XXX Congresso de Iniciação Científica UNICAMP

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS

Palavras-chave: Cálculo Estocástico, Movimento Browniano, Ruído Branco

Autores:
ADAIR ANTONIO DA SILVA NETO [IMECC - UNICAMP]
PROF. DR. DIEGO SEBASTIÁN LEDESMA (ORIENTADOR) [IMECC - UNICAMP]

Introdução

Uma equação que modela um processo de evolução que contém ruído, com certa aleatoriedade, seria uma equação da forma:

$$\frac{\mathrm{dX}}{\mathrm{d}t} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{`ruído'} \tag{1}$$

Problemas como esse aparecem naturalmente na biologia (modelos de crescimento populacional), física (carga em circuitos elétricos), engenharia (problemas de filtragem como o Filtro de Kalman exibido na Figura 1) e finanças (parada ótima, portfólio ótimo e precificação de opções).

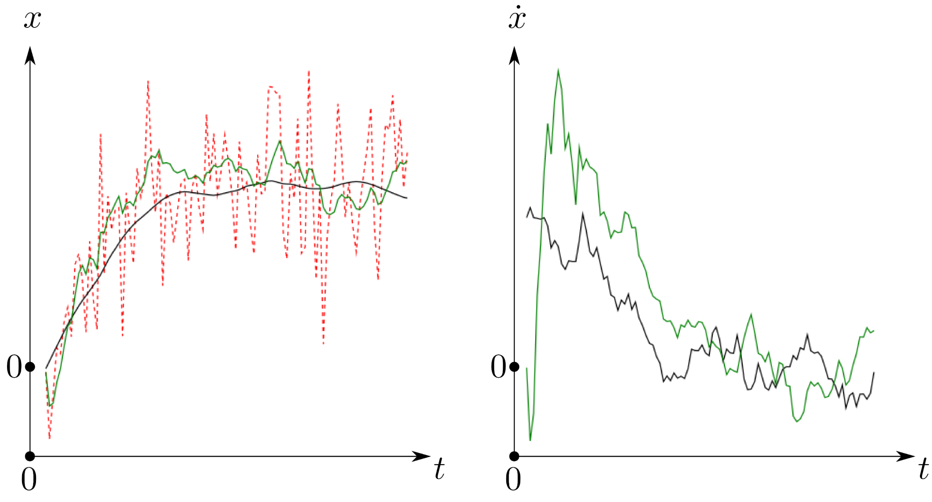

Figura 1: Filtro de Kalman: Dados observados; Processo filtrado; Dados reais [Wik22].

Do ponto de vista matemático, temos que dar sentido a esse tipo de equações, pois com as ferramentas usuais do cálculo diferencial e integral não é possível tratá-las. Nosso objetivo então, neste trabalho, é dar os fundamentos que permitem começar a tratar estas equações. Em particular, definir a integral de Itô.

Metodologia

Para estudar a equação (1) primeiramente damos uma forma para o 'ruído' que vamos considerar. No nosso caso, vamos considerar o 'ruído branco', que é um processo estocástico generalizado W_t com distribuição de probabilidade gaussiana de média zero, variância finita tal que $\mathbb{E}[W_s W_t] = 0$ sempre que $t \neq s$. No entanto, este processo não tem propriedades razoáveis (não tem caminhos contínuos, não é mensurável para tempo finito). Por causa disso é considerado o movimento Browniano B_t que pode ser visto como um processo estocástico estacionário, com incrementos independentes e média zero tal que

$$B_t - B_s = W_s(t-s)$$

para todo $t \geq s$ isto é, o 'ruído branco' é a derivada em relação ao tempo do movimento Browniano. De fato, o único processo que satisfaz essas propriedades é o movimento Browniano (Figura 2).

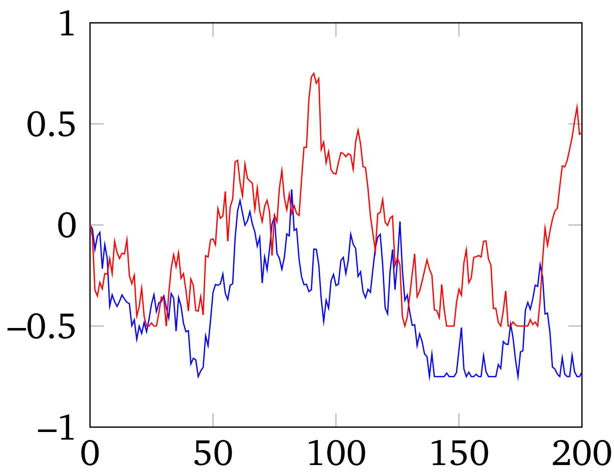

Figura 2: Simulação de duas realizações do movimento Browniano [Jak]

Passamos agora ao tratamento da equação. Para isso, observamos que no caso determinístico, em que não há presença de ruído, temos uma equação da forma

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t), \quad X_0 = x_0 \tag{2}$$

Nesse caso, uma solução é uma função X_t tal que

$$X_t - X_0 = \int_0^T b(s, X_s) ds \tag{3}$$

Essa função pode ser vista como um processo estocástico sobre um espaço de probabilidade dado por um único ponto.

Utilizando o formalismo acima propomos como solução à equação (1) uma identidade da forma

$$X_t - X_0 = \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \tag{4}$$

onde a integral da esquerda é uma integral de Lebesgue-Stieltjes, mas a integral da direita é o que vamos formalizar neste trabalho.

Resultados e Discussão

Como vimos na seção anterior queremos dar sentido à seguinte integral

$$\int_{S}^{T} f(t,\omega)\mathrm{d}B_t(\omega) \tag{5}$$

onde $f : [0,\infty] \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$.

A ideia será a seguinte: começaremos definindo a integral para as funções mais simples possíveis e depois, por aproximações e critérios de convergência, iremos defini-la para as outras classes de funções. Em particular queremos definir a integral para a classe de funções $\mathfrak{V}(S,T)$ que está formada por

$$f(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

tais que

1. A função $(t,\omega) \longrightarrow f(t,\omega)$ é $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$-mensurável, onde $\mathfrak{B}$ denota a σ-álgebra de Borel em $[0,\infty)$ e $\mathfrak{F}$ é a σ-álgebra gerada pelas variáveis aleatórias B_s $(s \leq t)$.
2. A função $f(t,\omega)$ é $\mathfrak{F}_t$-adaptada.
3. $\mathbb{E}\left[\int_S^T f(t,\omega)^2 \mathrm{d}t\right] < \infty$.

Começamos então com as funções mais simples.

Definição 1 (Funções elementares)**.** Uma função $\varphi \in \mathfrak{V}(S,T)$ é dita **elementar** se é da forma

$$\varphi(t,\omega) = \sum_j e_j(\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1}]}(t) \tag{6}$$

Para as funções elementares definimos

$$\int_S^T \varphi(t,\omega)\ dB_t = \sum_j e_j(\omega)(B_{t_{j+1}}(\omega) - B_{t_j}(\omega)).$$

As funções elementares são importantes porque são densas em $\mathfrak{V}(S,T)$ como garante o seguinte resultado.

Teorema 1. Se $g \in \mathfrak{V}(S,T)$ então existe uma sequência de funções elementares $\varphi_n \in \mathfrak{V}(S,T)$ tal que $\varphi_n \to g$ em $L^2(P)$

E, a partir disso, podemos definir a integral (5) com a seguinte definição.

Definição 2 (Integral de Itô)**.** Seja $f \in \mathfrak{V}(S,T)$, então a **Integral de Itô** de f, de S a T é

$$\int_S^T f(t,\omega)\mathrm{d}B_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \varphi_n(t,\omega)\mathrm{d}B_t(\omega) \tag{7}$$

onde o limite é em $L^2(P)$ e (φ_n) é uma sequência de funções elementares tais que

$$\mathbb{E}\left[\int_S^T (f(t,\omega) - \varphi_n(t,\omega))^2 \mathrm{d}t\right] \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$.

Com a integral de Itô já bem definida, enunciaremos a Isometria de Itô e um corolário, listaremos algumas propriedades e, por fim, daremos um exemplo do cálculo dessa integral.

Teorema 2 (Isometria de Itô)**.** Para toda função $f \in \mathfrak{V}(S,T)$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_S^T f(t,\omega)^2 dt\right] \tag{8}$$

Corolário 3. Se $f(t,\omega) \in \mathfrak{V}(S,T), f_n(t,\omega) \in \mathfrak{V}(S,T)$ e

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_S^T f_n(t,\omega) - f(t,\omega)\right)^2 dt\right] \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$, então

$$\int_S^T f_n(t,\omega)dB_t(\omega) \longrightarrow \int_S^T f(t,\omega)dB)t(\omega) \tag{9}$$

em $L^2(P)$ conforme $n \to \infty$.

De fato, a integral de Itô possui as propriedades esperadas de uma integral e, além disso, tem média zero e é $\mathfrak{F}_T$-mensurável.

Teorema 4 (Propriedades)**.** Seja $f, g \in \mathfrak{V}(0,T)$ e $0 \leq S < U < T$. Então

1. $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$ para ω em quase toda parte.
2. $\int_S^T (cf + g)dB_t = c\int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$ onde $c \in \mathbf{R}$.
3. $\mathbb{E}\left[\int_S^T f dB_t\right] = 0$.
4. $\int_S^T f dB_t$ é $\mathfrak{F}_T$-mensurável.

Exemplo 1. Queremos calcular a integral

$$\int_0^T B(t)dB(t)$$

Passo 1. Seja

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} B_n(t_i^n)[B_n(t_{i+1}^n) - B_n(t_i^n)]$$

uma sequência de funções elementares. Então,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (\varphi_n - B_s)^2 ds\right] = \mathbb{E}\left[\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds\right] = \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j)^2 ds$$
$$= \sum_j \frac{1}{2}\left(t_{j+1} - t_j\right)^2 \longrightarrow 0 \text{ quando } \Delta t_j \to 0$$

Isto é, pela continuidade de $B(t)$, $\varphi_n(t)$ converge para $B(t)$ quase certamente quando $\Delta t_j \to 0$.

Passo 2. Agora note que

$$\begin{aligned}
B_n(t_i)[B_n(t_{i+1}) - B_n(t_i)] &= B_n(t_{i+1})B_n(t_i) - B_n^2(t_i) + B_n^2(t_{i+1}) - B_n^2(t_{i+1}) \\
&= \frac{1}{2}[B_n^2(t_{i+1}) - B_n^2(t_i) - (B_n(t_{i+1}) - B_n(t_i))^2]
\end{aligned}$$

Passo 3. Com esses dois resultados e o corolário (3), podemos reescrever a integral original como

$$\int_0^T \varphi_n(t)dB(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[B_n^2(t_{i+1}) - B_n^2(t_i)\right] - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[B_n(t_{i+1}) - B_n(t_i)]^2$$

Passo 4. Como a primeira soma é uma soma telescópica e a segunda soma converge em probabilidade para T pela variação quadrática do movimento Browniano, temos que

$$\int_0^T \varphi_n(t)dB(t) = \frac{1}{2}B^2(t) - \frac{1}{2}B^2(0) - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}B^2(t) - \frac{1}{2}T$$

Logo, a integral converge em $L^2(P)$ para

$$\int_0^T B(t)dB(t) = \lim_{n\to\infty}\int_0^T \varphi_n(t)dB(t) = \frac{1}{2}B^2(t) - \frac{1}{2}T \tag{10}$$

Conclusões

Apresentamos um formalismo para a modelagem de processos de evolução com ruído a partir do movimento Browniano. Vimos que o conceito de solução clássico não funciona para esse formalismo e foi proposta uma nova interpretação. Como resultado disso, foi necessário construir uma nova teoria de integração e, com isso, a integral de Itô. Estudamos as propriedades dessa nova integral.

A partir disso será possível avançar em questões mais elaboradas, como por exemplo: A equação (1) tem solução? Sob quais hipóteses? Como podemos estudar o comportamento da solução?

Referências

[Eva12] Lawrence C Evans. *An introduction to stochastic differential equations*, volume 82. American Mathematical Soc., 2012.

[Jak] Jake. How to draw brownian motions in tikz/pgf. https://tex.stackexchange.com/a/59934. [Acesso em: 07/07/2022]. 2

[Oks13] Bernt Oksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2013.

[Wik22] Wikipedia. Kalman filter — Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Kalman%20filter&oldid=1091166052, 2022. [Online; accessed 06-July-2022]. 1