

Իրենց հետևի որ դիտարկում ենք հետևյալ ճառագիծը՝

$$(1) \quad Y = X\beta^* + \xi \quad \Leftrightarrow \quad Y_i = X_i \cdot \beta^* + \xi_i; \quad i=1, \dots, n$$

Չիստեպես կենթադրենք, որ բաժանարարում է հետևյալ պայմանը՝

ՊԱՅՄԱՆ (Ա)

- X ճառագիծը պարամետրական է և $X^T \cdot X$ -ը հակադարձելի ճառագիծ է:
- $E[\xi_i] = 0$ և $\text{Var}[\xi_i] = \sigma^2 < +\infty$ բոլոր i -երի համար: Քիչ քանակությամբ ξ_1, \dots, ξ_n -ը ինքնուրույն են:

Հիշեցնենք, որ նվազագույն փոփոխությունների գնահատականը սահմանվում է որպես

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &\in \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\text{argmin}} \quad \|Y - X\beta\|_2^2 \\ &= \underset{\beta \in \mathbb{R}^p}{\text{argmin}} \quad \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i \beta)^2 \end{aligned}$$

և հաշվում է

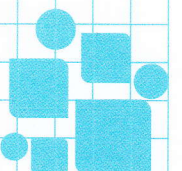
$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

բանաչկում: Վերջ հետադիմում է թե ինչքանով է այս գնահատականը ճոր հրակամ β^* արժեքին:

ԹԵՈՐԵՄ (Ա) պայմանի դեպքում՝

$$1) \quad \hat{\beta} \text{-ը } \beta^* \text{-ի անշեղ գնահատական է, այսինքն } E[\hat{\beta}] = \beta^*$$

$$2) \quad \hat{\beta} \text{-ի կոմպոնենտների ճառագիծը հաշվում է հետևյալ բանաչկում } \text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}:$$



6

Նպասնայր

1) Բանի որ $Y = X\beta^* + \xi$, ունենալ

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X^T X)^{-1} X^T Y \\ &= (X^T X)^{-1} X^T (X\beta^* + \xi) \\ &= (X^T X)^{-1} X^T X \beta^* + (X^T X)^{-1} X^T \xi \\ &= \beta^* + (X^T X)^{-1} X^T \xi\end{aligned}$$

Արանիդ հեղանակ 5 (օգրագործելով X -ի ոչ պարահանի լիներ), որ

$$E[\hat{\beta}] = \beta^* + (X^T X)^{-1} X^T \underbrace{E[\xi]}_{=0} = \beta^*$$

2) Օգրագործելով 1)-Տանում արանլում $\hat{\beta} = \beta^* + (X^T X)^{-1} X^T \xi$ Բանալեզ, ունենալ

$$\begin{aligned}\text{Var}[\hat{\beta}] &= \text{Var}[\hat{\beta} - \beta^*] = \text{Var}[(X^T X)^{-1} X^T \xi] \\ &= E[(X^T X)^{-1} X^T \xi \cdot \xi^T X (X^T X)^{-1}] \\ &= (X^T X)^{-1} X^T E[\xi \cdot \xi^T] X (X^T X)^{-1} \\ &= (X^T X)^{-1} X^T (\sigma^2 I_n) X (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T X (X^T X)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1}\end{aligned}$$

Պիտրողարթուններ

1. Թեորեմի 1-ին Տանք պնդում 5, որ երե կարելի լիներ արանալ (1)-Տորելի անվերզ Բանալով պարահանի իրահանալումներ և անեն իրահանալում հանալ հալել $\hat{\beta}$ -ը, ապա արանալ $\hat{\beta}$ -երի իդրիե հանալ կլիներ β^* -ի (պահիվն պարանելրի իդր պրեդիկն)։

2. Զեկարենդ, որ $X^T X$ ճարտիչի ընդհանուր դարձրը գրված է հետևյալ բանաձևով՝

$$(X^T X)_{j,j'} = \sum_{i=1}^n X_{ij} X_{ij'} = n \times \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ij} X_{ij'} \right)$$

Ամբողջությամբ փակագծերի մեջ վերցրած արտահայտությունը սահմանափակ է նույնիսկ երբ n -ը չգրված է $+\infty$: Ինքնահար, $X^T X \approx n \cdot M$, որտեղ M -ը n -ից անկախ է: Պաշտպանված է, որ

$$E[(\hat{\beta}_j - \beta_j^*)^2] \approx \frac{M_{jj}^{-1}}{n} \quad \forall j \in \{1, \dots, p\}:$$

Այսինքն, $\hat{\beta}$ -ը β^* -ի ունակային գնահատականն է, ընդ որում $\hat{\beta}$ -ը չգրված է β^* -ին բաժանանքին արագ $\frac{1}{n}$ -ով արագացած:

Զ. Բ. Գ.-ի ավելի խորացված հարկադրումները ուսումնասիրելու համար հարկավոր է ծրագրել լրացուցիչ պայմաններ:

ՊԱՅՄԱՆ (F)

• ξ_1, \dots, ξ_n -ը ինքնուրույն անկախ են և ունենեն Գաուսյան բաշխում՝ $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$:

ԹԵՈՐԵՄ (F) պայմանի դեպքում ծիշը են հետևյալ պնդումները՝

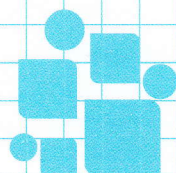
1) $\hat{\beta}$ ունի Գաուսյան բաշխում $\mathcal{N}(\beta^*, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$:

2) Եթե սահմանված որպես չգրված σ^2 -ի գնահատական

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\|Y - X\hat{\beta}\|^2}{n-p} = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n (Y_i - X_i \hat{\beta})^2$$

այսինքն $\frac{(n-p)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ պարահանված ճեմարցումն ունի χ^2_{n-p} բաշխում:

3) $\hat{\beta}$ -ն անկախ է $\hat{\sigma}^2$ -ից:



8

Հիշեցում բազմաչափ Գաուսյան բաշխման մասին

Պիտե՞ք μ -ն p -չափանի վեկտոր է և Σ -ն $p \times p$ չափանի մատրից: Եթե Σ -ն փռելի է և դրական որոշված, ապա կանգնե՞նք p -չափանի Գաուսյան բաշխում՝ μ միջինով և Σ կովարիանսի մատրիցով, այն բաշխումը, որի խտության ֆունկցիան է

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\} \\ \forall x \in \mathbb{R}^p \end{cases}$$

Նյա բաշխումը կհշանակե՞նք $\mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ -ով:

Հատկություններ

- 1) Եթե X -ի բաշխումն է $\mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$, ապա $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \Sigma_{jj})$.
- 2) Եթե $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ պարահական վեկտոր է, $a \in \mathbb{R}^m$ և $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ -ն ոչ պարահական վեկտոր և մատրից են, ապա $a + B \cdot X$ -ը Գաուսյան վեկտոր է $\mathcal{N}_m(a + B\mu, B\Sigma B^T)$:
- 3) Եթե $X = \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}$ -ը Գաուսյան վեկտոր է և $\text{Cov}(Y, Z) = 0$ ապա Y -ը և Z -ը անկախ են:
- 4) Եթե $X \sim \mathcal{N}_k(0, I)$, ապա $\|X\|^2 = X_1^2 + \dots + X_k^2$ պարահական յեճարյունն ունի χ_k^2 բաշխում:
- 5) Եթե $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ և $\eta \sim \chi_k^2$ և ξ -ն անկախ է η -ից, ապա $\frac{\xi}{\sqrt{\eta/m}}$ պարահական յեճարյունն ունի Ստյուդենտի t_m բաշխում: