Econometrics with Python

Olivér Nagy

John von Neumann University - MNB Institute
Central Bank of Hungary

2023. október 4.

Nagy számok törvényei

Chebychev's Weak Law of Large Numbers (WLLN)

Ha $X_1, ..., X_n$ független, azonos eloszlású (**i.i.d.**) véletlen változók és feltételezzük, hogy

$$\mathbb{E}[X_n] < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$$

akkor:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\textbf{p}} \mu$$

Kolmogorov's Strong Law of Large Numbers (SLLN)

Ha $X_1, ..., X_n$ független, azonos eloszlású (**i.i.d.**) véletlen változók és feltételezzük, hogy

$$\mathbb{E}[X_n] < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$$

akkor:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\textbf{a.s.}} \mu$$

Iterált logaritmus

Law of the iterated logarithm (LIL)

Legyenek $X_1, ..., X_n$ független, azonos eloszlású (**i.i.d.**) véletlen változók, 0 várható értékkel, és egységnyi varianciával. Legyen $S_n = X_1 + ... + X_n$. Ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n \ln \ln n}} = 1 \quad a.s.$$

Az iterált logaritmus tétel a nagy számok törvényei és a centrális határeloszlás tételek között helyezkedik el. Az előbbiek "pontszerűen", az utóbbiak eloszlás szintjén tudnak információval szolgálni véletlen változók sorozatának konvergenciájáról. E kettó között, a LIL egy sávot jelöl ki, amelyen belül fog tartózkodni a sorozatunk, ahogy növeljük az elemszámot.

Centrális határeloszlás tétel

Lindeberg-Levy Central Limit Theorem (CLT)

Legyenek $X_1, ..., X_n$ független, azonos eloszlású (**i.i.d.**) véletlen változók, és feltételezzük, hogy:

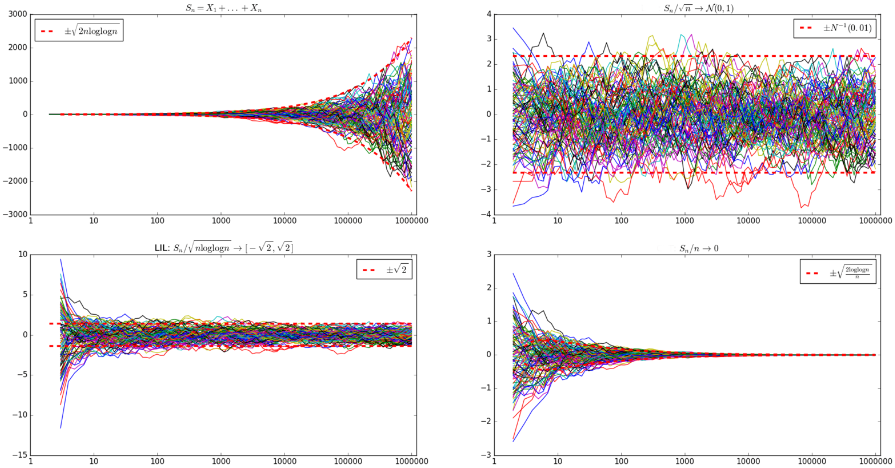
$$\mu \equiv \mathbb{E}[X_i],\ \sigma^2 \equiv V[X_i] < \infty, \text{ és } \sigma^2 > 0$$

akkor,

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

A CLT tehát azt mondja, hogy a valószínűségi változók átlagának studentizált / sztenderdizált értéke eloszlálásában a standard normális eloszláshoz tart.

Átlagok konvergenciája



Véletlen változók konvergenciája a főbb konvergenicia törvények / tételek mentén

Delta módszer

Ha X_n véletlen változók sorozata eloszlásában Normális eloszláshoz tart, akkor a **delta módszer** lehetővé teszi, hogy meghatározzuk $g(X_n)$ eloszlás konvergenciáját.

Delta Method

Tegyük fel, hogy:

$$\frac{\sqrt{n}(X_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

és g differenciálható függvény oly módon, hogy $g'(\mu) \neq 0$, akkor

$$\frac{\sqrt{n}(g(X_n) - g(\mu))}{|g'(\mu)|\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Alternatív megfogalmazásban:

$$X_n \xrightarrow{d} N(\mu, \frac{\sigma^2}{2}) \implies g(X_n) \xrightarrow{d} N(g(\mu), (g'(\mu))^2 \frac{\sigma^2}{n})$$

Multivariate Delta Method

Legyen X_n véletlen vektorok sorozata, és tegyük fel, hogy:

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \Sigma)$$

és ∇_μ jelöli ∇g μ pontban kiértékelt nemnulla elemeit, akkor:

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, \nabla_\mu^T \Sigma \nabla_\mu)$$

Hatékonyság

A hatékonyság abban segít nekünk, hogy a **konzisztens, aszimptotikus normális** (CAN), azonos kovergencia sebességel rendelkező becslők között rangsort tudjunk felállítani.

Relative efficiency

Legyen $\tilde{\theta}_n$ és $\hat{\theta}_n$ két $\sqrt{n}$-konzisztens aszimptotikusan normális becslője θ_0-nak. Ha $\tilde{\theta}_n$ **aszimptotikus varianciája** ($avar$) kisebb mint $\hat{\theta}_n$ aszimptotikus varianciája, tehát

$$avar(\tilde{\theta}_n) < avar(\hat{\theta}_n)$$

akkor $\tilde{\theta}_n$ **relatív hatékonyabb**, mint $\hat{\theta}_n$.

Asymptotically Efficient Estimator

Legyen $\tilde{\theta}_n$ és $\hat{\theta}_n$ két $\sqrt{n}$-konzisztens aszimptotikusan normális becslője θ_0-nak. Ha

$$avar(\tilde{\theta}_n) < avar(\hat{\theta}_n)$$

minden $\hat{\theta}_n$ esetén, akkor $\tilde{\theta}_n$ **hatékony becslője** θ_0-nak.