Econometrics with Python

Olivér Nagy

John von Neumann University - MNB Institute
Central Bank of Hungary

2023. szeptember 28.

Limit

Határérték

Legyen x_n valós számokból álló nem sztochasztikus sorozat. Ha bármely ϵ pozitív valós számhoz tartozik olyan N természetes szám (*index*), hogy minden $n > N$ esetén $|x_n - x| < \epsilon$, akkor x értéket az x_n sorozat **határértékének** nevezzük. Jelölése: $x_n \to x$.

A határérték tehát egy olyan pont amelyet a sorozat (x_m) megközelít, és idővel, mindig a közelőben is marad. Lehet hogy a sorozat, soha se éri el a határértékét, de ha a sorozat elemszáma kellően nagy (n $>$ N), onnantól fogva mindig ϵ távolságon belül marad x határtértékhez képest.

A véletlen számok határértékét / határait, több formában is tudjuk értelmezni, ezeket nézzük meg a következők során.

Konvergencia - Eloszlás 1.

Legyen X_n véletlen számokból álló sorozat, és X egy véletlen változó.F_n jelölje az X_n-hez tartozó kumulált eloszláls függvényt F pedig X eloszlás függvényét.

Convergence in Distribution

X_n véletlen változók sorozata **eloszlásában konvergál** X-hez, ha

$$\lim_{n \to \infty} F_n(t) = F(t)$$

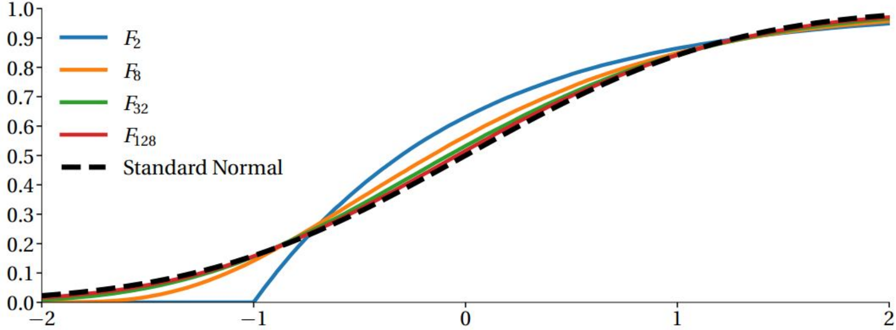
Jelölése: $X_n \xrightarrow{d} X$

A eloszlás konvergencia azt jelenti, hogy a sorozat határoló eloszlása megegyezik egy ($convergent$) véletlen változó eloszlásával.

Continuous Mapping Theorem

Ha $X_n \xrightarrow{d} X$ és $g(x)$ függvény egy nulla valószínűségű halmazon kívül folytonos, akkor $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$.

Konvergencia - Eloszlás 2.



Az 1. ábrán az Fi kumulatív eloszlás függvények sorozata látható, amint konvergálnak a standard normális kumulatív eloszláshoz, az elemszám növekedése során.

Konvergencia - Valószínűség, Kvadratikus átlag

Convergence in Probability

X_n véletlen változók sorozata **valószínűségében konvergál** X-hez akkor és csak akkor, ha:

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - X| < \epsilon) = 1 \, \forall \epsilon > 0$$

Jelölése: $X_n \xrightarrow{p} X$, illetve $\operatorname{plim} X_n = X$

Convergence in Mean Square / Quadratic Mean / L$_2$

X_n véletlen változók sorozata **kvadratikus átlagban konvergál** X-hez akkor és csak akkor, ha:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0$$

Jelölése: $X_n \xrightarrow{m.s.} X$, illetve $X_n \xrightarrow{qm} X$

A kvadratikus átlagban értelmezett konvergencia elég erős ahhoz, igaz legyen: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$ és $\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}[X_n] = \mathbb{V}[X]$

Konvergencia - Szinte biztos

Almost sure convergence

X_n véletlen változók sorozata **szinte biztos konvergál** X-hez akkor és csak akkor, ha:

$$\lim_{n\to\infty} Pr(X_n - X = 0) = 1$$

Jelölése: $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

Konvergenciák közti implikációk

- $X_n \xrightarrow{a.s.} X \implies X_n \xrightarrow{m.s.} X$
- $X_n \xrightarrow{m.s.} X \implies X_n \xrightarrow{p} X$
- $X_n \xrightarrow{p} X \implies X_n \xrightarrow{d} X$
- Akkor és csak akkor, ha $Pr(X = c) = 1$: $X_n \xrightarrow{d} X \implies X_n \xrightarrow{p} X$

Konvergencia - Kapcsolatok

Konvergens véletlen változók kezelése

Legyenek X_n, Y_n véletlen változók sorozatai, legyenek X, Y véletlen változók, c skalár, és legyen g folytonos függvény.

1. $X_n \xrightarrow{p} X, Y_n \xrightarrow{p} Y \implies X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$
2. $X_n \xrightarrow{m.s.} X, Y_n \xrightarrow{m.s.} Y \implies X_n + Y_n \xrightarrow{m.s.} X + Y$
3. $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} c \implies X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$
4. $X_n \xrightarrow{p} X, Y_n \xrightarrow{p} Y \implies X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$
5. $X_n \xrightarrow{d} X, Y_n \xrightarrow{d} c \implies X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$
6. $X_n \xrightarrow{p} X \implies g(X_n) \xrightarrow{p} g(X)$
7. $X_n \xrightarrow{d} X \implies g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$

A **3.** és **5.** részeket **Slutsky tételnek** nevezük.

Konzisztencia és torzítatlanság

Legyen $\hat{\theta}_n$ egy θ-ra vonatkozó becsült paraméterek sorozata n pedig a becsült minta nagysága. Ebben az esetben $\hat{\theta}_n$ véletlen változók sorozataként értelmezhető.

Consistency

$\hat{\theta}_n$ **konzisztens** becslője θ-nak akkor ha:

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$$

Bias

Torzításának nevezzük a becsült paraméter várható értéke és a tényleges (nem megfigyelhető) paraméter közti különbséget:

$$B[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \theta$$

Ha $B[\hat{\theta}_n] = 0$, akkor a becslő torzítatlan.