MA453 Topologia Geral - Exercícios P3

Adair Neto

26 de junho de 2023

6. Exemplos de Topologias: Ordem, Métrica, Produto e Quociente

Exercício 6.2

Questão: Seja $(\mathrm{M}_i, \tau_i)_{i\in \mathrm{I}}$ uma família de espaços topológicos. Mostre que cada M_i é homeomorfo a um subespaço de M.

Resolução:

1. Construir subespaço de M e função de projeção.
   - Fixemos $z \in \mathrm{M}$ e definamos
   $$\mathrm{Y}_i = \{x \in \mathrm{M} : x_j = z_j,\ \forall\, j \in \mathrm{I} \setminus \{i\}\}$$
   - Seja $p_i = \pi_i|_{\mathrm{Y}_i}$. Note que $p_i(y) = y_i$ para todo $y \in \mathrm{Y}_i$. Mostraremos que p_i é homeomorfismo entre Y_i e M_i.
2. Mostrar que p_i é injetora.
   - Sejam $x, y \in \mathrm{Y}_i$. Para todo $j \in \mathrm{I} \setminus \{i\}$, temos que $x_j = z_j = y_j$.
   - Caso $p_i(x) = p_i(y)$, temos que $x_i = y_i$. Portanto, $x = y$.
3. Mostrar que p_i é sobrejetora.
   - Seja $x_i \in \mathrm{M}_i$. Tomando $y \in \mathrm{Y}_i$, para todo $j \in \mathrm{I}$ temos
   $$y_j = \begin{cases} z_j, & j \neq i \\ x_i, & j = i \end{cases}$$
   - Portanto, $x_i = y_i = p_i(y)$ e p_i é sobrejetora.
4. Mostrar que p_i é contínua.
   - Como p_i é restrição de função contínua, temos que p_i é contínua.
5. Mostrar que p_i é mapa aberto.
   - Seja U aberto de Y_i. Como Y_i é subespaço de M, existe aberto V de M tal que $\mathrm{U} = \mathrm{V} \cap \mathrm{Y}_i$.
   - Da topologia produto, temos que existe $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ finito tal que
   $$\mathrm{V} = \bigcap_{j\in \mathrm{J}} \pi_j^{-1}(\mathrm{V}_j), \quad \mathrm{V}_j \text{ aberto em } \mathrm{M}_j$$
   - Assim,
   $$p_i(\mathrm{V} \cap \mathrm{Y}_i) = \bigcap_{j\in \mathrm{J}} p_i(\pi_j^{-1}(\mathrm{V}_j) \cap \mathrm{Y}_i)$$
   é aberto em M_i.

Exercício 6.7

Questão: Seja $\mathbb{R}^\infty$ o subconjunto de $\mathbb{R}^\omega$ consistindo de elementos $(x_1, x_2, \ldots)$ em que somente um número finito de x_i's é diferente de zero. Determine o fecho de $\mathbb{R}^\infty$ na topologia produto e na topologia das caixas.

Resolução:

1. Topologia produto.
   - Observe que um aberto de $\mathbb{R}^\omega$ é da forma
   $$\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 \times \cdots \mathrm{U}_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$
   em que cada U_i é aberto em $\mathbb{R}$.

- Seja $x \in \mathbb{R}^\omega$ e U um aberto (como acima) em volta de x.
- Se y é da forma $y = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, temos que $y \in \mathrm{U}$ e $y \in \mathbb{R}^\infty$.
- Isso mostra que $\mathbb{R}^\infty$ é denso em $\mathbb{R}^\omega$. Ou seja, $\overline{\mathbb{R}^\infty} = \mathbb{R}^\omega$.

2. Topologia das caixas.
   - Aqui, um aberto de $\mathbb{R}^\omega$ é da forma
   $$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \times \cdots \times \mathrm{V}_k \times \cdots$$
   em que cada V_i é aberto em $\mathbb{R}$.
   - Tomemos $x \notin \mathbb{R}^\infty$, i.e., $x_n \neq 0$, para infinitos índices n.
   - Assim, se
   $$\mathrm{V}_i = \begin{cases} (x_i - |x_i|/2,\ x_i + |x_i|/2), & x_i \neq 0 \\ (-1, 1), & x_i = 0 \end{cases}$$
   então $x \in \mathrm{V} = \prod \mathrm{V}_i$ e $\mathrm{V} \cap \mathbb{R}^\infty = \emptyset$.
   - Logo, $\mathbb{R}^\infty$ é fechado na topologia das caixas.

Exercício 6.11

Questão: Prove que as projeções canônicas em $\mathbb{R}^2$ não são funções fechadas.

Resolução:

Considere
$$\mathrm{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1/x\}$$
Então F é fechado, mas $\pi_1(\mathrm{F}) = (0, \infty)$ é aberto.

Exercício 6.13

Questão: Mostre que um espaço é Hausdorff sse. a diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathrm{X}\}$ é fechada em $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$.

Resolução:

1. ($\Rightarrow$) Seja $(x, y) \in \Delta^c$. Como X é Hausdorff, existem U e V abertos com $x \in \mathrm{U}$ e $y \in \mathrm{V}$ tais que $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset$. Logo, $(x, y) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V} \subset \Delta^c$.
2. ($\Leftarrow$) Seja $(x, y) \in \Delta^c$ (aberto, por hipótese). Então existe $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ aberto tais que $(x, y) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V} \subset \Delta^c$. Assim, $x \in \mathrm{U}$ e $y \in \mathrm{V}$ com $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset$. Logo, X é Hausdorff.

Exercício 6.14

Questão: Seja $(\mathrm{M}_i, \tau_i)_{i \in \Lambda}$ uma família de espaços topológicos. Suponha que existe $\Delta \subset \Lambda$ não vazio tal que M_i é trivial para todo $i \in \Lambda \setminus \Delta$. Mostre que $\prod_{i \in \Delta} \mathrm{M}_i$ é homeomorfo a $\prod_{i \in \Lambda} \mathrm{M}_i$.

Resolução:

Fixe $x_i \in \mathrm{M}_i$ e defina
$$\begin{aligned} \varphi : \prod_{j \in \Delta} \mathrm{M}_j &\longrightarrow \prod_{j \in \Lambda} \mathrm{M}_j \\ (z_j) &\longmapsto (y_j) \end{aligned}$$
em que
$$y_j = \begin{cases} z_j, & j \in \Delta \\ x_j, & j \in \Lambda \setminus \Delta \end{cases}$$

Note que φ e π são inversas.

Exercício 6.15

Questão: Assuma que, para todo $i \in \mathrm{I}$ temos que $a_i < b_i$. Mostre que $\prod_{i \in \mathrm{I}} [a_i, b_i]$ é homeomorfo a $[0, 1]^{\mathrm{I}}$.

Resolução:

- Sabemos que todo intervalo fechado $[a, b]$ é homeomorfo a $[0, 1]$.

- Sejam A_i e B_i espaços topológicos tais que cada $h_i : A_i \longrightarrow B_i$ é homeomorfismo, para todo $i \in I$.
- Construímos
$$h : A = \prod_{i \in I} A_i \longrightarrow B = \prod_{i \in I} B_i$$
dado por $h((x_i)) = (h_i(x_i))$.
- Verificar que h é bijeção.
- Como $\pi_i^B \circ h = h_i \circ \pi_i^A$ é contínua, segue da propriedade universal do produto que h é contínua. Analogamente (invertendo A e B no diagrama), temos que h^{-1} é contínua.
- Logo, h é homeomorfismo e, com isso, temos que $\prod_{i \in I}[a_i, b_i]$ é homeomorfo a $\prod_{i \in I}[0,1] = [0,1]^I$.

Propriedade universal do produto: Para todo espaço topológico A e toda função $h : A \longrightarrow B$, temos que h é contínua sse. para cada $i \in I$ temos que a componente $\pi_i \circ h : A \longrightarrow B_i$ é contínua.

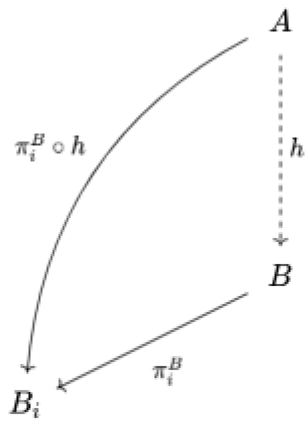

Figura 1: Propriedade universal do produto

Exercício 6.17

Questão: Seja X um espaço de Tychonoff. Mostre que, para cada $f \in \mathscr{C}_b(X)$ existe $\tilde{f} \in \mathscr{C}_b(\beta X)$ tal que $f = \tilde{f} \circ \varphi$.

Resolução:

1. Tomemos $a \in \beta X$. Podemos escrever $a = (a_\varphi)_{\varphi \in \mathscr{C}_b(X)}$.
2. Defina $\tilde{f}(a) = a_f$. Vejamos que $\tilde{f}$ estende f.
3. Seja $x \in X$. Então $\varphi(x) = (f(x))_{f \in \mathscr{C}_b(X)}$. Assim, $\tilde{f}(\varphi(x)) = f(x)$, como queríamos.
4. Note que $\tilde{f}$ é contínua pois $\tilde{f} = \pi_f$.

Outra forma: De fato, basta considerar $\tilde{f} = \pi_f : \prod_{g \in \mathscr{C}_b(X)} I_g \longrightarrow I_f$. Então $f = \pi_f \circ \varphi$.

Exercício 6.21

Questão: Mostre que:

1. $\mathbb{N}$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$.
2. Cada $n \in \mathbb{N}$ é ponto isolado em $\beta\mathbb{N}$, i.e., $\{n\}$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$.
3. Os únicos pontos isolados em $\beta\mathbb{N}$ são os pontos de $\mathbb{N}$.

Resolução:

1. $\mathbb{N}$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$.

   Pelo exercício 34 da lista de funções contínuas, $\varphi(\mathbb{N})$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$ sse. $\mathbb{N}$ é localmente compacto. Como $\mathbb{N}$ é localmente compacto, temos o resultado.
2. Cada $n \in \mathbb{N}$ é ponto isolado em $\beta\mathbb{N}$, i.e., $\{n\}$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$.

- Sabemos que a inclusão $\iota : A \hookrightarrow B$ é um mapa aberto sse. A é aberto em B.
- Como $\mathbb{N}$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$, temos que $\iota : \mathbb{N} \hookrightarrow \beta\mathbb{N}$ é mapa aberto.
- Assim, visto que $\{n\}$ é aberto em $\mathbb{N}$, segue que $\{n\}$ é aberto em $\beta\mathbb{N}$.

3. Os únicos pontos isolados em $\beta\mathbb{N}$ são os pontos de $\mathbb{N}$.

   Seja $s \in \beta\mathbb{N}$ e suponha $\{s\}$ aberto. Então,

$$\{s\} \cap \varphi(\mathbb{N}) \neq \emptyset \implies s \in \varphi(\mathbb{N})$$

   pois se $s \in \overline{\varphi(\mathbb{N})}$, então $U_s \cap \varphi(\mathbb{N}) \neq \emptyset$ para toda vizinhança U_s de s.

Exercício 6.22

Questão: Seja M um espaço de Tychonoff e (N, φ) uma compactificação de M com a seguinte propriedade: dados um espaço de Hausdorff compacto H e uma função contínua $f : M \longrightarrow H$, existe uma única funçao contínua tal que $f : N \longrightarrow H$ tal que $\tilde{f} \circ \varphi = f$.

Mostre que existe homeomorfismo $\tilde{\varphi} : \beta M \longrightarrow N$.

Resolução:

- Seja $\iota_1 : M \longrightarrow \beta M$ a inclusão. Como existe $f : \beta M \longrightarrow N$ extensão contínua de ι_1.
- Considere também $\iota_2 : M \longrightarrow \beta M$ inclusão. Então existe $g : N \longrightarrow \beta M$ extensão contínua de ι_2.
- Note que $f \circ g : Y \longrightarrow Y$ e $g \circ f : \beta M \longrightarrow \beta M$ são contínuas e $f \circ g|_X = g \circ f|_X = \mathrm{id}_X$.
- Logo, como M é denso em βM, temos que f e g são bijeções contínuas, uma a inversa da outra.

Exercício 6.24

Questão: Seja (M, d) um espaço métrico e defina

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

Mostre que

1. As funções reais $f(t) = \frac{t}{1+t}$ definida em $[0, +\infty)$ e $g(t) = \frac{t}{1-t}$ definida em $[0, 1)$ são crescentes.
2. $\tilde{d}$ é uma métrica em M que define os mesmos abertos que d.

Resolução:

1. Funções crescentes.

   Sejam $x_0 < x_1 \in [0, +\infty)$. Basta notar que

$$f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$$

   implica que f é crescente.

2. Métricas equivalentes.
   - Note que $\tilde{d}(x,y) \leq d(x,y)$.
   - Dado $a \in M$ e $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Então

$$\tilde{d}(x,a) < \delta \implies \frac{d(x,a)}{1 + d(x,a)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \implies d(x,a) < \varepsilon \implies B_{\tilde{d}}(x,a) \subset B_d(x,a)$$

   - Assim, temos que $B_d \subset B_{\tilde{d}}$ e $B_{\tilde{d}} \subset B_d$. Logo, as métricas são equivalentes.

Exercício 6.25

Questão: Mostre que para cada $p \geq 1$ a função

$$d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$$

define uma métrica que induz a topologia usual de $\mathbb{R}^n$. Como são os elementos da base da topologia para $n = 2$ e $p = 1$.

Resolução:

Observe que, se d é a métrica euclidiana,

$$d(x,y) \leq d_p(x,y) \leq \sqrt[p]{n}d(x,y)$$

Assim, temos que

$$\mathrm{B}_{d_p}(x,\varepsilon) \subset \mathrm{B}_d(x,\varepsilon) \quad \text{e} \quad \mathrm{B}_d(x,\varepsilon/\sqrt[p]{n}) \subset \mathrm{B}_{d_p}(x,\varepsilon)$$

Portanto, a topologia induzida por d_p é a mesma topologia induzida por d. Logo, d_p induz a topologia usual.

Os elementos básicos para $n = 2$ e $p = 1$ são losangos.

Exercício 6.26

Questão: Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que a topologia induzida por d é a menor topologia que faz d ser uma função contínua.

Resolução:

1. Seja X' um espaço topológico sobre o mesmo conjunto X, mas com outra topologia. E suponha que $d : \mathrm{X}' \times \mathrm{X}' \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.
2. Assim, para todo $x \in \mathrm{X}'$, a função $f(y) = d(x,y)$ é contínua.
3. Com isso, temos que as bolas em X' dadas por

$$\mathrm{B}_r(x) = \{y \in \mathrm{X}' : f(y) = d(x,y) < r\}$$

   são abertas em X'.
4. Como as bolas abertas formam uma base pra topologia de X, temos que todo aberto de X é aberto em X'. Portanto, a topologia em X' é mais fina que a topologia de X.

Exercício 6.27, 6.28, 6.29

Questão: Mostre que todo espaço métrico (M, d) é T_4.

Resolução:

1. Mostremos que M é T_1.
   - Sejam $x, y \in \mathrm{M}$ e $r = d(x,y)$.
   - Tomemos

$$\mathrm{U} = \mathrm{B}(x, r/3), \quad \mathrm{V} = (y, r/3)$$

   - Então $x \in \mathrm{U}$, $x \in \mathrm{V}^c$, $y \in \mathrm{V}$ e $y \in \mathrm{U}^c$.
2. Mostremos que M é normal.
   - Definimos para $\mathrm{A} \subset \mathrm{M}$ fechado

$$d(x,\mathrm{A}) = \inf_{y \in \mathrm{A}} d(x,y) = f(x)$$

   - Temos que f é contínua.
     - De fato, para todo $a \in \mathrm{A}$,

$$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \implies d(x,\mathrm{A}) \leq d(x,y) + d(y,\mathrm{A})$$

     - Analogamente,

$$d(y,\mathrm{A}) \leq d(x,y) + d(x,\mathrm{A})$$

     - Portanto,

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$$

     - O que mostra a continuidade.
   - Defina, para $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \mathrm{M}$ fechados disjuntos

$$g(x) = \frac{d(x,\mathrm{A})}{d(x,\mathrm{B}) + d(x,\mathrm{A})}$$

- Note que, se $A^c \cap B^c = \emptyset$, então A^c e B^c são fechados e, assim, A e B são abertos que separam A e B.
- Caso $A^c \cap B^c \neq \emptyset$, observe que

$$d(x, B) + d(x, A) = 0 \implies d(x, B) = 0 \quad \text{e} \quad d(x, A) = 0$$

- Assim, x é ponto de aderência de A e B, o que implica que $x \in A \cap B = \emptyset$, o que é absurdo.
- Com isso, temos que g é contínua.
- Observe que $g(A) \subset \{0\}$ e $g(B) \subset \{1\}$.
- Tomando $U = g^{-1}(-\infty, 1/3)$ e $V = g^{-1}(2/3, +\infty)$, temos que $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Exercício 6.30

Questão: Seja

$$\rho(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \min\{|x_n - y_n|,\ 1\}, \quad x = (x_n),\ y = (y_n)$$

a métrica uniforme em $\mathbb{R}^\omega$. Dado $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\omega$ e $0 < \varepsilon < 1$, considere

$$U(x, \varepsilon) = \prod (x_i - \varepsilon,\ x_i + \varepsilon)$$

1. Mostre que $U(x, \varepsilon) \neq B_\rho(x, \varepsilon)$.
2. Mostre que $U(x, \varepsilon)$ não é aberto na topologia uniforme.
3. Mostre que

$$B_\rho(x, \varepsilon) = \bigcup_{\delta < \varepsilon} U(x, \delta)$$

Resolução:

1. $U(x, \varepsilon) \neq B_\rho(x, \varepsilon)$.
   - Temos que que $U(x, \varepsilon) \subset B_\rho(x, \varepsilon)$, mas não o contrário. Considere, por exemplo, o ponto $x' = \left(x_n + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
   - De fato,

$$\rho(x, x') = \sup_{n \in \mathbb{N}} \min\left\{\left|x_n - x_n + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{n}\right|,\ 1\right\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\varepsilon\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| = \varepsilon$$

   - Por outro lado,

$$\left|x_n - x_n + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{n}\right| = \varepsilon\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \varepsilon \implies x_n + \varepsilon\left(1 - \frac{1}{n}\right) \in (x_n - \varepsilon,\ x_n + \varepsilon)$$

   - Logo, $x' \in U(x, \varepsilon)$, mas $x' \notin B_\rho(x, \varepsilon)$.
2. Mostre que $U(x, \varepsilon)$ não é aberto na topologia uniforme.
   - Vamos mostrar que não existe nenhuma bola aberta $B_\rho(x', \delta)$ contida em $U(x, \varepsilon)$.
   - Note que não importa quão pequeno seja $\delta > 0$, temos que $B_\rho(x', \delta) \setminus U(x, \varepsilon) \neq \emptyset$. Isso porque $x'_k + \delta/2 > x_k + \varepsilon$ para k suficientemente grande.
3. Mostre que

$$B_\rho(x, \varepsilon) = \bigcup_{\delta < \varepsilon} U(x, \delta)$$

   - Tome $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$.
   - Então $\rho(x, x') = \delta < \varepsilon$ e $|x_n - y_n| \leq \delta < \frac{\delta + \varepsilon}{2} < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $y \in U\left(x, \frac{\delta + \varepsilon}{2}\right)$.
   - Por outro lado, se $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$, então $y \in U(x, \delta)$ para algum $\delta \in (0, \varepsilon)$. Portanto, $|x_n - y_n| < \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\rho(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| \leq \delta < \varepsilon \implies y \in B_\rho(x, \varepsilon)$$

Exercício 6.37

Questão: Sejam (M, d) espaço métrico e $A \subset M$ um conjunto fechado. Mostre que toda função contínua $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ pode ser estendida a $M \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Veja que, em geral, não vale se A é aberto: encontre uma função contínua $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que não possa ser estendida.

Resolução:

- Seja $\pi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ a projeção na i-ésima coordenada. Como todo espaço métrico é normal, pelo Teorema de Extensão de Tietze, temos que $f_i := \pi_i \circ f$ pode ser extendida de M para $\mathbb{R}$.
- Assim, se $\tilde{f_i}$ é a extensão de f_i, temos que a extensão $\tilde{f}$ de f é dada por $(\tilde{f_1}, \ldots, \tilde{f_n})$.
- Contra-exemplo: Considere $f(x) = 1/x$.

Exercício 6.40

Questão: Mostre que o produto enumerável de espaços metrizáveis é metrizável.

Resolução:

1. Tomar métricas limitadas.

   Sejam $M_1, M_2, \ldots$ espaços metrizáveis. Como toda métrica é equivalente a uma métrica limitada, seja d_i uma métrica sobre M_i limitada por 1 que induz a topologia de M_i.
2. Definir métrica d em $M := \prod_{i=1}^{\infty} M_i$:
$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(x_i,y_i)}{2^i}$$
   em que $x = (x_1, x_2, \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots)$.
3. Verificar que d induz a topologia produto em M.

   Um aberto básico U na topologia produto restringe apenas uma quantidade finita de coordenadas e assim pode ser escrita como
$$U = B_{d_1}(x_1, \varepsilon_1) \times B_{d_2}(x_2, \varepsilon_2) \times \cdots \times B_{d_n}(x_n, \varepsilon_n) \times \prod_{k \geq n+1} M_k$$
   Tome ε tal que
$$\varepsilon = \min\left(\frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_2}{2^2}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{2^n}\right)$$
   Assim, se $d(x,y) < \varepsilon$, então $d_i(x_i,y_i) < \varepsilon_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Ou seja, $B_d(x, \varepsilon) \subset U$.

   Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, escolha N suficientemente grande tal que
$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$
   Então,
$$B_{d_1}\left(x_1, \frac{\varepsilon}{2N}\right) \times B_{d_2}\left(x_2, \frac{\varepsilon}{2N}\right) \times \cdots \times B_{d_n}\left(x_n, \frac{\varepsilon}{2N}\right) \times \prod_{k \geq n+1} M_k \subset B_d(x, \varepsilon)$$
   Logo, a métrica d induz a topologia produto em M.

Exercício 6.41

Questão: Sejam X e Y dois conjuntos ordenados na topologia da ordem. Mostre que se um mapa $f : X \longrightarrow Y$ é sobrejetor e preserva a ordem, então é um homeomorfismo.

Resolução:

- Observe que como f preserva a ordem, então f é injetora. E como f é sobrejetora por hipótese, existe inversa $g : Y \longrightarrow X$.
- Como f preserva a ordem e é bijetora, g também preserva a ordem.
- Chamemos de $L_a = \{x \in X : x <_X a\}$ e $R_a = \{x \in X : a <_X x\}$ os abertos básicos da topologia da ordem.
- Como a ordem é preservada por f, temos que $f^{-1}[L_a] = L_{g(a)}$. De fato,
$$x \in f^{-1}[L_a] \iff f(x) <_Y a \iff x = g(f(x)) <_X g(a) \iff x \in L_{g(a)}$$

- Analogamente, $f^{-1}[R_a] = R_{g(a)}$. Portanto, f ser uma bijeção que preserva a ordem implica que f é contínua. Como o mesmo é válido para g, temos que f é homeomorfismo.

Exercício 6.44

Questão: Sejam (M, τ) e (N, τ') dois espaços topológicos e $\pi : M \longrightarrow N$ uma aplicação contínua. Mostre que

1. Se existe uma função contínua $\sigma : N \longrightarrow M$ tal que $\pi \circ \sigma(x) = x$ para todo $x \in N$, então π é aplicação quociente.
2. Se π é aplicação quociente, então π é aberta (fechada) sse. $\pi^{-1}(\pi(U))$ é aberto (fechado) em M para cada U aberto (fechado).

Resolução:

1. Note que π tem inversa à direita e, assim, é sobrejetora.
2.
   1. ($\Leftarrow$) Como U é aberto e π é aberta, então $\pi(U)$ é aberto. Como π é contínua, $\pi^{-1}(\pi(U))$ é aberto.
   2. ($\Rightarrow$) Se $\pi^{-1}(\pi(U))$ é aberto em M, então, por definição da topologia quociente, $\pi(U)$ é aberto. Ou seja, π é mapa aberto.

      Lembrar que $\tau_\pi = \{G \subset N : \pi^{-1}(G) \text{ é aberto em } M\}$.

Exercício 6.45

Questão: Seja $X = [0, 1]$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}$, $Y = \{0, 1\}$ e $\pi : X \longrightarrow Y$ a função característica em $A = [1/2, 1]$. Mostre que

1. A topologia quociente em Y é $\tau_\pi = \{\emptyset, Y, \{0\}\}$ (espaço de Sierpinski).
2. π não é aberta nem fechada.

Resolução:

1. A topologia quociente em Y é $\tau_\pi = \{\emptyset, Y, \{0\}\}$ (espaço de Sierpinski).
   - Definimos $x \sim y$ sse. $\pi(x) = \pi(y)$.
   - Então $\tau_\pi = \{G \subset Y : \pi^{-1}(G) \text{ é aberto em } X\} = \{\emptyset, Y, \{0\}\}$.
2. π não é aberta nem fechada.
   - Se $(a, b) \subset [1/2, 1]$, então $\pi(a, b) = \{1\}$.
   - Se $[a, b] \subsetneq [0, 1/2]$, então $\pi[a, b] = \{0\}$.
   - Logo, π não é aberta nem fechada.

7. Sequências, Redes e Filtros

Exercício 1

Questão: Mostre que

1. Se uma rede $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x, então qualquer subrede também converge a x.
2. Se x é ponto de acumulação de uma subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, então x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Resolução:

1. Suponha que $x_\lambda \to x$, i.e., para todo $U \in \mathscr{U}_x$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq \lambda_0 \implies x_\lambda \in U$.

   Assim, se $(x_{\varphi(\theta)})_{\theta\in\Theta}$ é subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, para todo $\lambda \in \Lambda$ existe $\theta_0 \in \Theta$ tal que $\varphi(\theta_0) \geq \lambda$.

   Ou seja, $\theta \geq \theta_0 \implies x_{\varphi(\theta)} \in U$.
2. Seja x ponto de acumulação de $(x_{\varphi(\theta)})_{\theta\in\Theta}$ e lembre que x é ponto de acumulação de uma rede sse. existe subrede convergindo para x.

   Como x é ponto de acumulação de $(x_{\varphi(\theta)})_{\theta\in\Theta}$, existe subrede de $(x_{\varphi(\theta)})_{\theta\in\Theta}$ que converge para x. Mas uma subrede de $(x_{\varphi(\theta)})_{\theta\in\Theta}$ é subrede de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Logo, x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Exercício 9

Questão: Seja $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede de M e $\mathscr{B} = \{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ para $B_\lambda = \{x_\mu : \lambda \leq \mu\}$. Mostre que

1. $x_\lambda \to x$ sse. $\mathscr{B} \to x$.
2. x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sse. x é ponto de acumulação de $\mathscr{B}$.
3. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é rede universal sse. o filtro gerado por $\mathscr{B}$ é um ultrafiltro.

Resolução:

1. $x_\lambda \to x$ sse. $\mathscr{B} \to x$.
   1. ($\Rightarrow$) Suponha que $x_\lambda \to x$, i.e., para todo $U \in \mathscr{U}_x$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\lambda_0 \le \lambda \implies x_\lambda \in U$.
      Seja $U \in \mathscr{U}_x$ e λ_0 como acima. Tome $B_{\lambda_0} \in \mathscr{B}$, $B_{\lambda_0} = \{x_\lambda : \lambda_0 \le \lambda\}$. Assim, $B_{\lambda_0} \subset U$.
   2. ($\Leftarrow$) Suponha que $\mathscr{B} \to x$, i.e., para todo $U \in \mathscr{U}_x$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subset U$.
      Ou seja, existe $B_{\lambda_0} = \{x_\lambda : \lambda_0 \le \lambda\} \subset U$. Isto é, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\lambda_0 \le \lambda \implies x_\lambda \in U$.
2. x é ponto de acumulação de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sse. x é ponto de acumulação de $\mathscr{B}$.
   1. ($\Rightarrow$) Suponha que x é ponto de acumulação de (x_λ), i.e., dados $U \in \mathscr{U}_x$ e $\lambda_0 \in \Lambda$, existe $\lambda \ge \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$.
      Dado $B_{\lambda_0} \in \mathscr{B}$, $B_{\lambda_0} = \{x_\lambda : \lambda_0 \le \lambda\}$, sabemos que existe $\lambda \ge \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$. Ou seja, $U \cap B_{\lambda_0} \neq \emptyset$.
   2. ($\Leftarrow$) Suponha que x é ponto de acumulação de $\mathscr{B}$, i.e., dados $U \in \mathscr{U}_x$ e $B \in \mathscr{B}$, temos que $U \cap B \neq \emptyset$.
      Assim, dado $\lambda_0 \in \Lambda$, temos que $B_{\lambda_0} \in \mathscr{B}$ e $U \cap B_{\lambda_0} \neq \emptyset$. Como $B_{\lambda_0} = \{x_\lambda : \lambda_0 \le \lambda\}$, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$.
3. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é rede universal sse. o filtro gerado por $\mathscr{B}$ é um ultrafiltro.
   1. ($\Rightarrow$) Seja (x_λ) rede universal, i.e., para todo $A \subset M$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que
      $$\{x_\lambda : \lambda \ge \lambda_0\} \subset A \quad \text{ou} \quad \{x_\lambda : \lambda \ge \lambda_0\} \subset A^c$$
      Assim, dado $A \subset M$, temos que $B_{\lambda_0} \subset A$ ou $B_{\lambda_0} \subset A^c$. Pela definição de filtros, $A \in \mathscr{B}$ ou $A^c \in \mathscr{B}$. Logo, $\mathscr{B}$ é ultrafiltro.
   2. ($\Leftarrow$) Suponha que $\mathscr{B}$ é ultrafiltro, i.e., para todo $A \subset M$, temos que $A \in \mathscr{B}$ ou $A^c \in \mathscr{B}$.
      Ou seja, $A = B_{\lambda_0}$ ou $A^c = B_{\lambda_0}$. Isto é, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\{x_\lambda : \lambda \ge \lambda_0\} \subset A$ ou $\{x_\lambda : \lambda \ge \lambda_0\} \subset A^c$.

Exercício 15

Questão: Seja $X = \prod X_i$. Mostre que $x_n \to x$ em X sse. $\pi_i(x_n) \to \pi_i(x)$ em X_i para todo i.

Resolução:

($\Rightarrow$) Suponha que $x_n \to x$ e que U é vizinhança de $\pi_j(x)$, j fixo. Defina

$$B_i = \begin{cases} U, & i = j \\ X_i, & i \neq j \end{cases}$$

Note que $B = \prod B_i$ é vizinhança de x em X.

Como a sequência (x_n) converge para x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B$ para todo $n > N$.

Assim, $\pi_i(x_n) \in B_i$ para todo i. Particularmente, $\pi_j(x_n) \in B_j = U$.

Logo, $\pi_j(x_n) \in \pi_j(x)$ para todo j.

($\Leftarrow$) Suponha que $\pi_i(x_n) \to \pi_i(x)$ para todo i. E seja U uma vizinhança de x em X. Então existe um elemento básico $B = \prod U_i$ de X em que $x \in B$ e $B \subset U$.

Como X é a topologia produto, cada U_i é aberto, mas apenas um número finito deles é diferente de X_i. Seja $J \subset I$ finito tal que $U_i = X_i$ para todo $i \in I \setminus J$.

Dado $j \in J$, temos que $\pi_j(x) \in U_j$. Portanto, U_j é uma vizinhança de $\pi_j(x)$. Assim, como $(\pi_j(x_n))$ converge, existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_j(x_n) \in U_j$ para todo $n > N_j$.

Seja $N = \max_{i\in J} N_i$ (o que existe porque J é finito). Considere qualquer $n > N$ e $i \in I$.

- Se $i \in J$, então $n > N > N_j$, então $\pi_i(x_n) \in U_i$.
- Se $i \notin J$, então $\pi_i(x_n) \in X_i = U_i$.
- Em ambos os casos, $\pi_i(x_n) \in U_i$.

Ou seja, $x_n \in \prod U_i = B$. Portanto, como $B \subset U$, temos que $x_n \in U$. Logo $x_n \to x$.

Exercício 16

Questão: Seja $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ e

$$\mathscr{F} = \{\chi_A : A \subset \mathbb{R},\ A \text{ finito}\} \subset X$$

Considere a métrica $\bar{d}(x, y) = \inf\{1, d(x, y)\}$. Mostre que

1. $f_n \to f$ em X sse. $f_n(x) \to f(x)$ em $\mathbb{R}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.
2. $\chi_{\mathbb{R}} \in \overline{\mathscr{F}}$.
3. Não existe nenhuma sequência $(\chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ tal que $\chi_{A_n} \to \chi_{\mathbb{R}}$.

Resolução:

1. $f_n \to f$ em X sse. $f_n(x) \to f(x)$ em $\mathbb{R}$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

   ($\Rightarrow$) Suponha que $f_n \to f$ em X. Então $\pi_t(f_n) \to \pi_t(f)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, i.e., $f_n(t) \to f(t)$.

   ($\Leftarrow$) Seja um aberto em X tal que $f \in U$. Da definição da topologia produto, existem $t_1, \ldots, t_k$ e $\varepsilon > 0$ tais que

   $$f \in \bigcap i = 1^k \pi_{t_i}^{-1}(f(t_i) - \varepsilon, f(t_i) + \varepsilon) \subset U$$

   Note que para cada $i = 1, \ldots, k$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_i \implies |f_n(t_i) - f(t_i)| < \varepsilon$. Tome $n_0 = \max_i n_i$. Assim, $n \geq n_0 \implies f_n(t_i) \in (f(t_i) - \varepsilon, f(t_i) + \varepsilon)$ para todo i. Então

   $$f_n \in \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{t_i}^{-1}(f(t_i) - \varepsilon, f(t_i) + \varepsilon) \subset U$$

   Como U é arbitrário, temos que $f_n \to f$.

2. $\chi_{\mathbb{R}} \in \overline{\mathscr{F}}$.

   Seja U um aberto de X tal que $\chi_{\mathbb{R}} \in U$. Da topologia produto temos que existem $t_1, \ldots, t_k$ e $\delta > 0$ tais que

   $$f \in \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{t_i}^{-1}(1 - \delta, 1 + \delta) \subset U$$

   Se $A = \{t_1, \ldots, t_k\}$, então

   $$\chi_A \in \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{t_i}^{-1}(1 - \delta, 1 + \delta) \subset U$$

3. Não existe nenhuma sequência $(\chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ tal que $\chi_{A_n} \to \chi_{\mathbb{R}}$.

   Como $A = \bigcup_n A_n$ é enumerável, existe $t_0 \in \mathbb{R} \setminus A$. Portanto, $\chi_{A_n}(t_0) = 0$ para todo n. Logo, $\chi_{A_n}(t_0) \not\to 1$ e $\chi_{A_n} \not\to \chi_A$.

   Observe que se X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, tomando uma base enumerável $\mathscr{B} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ e definindo $V_n = \bigcap_{j=1}^{n} U_j$, podemos encontrar $\chi_{A_n} \in V_n \cap \mathscr{F}$. Assim, podemos construir uma sequência $(\chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\chi_{A_n} \to \chi_{\mathbb{R}}$.