

փոփոխականների ընդհանուր շաղկապի հայտանիշ

Կերպարենի մեկնի գծային ռեգրեսիայի

$$Y = X\beta^* + \xi$$

Տողերը և գիծերը, որ X -ը ոչ սահմանափակ է, իսկ ξ -ն սահմանափակ՝ 0 ժգիմով և $E[\xi_j^2] = \sigma^2, \forall j$:
Կերպարենի նաև, որ ξ -ի կորրելիացիոն ոչ կորելացիոն են, այսինքն ξ -ի կովարիանս մատրիցն է $\text{Var}[\xi] = \sigma^2 \cdot I_n$.

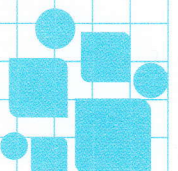
Պիցում ունենի $\{1, \dots, p\}$ փաթեթ կերպարացմաններ՝ S_1, S_2, \dots, S_m : Կաճայական $S \in \{S_1, \dots, S_m\}$ -ի համար կարող ենի հաշվել ն.գ.գ.-ն հաշվի առնելով թիայն այն բացարձակ փոփոխականները, որոնք ինդեքսը պարկանում է S -ին՝

$$\hat{\beta}^S = (X_S^T X_S)^{-1} X_S^T Y$$

Հարց Ինարավոր է արդյո՞ք $\hat{\beta}^{S_1}, \dots, \hat{\beta}^{S_m}$ գնահատականներից ընտրել լավագույնը:

Իհարկե, հարցին պատասխանելու համար անհրաժեշտ է ճշրել թե ինչ ենի հասկանում լավագույն ասելով: Պիսելի նպատակահարմար է լավագույն համարել այն գնահատականը, որի ռիսկը նվազագույնն է: $\hat{\beta}^S$ -ի ռիսկը կառահանելով այսպես

$$R(S) = E[\|X_S \hat{\beta}^S - X \beta^*\|^2]:$$



Մարդիկ հայտնաբերել են հետևյալ թեորեմի վրա:

Թեորեմ Կախարական $S \subset \{1, \dots, p\}$ -ի համար,

$$\hat{R}(S) = \|Y - X_S \hat{\beta}^S\|^2 + 2\sigma^2 |S| - n\sigma^2$$

պարահական թեորեմ (կամ վիճակներն) $R(S)$ -ի անշեղ գնահատական է:

(Նշարկ $|S|$ -ով եւս նշանակել S -ի փարքերի քանակը:)

Նպաստ

Գիտենք, որ $X_S \hat{\beta}^S = P_S Y$, որտեղ P_S -ը պրոյեկտորն է X_S -ի սյունների ծնված փարածության վրա:

Հետևաբար, ի կողմից

$$\begin{aligned} R(S) &= \mathbb{E}[\|P_S Y - X \beta^*\|^2] = \mathbb{E}[\|(P_S - I)X \beta^* + P_S \xi\|^2] \\ &= \mathbb{E}[\|(P_S - I)X \beta^*\|^2 + 2\langle (P_S - I)X \beta^*, P_S \xi \rangle + \|P_S \xi\|^2] \\ &= \|(P_S - I)X \beta^*\|^2 + \mathbb{E}[\|P_S \xi\|^2] \\ &= \|(P_S - I)X \beta^*\|^2 + \sigma^2 |S|. \end{aligned}$$

Վրա կողմից,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{R}(S)] &= \mathbb{E}[\|Y - P_S Y\|^2] + 2\sigma^2 |S| - n\sigma^2 \\ &= \mathbb{E}[\|(I - P_S)X \beta^* + (I - P_S)\xi\|^2] + 2\sigma^2 |S| - n\sigma^2 \\ &= \|(I - P_S)X \beta^*\|^2 + \mathbb{E}[\|(I - P_S)\xi\|^2] + 2\sigma^2 |S| - n\sigma^2 \\ &= \|(I - P_S)X \beta^*\|^2 + (n - |S|)\sigma^2 + 2\sigma^2 |S| - n\sigma^2 \\ &= R(S) \quad \square \end{aligned}$$

