MA453 Topologia Geral - Exercícios P2

Adair Neto

29 de maio de 2023

Funções Contínuas

Exercício 4.1

Questão: Seja $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que

- f é **semicontínua inferiormente** se $f^{-1}(a, +\infty)$ é aberto em M para cada $a \in \mathbb{R}$.
- f é **semicontínua superiormente** se $f^{-1}(-\infty, b)$ é aberto em M para cada $b \in \mathbb{R}$.

Prove que f é contínua se e só se f é semicontínua inferiormente e semicontínua superiormente.

Resolução:

1. ($\Rightarrow$) Suponha que f é contínua.
   - Como $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$ são abertos, então $f^{-1}(a, +\infty)$ e $f^{-1}(-\infty, b)$ são abertos.
2. ($\Leftarrow$) Suponha que f é semicontínua inferiormente e semicontínua superiormente.
   - Seja (c, d) um aberto de $\mathbb{R}$.
   - Escreva
   $$(c, d) = (-\infty, d) \cap (c, +\infty)$$
   - Por hipótese, $f^{-1}(c, +\infty)$ e $f^{-1}(-\infty, d)$ são abertos.
   - Assim,
   $$f^{-1}(c, d) = f^{-1}[(-\infty, d) \cap (c, +\infty)] = f^{-1}(-\infty, d) \cap f^{-1}(c, +\infty)$$
   - Logo, $f^{-1}(c, d)$ é aberto e, portanto, f é contínua.

Exercício 4.2a

Questão: Sejam (M, τ) e (N, τ') espaços topológicos. Mostre que se $\mathscr{B}$ é uma base para τ', então $f : M \longrightarrow N$ é contínua se e só se $f^{-1}(V)$ é aberto em M para cada $V \in \mathscr{B}$.

Resolução:

1. ($\Rightarrow$) Suponha que f é contínua.
   - Tome $V \in \mathscr{B}$.
   - Como V é aberto de N e f é contínua, $f^{-1}(V)$ é aberto em M.
2. ($\Leftarrow$) Suponha que $f^{-1}(V)$ é aberto em M para cada $V \in \mathscr{B}$.
   - Dado $U \in \tau'$, existe $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ tal que
   $$U = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} C$$
   - Como
   $$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_{C \in \mathscr{C}} C\right) = \bigcup_{C \in \mathscr{C}} f^{-1}(C)$$
   - Temos que $f^{-1}(U) \in \tau$, porque é união de abertos.
   - Logo, f é contínua.

Exercício 4.2b

Questão: Prove que uma função $f : M \longrightarrow N$ é contínua se e só se $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Resolução:

1. ($\Rightarrow$) Suponha $f : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{N}$ contínua.
    - Lembre que
    $$\mathrm{A} \subset f^{-1}(f(\mathrm{A})) \quad \text{e} \quad f(f^{-1}(\mathrm{B})) \subset \mathrm{B}$$
    - Usando isso,
    $$\mathrm{A} \subset f^{-1}(f(\mathrm{A})) \subset f^{-1}(\overline{f(\mathrm{A})})$$
    - Como f é contínua, $f^{-1}(\overline{f(\mathrm{A})})$ é fechado.
    - Portanto,
    $$\overline{\mathrm{A}} \subset f^{-1}(\overline{f(\mathrm{A})})$$
    - Logo,
    $$f(\overline{\mathrm{A}}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(\mathrm{A})})) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$$
2. ($\Leftarrow$) Suponha $f(\overline{\mathrm{A}}) \subset \overline{f(\mathrm{A})}$.
    - Tome $\mathrm{C} \in \mathrm{N}$ fechado.
    - Temos que
    $$f(f^{-1}(\mathrm{C})) \subset \mathrm{C} \implies f(\overline{f^{-1}(\mathrm{C})}) \subset \overline{f(f^{-1}(\mathrm{C}))} \subset \mathrm{C}$$
    - Assim,
    $$\overline{f^{-1}(\mathrm{C})} \subset f^{-1}(\mathrm{C})$$
    - O que implica que $f^{-1}(\mathrm{C})$ é fechado.

Exercício 4.2e

Questão: Se $\mathrm{A} \subset \mathrm{M}$ e $\chi_\mathrm{A} : \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\chi_\mathrm{A}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathrm{A} \\ 0, & x \notin \mathrm{A} \end{cases}$$

Então χ_A é: 1. Semicontínua inferiormente se, e somente se, A é aberto. 2. Semicontínua superiormente se, e somente se, A é fechado. 3. contínua se, e somente se, A é aberto e fechado.

Resolução:

1.
    - Note que
    $$\chi_\mathrm{A}^{-1}(a, +\infty) = \begin{cases} \mathrm{M}, & a < 0 \\ \mathrm{A}, & 0 \le a < 1 \\ \emptyset, & a \ge 1 \end{cases}$$
    - ($\Rightarrow$) Temos que $\chi_\mathrm{A}^{-1}(a, +\infty)$ é aberto para todo $a \in \mathbb{R}$. Portanto, $\mathrm{A} = \chi_\mathrm{A}^{-1}(0, +\infty)$ é aberto.
    - ($\Leftarrow$) Por contrapositiva: suponha que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\chi_\mathrm{A}^{-1}(a, +\infty)$ não é aberto. Neste caso, A não é aberto.
2.
    - Note que
    $$\chi_\mathrm{A}^{-1}(-\infty, a) = \begin{cases} \mathrm{M}, & a \le 0 \\ \mathrm{A}, & 0 < a \le 1 \\ \emptyset, & a > 1 \end{cases}$$
    - Basta ver que $\chi_\mathrm{A}^{-1}(-\infty, a)$ é fechado sse. $\chi_\mathrm{A}^{-1}(a, +\infty)$ é aberto e aplicar o item anterior.
3. Segue do exercício 4.1 e dos pontos anteriores.

Exercício 4.3

Questão: Se $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ é uma função contínua tal que $f(x) = y_0$ para todo x em um denso $\mathrm{D} \subset \mathrm{X}$ e Y é Hausdorff, então $f(x) = y_0$ para todo $x \in \mathrm{X}$.

Resolução:

- Suponha que existe $y \in \mathrm{X}$ tal que $f(y) \neq y_0$.
- Como f é contínua, para todo $\mathrm{V} \in \mathscr{B}_{f(y)}$, existe $\mathrm{U} \in \mathscr{B}_y$ tal que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$.
- Como D é denso em X, temos que $\mathrm{D} \cap \mathrm{U} \neq \emptyset$.
- Assim, dado $x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{U}$, temos que $f(x) = y_0$, o que contradiz o fato que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$, para todo $\mathrm{V} \in \mathscr{B}_{f(y)}$.

Exercício 4.4

Questão: Seja $f: X \longrightarrow Y$ uma função contínua. Se x é o ponto limite de um conjunto $A \subset X$, então $f(x)$ é ponto limite de $f(A)$?

Resolução:

- A afirmação é falsa. Considere
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$
- Se $A = [0,1]$, temos $A' = [0,1]$.
- Note que 1 é ponto de acumulação de A.
- Mas $f(1) = 2$ não é ponto de acumulação de $f[0,1] = \{2\}$.
- De fato, se V é uma vizinhança de 2 em $f(A)$, então
$$\big(f(A) \cap V\big) \setminus \{2\} = \emptyset$$

Exercício 4.5

Questão: Sejam (X, τ) e (X, τ') espaços topológicos distintos e $I: (X, \tau') \longrightarrow (X, \tau)$ a função identidade. Mostre que

1. I é contínua sse. τ' é mais fina que τ.
2. I é homeomorfismo sse. $\tau' = \tau$.

Resolução:

1. I é contínua sse. τ' é mais fina que τ.
    1. $(\Rightarrow)$ Suponha que I é contínua.
        - Dado $V \in \tau$, temos que $I^{-1}(V) \in \tau'$ porque I é contínua.
        - Como I é a identidade, $I^{-1}(V) = V$, i.e., se $V \in \tau$, então $V \in \tau'$.
        - Ou seja, τ' é mais fina que τ.
    2. $(\Leftarrow)$ Suponha que τ' é mais fina que τ.
        - Por hipótese, se $V \in \tau$, então $V \in \tau'$.
        - Assim, $I^{-1}(V) = V$ (porque I é identidade) e, portanto, I é contínua.
2. I é homeomorfismo sse. $\tau' = \tau$.
    1. $(\Rightarrow)$ Suponha que I é homeomorfismo.
        - Pelo item anterior, $\tau \subset \tau'$.
        - Por outro lado, I^{-1} também é contínua e identidade. Portanto, $\tau' \subset \tau$.
    2. $(\Leftarrow)$ Suponha que $\tau' = \tau$.
        - Como $\tau \subset \tau'$, pelo item anterior temos que I é contínua.
        - Analogamente, $\tau' \subset \tau$ e I^{-1} é contínua.
        - Como I é bijetora por definição, temos que I é homeomorfismo.

Exercício 4.8

Questão: Assuma que $a < b$. Mostre que o conjunto $(a,b) \subset \mathbb{R}$ é homeomorfo a $A = (0,1)$, $B = (-\infty, 0)$, $C = (0, +\infty)$ e $\mathbb{R}$. Conclua que todos os intervalos abertos são homeomorfos entre si. Mostre também que $[a,b] \subset \mathbb{R}$ é homeomorfo a $[0,1]$.

Resolução:

1. $A = (0,1)$.
    - Considere $f: (0,1) \longrightarrow (a,b)$ dada por $f(x) = t_a \circ m_{(b-a)}(x)$, em que $t_a(x) = x + a$ (translação) e $m_{b-a}(x) = (b-a)x$ (homotetia), i.e.,
    $$f(x) = (b-a)x + a$$
    - Note que $f(0) = a$ e $f(1) = b$.
    - f é contínua, porque é composição de contínuas.
    - E sua inversa é dada por
    $$f^{-1}(x) = (t_a \circ m_{(b-a)})^{-1}(x) = m_{1/(b-a)} \circ t_{(-a)}(x) = \frac{x-a}{b-a}$$
2. $B = (-\infty, 0)$.

- Considere $f : (-\infty, 0) \longrightarrow (0, 1)$ dada por $f(x) = e^x$, cuja inversa é $\ln(x)$.

3. $C = (0, +\infty)$
   - Tome $f(x) = e^{-x}$.
4. $\mathbb{R}$.
   - Tome $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 1)$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

   - Cuja inversa é dada por

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. Caso $[a, b]$ e $[0, 1]$.
   - Basta tomar intervalos fechados no primeiro caso.
6. Todo intervalo aberto.
   - Observe que, para $(-\infty, a)$, tomamos $f(x) = e^{x-a}$.

Exercício 4.9

Questão: Encontre uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que seja contínua em um único ponto.

Resolução:

- Considere

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

- E note que $f(x)$ só é contínua em zero.

Exercício 4.11

Questão: Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que as funções $(f \vee g), (f \wedge g) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x),\ g(x)\}$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x),\ g(x)\}$$

são funções contínuas.

Resolução:

Basta notar que

$$(f \vee g)(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

e

$$(f \wedge g)(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

Exercício 4.12

Questão: Seja $A \subset X$ e $f : A \longrightarrow Y$ uma função contínua. Se Y é Hausdorff e f pode ser estendida a uma função contínua $g : \overline{A} \longrightarrow Y$, então g está unívocamente determinada por f.

Resolução:

- Suponha que existem $g, h : \overline{A} \longrightarrow Y$ extensões contínuas de f.
- E assuma que existe $x \in \overline{A}$ tal que $g(x) \neq h(x)$.
- Como Y é Hausdorff, existem U e V abertos tais que $g(x) \subset U$ e $h(x) \subset V$ com $U \cap V = \emptyset$.
- Como g e h são contínuas, $g^{-1}(U)$ e $h^{-1}(V)$ são abertos.
- Considere o aberto $W = g^{-1}(U) \cap h^{-1}(V)$.
- Como $x \in W$, temos que W é não vazio e $W \cap \overline{A} \neq \emptyset$ (pois toda vizinhança aberta de x intersecta A).
- Portanto, existe $x_0 \in W \cap \overline{A}$ e temos que $f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$, o que contradiz $U \cap V = \emptyset$.
- Logo, $g \equiv h$.

Exercício 4.14 (Willard Thm. 13.13)

Questão: Sejam (X, τ) e (Y, τ') dois espaços topológicos, com Y de Hausdorff. E sejam $f, g : X \longrightarrow Y$ contínuas. Mostre que

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

é fechado.

Resolução:

- Mostremos que A^c é aberto.
- Seja $x \in A^c$. Como Y é Hausdorff, existem U, V abertos em Y disjuntos tais que $f(x) \subset U$ e $g(x) \subset V$.
- Como f e g são contínuas, $f^{-1}(U)$ e $g^{-1}(V)$ são abertos.
- Note que x pertence ao aberto $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$.
- Tomando $y \in W$, temos que

$$f(y) \in f(U),\ g(y) \in g(U) \implies f(y) \neq g(y)$$

- Como W é uma vizinhança aberta de x contida em A^c, temos que A^c é aberto.

Exercício 4.18a

Questão: Sejam (X, τ) e (Y, τ') dois espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$. Mostre que se Y é Hausdorff e f é contínua, então o gráfico de f é fechado em $X \times Y$.

Resolução:

- Defina o gráfico de f:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

- Tome $(x, y) \in G(f)^c$, i.e., $y \neq f(x)$.
- Como Y é Hausdorff, existem $U, V \subset Y$ abertos tais que $f(x) \subset U$, $y \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.
- Como f é contínua, $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(V)$ são abertos.
- Seja W uma vizinhança aberta de x tal que $f(W) \subset U$.
- Mostrar que $(W \times V) \cap G = \emptyset$.
  - Tome $(z, f(z)) \in G$.
  - Caso $z \notin W$, então $(z, f(z)) \notin W \times V$.
  - Caso $z \in W$, então $f(z) \in U$ e, portanto, $f(z) \notin V$. Assim, $(z, f(z)) \notin W \times V$.
  - Em ambos os casos, $(z, f(z)) \notin W \times V$. Ou seja, $(W \times V) \cap G = \emptyset$.
- Logo, todo ponto de G^c tem uma vizinhança aberta disjunta de G, i.e., G^c é aberto.

Exercício 4.18b

Questão: Sejam (X, τ) e (Y, τ') dois espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$. Mostre que se Y é compacto e o gráfico de f é fechado em $X \times Y$, então f é contínua.

Resolução:

- Defina o gráfico de f:

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

- Seja F um fechado de Y e $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ projeção na primeira coordenada. Como Y é compacto, π é fechada e contínua (Lema 1).
- Assim,

$$\pi[G(f) \cap (X \times F)] = f^{-1}(F)$$

- Como $G(f) \cap (X \times F)$ é fechado, temos que $f^{-1}(F)$ é fechado.
- Logo, f é contínua.

Exercício 4.20 (Willard Thm. 18.5)

Questão: Mostre que a imagem contínua e aberta de um espaço localmente compacto é localmente compacto.

Resolução:

- Seja $f : X \longrightarrow Y$ contínua e aberta com X localmente compacto.

- Considere $y \in f(X)$ e V uma vizinhança de y.
- Escolha $x \in f^{-1}(y)$.
- Como f é contínua e X localmente compacto, existe uma vizinhança compacta K de x tal que $f(K) \subset V$.
- Como $x \in K^\circ$, temos que $y \in f(K^\circ) \subset f(K)$.
- Como f é aberta, $f(K^\circ)$ é aberta.
- Logo, $f(K)$ é uma vizinhança compacta de y contida em V.

Exercício 4.21

Questão: Sejam (X, τ) um espaço localmente compacto e (Y, τ') um espaço de Hausdorff. E seja $f : X \longrightarrow Y$ sobrejetora, contínua e aberta. Mostre que se $L \subset Y$ é compacto, existe $K \subset X$ compacto tal que $f(K) = L$.

Resolução:

- Como L é compacto num Hausdorff, L é fechado.
- Pela continuidade de f, temos que $f^{-1}(L)$ é fechado.
- Com isso, $f^{-1}(L) \cap M$ é compacto, para qualquer $M \subset X$ compacto.
- Como X é localmente compacto, para cada $x \in X$ existe um aberto U_x e um compacto C_x tal que $x \in U_x \subset C_x$.
- Cubra $f^{-1}(L)$ com as vizinhanças C_x.
- Dessa forma, $\{f(C_x^\circ) : x \in f^{-1}(L)\}$ é uma cobertura aberta de L.
- Construir um compacto $M \subset X$ tal que $L \subset f(M)$.
- Tomar $K = f^{-1}(L) \cap M$.

Exercício 4.22b (Willard Thm. 16.2)

Questão: Mostre que a imagem contínua e aberta de um espaço topológico que satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade também satisfaz o mesmo axioma.

Resolução:

- Seja $f : X \longrightarrow Y$ contínua e aberta e suponha que X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.
- Verificar que, se $\mathscr{B}$ é base de X, então $f(\mathscr{B}) = \{f(B) : B \in \mathscr{B}\}$ é base de Y.
- Seja V aberto de Y e $p \in V$.
- Então $f^{-1}(V)$ é aberto em X.
- Escolha $q \in f^{-1}(p) \subset f^{-1}(V)$.
- Então, para algum aberto básico B, temos $q \in B \subset f^{-1}(V)$.
- Portanto, $p \in f(B) \subset V$ e, como f é aberta, os conjuntos $f(B)$ formam uma base para Y.

Exercício 4.22c (Willard Thm. 16.6)

Questão: Mostre que a imagem contínua de um espaço Lindelof é Lindelof.

Resolução:

- Suponha que $f : X \longrightarrow Y$ é contínua e sobrejetora e X é Lindelof.
- Tome $\{U_i\}_{i\in I}$ uma cobertura aberta de Y.
- Então $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ é uma cobertura aberta de X, donde extraímos uma subcobertura enumerável $\{f^{-1}(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- Assim, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma subcobertura enumerável de $\{U_i\}_{i\in I}$.

Exercício 4.22d

Questão: Mostre que a imagem contínua de um espaço separável é separável.

Resolução:

- Note que um mapa contínuo f de X em Y leva um subconjunto denso de X em um subconjunto denso de Y.
- Seja D denso enumerável em X.
- Como f é contínua,
$$f(D) \subset f(X) = f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$$
- Seja $y \in f(\overline{D})$. Então $y = f(x)$ para algum $x \in \overline{D}$.
- Seja $V \subset Y$ um aberto contendo y.

- Pela continuidade de f, temos que $f^{-1}(V) \subset X$ é aberto e $x \in f^{-1}(V)$.
- Como D é denso, $f^{-1}(V) \cap D \neq \emptyset$.
- Logo, $V \cap f(D) \neq \emptyset$.

Exercício 4.24

Questão: Mostre que a imagem contínua de conexo é conexa.

Resolução:

1. Suponha que a imagem seja desconexa.
    - Sejam $f : X \longrightarrow Y$ contínua, X conexo e $W = f(X)$.
    - Isto é, existem U, V abertos não vazios tais que $W = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$.
2. Deduza que o domínio é desconexo.
    - Assim, podemos escrever $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$.
    - Note que $f^{-1}(U)$ e $f^{-1(V)}$ são não vazios e disjuntos.

Exercício 4.27

Questão: Seja $f : X \longrightarrow Y$ contínua. Mostre que a imagem de cada componente conexa de X está contida numa componente conexa de Y.

Resolução:

- Seja C_x a componente conexa de $x \in X$.
- Como f é contínua, $f(C_x)$ é conexo.
- Denote por $y = f(x) \in f(C_x)$.
- Como $f(C_x)$ é conexo e $y \in f(C_x)$, temos que $f(C_x) \subset C_y$, pois C_y é a maior componente conexa contendo y.

Exercício 4.28

Questão: Suponha que X e Y são homeomorfos. Mostre que cada componente conexa de X é homeomorfa a uma componente conexa de Y.

Resolução:

- Sejam C_x a componente conexa de $x \in X$ e $f : X \longrightarrow Y$ homeomorfismo.
- Como f é contínua, pelo exercício anterior, $f(C_x)$ é conexo e $f(C_x) \subset C_y$, em que $y = f(x)$.
- Como f^{-1} é contínua, $f^{-1}(C_y)$ é conexo e $f^{-1}(C_y) \subset C_x$.
- Assim, como f é bijetora,
$$f^{-1}(f(C_x)) = C_x \subset f^{-1}(C_y) \subset C_x \implies C_x = f^{-1}(C_y)$$
- Analogamente,
$$f(f^{-1}(C_y)) = C_y \subset f(C_x) \subset C_y \implies C_y = f(C_x)$$
- Logo, C_x e C_y são homeomorfos.

Exercício 4.30

Questão: Seja M um espaço de Hausdorff e assuma que existe uma compactificação (N, φ) de M tal que $N \setminus \varphi(M)$ contém um único ponto. Mostre que M é localmente compacto, mas não é compacto.

Resolução:

1. Definição de compactificação.
    - Como (N, φ) é compactificação, N é Hausdorff e compacto e $\varphi : M \longrightarrow N$ é homeomorfo a um subconjunto denso de N.
2. Usar que N é Hausdorff e compacto para concluir que M é localmente compacto.
    - Seja $x \in M \subset N$.
    - Como N é Hausdorff, existem U, V abertos tais que $x \in U$, $p \in V$ e $U \cap V = \emptyset$, em que $\{p\} = N \setminus \varphi(M)$.
    - Assim, V^c é fechado em N e, portanto, compacto.
    - Como $U \subset V^c$, temos que V^c é vizinhança compacta de x em M.
    - Logo, M é localmente compacto.

3. Mostrar que M não é compacto.
    - Suponha que M seja compacto.
    - Então $\varphi(\mathrm{M})$ é compacto.
    - Como N é Hausdorff, temos que $\varphi(\mathrm{M})$ é fechado.
    - Mas, por hipótese,
    $$\varphi(\mathrm{M}) = \overline{\varphi(\mathrm{M})} = \mathrm{N} \implies \mathrm{N} \setminus \varphi(\mathrm{M}) = \emptyset$$
    - Logo, M não pode ser compacto.

Exercício 4.32

Questão: Considere a esfera S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $\mathrm{N} = (0, \ldots, 0, 1)$, mostre que a projeção estereográfica

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{S}^n \setminus \{\mathrm{N}\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\longmapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

define um homeomorfismo.

Com isso, mostre que a compactificação de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a S^n.

Resolução:

1. Encontrar inversa.
    - Considere $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{S}^n \setminus \{\mathrm{N}\}$ dada por
    $$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{2}{1 + \|x\|^2}(x_1, \ldots, x_n, \|x\|^2 - 1)$$
    - Note que ψ é contínua.
    - Além disso, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ e $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{S}^n \setminus \{\mathrm{N}\}}$.
    - Logo, φ define um homeomorfismo.
2. A compactificação de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a S^n.
    - Note que S^n é Hausdorff e compacto, ψ mergulha em um subconjunto denso de S^n e $0 \notin \mathbb{R}^n$.
    - Logo, como (S^n, ψ) é uma compatificação de Alexandroff de $\mathbb{R}^n$, segue que ela é homeomorfa a S^n.

Exercício 4.34

Questão: Seja M um espaço de Tychonoff e (N, φ) a compactificação de M.

1. Mostre que se $\varphi(\mathrm{M})$ é aberto em N, então M é localmente compacto.
2. Se U é vizinhança compacta de $x \in \mathrm{M}$, então $\varphi(\mathrm{U})$ é uma vizinhança de $\varphi(x) \in \mathrm{N}$.
3. $\varphi(\mathrm{M})$ é aberto em N se, e somente se, M é localmente compacto.

Resolução:

0. Fato.
    - Um subconjunto denso de um espaço Hausdorff compacto é localmente compacto sse. ele é aberto.
1. Se $\varphi(\mathrm{M})$ é aberto em N, então M é localmente compacto.
    - Como N é Hausdorff e compacto, N é localmente compacto.
    - Dado que $\varphi(\mathrm{M})$ é aberto e denso em N, temos que $\varphi(\mathrm{M})$ é localmente compacto.
    - Portanto, como M é homeomorfo a $\varphi(\mathrm{M})$, temos que M é localmente compacto.
2. $\varphi(\mathrm{U})$ é uma vizinhança de $\varphi(x) \in \mathrm{N}$.
    - Como U é compacto e φ é contínua, temos que $\varphi(\mathrm{U})$ é compacto.
    - Como $x \in \mathrm{U}$, temos que $\varphi(x) \in \varphi(\mathrm{U})$.
    - Logo, $\varphi(\mathrm{U})$ é vizinhança compacta de $\varphi(x)$.
3. Se M é localmente compacto, então $\varphi(\mathrm{M})$ é aberto em N.
    - Seja $y \in \varphi(\mathrm{M})$.
    - Como φ é mergulho, existe um único $x \in \mathrm{M}$ tal que $y = \varphi(x)$.
    - Como M é localmente compacto, existe V vizinhança compacta de x.
    - Como φ é contínua, então $\varphi(\mathrm{V})$ é vizinhança compacta de y.
    - Com isso, temos que $\varphi(\mathrm{M})$ é um subconjunto localmente compacto e denso de um espaço Hausdorff compacto.
    - Logo, $\varphi(\mathrm{M})$ é aberto.

Lema 1

Questão: Seja $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ a projeção na primeira coordenada, com Y compacto. Então π é fechado.

Resolução:

- Sejam $C \in X \times Y$ fechado e $x_0 \notin \pi(C)$.
- Para qualquer $y \in Y$, temos $(x_0, y) \notin C$.
- Tomemos $U_y \times V_y$ aberto de $X \times Y$ contendo (x_0, y) tal que $(U_y \times V_y) \cap C = \emptyset$.
- Como Y é compacto e (V_y) cobre Y, existem finitos $y_1, \ldots, y_n$ tais que $Y = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$.
- Defina
$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$$
- E note que
$$(U \times Y) \cap C = (U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}) \times (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}) \cap C = \emptyset$$
- Logo,
$$x_0 \in U \subset X \setminus \pi(C) \implies X \setminus \pi(C) \text{ é aberto}$$
- E $\pi(C)$ é fechado.

Homotopia

Exercício 5.2

Questão: Mostrar que a imagem contínua de um conjunto conexo por caminhos é conexo por caminhos.

Resolução:

- Seja $f : X \longrightarrow Y$ contínua e X conexo por caminhos.
- Assim, para todo $x_1, x_2 \in X$, existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ caminho de x_1 para x_2.
- Portanto,
$$\gamma' = f \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow f(X) \subset Y$$
é um caminho de $y_1 = f(x_1)$ a $y_2 = f(x_2)$. Note que γ' é contínua e $\gamma'(0) = f(\gamma(0)) = f(x_1)$ e $\gamma'(1) = f(\gamma(1)) = f(x_2)$.

Exercício 5.4

Questão: Mostrar que S^n é conexo por caminhos para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resolução:

- Considere $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow S^n$ dada por
$$f(x) = \frac{x}{\|x\|}$$
- Como f é contínua e $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ é conexo por caminhos, temos que S^n é conexo por caminhos (e, portanto, conexo).

Exercício 5.7

Questão: Mostrar que todo subconjunto conexo e aberto de $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos.

Resolução:

- Note que se as componentes conexas por caminhos são abertas, então o espaço é localmente conexo por caminhos.
- Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ conexo e aberto. Como S é conexo e localmente conexo por caminhos, segue que S é conexo por caminhos.

Exercício 5.8 (Seno do Topólogo)

Questão: Prove que o conjunto
$$S = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$$
conexo e não é conexo por caminhos.

Resolução:

1. Mostrar que S é conexo.
   - Defina $S_1 = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \leq 1\}$ e $S_2 = \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$. Note que S_1 e S_2 são conexos, porque são a imagem de uma função contínua definida num intervalo conexo.
   - Como $\overline{S_1} = S_2$, temos que $\overline{S_1} \cap S_2 \neq \emptyset$. Portanto, $S = S_1 \cup S_2$ é conexo.
2. Mostrar que S não é conexo por caminhos.
   - Suponha que exista um caminho $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ com ponto inicial $(0,0) \in S_2$ e ponto final em S_1 tal que $f_1(0) = 0, f_1(t) > 0$ e $f_2(t) = \sin(1/f_1(t))$ para $t > 0$.
   - Vamos mostrar que existe uma sequência $t_n \to 0$ tal que $f_2(t_n) = (-1)^n$, contradizendo a hipótese de que f é contínua.
   - Dado $n \in \mathbb{N}$, escolhemos $0 < y_0 < f_1(1/n)$ tal que $\sin(1/y_0) = (-1)^n$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, sabemos que existe $0 < x_0 < 1/n$ tal que $f_1(x_0) = y_0$. Escolha $t_n = x_0$.
   - Dessa forma, temos que $f_2(t_n) = (-1)^n$, que é descontínua. Logo, f não é contínua e temos que S não é conexo por caminhos.

Exercício 5.12

Questão: Mostrar que se M e N são contráteis, então $M \times N$ é contrátil.

Resolução:

1. Definição de contrátil.
   - Lembre que X é contrátil se existe mapa constante c tal que $H : \mathrm{id}_X \simeq c$, i.e., a identidade é homotopicamente nula.
2. Usar que M e N são contráteis.
   - Como M é contrátil, existe c_M tal que existe homotopia $H_M : \mathrm{id}_M \simeq c_M$. Analogamente, existe $H_N : \mathrm{id}_N \simeq c_N$.
3. Definir projeções e homotopia.
   - Defina
$$\pi_M : (M \times N) \times I \longrightarrow M, \quad \pi_M((x,y),t) = (x,t)$$
   - E, semelhantemente,
$$\pi_N : (M \times N) \times I \longrightarrow N, \quad \pi_N((x,y),t) = (y,t)$$
   - Tomemos $H : (M \times N) \times I \longrightarrow M \times N$ como $H = (H_M \circ \pi_M, H_N \circ \pi_N)$. Assim,
$$H((x,y),0) = (H_M(x,0), H_N(y,0)) = (x,y) = \mathrm{id}_{M\times N} H((x,y),1) = (H_M(x,1), H_N(y,1)) = (c_M, c_N) = c$$
   - Note que H_M, H_N, π_M, π_N são contínuas. Portanto, $H_M \circ \pi_M$ e $H_N \circ \pi_N$ são contínuas e, assim, H é contínua.

Exercício 5.14

Questão: Mostrar que o espaço de Sierpinski é contrátil.

Resolução:

- Seja $H : M \times [0,1] \longrightarrow M$ dada por
$$H(z,0) = z, \quad \forall\, z \in M \quad \text{e} \quad H(z,t) = x, \quad \forall\, z \in M,\ t \in (0,1]$$
- Note que $H(z,0) = \mathrm{id}_M$ e $H(z,1) = x$ é constante e H é contínua porque $H^{-1}(\{x\}) = \{(x,0)\} \cup (M \times (0,1])$ é aberto. Logo, o espaço de Sierpinski é contrátil.

Exercício 5.15

Questão: Mostrar que todo espaço contrátil é conexo por caminhos.

Resolução:

1. Aplicar definição.
   - Seja X contrátil. Então existe homotopia $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$ tal que $H : \mathrm{id}_X \simeq c$, em que c é mapa constante em X.
2. Criar caminhos de x_1 a c e de x_2 a c.
   - Definimos um caminho de x_1 a c tomando $\varphi(t) = H(x_1, t)$. Note que $\varphi(0) = H(x_1, 0) = x_1$ e $\varphi(1) = H(x_1, 1) = c$.
   - E um caminho de x_2 a c tomando $\psi(t) = H(x_2, t)$.

3. Inverter ψ e tomar concatenação para obter caminho de x_1 a x_2.
   - Defina $\gamma = \varphi * \psi^{-1}$ por
$$\gamma = \begin{cases} \varphi(2t), & t \in [0,1/2] \\ \psi^{-1}(2t-1), & t \in [1/2,1] \end{cases}$$
   - Logo, X é conexo por caminhos.

Exercício 5.16

Questão: Mostre que, se X é contrátil e Y é conexo por caminhos, então quaisquer dois mapas contínuos $f, g : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ são homotópicos.

Resolução:

1. Aplicar definição.
   - Seja X contrátil. Então existe homotopia $\mathrm{H}(x,0) = x$ e $\mathrm{H}(x,1) = c$ para todo $x \in \mathrm{X}$.
2. Todo mapa $\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ é homotópico a algum mapa constante.
   - Basta notar que $f \circ \mathrm{H} : \mathrm{X} \times \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{Y}$ é homotopia entre f e $f(c)$.
3. Quaisquer dois mapas constantes são homotópicos.
   - Sejam $f_1 \equiv y_1$ e $f_2 \equiv y_2$ mapas constantes de X para Y.
   - E seja $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathrm{Y}$ caminho de y_1 a y_2. Então $\mathrm{F}(x,t) = \gamma(t)$ é homotopia entre f_1 e f_2.
4. Usar que homotopia é relação de equivalência.
   - Portanto, todo mapa $\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ é homotópico a algum mapa constante e quaisquer dois mapas constantes são homotópicos.
   - Como homotopia é relação de equivalência, quaisquer dois mapas $\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ contínuos são homotópicos.

Exercício 5.18

Questão: Mostrar que S^n é um retrato de deformação de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Resolução:

1. Aplicar Definição.
   - Queremos mostrar que existe $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathrm{S}^n$ contínuo tal que $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathrm{S}^n}$ e $\mathrm{H} : i \circ r \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$, em que $i : \mathrm{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ é inclusão.
2. Construir retração.
   - Considere $r(x) = \frac{x}{||x||}$. Note que, se $x \in \mathrm{S}^n$, então $r(i(x)) = x$. Portanto, $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathrm{S}^n}$.
3. Construir homotopia.
   - Defina
$$\begin{aligned} \mathrm{H} : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathrm{I} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (x,t) &\longmapsto tx + (1-t)\frac{x}{||x||} \end{aligned}$$
   - Note que H é contínuo e satisfaz
$$\mathrm{H}(x,0) = \frac{x}{||x||} = i \circ r(x), \quad \mathrm{H}(x,1) = tx = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$$
   - Logo, S^n é um retrato de deformação de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Exercício 5.19

Questão: Mostrar que o retrato de um espaço contrátil é contrátil.

Resolução:

1. Aplicar definições.
   - Seja A um retrato de X, i.e., existe $r : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{A}$ contínuo tal que $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathrm{A}}$, em $i : \mathrm{A} \hookrightarrow \mathrm{X}$ é inclusão.
   - E suponha X contrátil. Ou seja, existe homotopia $\mathrm{H} : \mathrm{id}_{\mathrm{X}} \simeq c$.
2. Construir homotopia.
   - Considere $r \circ \mathrm{H}|_{\mathrm{A}\times\mathrm{I}} : \mathrm{A} \times \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{A}$. Note que é contínuo porque é composição de contínuos.
   - Além disso, $r \circ \mathrm{H}|_{\mathrm{A}\times\mathrm{I}}(x,0) = r(x) = x$ porque $x \in \mathrm{A}$. E também $r \circ \mathrm{H}|_{\mathrm{A}\times\mathrm{I}}(x,1) = r(c)$.
   - Logo, id_{A} é homotópico ao mapa constante $r(c)$.

Exercício 5.21

Questão: Mostre que os espaços

$$M = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$$

com a topologia induzida de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ com a topologia discreta não têm a mesma homotopia.

Resolução:

1. Supor que são homotopicamente equivalentes.
   - Seja $X = (M, \tau_{\mathbb{R}})$ e $Y = (M, \tau_{\mathbb{N}})$ o espaço com a topologia induzida de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ com a topologia discreta respectivamente.
   - Suponhamos, por contradição, que X e Y são homotopicamente equivalentes, i.e., existem

     $$f : X \longrightarrow Y \quad \text{e} \quad g : Y \longrightarrow X$$

     contínuas tais que $H : f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ e $F : g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$.
2. Usar compacidade de X para mostrar que $f(X)$ é finito.
   - Como X é compacto (qualquer aberto em torno do zero contém M com exceção de finitos pontos) e f é contínua, temos que $f(X)$ é compacto.
   - Mas, como Y é discreto e todo subespaço compacto de discreto é finito, temos que $f(X)$ é finito.
3. Mostrar que Y é finito.
   - Observe que $H(y, 0) = f(g(y))$ e $H(y, 1) = y$.
   - Como Y é discreto, H deve ser constante em subespaços conexos. Assim, como $\{y\} \times I$ é conexo, temos que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$.
   - Mas $f(X)$ é finito e $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_Y) = Y$. Portanto, Y é finito.
4. Derivar contradição usando número de componentes conexas por caminhos.
   - Note que X tem um número infinito de componentes conexas por caminhos, porque todo conjunto unitário é uma componente conexa por caminhos.
   - Por outro lado, um espaço discreto finito possui um número finito de componentes conexas por caminhos.
   - Mas equivalência homotópica preserva o número de componentes conexas por caminhos, o que contradiz nossa hipótese.