

Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas

Adair Antonio da Silva Neto (IMECC, UNICAMP)

Prof. Dr. Diego Sebastián Ledesma (IMECC, UNICAMP)

Palavras-chave: Cálculo Estocástico, Movimento Browniano, Ruído Branco.

Financiamento: FAPESP

Introdução

Uma equação que modela um processo de evolução que contém ruído, com certa aleatoriedade, seria uma equação da forma:

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{'ruído'} \quad (1)$$

Problemas como esse aparecem naturalmente na biologia (modelos de crescimento populacional), física (carga em circuitos elétricos), engenharia (problemas de filtragem como o Filtro de Kalman exibido na Figura 1) e finanças (parada ótima, portfólio ótimo e precificação de opções).

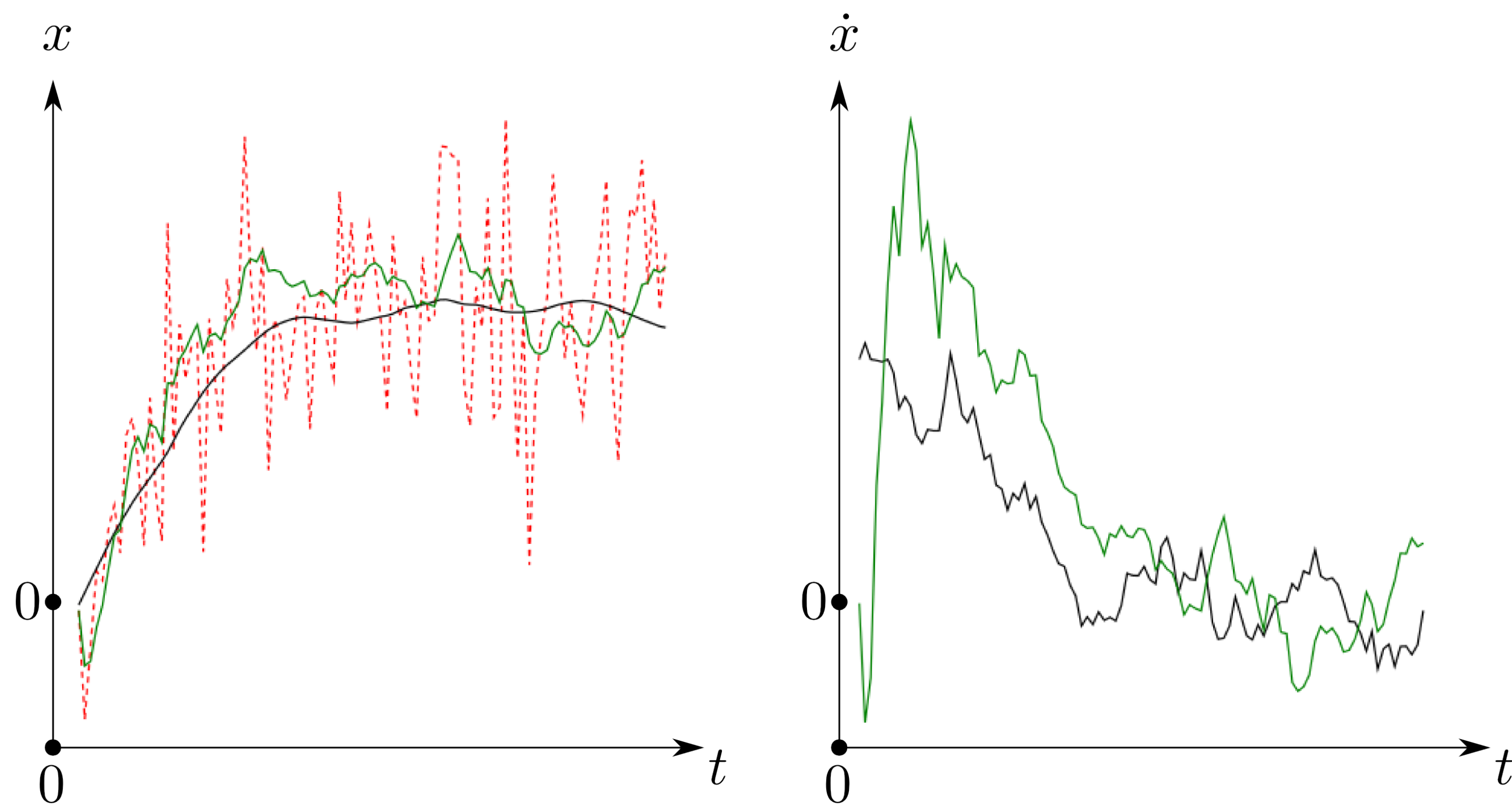


Figura 1: Filtro de Kalman: ■ Dados observados; ■ Processo filtrado; ■ Dados reais [Wik22].

Do ponto de vista matemático, temos que dar sentido a esse tipo de equações, pois com as ferramentas usuais do cálculo diferencial e integral não é possível tratá-las. Nosso objetivo então, neste trabalho, é dar os fundamentos que permitem começar a tratar estas equações. Em particular, definir a integral de Itô.

Metodologia

Para estudar a equação (1) primeiramente damos uma forma para o 'ruído' que vamos considerar. No nosso caso, vamos considerar o 'ruído branco', que é um processo estocástico generalizado W_t com distribuição de probabilidade gaussiana de média zero, variância finita tal que $\mathbb{E}[W_s W_t] = 0$ sempre que $t \neq s$. No entanto, este processo não tem propriedades razoáveis (não tem caminhos contínuos, não é mensurável para tempo finito). Por causa disso é considerado o movimento Browniano B_t que pode ser visto como um processo estocástico estacionário, com incrementos independentes e média zero tal que

$$B_t - B_s = W_s(t-s)$$

para todo $t \geq s$ isto é, o 'ruído branco' é a derivada em relação ao tempo do movimento Browniano. De fato, o único processo

que satisfaz essas propriedades é o movimento Browniano (Figura ??).

Passamos agora ao tratamento da equação. Para isso, observamos que no caso determinístico, em que não há presença de ruído, temos uma equação da forma

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t), \quad X_0 = x_0 \quad (2)$$

Nesse caso, uma solução é uma função X_t tal que

$$X_t - X_0 = \int_0^T b(s, X_s) ds \quad (3)$$

Essa função pode ser vista como um processo estocástico sobre um espaço de probabilidade dado por um único ponto.

Utilizando o formalismo acima propomos como solução à equação (1) uma identidade da forma

$$X_t - X_0 = \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \quad (4)$$

onde a integral da esquerda é uma integral de Lebesgue-Stieltjes, mas a integral da direita é o que vamos formalizar neste trabalho.

Resultados e Discussão

Como vimos na seção anterior queremos dar sentido à seguinte integral

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) \quad (5)$$

onde $f : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

A ideia será a seguinte: começaremos definindo a integral para as funções mais simples possíveis e depois, por aproximações e critérios de convergência, iremos defini-la para as outras classes de funções. Em particular queremos definir a integral para a classe de funções $\mathfrak{V}(S, T)$ que está formada por

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

tais que

1. A função $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ é $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$ -mensurável, onde \mathfrak{B} denota a σ -álgebra de Borel em $[0, \infty)$ e \mathfrak{F} é a σ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias B_s ($s \leq t$).
2. A função $f(t, \omega)$ é \mathfrak{F}_t -adaptada.
3. $\mathbb{E} \left[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] < \infty$.

Começamos então com as funções mais simples.

Definição 0.1 (Funções elementares). Uma função $\varphi \in \mathfrak{V}(S, T)$ é dita **elementar** se é da forma

$$\varphi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) \chi_{[t_j, t_{j+1}]}(t) \quad (6)$$

Para as funções elementares definimos

$$\int_S^T \varphi(t, \omega) dB_t = \sum_j e_j(\omega) (B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)).$$

As funções elementares são importantes porque são densas em $\mathfrak{V}(S, T)$ como garante o seguinte resultado.

Teorema 0.1. Se $g \in \mathfrak{V}(S, T)$ então existe uma sequência de funções elementares $\varphi_n \in \mathfrak{V}(S, T)$ tal que $\varphi_n \rightarrow g$ em $L^2(P)$

E, a partir disso, podemos definir a integral (5) com a seguinte definição.

Definição 0.2 (Integral de Itô). Seja $f \in \mathfrak{V}(S, T)$, então a **Integral de Itô** de f , de S a T é

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \varphi_n(t, \omega) dB_t(\omega) \quad (7)$$

onde o limite é em $L^2(P)$ e (φ_n) é uma sequência de funções elementares tais que

$$\mathbb{E} \left[\int_S^T (f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Com a integral de Itô já bem definida, enunciaremos a Isometria de Itô e um corolário, listaremos algumas propriedades e, por fim, daremos um exemplo do cálculo dessa integral.

Teorema 0.2 (Isometria de Itô). Para toda função $f \in \mathfrak{V}(S, T)$,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_S^T f(t, \omega)^2 dt \right] \quad (8)$$

Corolário 0.3. Se $f(t, \omega) \in \mathfrak{V}(S, T)$, $f_n(t, \omega) \in \mathfrak{V}(S, T)$ e

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_S^T f_n(t, \omega) - f(t, \omega) \right)^2 dt \right] \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$, então

$$\int_S^T f_n(t, \omega) dB_t(\omega) \rightarrow \int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) \quad (9)$$

em $L^2(P)$ conforme $n \rightarrow \infty$.

De fato, a integral de Itô possui as propriedades esperadas de uma integral e, além disso, tem média zero e é \mathfrak{F}_T -mensurável.

Teorema 0.4 (Propriedades). Seja $f, g \in \mathfrak{V}(0, T)$ e $0 \leq S < U < T$. Então

1. $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$ para ω em quase toda parte.
2. $\int_S^T (cf + g) dB_t = c \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$ onde $c \in \mathbb{R}$.
3. $\mathbb{E} \left[\int_S^T f dB_t \right] = 0$.
4. $\int_S^T f dB_t$ é \mathfrak{F}_T -mensurável.

Exemplo 0.1. Queremos calcular a integral

$$\int_0^T B(t) dB(t)$$

Passo 1. Seja

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_n(t_i^n) [B_n(t_{i+1}^n) - B_n(t_i^n)]$$

uma sequência de funções elementares. Então,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T (\varphi_n - B_s)^2 ds \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds \right] = \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j)^2 \\ &= \sum_j \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j)^2 \rightarrow 0 \text{ quando } \Delta t_j \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Isto é, pela continuidade de $B(t)$, $\varphi_n(t)$ converge para $B(t)$ quase certamente quando $\Delta t_j \rightarrow 0$.

Passo 2. Agora note que

$$\begin{aligned} B_n(t_i) [B_n(t_{i+1}) - B_n(t_i)] &= B_n(t_{i+1}) B_n(t_i) - B_n^2(t_i) + B_n^2(t_{i+1}) - B_n^2(t_{i+1}) \\ &= \frac{1}{2} [B_n^2(t_{i+1}) - B_n^2(t_i) - (B_n(t_{i+1}) - B_n(t_i))^2] \end{aligned}$$

Passo 3. Com esses dois resultados e o corolário (0.3), podemos reescrever a integral original como

$$\int_0^T \varphi_n(t) dB(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [B_n^2(t_{i+1}) - B_n^2(t_i)] - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [B_n(t_{i+1}) - B_n(t_i)]^2$$

Passo 4. Como a primeira soma é uma soma telescópica e a segunda soma converge em probabilidade para T pela variação quadrática do movimento Browniano, temos que

$$\int_0^T \varphi_n(t) dB(t) = \frac{1}{2} B^2(t) - \frac{1}{2} B^2(0) - \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} B^2(t) - \frac{1}{2} T$$

Logo, a integral converge em $L^2(P)$ para

$$\int_0^T B(t) dB(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_n(t) dB(t) = \frac{1}{2} B^2(t) - \frac{1}{2} T \quad (10)$$

Conclusões

Apresentamos um formalismo para a modelagem de processos de evolução com ruído a partir do movimento Browniano. Vimos que o conceito de solução clássico não funciona para esse formalismo e foi proposta uma nova interpretação. Como resultado disso, foi necessário construir uma nova teoria de integração e, com isso, a integral de Itô. Estudamos as propriedades dessa nova integral.

A partir disso será possível avançar em questões mais elaboradas, como por exemplo: A equação (1) tem solução? Sob quais hipóteses? Como podemos estudar o comportamento da solução?

Referências

- [Eva12] Lawrence C Evans. *An introduction to stochastic differential equations*, volume 82. American Mathematical Soc., 2012.
- [Jak] Jake. How to draw brownian motions in tikz/pgf. <https://tex.stackexchange.com/a/59934>. [Acesso em: 07/07/2022].
- [Oks13] Bernt Oksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business

Media, 2013.		w/index.php?title=Kalman%20filter&
[Wik22]Wikipedia. Kalman filter — Wikipedia, the free		oldid=1091166052, 2022. [Online; accessed
encyclopedia. http://en.wikipedia.org/		06-July-2022].