MA446 Grupos e Representações - Exercícios P3

Adair Neto

25 de junho de 2023

Lista 3

Exercício 1

Questão: Seja Q_8 o grupo $\langle a, b \mid a^4 = 1, b^2 = a^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.

1. Mostre que $|Q_8| = 8$.
2. Escreva os caracteres irredutíveis de Q_8.

Resolução:

1. $|Q_8| = 8$.
   - Note que podemos escrever
   $$Q_8 = \langle a^i b^j \mid 0 \leq i \leq 3,\ 0 \leq j \leq 1 \rangle$$
   - Temos os elementos
   $$Q_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$
   - Assim, $|Q_8| = 8$. Observe que $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ é o grupo dos quatérnios.
2. Caracteres irredutíveis de Q_8.
   - Classes de conjugação de Q_8:
     - Como $bab^{-1} = a^3$, temos que a e a^3 são conjugados.
     - Note que a^2 é o único elemento de ordem 2, formando uma classe de conjugação.
     - Como $a^3ba = a^2b$ e $b(ab)b^{-1} = a^3b$ (pois $ba = a^{-1}b$), temos as seguintes classes de conjugação:
     $$\{1\}, \{a^2\}, \{a, a^3\}, \{ab, a^3b\}, \{b, a^2b\}$$
     - Como o número de classes de conjugação é o número de representações irredutíveis, temos cinco representações irredutíveis.
   - Representações de grau um:
     - Seja $\rho : Q_8 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ representação linear.
     - Vejamos que $\rho(1) = \rho(-1) = 1$. Sabemos que $(\rho(-1))^2 = \rho(1) = 1$, ou seja, $\rho(-1) = \pm 1$. Suponha que $\rho(-1) = -1$. Assim, como $ab = -ba$, teríamos
     $$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b) = -\rho(a)\rho(b)$$
     o que é absurdo.
     - Como $(\rho(a))^2 = (\rho(b))^2 = 1$, temos as seguintes possibilidades: $\rho(1) = \rho(-1) = 1$, $\rho(a) = \pm 1$, $\rho(b) = \pm 1$.
     - Assim, temos quatro representações de grau um.
   - Representação de grau dois:
     - Denote por $n_1, \ldots, n_r$ as dimensões das representações irredutíveis não isomorfas entre si de G.
     - Como $|G| = n_1^2 + \cdots + n_r^2$ e já sabemos que temos quatro representações de grau um, segue que $r = 5$ e $n_r = 2$. Ou seja, temos uma representação de grau dois.
     - Sejam
     $$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
     - Observe que $A^4 = I$, $A^2 = B^2$ e $BAB^{-1} = A^{-1}$.

- Assim, podemos definir o homomorfismo de grupos $\rho_5 : Q_8 \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ como $\rho_5(a)v = Av$ e $\rho_5(b)v = Bv$ para todo $v \in GL_2(\mathbb{C})$.
- Como $(\chi_5, \chi_5) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_5(g)\overline{\chi_5(g)} = 1$, segue que ρ_5 é irredutível.

- Tabela de caracteres:

	1	a	b	ab	a^2
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	−1	−1	1
χ_3	1	−1	1	−1	1
χ_4	1	−1	−1	1	1
χ_5	2	0	0	0	−2

Exercício 2

Questão: Sejam A um grupo abeliano finito, B um subgrupo de A e φ um caracter irredutível de B. Mostre que

1. Existe um caracter irredutível ψ de A tal que $\psi|_B = \varphi$.
2. O número de extensões ψ é $[A : B]$.

Resolução:

1. Existência de caracter irredutível.
   - Primeiro mostramos que φ pode ser estendido a um subgrupo de A que é maior do que B.
   - Tome $x \in A \setminus B$ e d o menor inteiro tal $x^d \in B$. Note que $x^n \in B$ sse. n é múltiplo de d.
   - Seja $a \in \mathbb{C}$ tal que $a^d = \varphi(x^d)$ e defina $C = \langle B, x\rangle$. Observe que os elementos de C são da forma $x^n b$, para algum $b \in B$.
   - Podemos definir um caracter $\tilde{\varphi}$ de C como $\tilde{\varphi}(x^n b) = a^n\varphi(b)$.
     - Se $x^n b = x^m b'$, então $b'b^{-1} = x^{n-m}$. Assim, $n - m = dk$, para algum k. Então,
     $$\varphi(b')\varphi(b)^{-1} = \varphi(x^{n-m}) = \varphi(x^d)^k = a^d k = a^{n-m}$$
     - Isso implica que $a^n\varphi(b) = a^m\varphi(b')$. Portanto, $\tilde{\varphi}$ está bem definido.
     - Claramente, $\tilde{\varphi}$ é homomorfismo de grupos. Portanto, é um caracter.
   - Seja S o conjunto de subgrupos $C \leq A$ tais que $B \subseteq C$ e φ pode ser estendido a C.
   - Como $B \in S$, temos que S é não vazio. Portanto, podemos tomar K como sendo o elemento maximal.
   - Caso K seja um subgrupo próprio de A, então a extensão de φ a K existe, mas não pode ser estendida a um subgrupo maior, o que contradiz a afirmação acima. Logo, $K = A$ e ψ é a extensão de φ a K.
2. Número de extensões.
   - Pela parte 1, sabemos que se $B_0 \leq A$, então podemos estender φ para um subgrupo B_1 de A que é maior do que B_0. Isso nos dá uma cadeia
   $$B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \cdots \subsetneq B_m = A$$
   - Logo, o número total de extensões é
   $$\prod [B_{i+1} : B_i] = [A : B]$$

Exercício 3

Questão: Existe um grupo G finito e um caracer χ de G tal que $\sum_{g\in G} \chi(g) = 1/2$?

Resolução:

Não, pois $\chi(g)$ é integral sobre $\mathbb{Z}$.

Exercício 4

Questão: Sejam $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear, H um subgrupo de G e U um subespaço $\rho(H)$-invariante de V. Mostre que:

1. A dimensão de menor subespaço linear $\rho(G)$-invariante de V que contém U é menor ou igual a $\dim(U)[G : H]$.

2. Se ρ é irredutível, então $\dim(V) \leq m[G:H]$, onde m é a maximal dimensão de representação irredutível de H.

Resolução:

1. Dimensão de menor subespaço linear.
   - Escreva G como união disjunta de classes laterais:
$$G = \dot{\bigcup_{1\leq i\leq k}} g_i H$$
   - Como $\rho(H)(U) = U$, definindo W como o subespaço de V gerado por $\rho(G)(U)$, temos que
$$\rho(G)(U) = \bigcup_{1\leq i\leq k} \rho(g_i)\underbrace{\rho(H)(U)}_{\subseteq U} \subseteq W$$
   - E como $\rho(g)$ é linear, temos que $\rho(g)(\lambda u) = \lambda\rho(g)(u)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. E como $\rho(g)(U)$ é subespaço de V, temos também
$$\rho(g)(u_1) + \rho(g)(u_2) = \rho(g)(u_1 + u_2)$$
   - Note que $\rho(g_1)(u_1) + \rho(g_2)(u_2) \neq \rho(g)(u)$.
   - Com isso, podemos escrever
$$W = \rho(g_1)(U) + \rho(g_2)(U) + \cdots + \rho(g_k)(U)$$
   - Observe que $U \subseteq W$ (basta tomar $g_1 = 1_G$). Assim, W é o menor subespaço linear $\rho(G)$-invariante de V que contém U.
   - Portanto, como $k = [G:H]$,
$$\dim W \leq \sum_{1\leq i\leq k} \dim \rho(g_i)(U) = \dim(U)k = \dim(U)[G:H]$$

2. $\dim(V) \leq m[G:H]$.
   - Considere a restrição $\rho|_H : H \longrightarrow GL(V)$ e escolha $U \neq 0$ um subespaço de V que é $\rho(H)$-invariante.
   - Como ρ é irredutível, segue que $\rho|_H$ é irredutível e $\dim U \leq m$. Portanto,
$$\dim V = \dim W \leq \dim U[G:H] \leq m[G:H]$$

Exercício 5

Questão: Seja G um p-grupo não abeliano de ordem p^3. Ache o número de caracteres irredutíveis de G e as dimensões desses caracteres. Dica: $Z(G) = G'$ e $|Z(G)| = p$.

Resolução:

- Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ representação irredutível.
- Da lista 2 (exercício 10), sabemos que $G' = Z(G)$. Assim, $|G'| = |Z(G)| = p$ e $[G:G'] = p^2$. I.e., temos $|G/G'| = p^2$ representações de grau um.
- Como o grau de uma representação divide a ordem do grupo, temos que os possíveis graus para uma representação de G são $\{1, p, p^2, p^3\}$.
- Escreva $Z(G) = \{g_1 = 1_G, g_2, \ldots, g_p\}$. Assim, ${}^G g_i = \{g_i\}$ para $1 \leq i \leq p$.
- Sejam $h_1, \ldots, h_{p^2-1} \in G \setminus G'$. Então $h_iG' \neq h_jG'$ se $i \neq j$.
  - De fato, se $gh_ig^{-1} = h_j$, então
$$h_j = h_ih_i^{-1}gh_ig^{-1} \in h_iG'$$
    porque $h_i^{-1}gh_ig^{-1} = [h_i, g^{-1}] \in G'$.
  - Isso implica que $h_jG' = h_iG'$, o que é absurdo. Portanto, $h_iG' \neq h_jG'$ para $i \neq j$.
- Com isso, temos que ${}^G h_i \neq {}^G h_j$ para $1 \leq i, j \leq p^2 - 1$.
- Ou seja, temos as classes de conjugação
$${}^G g_1, {}^G g_2, \ldots, {}^G g_p, {}^G h_1, \ldots, {}^G h_{p^2-1}$$
  todas distintas entre si. Observe que essa lista contém $p^2 + p - 1$ classes de conjugação. Verifiquemos que essas são todas as classes de conjugação:
$$p^3 = |G| = \sum n_i^2 \geq \underbrace{1 + \cdots + 1}_{p^2 \text{ vezes}} + \underbrace{p^2 + \cdots + p^2}_{p-1 \text{ vezes}} = p^2 + (p-1)p^2 = p^3$$

- Logo, temos p^2 representações de grau um e $(p-1)$ representações de grau p.

Exercício 6

Questão: Existe grupo finito G com oito elementos e caracter χ com valores $1,-1,2,0,0,-2,0,0$?

Resolução:

Não, pois

$$(\chi,\chi)=\frac{1}{8}(1+1+4+4)=\frac{10}{8}\notin\mathbb{Z}$$

Exercício 7

Questão: Existe um grupo finito G tal que G tem 7 representações irredutíveis, 3 de dimensão 1 e 4 de dimensão 2?

Resolução:

- Sabemos que se $n_1,\dots,n_\alpha$ são as dimensões das representações irredutíveis de G, então $|\mathrm{G}|=n_1^2+\cdots+n_\alpha^2$.
- Assim, temos
$$|\mathrm{G}|=1^2+1^2+1^2+2^2+2^2+2^2+2^2=19$$
- Como 19 é primo, G é cíclico e, portanto, abeliano.
- Ou seja, $\mathrm{G}'=1_{\mathrm{G}}$. Mas isso implica que todas as representações irredutíveis têm grau um (e teríamos $|\mathrm{G}/\mathrm{G}'|=|\mathrm{G}|=19$ representações de grau um), o que é absurdo.

Exercício 8

Questão: Seja $\rho:\mathrm{G}\longrightarrow\mathrm{GL(V)}$ uma representação irredutível onde $|\mathrm{G}|=p^3$ e $\dim(\mathrm{V})\neq 1$. Mostre que ρ é injetivo.

Resolução:

- Seja $\mathrm{N}=\ker\rho=\{g\in\mathrm{G}\mid\rho(g)=\mathrm{id}_{\mathrm{V}}\}$ e suponha $\mathrm{N}\neq 1$.
- Como $\mathrm{N}\neq 1$ implica que $\dim\mathrm{V}=p$, segue que $\mathrm{N}\gneqq\mathrm{G}$.
- Defina
$$\begin{aligned}\tilde{\rho}:\mathrm{G/N}&\longrightarrow\mathrm{GL(V)}\\ g\mathrm{N}&\longmapsto\rho(g)\end{aligned}$$
- Como $|\mathrm{G/N}|<p^3$, temos que $|\mathrm{G/N}|\in\{p,p^2\}$. Portanto, G/N é abeliano.
- Sabemos que representação irredutível de grupo abeliano tem grau um, o que implica que $\dim\mathrm{V}=1$, o que contradiz nosso enunciado.
- Logo, $\ker\rho=1$ e ρ é injetivo.

Exercício 9

Questão: Seja ρ uma representação irredutível de grau n de um grupo G. Seja χ o caracter de ρ. Mostre que

1. Se $g\in\mathrm{Z(G)}$, então o operador linear $\rho(g)$ é múltiplo escalar de id_{V}, assim, $|\chi(g)|=n$. Dica: Use o Lema de Schur.
2. $n^2\leq|\mathrm{G}|/|\mathrm{Z(G)}|$.
3. Se ρ é injetivo, então o grupo Z(G) é cíclico.

Resolução:

1. Seja $g\in\mathrm{Z(G)}$ e mostremos que $\rho(g)=\lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{V}}$ e $|\chi(g)|=n$.
   - Então $\rho(g)\rho(h)=\rho(h)\rho(g)$ e, assim, $\rho(gh)=\rho(hg)$, para todo $h\in\mathrm{G}$.
   - Portanto, pelo Lema de Schur, $\rho(g)$ é uma homotetia, i.e.,

$$\rho(g)=\lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{V}}=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{pmatrix}$$

- λ é raiz da unidade.
  - Se $|Z(G)| = k$, então $g^k = 1$. Assim,

$$\mathrm{id}_V = \rho(1) = \rho(g^k) = \rho(g)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

  - Portanto, $\lambda^k = 1$ e, assim, λ é raiz da unidade.
- Portanto, $|\chi(g)| = |n\lambda| = n|\lambda| = n$, como queríamos.

2. $n^2 \leq |G|/|Z(G)|$.
   - Como ρ é irredutível,

$$1 = (\chi, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \chi(h)\overline{\chi(h)} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} |\chi(h)|^2$$

   - Com isso,

$$|G| = \sum_{h \in G} |\chi(h)|^2 \geq \sum_{g \in Z(G)} |\chi(g)|^2 = n^2 |Z(G)|$$

   - Logo, $n^2 \leq |G|/|Z(G)|$.
3. Se ρ é injetivo, então o grupo Z(G) é cíclico.
   - Considere a restrição $\rho|_{Z(G)} : Z(G) \longrightarrow GL(V)$ que mapeia $g \longmapsto \rho(g) = \lambda \, \mathrm{id}_V$ e defina

$$\begin{aligned} \theta : Z(G) &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ g &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

   - Note que como ρ é homomorfismo de grupos, então θ é homomorfismo de grupos. E como ρ é injetivo, θ é injetivo.
   - Assim, temos que $Z(G) \cong \mathrm{Im}(\theta) \leq \mathbb{C}^*$. Como subgrupo finito de K^* é cíclico, temos que Z(G) é cíclico.

Exercício 10

Questão: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensão finita. E seja

$$\theta : V \otimes V \longrightarrow V \otimes V$$

o operator linear tal que $\theta(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$.

Mostre que $V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V)$ como espaço vetorial.

Resolução:

- Se $x \in \mathrm{Sym}^2(V) \cap \mathrm{Alt}^2(V)$, então

$$x = \theta(x) = -x \implies x = 0 \implies \mathrm{Sym}^2(V) \cap \mathrm{Alt}^2(V) = \{0\}$$

- Para todo $x \in V \otimes V$ podemos escrever

$$x = \frac{1}{2}(x + \theta(x)) + \frac{1}{2}(x - \theta(x))$$

- Como θ^2 é a identidade, temos que $\frac{1}{2}(x + \theta(x)) \in \mathrm{Sym}^2(V)$ e $\frac{1}{2}(x - \theta(x)) \in \mathrm{Alt}^2(V)$.
- Logo, $V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Alt}^2(V)$.

Exercício 11

Questão: Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear.

1. Mostre que $W_1 = \mathrm{Sym}^2(V)$ e $W_2 = \mathrm{Alt}^2$ são $(\rho \otimes \rho)(G)$-invariantes.
2. Calcule os caracteres de subrepresentações $(\rho \otimes \rho)^{W_1}$ e $(\rho \otimes \rho)^{W_2}$ usando o caracter χ_ρ de ρ.

Resolução:

1. Queremos verificar que $(\rho \otimes \rho)(g)(W_i) \subseteq W_i$ $(i = 1,2)$ para todo $g \in G$.
   - Temos as seguintes bases para W_1 e W_2:

$$\mathrm{Sym}^2(V) = \langle \{v_i \otimes v_i,\ v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i \mid i < j\}\rangle$$
$$\mathrm{Alt}^2(V) = \langle \{v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i \mid i < j\}\rangle$$

   - Abrindo as contas,

$$(\rho \otimes \rho)(g)(v_i \otimes v_i) = \rho(g)(v_i) \otimes \rho(g)(v_i)$$
$$(\rho \otimes \rho)(g)(v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i) = \rho(g)(v_i) \otimes \rho(g)(v_j) + \rho(g)(v_j) \otimes \rho(g)(v_i)$$
$$(\rho \otimes \rho)(g)(v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i) = \rho(g)(v_i) \otimes \rho(g)(v_j) - \rho(g)(v_j) \otimes \rho(g)(v_i)$$

2. Caracteres de subrepresentações:
   - Denotemos por χ^{W_1} o caracter de $(\rho \otimes \rho)^{W_1}$ e por χ^{W_2}, o caracter de $(\rho \otimes \rho)^{W_2}$.
   - Tome $v_1, \dots, v_n$ base de V tal que $gv_i = \lambda_i v_i$, $1 \le i \le n$ e $\lambda_i \in \mathbb{C}$.
   - Com isso, temos que
$$g(v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i) = \lambda_i \lambda_j (v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i)$$
para $g \in G$ e $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{C}$.
   - Assim,
$$\chi^{W_2}(g) = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$
   - Como $g^2 v_i = \lambda_i^2 v_i$, temos
$$\chi_\rho(g) = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i \quad \text{e} \quad \chi_\rho(g^2) = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i^2$$
   - Portanto,
$$\chi_\rho^2(g) = (\chi_\rho(g))^2 = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i^2 + 2\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \chi_\rho(g^2) + 2\chi^{W_2}(g)$$
   - Reordenando,
$$\chi^{W_2}(g) = \frac{1}{2}(\chi_\rho^2(g) - \chi_\rho(g^2))$$
   - Como $\chi_\rho^2 = \chi^{W_1} + \chi^{W_2}$,
$$\chi^{W_1}(g) = \chi_\rho^2(g) - \chi^{W_2}(g) = \frac{1}{2}(\chi_\rho^2(g) + \chi_\rho(g^2))$$
   - Logo,
$$\chi^{W_1}(g) = \frac{1}{2}(\chi_\rho(g)^2 + \chi_\rho(g^2)) \quad \text{e} \quad \chi^{W_2} = \frac{1}{2}(\chi_\rho(g)^2 - \chi_\rho(g^2))$$

Exercício 12

Questão: Sejam
$$\rho_1 : G \longrightarrow GL(V_1) \quad \text{e} \quad \rho_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$$
representações lineares com caracteres χ_1 e χ_2.

Seja $W = \hom(V_1, V_2)$ o espaço vetorial de aplicações lineares $f : V_1 \longrightarrow V_2$. Para $g \in G$ e $f \in W$ definimos
$$\rho(g)(f) = \rho_2(g) \circ f \circ \rho_1(g)^{-1} : V_1 \longrightarrow V_2$$
uma aplicação linear, i.e., $\rho(g)(f) \in W$. Mostrar que

1. $\rho : G \longrightarrow GL(W)$ é uma representação linear.
2. O caracter χ de ρ satisfaz $\chi = \overline{\chi_1}\chi_2$.

Resolução:

1. É representação linear.

- Precisamos mostrar que ρ é homomorfismo de grupos. Sejam $g, h \in G$ e $f \in W$. Então

$$\rho(gh)(f) = \rho_2(gh) \circ f \circ \rho_1(gh)^{-1} = (\rho_2(g)\rho_2(h)) \circ f \circ (\rho_1^{-1}(h)\rho_1^{1}(g)) = (\rho(g)\rho(h))(f)$$

2. Caracter de ρ.
   - Considere V_1' o espaço dual a V_1. Usaremos os seguintes fatos:
     1. Se $\rho' : G \longrightarrow GL(V')$ é representação linear tal que

        $$(\rho(g)(v), \rho'(g)(v')) = (v, v')$$

        então o caracter de ρ' é igual a $\chi'(g) = \overline{\chi(g)}$.
     2. O caracter de $\rho_1 \otimes \rho_2$ é igual a $\chi_1\chi_2$.
   - Definamos

$$\begin{aligned} \varphi : V_1' \otimes V_2 &\longrightarrow W \\ v' \otimes v &\longmapsto \varphi(v' \otimes v) \end{aligned}$$

   - em que

$$\begin{aligned} \varphi(v' \otimes v) : V_1 &\longrightarrow V_2 \\ x &\longmapsto (v', x)v \end{aligned}$$

   - Verificar que φ é sobrejetora:
     - Escolha bases para V_1 e V_2 e escreva f em notação matricial.
   - Como $V_1' \otimes V_2$ e W têm a mesma dimensão, segue que φ é isomorfismo.
   - Afirmação: $\rho(g) \circ \varphi = \varphi \circ (\rho_1'(g) \otimes \rho_2(g))$ para todo $g \in G$. Sejam $x \otimes y \in V_1' \otimes V_2$.

$$\begin{aligned} (\rho(g) \circ \varphi)(x \otimes y) &= \rho_2(g) \circ \varphi(x \otimes y) \circ \rho_1^{-1}(g) \\ &= \rho_2(g) \circ (x, \rho_1^{-1}(g))y \\ &= \varphi \circ (\rho_1'(g) \otimes \rho_2(g)) \end{aligned}$$

   - Mas

$$\varphi((\rho_1'(g) \otimes \rho_2(g))(x \otimes y)) = \varphi(\rho_1'(g)(x) \otimes \rho_2(g)(y)) = \varphi \circ (\rho_1'(g) \otimes \rho_2(g))$$

   - Como essa igualdade vale para $x \otimes y$, ela vale para um elemento qualquer de $V_1' \otimes V_2$. Ou seja, ρ é isomorfa a $\rho_1' \otimes \rho_2$ via φ^{-1}.
   - Logo, pelos resultados listados acima, temos o que queríamos.

Exercício 13

Questão: Completar as contas das tabelas de caracteres irredutíveis de A_4 e S_4.

Resolução:

1. A_4
   1. Calcular G/G'.
      - Considere o grupo de Klein $K = \{1, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \lhd A_4$.
      - Como $|A_4/K| = |A_4|/|K| = 12/4 = 3$, temos que $A_4/K \cong \mathbb{Z}_3$ é cíclico e, portanto, abeliano. Assim, $G' \subseteq K$. Como G não é abeliano, G' é não trivial.
      - Mostremos que $G' = K$.
        - Suponha que $G' = K$ com $1 \subsetneq G' \subsetneq K$. Então $G' = 2$ e assim, temos $|G/G'| = |G|/|G'| = 12/2 = 6$ representações de grau 1.
        - Se $m_1, \ldots, m_k$ são os graus das representações irredutíveis, então

$$|G| = m_1^2 + \cdots + m_k^2 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{6 \text{ vezes}} + \sum_{m_i \geq 2} m_i^2 \implies 6 = \sum_{m_i \geq 2} m_i^2$$

        - O que é absurdo. Logo, $K = G'$.
      - Com isso, temos

$$\left|\frac{G}{G'}\right| \frac{|G|}{|G'|} = \frac{12}{4} = 3$$

        representações irredutíveis de grau 1.

- Mais ainda,

$$12 = |G| = 3 + \sum_{m_i \geq 2} m_i^2$$

  implica que existe uma única representação de grau maior que 1 e esse grau é igual a 3.
- Portanto, temos quatro representações irredutíveis e, assim, quatro classes de conjugação.

2. Calcular classes de conjugação.
   - Já temos que $\{1\}$ e $\{x = (1\ 2)(3\ 4), y = (1\ 3)(2\ 4), z = (1\ 4)(2\ 3)\}$ são classes de conjugação.
   - Denotando $t = (1\ 2\ 3)$, então temos que $\{t, tx, ty, tz\}$ e $\{t^2, t^2x, t^2y, t^2z\}$ são classes de conjugação.
   - Vejamos que t e t^2 não são conjugados.
     - Se $gtg^{-1} = t^2$ em G, então $\overline{g}\overline{t}\overline{g^{-1}} = \overline{t^2}$ em G/G', em que $\overline{g} = gG'$.
     - Como $G/G' \cong \mathbb{Z}_3$ é abeliano, temos

$$\overline{t^2} = \overline{g}\overline{t}\overline{g^{-1}} \implies \overline{t} = 1$$

     - Mas isso equivale a $t \in G' = K$, o que é absurdo. Logo, t e t^2 não são conjugados.
3. Montar tabela de caracteres irredutíveis.
   - Com isso, podemos escolher 1, x, t e t^2 como representantes das classes de conjugação.
   - Como $\langle \overline{t} \rangle \cong \mathbb{Z}^3 \cong G/G'$ e $|t| = 3 = |\overline{t}|$, temos homomorfismos de grupos $\rho_i : G/G' \longrightarrow \mathbb{C}^*$ tais que $\chi_i(\overline{t})^3 = \chi_i(\overline{t}^3) = \chi_i(1) = 1$, para $i = 2, 3$.
   - Assim, denotando por $\omega = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$, temos que $\chi_i \in \{1, \omega, \omega^2\}$, para $i = 2, 3$.
   - Portanto, temos a seguinte tabela:

	1	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 3 2)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	α	β	γ

   - Pela ortogonalidade das colunas,

$$\overline{1} \cdot 1 + \overline{1} \cdot 1 + \overline{3} \cdot \alpha = 0 \implies \alpha = -1$$
$$\overline{1} \cdot 1 + \overline{1} \cdot \omega + \overline{1} \cdot \omega^2 + \overline{3} \cdot \beta = 0 \implies \beta = 0$$
$$\overline{1} \cdot 1 + \overline{1} \cdot \omega^2 + \overline{1} \cdot \omega + \overline{3} \cdot \gamma = 0 \implies \gamma = 0$$

   - Logo, temos a tabela de caracteres irredutíveis:

	1	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 3 2)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	–1	0	0

2. S_4
   1. Encontrar representantes das classes de conjugação.
      - Notemos que os elementos 1, $a = (1\ 2)$, $b = (1\ 2)(3\ 4)$, $c = (1\ 2\ 3)$ e $d = (1\ 2\ 3\ 4)$ nos dão cinco classes de conjugação distintas.
      - E temos que as representações trivial (com caracter por χ_1) e sinal (com caracter χ_2) são irredutíveis de grau um. Se m_3, m_4 e m_5 são os graus das outras representações irredutíveis, então

$$24 = |G| = 1^2 + 1^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2$$

      - Mas isso só é possível se $m_3 = 2$ e $m_4 = m_5 = 3$.
      - Ou seja, temos duas representações irredutíveis de grau um e, assim, $|G/G'| = 2$.

- Como $|S_4/A_4| = 2$, temos que $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$ é cíclico e, portanto, abeliano. Assim, como $G' \subseteq A_4$, temos que $G' = A_4$.

2. Escrever a tabela de caracteres irredutíveis.
   - Podemos escrever

	1	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	–1	1	1	–1
χ_3	2				
χ_4	3				
χ_5	3				

   - Fato: se ρ_0 é representação de grau um e ρ é representação irredutível, então $\rho_0 \otimes \rho$ é representação irredutível de grau igual ao grau de ρ.
   - Assim, como χ_2 tem grau um e χ_3 é a única representação irredutível de grau dois, temos que $\chi_2\chi_3 = \chi_3$. Isso implica que $\chi_3(1\ 2) = 0$ e $\chi_3(1\ 2\ 3\ 4) = 0$.
   - Usando novamente o fato, temos que $\chi_2\chi_4 = \chi_5$ ou $\chi_2\chi_4 = \chi_2\chi_4$ e $\chi_2\chi_5 = \chi_5$.
   - Suponha que $\chi_2\chi_4 = \chi_2\chi_4$ e $\chi_2\chi_5 = \chi_5$.
     - Então $\chi_4(a) = 0 = \chi_5(a)$ e $\chi_4(d) = 0 = \chi_5(d)$.
     - Mas como $\sum_{1\leq i\leq k} \overline{\chi_i(g)}\chi_i(g) = \frac{|G|}{c(g)}$ e $c(a) = 6$, temos

$$\frac{|G|}{c(A)} = \frac{24}{6} = 4 \neq 2$$

     - Assim, esse caso não é possível e, portanto, $\chi_2\chi_4 = \chi_5$.
   - Sabemos que o grupo de Klein K é subgrupo normal de S_4 e, mais ainda $S_4' = A_4$.
   - Como S_4/K é um grupo não abeliano de ordem $24/4 = 6$, existe isomorfismo de grupos $\theta : S_4/K \longrightarrow S_3$.
   - Seja $\rho : S_3 \longrightarrow GL(V)$ representação irredutível de S_3 de grau 2. Se $\pi : S_4 \longrightarrow S_4/K$ é a projeção canônica, então

$$\rho \circ \theta \circ \pi : S_4 \longrightarrow GL(V)$$

     é representação irredutível de S_4 de grau 2.
   - Lembre que a tabela de S_3 é:

	1	(1 2)	(1 2 3)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	–1	1
χ_3	2	0	–1

   - Com isso, $\chi_3(b) = \rho \circ \theta \circ \pi(b) = \rho(1_{S_3}) = 2$. E também $\chi_3(c) = \rho(c) = -1$.
   - Agora considere $\rho : S_4 \longrightarrow GL(V)$ uma representação dada por $\rho(g)(e_i) = e_{g(i)}$, em que e_1, e_2, e_3, e_4 formam base de V.
   - Como $W = \mathbb{C}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ é $\rho(G)$-invariante, pelo teorema de Mashcke existe W_0 $\rho(G)$-invariante tal que $V = W \oplus W_0$. Ou seja, $\rho = \rho^W \oplus \rho^{W_0}$ e $\chi = \chi^W + \chi^{W_0}$.
   - Como $\dim(W) = 1$, sabemos que ρ^W é irredutível. Agora como $\chi^{W_0} = \chi - \chi^W$, temos que $(\chi^{W_0}, \chi^{W_0}) = 1$.
   - Assim, ρ^{W_0} é irredutível e podemos definir χ_4 como o caracter de ρ^{W_0} e como $\chi_2\chi_4 = \chi_5$, podemos completar a tabela como segue.

	1	(1 2)	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	(1 2 3 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	–1	1	1	–1
χ_3	2	0	2	–1	0
χ_4	3	1	–1	0	–1
χ_5	3	–1	–1	0	1

Exercício 14

Questão: Seja G um grupo e A um subgrupo abeliano. Mostre que, para cada representação irredutível $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, temos $\dim(\rho) \leq [G : A]$.

Dica: para cada subespaço $\rho(A)$-invariante W temos que $W_0 = \sum_{g\in G} \rho(g)(W)$ é um subespaço $\rho(G)$-invariante de V.

Resolução:

Pelo exercício 4b, $\dim(V) \leq m[G : A]$, em que m é a maximal dimensão de representação irredutível de A. Como A é abeliano, toda representação irredutível de A tem grau um, i.e., $m = 1$.

Exercício 15

Questão: Sejam $\rho_1 : G_1 \longrightarrow GL(V_1)$ e $\rho_2 : G_2 \longrightarrow GL(V_2)$ duas representações. E seja $\pi_i : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_i$ o homomorfismo de grupos definido por $\pi_i(g_1, g_2) = g_i$. Definimos

$$\hat{\rho_i} = \rho_i \circ \pi_i : G = G_1 \times G_2 \longrightarrow GL(V_i)$$

Mostre que

1. Se ρ_1, ρ_2 são irredutíveis, então $\hat{\rho_1} \otimes \hat{\rho_2} : G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$ é uma representação irredutível de $G_1 \times G_2$.
2. Cada representação irredutível de $G_1 \times G_2$ é isomorfa a $\hat{\rho_1} \otimes \hat{\rho_2}$ para algumas representações irredutíveis ρ_1, ρ_2.

Resolução:

1. $\hat{\rho_1} \otimes \hat{\rho_2}$ é irredutível.
   - Denotemos por χ_i o caracter de ρ_i de $\hat{\chi_i}$ o caracter de $\hat{\rho_i}$. com $i = 1, 2$. Note que, se $g_1 \in G_1$ e $g_2 \in G_2$,
   $$\hat{\chi_i}((g_1, g_2)) = \mathrm{tr}(\rho_i \circ \pi_i(g_1, g_2)) = \mathrm{tr}(\rho_i(g_i)) = \chi_i(g_i)$$
   - E se $\chi_{1,2}$ é o caracter de $\hat{\rho_1} \otimes \hat{\rho_2}$, então $\chi_{1,2} = \hat{\chi_1}\hat{\chi_2}$. Assim,
   $$\chi_{1,2}((g_1, g_2)) = \hat{\chi_1}(g_1, g_2)\hat{\chi_2}(g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)$$
   - Com isso, temos que
   $$\begin{aligned}(\chi_{1,2}, \chi_{1,2}) &= \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{\substack{g_1\in G_1 \\ g_2\in G_2}} \chi_{1,2}(g_1, g_2)\overline{\chi_{1,2}(g_1, g_2)} \\ &= \frac{1}{|G_1||G_2|} \sum_{\substack{g_1\in G_1 \\ g_2\in G_2}} \chi_1(g_1)\overline{\chi_1(g_1)}\chi_2(g_2)\overline{\chi_2(g_2)} \\ &= \left(\frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1\in G_1} \chi_1(g_1)\overline{\chi_1(g_1)}\right)\left(\frac{1}{|G_2|} \sum_{g_2\in G_2} \chi_2(g_2)\overline{\chi_2(g_2)}\right) \\ &= (\chi_1, \chi_1)_{G_1}(\chi_2, \chi_2)_{G_2}\end{aligned}$$
   - Mas como ρ_1 e ρ_2 são irredutíveis, $(\chi_1, \chi_1)_{G_1} = 1$ e $(\chi_2, \chi_2)_{G_2} = 1$.
   - Logo, $\hat{\rho_1} \otimes \hat{\rho_2}$ é irredutível.
2. Isomorfismo.
   - Sejam $\mu_1, \ldots, \mu_k$ as representações irredutíveis de G_1 com caracteres $\chi_1, \ldots, \chi_k$ e sejam $\nu_1, \ldots, \nu_s$ as representações irredutíveis de G_2 com caracteres $\tilde{\chi}_1, \ldots, \tilde{\chi}_s$.
   - Defina
   $$A = \{\hat{\mu}_i \otimes \hat{\nu}_j \mid 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq s\}$$
   e suponha que não há representações isomorfas em A. Note que, pelo item anterior, cada $\hat{\mu}_i \otimes \hat{\nu}_j$ é irredutível. Assim, construímos $k \cdot s$ representações irredutíveis.
   - Calculemos o número de classes de conjugação de $G_1 \times G_2$:
     - Como podemos escrever
     $$G_1 = \dot{\bigcup_{t\in\{t_1,\ldots,t_k\}}} {}^{G_1}t, \quad G_2 = \dot{\bigcup_{d\in\{d_1,\ldots,d_s\}}} {}^{G_2}d$$

- Temos

$$G_1 \times G_2 = \dot{\bigcup_{\substack{t \in \{t_1,\dots,t_k\} \\ d \in \{d_1,\dots,d_s\}}}} {}^{G_1 \times G_2}(t_i, d_j)$$

- Portanto, o número desejado é $k \cdot s$.

• Assim, resta mostrar que as classes listadas em A não são isomorfas entre si.

- Seja $\chi_{i,j}$ o caracter de $\hat{\mu}_i \otimes \hat{\nu}_j$. Então

$$\begin{aligned}
(\chi_{i,j}, \chi_{\alpha,\beta})_{G_1 \times G_2} &= \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{\substack{g_1 \in G_1 \\ g_2 \in G_2}} \chi_{i,j}(g_1, g_2) \overline{\chi_{\alpha,\beta}(g_1, g_2)} \\
&= \frac{1}{|G_1||G_2|} \sum_{\substack{g_1 \in G_1 \\ g_2 \in G_2}} \chi_i(g_1) \overline{\chi_\alpha(g_1)} \tilde{\chi}_j(g_2) \overline{\tilde{\chi}_\beta(g_2)} \\
&= \left(\frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1 \in G_1} \chi_i(g_1) \overline{\chi_\alpha(g_1)} \right) \left(\frac{1}{|G_2|} \sum_{g_2 \in G_2} \tilde{\chi}_j(g_2) \overline{\tilde{\chi}_\beta(g_2)} \right) \\
&= (\chi_i, \chi_\alpha)_{G_1} (\tilde{\chi}_j, \tilde{\chi}_\beta)_{G_2} = \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta}
\end{aligned}$$

- Portanto, $(\chi_{i,j}, \chi_{\alpha,\beta})_{G_1 \times G_2} = 0$ se $(i,j) \neq (\alpha, \beta)$.

Outro

Teorema de Maschke

Questão: Enuncie o Teorema de Maschke.

Resolução: Seja $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação linear e W um subespaço $\rho(G)$-invariante de V. Então existe um subespaço $\rho(G)$-invariante W_0 tal que $V = W \oplus W_0$.

Lema de Schur

Questão: Enuncie o Lema de Schur.

Resolução: Sejam V_1 e V_2 espaços vetoriais sobre o corpo K,

$$\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i), \quad i = 1, 2$$

duas representações irredutíveis e $f : V_1 \longrightarrow V_2$ uma transformação linear sobre K tal que, para cada $g \in G$, temos

$$\rho_2(g) \circ f = f \circ \rho_1(g) : V_1 \longrightarrow V_2.$$

Então,

1. Se ρ_1 e ρ_2 não são isomorfos, temos que $f \equiv 0$.
2. Se $\rho_1 = \rho_2$ (e, assim, $V = V_1 = V_2$) e $\dim(V) < \infty$, então existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = \lambda \mathrm{Id}_V$.

P3 2021

Questão 1

Questão: Definir o produto escalar no espaço de funções de classe de G. Enunciar o teorema de ortogonalidade de caracteres irredutíveis de G (i.e. as condições sobre as linhas da tabela de caracteres irredutíveis). Enunciar as condições de ortogonalidade das colunas de tabela de caracteres irredutíveis.

Resolução:

1. Definição do produto escalar.

   Sejam $\varphi, \psi : G \longrightarrow \mathbb{C}$. Definimos

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$$

2. Ortogonalidade de caracteres irredutíveis.
    1. Se χ é o caracter de uma representação irredutível, então $(\chi,\chi) = 1$.
    2. Se χ_1, χ_2 são caracteres de representações irredutíveis não isomorfas, então $(\chi_1,\chi_2) = 0$.
3. Ortogonalidade das colunas.

   Sejam $g \in G$, $c(g) = |g^G|$ e $\chi_1,\dots,\chi_k$ todos os caracteres irredutíveis não isomorfos entre si. Então:
    1. $\sum_{1\le i\le k} \overline{\chi_i(g)}\chi_i(g) = \frac{|G|}{c(g)}$.
    2. Se $h \in G$ e $h \notin g^G$, então $\sum_{1\le i\le k} \overline{\chi_i(g)}\chi_i(h) = 0$.

Questão 2

Questão: Seja $G = P \rtimes Q$ um produto semidireto, em que $P = \mathbb{Z}_7 = \langle b\rangle$ é um subgrupo normal de G, $Q = \mathbb{Z}_3 = \langle a\rangle$ e $aba^{-1} = b^4$.

1. Descrever, a menos de isomorfismo, o grupo G/G'.
2. Encontrar os rerpresentantes das classes de conjugação de G.
3. Encontrar as dimensões das representações irredutíveis de G.
4. Demonstrar que cada representação irredutível de G de grau maior do que 1 é uma representação induzida por uma representação de grau 1. Descrever todas essas representações em forma matricial.
5. Descrever a tabela de caracteres de G.

Resolução:

1.

$$G/G'$$

Questão 3

Questão: Sejam $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ uma representação e $e_1,\dots,e_n$ uma base de V como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Definimos

$$\mu = \rho\otimes(\rho\otimes\rho) : G \longrightarrow GL(V\otimes V\otimes V)$$

Para $\sigma \in S_3$, definimos o mapa linear

$$\theta_\sigma : V\otimes V\otimes V \longrightarrow V\otimes V\otimes V$$

tal que

$$\theta_\sigma(v_1\otimes v_2\otimes V_3) = v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes v_{\sigma(3)}$$

E definimos

$$W = \{w \in V\otimes V\otimes V \mid \theta_\sigma(w) = w,\ \sigma \in S_3\}$$

1. Demonstre que W, como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, tem base

$$\left\{\sum_{\sigma\in S_3} e_{\sigma(i_1)}\otimes e_{\sigma(i_2)}\otimes e_{\sigma(i_3)} \mid 1 \le i_1 \le i_2 \le i_3 \le n\right\}$$

2. Demonstre que W é $\mu(G)$-invariante.
3. Calcule os caracteres de μ e de $\mu^W : G \longrightarrow GL(W)$.

Resolução: