb{C} \mid g^{36} = 1\}$ um grupo com respeito à operação produto de números complexos. Mostre que G é um grupo cíclico de ordem 36. Escreva todos os geradores de G. Escreva um elemento de G de ordem 9.

Solução.

1. Mostre que G é um grupo cíclico de ordem 36.
    - Reescreva
    $$\mathrm{G} = \{g \in \mathbb{C} : g^{1/36}\} = \{g_k = e^{i(2\pi k/36)} : k \in \mathbb{Z}\}$$
    - Note que para $k \geq 36$ temos que os elementos começam a se repetir. Portanto, $|\mathrm{G}| = 36$.
    - Como $< g_1 > \subseteq \mathrm{G}$, basta verificar que $\mathrm{G} \subseteq < g_1 >$.
    - De fato, cada g_k pode ser escrito como
    $$e^{i(2\pi k/36)} = \underbrace{e^{i(2\pi/36)}e^{i(2\pi/36)}\cdots e^{i(2\pi/36)}}_{k \text{ vezes}} = (e^{i(2\pi/36)})^k$$
    - Ou seja, todo elemento $g_k \in \mathrm{G}$ pode ser escrito como potência de g_1, i.e., $\mathrm{G} \subseteq < g_1 >$.
    - Logo, $\mathrm{G} = < g_1 >$, de onde segue que G é grupo cíclico de ordem 36.
2. Escreva todos os geradores de G.
    - Note que $g_1^{36} = e^{i2\pi} = 1$.
    - Como $k < 36$ implica que $k/36 < 1$, segue que $2\pi k/36$ não é múltiplo de 2π. Assim, $e^{i2\pi k/36} \neq 1$ e, portanto, $k = 1$ é o menor inteiro positivo tal que $g_1^{36} = 1$. Ou seja, $|g_1| = 36 = |\mathrm{G}|$.
    - Como $\mathrm{G} = < g_1 >$, todo $a \in \mathrm{G}$ pode ser escrito como g_1^k.
    - E como
    $$|g_1^k| = \frac{|g_1|}{\mathrm{mdc}(k, |g_1|)} = \frac{36}{\mathrm{mdc}(k, 36)}$$
    - Temos que g_1^k gera G sse. $|g_1^k| = 36$, i.e., $\mathrm{mdc}(k, 36) = 1$.
    - Assim, queremos os inteiros positivos k coprimos com 36, que são
    $$k \in \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35\}$$
    - Ou seja, os geradores de G são os elementos g_k com k descrito acima.
3. Escreva um elemento de G de ordem 9.
    - Queremos $b = g_1^k$ tal que $|b| = 9$.
    - Ou seja
    $$9 = \frac{36}{\mathrm{mdc}(k, 36)} \implies \mathrm{mdc}(k, 36) = 4$$
    - Tomando $k = 4$, temos que $b = e^{i2\pi 4/36}$ é elemento de ordem 9 em G.

Questão 1b (P1 2021)

Enunciado. Seja $\mathrm{G} = \mathrm{S}_3$.

1. Mostre que o subgrupo N gerado por $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ é um subgrupo normal de G.
2. Seja B o subgrupo de $\mathrm{G} = \mathrm{S}_3$ gerado por $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. Mostre que B não é um subgrupo normal em G.

Solução.

1. Aplique o Teorema de Lagrange,
$$[G:N] = \frac{|G|}{|N|} = \frac{6}{3} = 2 \implies N \lhd G$$
2. Basta considerar
$$\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix} \notin B \implies B \ntriangleleft G$$

Questão 3b (P1 2021)

Enunciado. Seja $G = \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{36}$ o produto direto (externo).

1. Existe elemento de G de ordem 432?
2. É verdade que $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{36} \simeq \mathbb{Z}_{432}$?

Solução.

1. Considere $(a,b) \in \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{36}$.
   - Em notação aditiva,
   $$36(a,b) = (0_{\mathbb{Z}_{12}}, 0_{\mathbb{Z}_{36}}) \implies |(a,b)| \mid 36$$
   - Assim, não existe $(a,b) \in G$ de ordem 432.
2. Note que $1 + 432\mathbb{Z}$ tem ordem 432. Logo, $\mathbb{Z}_{432}$ e $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{36}$ não são isomorfos.

Questão 4 (P1 2021)

Enunciado.

1. Defina o subgrupo comutador G' e mostre que G' é normal em G e G/G' é um grupo abeliano.
2. Ache a ordem de G' para $G = S_3$.

Solução.

1.
   1. O subgrupo comutador G' é o subgrupo de G gerado por todos os comutadores, i.e.,
   $$G' = \{[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab \mid a,b \in G\}$$
   2. Vamos mostrar que G' é normal.
      - Tome $g \in G$ e $[a,b] \in G'$.
      - Então
      $$g^{-1}[a,b]g = g^{-1}a^{-1}b^{-1}abg = g^{-1}a^{-1}gg^{-1}b^{-1}gg^{-1}agg^{-1}bg = [g^{-1}ag, g^{-1}bg]$$
      - Logo, $G' \lhd G$.
   3. Mostremos que G/G' é abeliano.
      - Considere as classes laterais g_1G' e g_2G' em G/G'.
      - Sabemos que
      $$g_1G'g_2G' = g_1g_2G' \quad \text{e} \quad g_2G'g_1G' = g_2g_1G'$$
      - Observe que
      $$g_1g_2(g_2g_1)^{-1} = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} = [g_1^{-1}, g_2^{-1}]$$
      - Ou seja, $g_1g_2(g_2g_1)^{-1} \in G'$.
      - Logo,
      $$g_1g_2G' = g_2g_1G'$$
2.
   - Lembre que $|S_n/A_n| = 2$ implica que S_n/A_n é cíclico, ou seja, é abeliano.
   - Assim, S_3/A_3 é abeliano e temos que $G' \subseteq A_3$.
   - Como $|A_3| = 3$ é primo, temos, pelo teorema de Lagrange, que os únicos subgrupos de A_3 são 1 e A_3.
   - Mas como S_3 não é abeliano, temos que $G' \neq 1$.
   - Logo, $G' = A_3$ e, portanto, $|G'| = 3$.