

① ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Վիճակագրության հիմնական նպատակն է վերլուծել ցուցանիշները առարկաներից ստացված տվյալները: Վերլուծության արդյունքում ստեղծվում է տվյալների խզից ցուցանիշների (օգտակար) բնութագրություններ՝ ազդանշաններ, և (անօգուտ) աղծուկներ:

Տվյալները հիմնականում ներկայանում են հետևյալ տեսքով: Պարսեական ձևով բնութագրվում  $n$  անհատի վրա կատարվում է  $p$  չափումներ: Օրինակ՝ աշխարհի ցուցանիշները կազմում են համախառն ներքին արդյունք, կրթականության մակարդակ, ինչ ընդհանուր խառնուրդի համաձայն երկրանների քանակ, կյանքի ժողովրդագրություն, և այլն: Ստացվում է  $p$  աղյուսակ

$$x_1^1, \dots, x_1^p$$

$$x_2^1, \dots, x_2^p$$

$$\vdots$$

$$x_n^1, \dots, x_n^p$$

Այս աղյուսակի առաջ ներկայացվում է ինչ անհատ (այս օրինակում՝ երկիր), իսկ առաջին սյունիկը՝ ինչ չափումներ (այս օրինակում՝ ՇՆԱ, կրթ. մակարդակ, և այլն):

Ենթադրելով նույն անհատների վրա կատարվել է ևս ինչ չափումներ, որը նշանակվում է  $y_1, \dots, y_n$  ընդհանուր օրինակում դա կարող է լինել ինչևիցե աշխարհագրություն:

Պեզդեպիսիս անհատի նպատակն է՝ բացահայտել



② Կայք այս նոր հարկանիշի  $y$ -ի և  $x^1, \dots, x^p$  հարկանիշների միջև: Նախորաբար կիրառված են հետևյալ ելքայքները՝

$x^1, \dots, x^p$  — բացարձակ փոփոխականներ

$y$  — բացարձակ կամ բացարձակացված ներքին փոփոխական:

Իրականացնել նպատակն է գրելու ի ֆունկցիա՝

$$f: (x^1, \dots, x^p) \mapsto z \in \mathbb{R}$$

այնպիսին որ  $f(x^1, \dots, x^p)$ -ն ծուր է  $y$ -ի բոլոր երկրների համար:

## ② ՄԱՐԵՍԱՏԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼ

Ընթերցողը առհասարակ համար ներմուծված են վեկտորական նշանակումներ՝

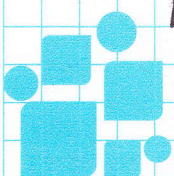
$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \dots & x_n^p \end{bmatrix}$$

Գծաչի օտարերկրյա ղեկավար զանգված ենթ, որ առե  $y_i$  ծուրարկվի որպես ինչ-որ գծաչի ֆունկցիա  $x_1^1, \dots, x_i^p$ -ից, այսինքն

$$y_i = \sum_{j=1}^p \beta_j^* x_i^j + \xi_i \quad i=1, \dots, n$$

Այսպես  $\beta^* = \begin{bmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_p^* \end{bmatrix}$  առհասարակ վեկտոր է  $\mathbb{R}^p$ -ից:

$(\xi_1, \dots, \xi_n)$  -ը ծուրարկման սխալներն են, որը առհասարակ առնվում են առանց և համարում պարահան:





Ասի հանգեցնում է հետևյալ ճորտի

$$(1) \quad y = X\beta^* + \xi \quad \xi \stackrel{iid}{\sim} P \text{ s.t. } E[\xi_i] = 0 \\ \text{Var}[\xi_i] = \sigma^2$$

Նույնատիպը նպատակն է գնահատել  $\beta^*$ -ը ելնելով  $(y, X)$  դիտարկումներից:

(1)-ը կոչվում է գծային ռեգրեսիայի ճորտ:

### 3. ՆԿԱԶԱԳՈՒՅՆ ՔԱՌԱԿՈՒՄԻՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴ

Ասի հանում

հետևյալ օպերիացիայի ինորի հաճախակի լուծում կոչվում է նվազագույն զանախությունից գնահատական

$$(2) \quad \hat{\beta} \in \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^p} \|Y - X\beta\|_2^2$$

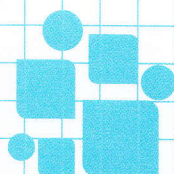
Նկատելով, որ ն.գ.գ.-ն որոշվում է ոչ միայն ճորտով:

Ասիայն (2) ինորի հաճախակի երկու լուծումների հաճար՝  $\hat{\beta}$  և  $\hat{\beta}'$ , ճիշտ է հետևյալ համաարարչումը՝  $X\hat{\beta} = X\hat{\beta}'$ :

Հերևաբար, եթե  $X$  մատրիցի սյուները գծերն անկախ են, ապա (2)-ի լուծումը միակն է: Նիկելն, այն կարող է գրվել բացահայտ տեսքով:

Նեմեն եթե  $X^T \cdot X$  մատրիցը հակադարձելի է, ապա (2)-ի լուծումը միակն է և այն որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝  $\hat{\beta} = (X^T \cdot X)^{-1} X^T \cdot Y$ .

Նպատակ նշանակելով  $g(\beta) = \|Y - X\beta\|_2^2$ .





4

$g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  առաջին ֆունկցիա է: Նրա խնդրանք կերպը պետք է բավարարի  $\nabla g(\hat{\beta}) = 0$  պայմանին: Իրականում, որ եվկլիդեսյան նորմի բավարարում է  $\|v\|_2^2 = v^T \cdot v$  համապատասխան: Տեքնիկաբար

$$\begin{aligned}\nabla g(\beta) &= \nabla ((Y - X\beta)^T (Y - X\beta)) \\ &= \nabla (Y^T Y - 2Y^T X\beta + \beta^T (X^T X)\beta) \\ &= -2(Y^T X)^T + 2(X^T X)\beta\end{aligned}$$

Արանքից բխում է, որ

$$\begin{aligned}\nabla g(\hat{\beta}) &= 0 \iff X^T Y = (X^T X) \hat{\beta} \\ &\iff (X^T X)^{-1} (X^T Y) = \hat{\beta} \quad \square\end{aligned}$$

Օգտակար է նաև Ն.Ֆ.Գ.-ի երկրաչափական յեղնաբանությունը: Ներմուծենք

$$E = \text{Span}\{x^1, \dots, x^p\} \subset \mathbb{R}^n$$

գծային տարածություն՝ ձևավորված  $X$  մարրիցի սյուների հանրահայտի վեկտորներով: Բնականաբար,  $X\beta$ -ն պարկանում է  $E$ -ին, կաճացական  $\beta \in \mathbb{R}^p$ -ի համար: Խնդրաբար, լռիչելով (2) խնդիրը ձևով գրվում է՝  $E$  ենթատարածության յեղ  $Y$ -ին ամենահարկերը:

Եթե նշանակենք  $\hat{v} = X\hat{\beta}$ , ապա

$$\hat{v} \in \arg \min_{v \in E} \|Y - v\|_2^2$$

Վերջին խնդրի լռիչումը գրելու համար բավական է հաշվել  $Y$ -ի պրոյեկցիան  $E$  ենթատարածության վրա՝

$$\hat{v} = \text{Proj}_E(Y)$$

իսկապ  $\text{Ն.Ֆ.Գ.-ն}$  բավարարում է  $X\hat{\beta} = \text{Proj}_E(Y)$  նայնությունը: