XXX Congresso de Iniciação Científica UNICAMP

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ESTOCÁSTICAS

Adair Antonio da Silva Neto (IMECC, UNICAMP) Prof. Dr. Pedro Jose Catuogno (IMECC, UNICAMP)

Palavras-chave: Cálculo Estocástico, Movimento Browniano, Ruído Branco. **Financiamento:** FAPESP

Introdução

Uma equação que modela um processo de evolução contínuo com ruído é uma equação da forma

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{‘ruído’}, \quad X_0 = x_0. \tag{1}$$

Com as ferramentas usuais do cálculo diferencial e integral não é possível tratar essa expressão. Neste trabalho vamos dar os fundamentos que permitem abordar um tipo particular destas equações. Para isso, vamos definir a integral de Itô e um conceito de solução para estas equações.

Metodologia

Para estudar a equação (1) primeiramente damos uma forma para o ‘ruído’ que vamos considerar. No nosso caso, vamos considerar o ruído branco W_s que é um processo estocástico associado ao movimento Browniano B_t (processo estocástico estacionário, com incrementos independentes e média zero) pela identidade:

$$B_0 = 0 \quad \text{e} \quad B_t - B_s = W_s(t-s), \quad \forall\ t > s$$

Inspirados pelo caso determinístico, onde não há presença de ruído, propomos como solução à equação (1) um processo estocástico X_t que satisfaz uma identidade da forma

$$X_t - X_0 = \int_0^t b(s, X_s)\ ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\ dB_s \tag{2}$$

onde a integral da esquerda é uma integral de Lebesgue-Stieltjes, mas a integral da direita é a integral de Itô, que vamos formalizar neste trabalho.

Resultados e Discussão

De modo geral, queremos definir a integral

$$\int_S^T f(t,\omega)\ dB_t(\omega) \tag{3}$$

onde $f : [0,\infty] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ está no conjunto de funções quadrado integráveis e adaptadas, que denotamos por $\mathfrak{V}(S,T)$. Para isto, primeiro definimos a integral para as funções mais simples possíveis—chamadas ‘elementares’—e depois, utilizando o resultado abaixo sobre a densidade das funções elementares junto a critérios de convergência, definimos a integral para funções em $\mathfrak{V}(S,T)$.

Teorema. Se $g \in \mathfrak{V}(S,T)$ então existe uma sequência de funções elementares $\varphi_n \in \mathfrak{V}(S,T)$ tal que $\varphi_n \to g$ em $L^2(P)$

Agora, podemos definir a integral de Itô (3) da seguinte forma.

Definição (Integral de Itô)**.** Seja $f \in \mathfrak{V}(S,T)$, então a **Integral de Itô** de f, de S a T é

$$\int_S^T f(t,\omega)\ dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \varphi_n(t,\omega)\ dB_t(\omega) \tag{4}$$

onde o limite é em $L^2(P)$ e (φ_n) é uma sequência de funções elementares tais que $\varphi_n \to f$ em $L^2(P)$.

Com isto, temos o seguinte exemplo de solução de equação diferencial estocástica.

Exemplo. A equação

$$dX_t = 3\sqrt[3]{X_t}\ dt + 3(\sqrt[3]{X_t})^2\ dB_t, \quad X_0 = 0$$

tem por solução $X_t = B_t^3$. De fato se $\tau_n = (t_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma partição de $[0,t]$ com $|\Delta\tau| \to 0$ e $\varphi_n = \sum_i B_{t_i^n}^2\ \chi_{[t_i,t_{i+1})}$ são as funções simples tais que $\varphi_n \to B_t^2$ então

$$\int_0^t B_s^2\ dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \varphi_n(s)\ dB(s) = \frac{1}{3}B^3(t) - \frac{1}{3}B^3(0) - \int_0^t B_s\ ds$$

Portanto,

$$B_t^3 = B_0^3 + 3\int_0^t B_s^2\ dB_s + 3\int_0^t B_s\ ds$$

Fazendo $X_t = B_t^3$ e utilizando que $B_0 = 0$ temos

$$X_t = X_0 + 3\int_0^t \left(\sqrt[3]{X_s}\right)^2\ dB_s + 3\int_0^t \sqrt[3]{X_s}\ ds$$

Conclusões

Apresentamos um formalismo para a modelagem de processos de evolução com ruído a partir do movimento Browniano. Vimos que o conceito de solução clássico não funciona para esse formalismo e foi proposta uma nova interpretação. Como resultado disso, foi necessário construir uma nova teoria de integração e, com isso, a integral de Itô. Estudamos as propriedades dessa nova integral. A partir disso será possível avançar em questões mais elaboradas, como por exemplo: critérios para existência de solução e comportamento da solução.

Referências

[Eva12] Lawrence C Evans. *An introduction to stochastic differential equations*, volume 82. American Mathematical Soc., 2012.

[Øk13] Bernt Øksendal. *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media, 2013.