Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

Logika pre informatikov, Úvod do matematickej logiky

Poznámky z prednášok

Ján Kľuka, Ján Mazák

Letný semester 2022/2023
Posledná aktualizácia: 14. februára 2023

Obsah

1. prednáška

Úvod

Atomické formuly

0 Úvod

0.1 O logike

Čo je logika

Logika je vedná disciplína, ktorá študuje usudzovanie.

Správne, racionálne usudzovanie je základom vedy a inžinierstva.

Vyžaduje rozoznať správne úsudky z predpokladaných princípov a pozorovania od chybných úvah a špekulácií.

Správnosť úsudkov, zdá sa, nie je iba vec konvencie a dohody.

Logika skúma, *aké* sú zákonitosti správneho usudzovania a *prečo* sú zákonitosťami.

Ako logika študuje usudzovanie

Logika má dva hlavné predmety záujmu:

Jazyk zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

Syntax pravidlá zápisu tvrdení

Sémantika význam tvrdení

Usudzovanie (inferencia) odvodzovanie nových *logických dôsledkov* z doterajších poznatkov. Aký má vzťah s jazykom, štruktúrou tvrdení?

Jazyk, poznatky a teórie

Jazyk slúži na formulovanie tvrdení, ktoré vyjadrujú poznatky o svete (princípy jeho fungovania aj pozorované fakty).

Súboru poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, hovoríme *teória*.

Príklad 0.1 (Party time!). Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah. Organizujeme párty a P0: chceme na ňu pozvať niekoho z nich. Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Možné stavy sveta a modely

Jedna z otázok, ktoré si o teórii o party môžeme položiť, je: „V akých zostavách môžu noví známi prísť na párty tak, aby boli všetky podmienky splnené?“

Priamočiaro (aj keď prácne) to zistíme tak, že:

1. vymenujeme *všetky možné stavy sveta* (účasti nových známych),
2. zistíme, v ktorých sú všetky podmienky splnené.

K	J	S	P0	P1	P2	P3
n	n	n	n			
n	n	p	p	p	p	n
n	p	n	p	p	n	
n	p	p	p	p	n	
p	n	n	*p*	*p*	*p*	*p*
p	n	p	p	n		
p	p	n	*p*	*p*	*p*	*p*
p	p	p	p	n		

P0: Niekto z Kim, Jima, Sarah príde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

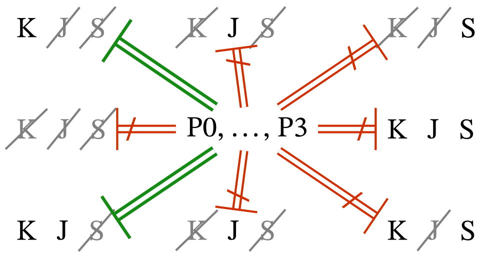
Možné stavy sveta a modely

Teória rozdeľuje *možné stavy sveta* (interpretácie) na:

- $\models$ stavy, v ktorých je pravdivá — *modely* teórie,
- $\not\models$ stavy, v ktorých je nepravdivá.

Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

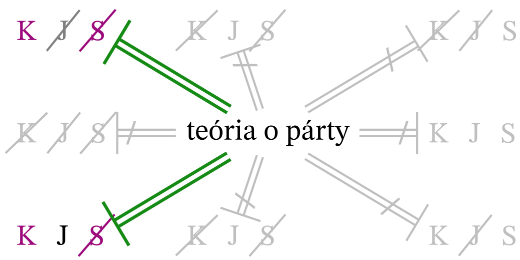
Príklad 0.2. Modelmi teórie P0, P1, P2, P3 sú dve situácie: keď Kim príde na párty a ostatní noví známi nie, a keď Kim a Jim prídu na párty a Sarah nie.



Logické dôsledky

Často je zaujímavá iná otázka o teórii — musí byť nejaké tvrdenie pravdivé *vždy, keď* je pravdivá teória?

V našom príklade: Kto *musí* a kto *nesmie* prísť na párty, aby boli podmienky P0, …, P3 splnené?



Logické dôsledky

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo *všetkých modeloch* teórie.

Príklad 0.3. Logickými dôsledkami teórie P0, P1, P2, P3 sú napríklad:

- *Kim príde na párty.*
- *Sarah nepríde na párty.*

Logických dôsledkov je nekonečne veľa, môžu nimi byť ľubovoľne zložité tvrdenia:

- Na party príde Kim alebo Jim.

- Ak príde Sarah, tak príde aj Jim.
- Ak príde Jim, tak nepríde Sarah.

⋮

Logické usudzovanie

Preskúmať všetky stavy sveta je často nepraktické až nemožné.

Logické dôsledky ale môžeme *odvodzovať usudzovaním* (*inferovať*).

Pri odvodení vychádzame z *premís* (predpokladov) a postupnosťou *správnych úsudkov* dospievame k *záverom*.

Príklad 0.4. Vieme, že ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah (P1), a že ak pôjde Jim, tak pôjde Kim (P2).

1. Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
2. Podľa 1. a P2 pôjde aj Kim.
3. Podľa 2. a P1 nepôjde Sarah.

Teda podľa uvedenej úvahy: Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

Dedukcia

Úsudok je správny (*korektný*) vtedy, keď *vždy*, keď sú pravdivé jeho premisy, je pravdivý aj jeho záver.

Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver *je logickým dôsledkom* premís a odvodenie je jeho *dôkazom* z premís.

Dedukcia je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba správne úsudky.

Logika študuje dedukciu, ale aj niektoré nededuktívne úsudky, ktoré sú *vo všeobecnosti* nesprávne, ale sú správne v *špeciálnych* prípadoch alebo sú *užitočné*:

- indukcia — zovšeobecnenie;
- abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov;
- usudzovanie na základe analógie (podobnosti).

Kontrapríklady

Ak úsudok nie je správny, vieme nájsť *kontrapríklad* — stav sveta, v ktorom sú *predpoklady pravdivé*, ale *záver je nepravdivý*.

Príklad 0.5. Nesprávny úsudok: Ak platia tvrdenia teórie o party, na party príde Jim.

Kontrapríklad: Stav, kedy príde Kim, nepríde Jim, nepríde Sarah.
Teória je pravdivá, výrok „na party príde Jim“ nie je pravdivý.

Matematická logika

Matematická logika

- modeluje jazyk, jeho sémantiku a usudzovanie ako matematické objekty (množiny, postuposti, zobrazenia, stromy);
- rieši logické problémy matematickými metódami.

Rozvinula sa koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia vďaka snahám vybudovať základy matematiky bez sporov a paradoxov, mechanizovať overovanie dôkazov alebo priamo matematických viet.

Matematická logika a informatika

Informatika sa vyvinula z matematickej logiky (von Neumann, Turing, Church, …)

Väčšina *programovacích jazykov* obsahuje logické prvky:

- `all(x > m for x in arr)`,

fragmenty niektorých sú priamo preložiteľné na logické formuly:

- `select T1.x, T2.y from T1 inner join T2 on T1.z = T2.z where T1.z > 25`,

niektoré (Prolog) sú podmnožinou logických jazykov.

Metódami logiky sa dá *presne špecifikovať*, čo má program robiť, *popísať*, čo robí, a *dokázať*, že robí to, čo bolo špecifikované.

Vo *výpočtovej logike* a umelej inteligencii sa metódy logiky používajú na riešenie rôznych ťažkých problémov (plánovanie, rozvrh, hľadanie a overovanie dôkazov matematických tvrdení, hľadanie vysvetlení, …).

Formálne jazyky a formalizácia

Matematická logika nepracuje s prirodzeným jazykom, ale s jeho zjednodušenými modelmi — *formálnymi jazykmi*.

- Presne definovaná, zjednodušená syntax a sémantika.
- Obchádzajú problémy prirodzeného jazyka:

  viacznačnosť slov, nejednoznačné syntaktické vzťahy, zložitá syntaktickú analýzu, výminky, obraty s ustáleným významom, …

- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte: aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov, programovacie jazyky, …

Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv *sformalizovať*, a potom naň môžeme použiť aparát matematickej logiky.

Formalizácia vyžaduje cvik — trocha veda, trocha umenie.

Ťažkosti s prirodzeným jazykom

Prirodzený jazyk je problematický:

- Viacznačné slová: Milo *je* v posluchárni A.
- Viacznačné tvrdenia: Videl som dievča v sále *s ďalekohľadom*.
- Ťažko syntakticky analyzovateľné tvrdenia:

  > Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; …
  >
  > — *Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov*

- Výnimky a obraty so špeciálnym ustáleným významom: *N*ikto *nie* je dokonalý.

Formalizácia poznatkov

S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh:

Karol je trikrát starší ako Mária.
Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov.
Koľko rokov majú Karol a Mária? $\rightsquigarrow$ $k = 3 \cdot m$, $k + m = 12$

Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky.

Príklad 0.6. Sformalizujme náš párty príklad:

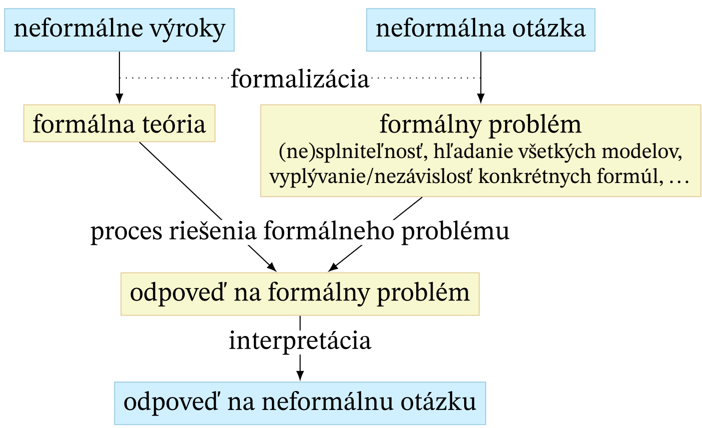
P0: Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

Schéma riešenia problémov pomocou logiky



Logika prvého rádu

Jazyk logiky prvého rádu (FOL) je jeden zo základných formálnych jazykov, ktorým sa logika zaoberá.

Do dnešnej podoby sa vyvinul koncom 19. a v prvej polovici 20. storočia — G. Frege, G. Peano, C. S. Peirce.

Výrokové spojky + *kvantifikátory* $\forall$ a $\exists$.

Dá sa v ňom vyjadriť veľa zaujímavých tvrdení, bežne sa používa v matematike.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \ldots$$

Kalkuly — formalizácia usudzovania

Pre mnohé logické jazyky sú známe *kalkuly* — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

korektné — odvodzujú iba logické dôsledky,

úplné — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky.

Kalkuly sú bežné v matematike

- na počítanie s číslami, zlomkami (kalkul elementárnej aritmetiky),
- riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
- derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

$\vdots$

Sú korektné, ale nie vždy úplné.

Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy.

0.2 O kurzoch LPI a UdML

Prístup k logike na tomto predmete

Stredoškolský prístup príliš *neoddeľuje jazyk* výrokov od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku *nedefinuje jasne*.

Prevedieme vás základmi matematickej a výpočtovej logiky pre (postupne čoraz zložitejšie) fragmenty jazykov logiky prvého rádu.

Pojmy z logiky (výrok, model, logický dôsledok, dôkaz, ...) budeme *definovať matematicky* (ako množiny, postupnosti, funkcie, ...) *zdanlivo* budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito, na praktických cvičeniach ako *dátové štruktúry*.

Budeme *dokazovať* ich vlastnosti a *programovať* algoritmy podľa konštruktívnych dôkazov.

Budeme vyjadrovať výpočtové problémy v logických jazykoch a hľadať ich riešenia pomocou hotových nástrojov na riešenie logických problémov.

Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

Organizácia predmetu — rozvrh, kontakty a pravidlá absolvovania — sú popísané na oficiálnej webovej stránke predmetov:

1-AIN-412 https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Logic_for_CS

1-INF-210 http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~mazak/vyucba/udml/

1 Atomické formuly

Jazyky logiky prvého rádu

Logika prvého rádu je trieda (rodina) formálnych jazykov.

Zdieľajú:

- časti abecedy — *logické symboly* (spojky, kvantifikátory)
- pravidlá tvorby *formúl* (slov)

Líšia sa v *mimologických symboloch* — časť abecedy, pomocou ktorej sa tvoria najjednoduchšie — *atomické formuly* (*atómy*).

Atomické formuly a výroky v prirodzenom jazyku

Atomické formuly logiky prvého rádu zodpovedajú *pozitívnym jednoduchým vetám* o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch a rovnosti *jednotlivých pomenovaných* objektov.

Príklady 1.1.

- ✅ Milo beží.
- ✅ Jarka vidí Mila.
- ❌ Milo beží, ale Jarka ho nevidí.

- ✗ Jarka vidí všetkých.
- ✓ Jarka dala Milovi Bobíka v sobotu.
- ✗ Jarka nie je doma.
- ✗ Niekto je doma.
- ✓ Súčet 2 a 2 je 3.
- ✓ Prezidentkou SR je Zuzana Čaputová.

Indivíduové konštanty

Indivíduové konštanty sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré pomenúvajú jednotlivé, pevne zvolené objekty.

Zodpovedajú *približne* vlastným menám, jednoznačným pomenovaniam, niekedy zámenám; konštantám v matematike a programovacích jazykoch.

Príklady 1.2. Jarka, 2, Zuzana_Čaputová, sobota, π, …

Indivíduové konštanty a objekty

Indivíduová konštanta

- vždy pomenúva skutočný, existujúci objekt (na rozdiel od vlastného mena *Zeus*);
- nikdy nepomenúva viac objektov (na rozdiel od vlastného mena *Jarka*).

Objekt

- *môže* byť pomenovaný aj *viacerými* indivíduovými konštantami (napr. Prezidentka_SR a Zuzana_Čaputová);
- *nemusí* mať žiadne meno.

Predikátové symboly

Predikátové symboly sú symboly jazyka logiky prvého rádu, ktoré vyjadrujú vlastnosti alebo vzťahy.

Jednoduché vety v slovenčine majú *podmetovú* (*subjekt*) a *prísudkovú* časť (*predikát*):

Jarka	vidí	Mila.
podmet	prísudok	predmet
podmetová časť	prísudková časť	

Do logiky prvého rádu prekladáme takéto tvrdenie pomocou predikátového symbolu vidí, ktorý má dva *argumenty* („podmety“): indivíduové konštanty Jarka a Milo.

Úloha argumentu v predikáte je daná jeho poradím (podobne ako pozičné argumenty funkcií/metód v prog. jazykoch).

Arita predikátového symbolu

Predikátový symbol má pevne určený počet argumentov — *aritu*.

Vždy musí mať práve toľko argumentov, aká je jeho arita.

Dohoda 1.3. Aritu budeme *niekedy* písať ako horný index symbolu. Napríklad beží^1, vidí^2, dal^4, $<^2$.

Zamýšľaný význam predikátových symbolov

Unárny predikátový symbol (teda s aritou 1) zvyčajne označuje *vlastnosť*, druh, rolu, stav.

Príklady 1.4.

pes(x)	x je pes
čierne(x)	x je čierne
beží(x)	x beží

Binárny, *ternárny*, … predikátový symbol (s aritou 2, 3, …) zvyčajne označuje *vzťah* svojich argumentov.

Príklady 1.5.

vidí(x, y)	x vidí y
dal(x, y, z, t)	x dal(a/o) objektu y objekt z v čase t

Kategorickosť významu predikátových symbolov

V bežnom jazyku často nie je celkom jasné, či objekt má alebo nemá nejakú vlastnosť — kedy je niekto *mladý*?

Predikátové symboly predstavujú *kategorické* vlastnosti/vzťahy — pre každý objekt sa dá *jednoznačne rozhodnúť*, či má alebo nemá túto vlastnosť/vzťah s iným objektom či inými objektmi.

Význam predikátového symbolu preto často zodpovedá rovnakému slovenskému predikátu iba približne.

Príklad 1.6. Predikát mladší^2 môže označovať vzťah „x je mladší ako y“ presne.

Predikát mladý^1 zodpovedá vlastnosti „x je mladý“ iba približne.

Nekategorickými vlastnosťami sa zaoberajú *fuzzy* logiky. Predikáty v nich zachytávajú význam týchto vlastností presnejšie.

Atomické formuly

Atomické formuly majú tvar

$$predikát(argument_1, argument_2, \dots, argument_k),$$

alebo

$$argument_1 \doteq argument_2,$$

pričom k je arita *predikát*u, a *argument*$_1$, …, *argument*$_k$ sú (nateraz) indivíduové konštanty.

Atomická formula zodpovedá (jednoduchému) *výroku* v slovenčine, t.j. tvrdeniu, ktorého *pravdivostná hodnota* (pravda alebo nepravda) sa dá jednoznačne určiť, lebo predikát označuje kategorickú vlastnosť/vzťah a indivíduové konštanty jednoznačne označujú objekty.

Formalizácia jednoduchých výrokov

Formalizácia je preklad výrokov z prirodzeného jazyka do formálneho logického jazyka.

Nie je to jednoznačný proces.

Vopred daný prvorádový jazyk (konštanty a predikáty) sa snažíme využiť čo najlepšie.

Príklad 1.7. Sformalizujme v jazyku s konštantami Evka, Jarka a Milo a predikátom vyšší^2 výroky:

A_1: Jarka je vyššia ako Milo. $\rightsquigarrow$ vyšší(Jarka, Milo)

A_2: Evka je nižšia ako Milo. $\rightsquigarrow$ vyšší(Milo, Evka)

Zanedbávame nepodstatné detaily — pomocné slovesá, predložky, skloňovanie, rod, …: x je vyšší/vyššia/vyššie ako y $\rightsquigarrow$ vyšší(x, y).

Návrh jazyka pri formalizácii

Formalizácia spojená s *návrhom vlastného jazyka* je *iteratívna*: Postupne zisťujeme, aké predikáty a konštanty potrebujeme, upravujeme predchádzajúce formalizácie.

Príklady 1.8. A_1: Jarka dala Milovi Bobíka.

⇝ ~~d(Jarka)~~ ~~dalBobíka(Jarka, Milo)~~ dal(Jarka, Milo, Bobík)

A_2: Evka dostala Bobíka od Mila.

⇝ ~~dalBobíka(Milo, Evka)~~ dal(Milo, Evka, Bobík)

A_3: Evka dala Jarke Cilku.

⇝ ~~dalCilku(Evka, Jarka)~~ dal(Evka, Jarka, Cilka)

A_4: Bobík je pes.

⇝ pes(Bobík)

Návrh jazyka pri formalizácii

Minimalizujeme počet predikátov, uprednostňujeme flexibilnejšie, viacúčelovejšie (dal^3 pred dalBobíka^2 a dalCilku^2).

Dosiahneme

- expresívnejší jazyk (vyjadrí viac menším počtom prostriedkov),
- zrejmejšie logické vzťahy výrokov.

Podobné normalizácii databázových schém.

1.1 Syntax atomických formúl

Presné definície

Cieľom logiky je uvažovať o jazyku, výrokoch, vyplývaní, dôkazoch.

Výpočtová logika sa snaží automaticky riešiť konkrétne problémy vyjadrené v logických jazykoch.

Spoľahlivé a overiteľné úvahy a výpočty vyžadujú *presnú* dohodu na tom, o čom hovoríme — *definíciu* logických pojmov (jazyk, výrok, pravdivosť, …).

Pojmy (napr. *atomická formula*) môžeme zadefinovať napríklad

- *matematicky* ako množiny, n-tice, relácie, funkcie, postupnosti, ...;
- *informaticky* tým, že ich *naprogramujeme*, napr. zadefinujeme triedu `AtomickaFormula` v Pythone.

Matematický jazyk je univerzálnejší ako programovací — abstraktnejší, menej nie až tak podstatných detailov.

Syntax atomických formúl logiky prvého rádu

Najprv sa musíme dohodnúť na tom, aká je *syntax* atomických formúl logiky prvého rádu:

- z čoho sa skladajú,
- čím vlastne sú,
- akú majú štruktúru.

Symboly jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Z čoho sa skladajú atomické formuly?

Definícia 1.9. *Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu* sú mimologické, logické a pomocné symboly, pričom:
Mimologickými symbolmi sú

- *indivíduové konštanty* z nejakej neprázdnej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$
- a *predikátové symboly* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{P}_\mathcal{L}$.

Jediným *logickým symbolom* je $\doteq$ (symbol rovnosti).
Pomocnými symbolmi sú **(**, **)** a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).
Množiny $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ sú disjunktné. Pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ ani $\mathcal{P}_\mathcal{L}$. Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_\mathcal{L}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}_\mathcal{L}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Abeceda jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky/Formálnych jazykoch a automatoch by ste povedali, že *abecedou* jazyka $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu je $\Sigma_{\mathcal{L}} = \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \{\doteq, (,), ,\}$.

V logike sa väčšinou pojem *abeceda* nepoužíva, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy* symbolov.

Namiesto *abeceda jazyka* $\mathcal{L}$ hovoríme *množina všetkých symbolov jazyka* $\mathcal{L}$ alebo len *symboly jazyka* $\mathcal{L}$.

Na zápise množiny $\Sigma_{\mathcal{L}}$ však ľahko vidíme, čím sa rôzne jazyky atomických formúl logiky prvého rádu od seba líšia a čo majú spoločné.

Príklady symbolov jazykov atomických formúl logiky prvého rádu

Príklad 1.10. Príklad o deťoch a zvieratkách sme sformalizovali v jazyku $\mathcal{L}_{\text{dz}}$, v ktorom

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} &= \{\mathsf{Bobík}, \mathsf{Cilka}, \mathsf{Evka}, \mathsf{Jarka}, \mathsf{Milo}\},\\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}} &= \{\mathsf{dal}, \mathsf{pes}\}, \quad \text{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\mathsf{dal}) = 3, \quad \text{ar}_{\mathcal{L}_{\text{dz}}}(\mathsf{pes}) = 1.\end{aligned}$$

Príklad 1.11. Príklad o návštevníkoch party by sme mohli sformalizovať v jazyku $\mathcal{L}_{\text{party}}$, kde

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\mathcal{L}_{\text{party}}} &= \{\mathsf{Kim}, \mathsf{Jim}, \mathsf{Sarah}\},\\ \mathcal{P}_{\mathcal{L}_{\text{party}}} &= \{\mathsf{príde}\}, \quad \text{ar}_{\mathcal{L}_{\text{party}}}(\mathsf{príde}) = 1.\end{aligned}$$

Označenia symbolov

Keď budeme hovoriť o *ľubovoľnom* jazyku $\mathcal{L}$, často budeme potrebovať nejak označiť niektoré jeho konštanty alebo predikáty, aj keď nebudeme vedieť, aké konkrétne symboly to sú.

Na označenie symbolov použijeme *meta premenné*: premenné v (matematickej) slovenčine, pomocou ktorých budeme hovoriť *o* (po grécky *meta*) týchto symboloch.

Dohoda 1.12. Indivíduové konštanty budeme spravidla označovať meta premennými a, b, c, d s prípadnými dolnými indexmi.

Predikátové symboly budeme spravidla označovať meta premennými P, Q, R s prípadnými dolnými indexmi.

Atomické formuly jazyka

Čo sú atomické formuly?

Definícia 1.13. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $c_1 \doteq c_2$, kde c_1 a c_2 sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$, kde P je predikátový symbol z $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ s aritou n a c_1, …, c_n sú indivíduové konštanty z $\mathcal{C}_\mathcal{L}$.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_\mathcal{L}$.

Slová jazyka atomických formúl logiky prvého rádu

Na Úvode do teoretickej informatiky by ste povedali, že jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl logiky prvého rádu nad abecedou $\Sigma_\mathcal{L} = \mathcal{C}_\mathcal{L} \cup \mathcal{P}_\mathcal{L} \cup \{\doteq, (,), ,\}$ je množina slov

$$\{ c_1 \doteq c_2 \mid c_1 \in \mathcal{C}_\mathcal{L}, c_2 \in \mathcal{C}_\mathcal{L} \} \\ \cup \{ P(c_1, \dots, c_n) \mid P \in \mathcal{P}_\mathcal{L}, \mathrm{ar}_\mathcal{L}(P) = n, c_1 \in \mathcal{C}_\mathcal{L}, \dots, c_n \in \mathcal{C}_\mathcal{L} \}.$$

V logike sa jazyk takto nedefinuje, pretože potrebujeme rozlišovať *rôzne druhy slov*.

Príklady atómov jazyka

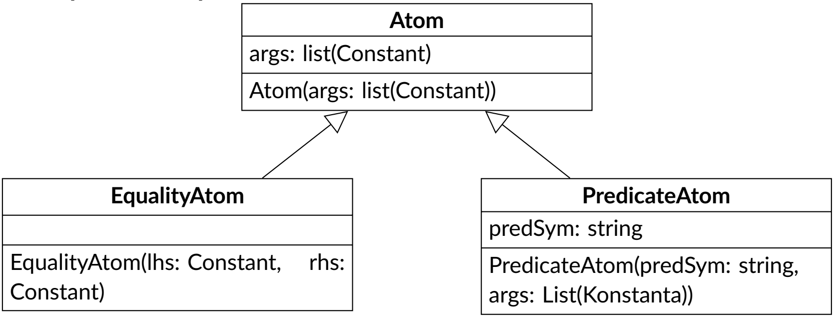
Príklad 1.14. V jazyku $\mathcal{L}_\mathrm{dz}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}_\mathrm{dz}} = \{\text{Bobík}, \text{Cilka}, \text{Evka}, \text{Jarka}, \text{Milo}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}_\mathrm{dz}} = \{\text{dal}, \text{pes}\}$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_\mathrm{dz}}(\text{dal}) = 3$, $\mathrm{ar}_{\mathcal{L}_\mathrm{dz}}(\text{pes}) = 1$, sú *okrem iných* rovnostné atómy:

$$\text{Bobík} \doteq \text{Bobík} \qquad \text{Cilka} \doteq \text{Bobík}$$
$$\text{Evka} \doteq \text{Jarka} \qquad \text{Bobík} \doteq \text{Cilka}$$

a predikátové atómy:

$$\text{pes(Cilka)} \qquad \text{dal(Cilka, Milo, Bobík)} \qquad \text{dal(Jarka, Evka, Milo)}.$$

Atómy ako triedy



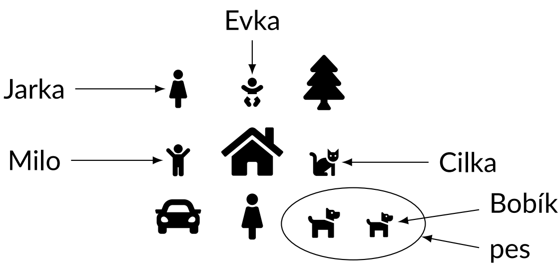
1.2 Sémantika atomických formúl

Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako zistíme, či je atomická formula pes(Bobík) pravdivá v nejakej situácii (napríklad u babky Evky, Jarky a Mila na dedine)?

Pozrieme sa na túto situáciu a zistíme:

1. aký objekt *b* pomenúva konštanta Bobík;
2. akú vlastnosť *p* označuje predikát pes;
3. či objekt *b* má vlastnosť *p*.



Vyhodnotenie atomickej formuly

Ako môžeme tento postup matematicky alebo informaticky modelovať?

Potrebujeme:

- matematický/informatický model situácie (stavu vybranej časti sveta),

- postup na jeho použitie pri vyhodnocovaní pravdivosti formúl.

Matematický model stavu sveta

Ako môžeme matematicky popísať nejakú situáciu tak, aby sme pomocou tohto popisu mohli vyhodnocovať atomické formuly v nejakom jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$?

Matematický model stavu sveta

Potrebujeme vedieť:

- ktoré objekty sú v popisovanej situácii prítomné,

▶ množina všetkých týchto objektov — *doména*;

- jednoznačné priradenie významu všetkým indivíduovým konštantám a predikátom z jazyka $\mathcal{L}$

▶ *interpretačná funkcia*;

- pre každú indivíduovú konštantu c z jazyka $\mathcal{L}$, ktorý *objekt* z domény konštanta c pomenúva,

- pre každý unárny predikát P z jazyka $\mathcal{L}$, ktoré objekty z domény majú vlastnosť označenú predikátom P,

▶ tvoria *podmnožinu* domény;

- pre každý n-árny predikát R z jazyka $\mathcal{L}$, $n > 1$, ktoré n-tice objektov z domény sú vo vzťahu ozn. pred. R,

▶ tvoria *n-árnu reláciu* na doméne.

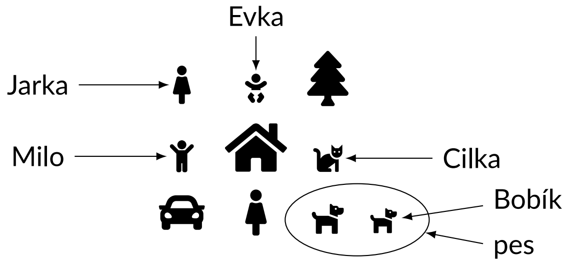
Štruktúra pre jazyk

Definícia 1.15. Nech $\mathcal{L}$ je jazyk atomických formúl logiky prvého rádu. *Štruktúrou* pre jazyk $\mathcal{L}$ (niekedy *interpretáciou* jazyka $\mathcal{L}$) nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (D, i)$, kde D je ľubovoľná *neprázdna* množina nazývaná *doména* štruktúry $\mathcal{M}$; i je zobrazenie, nazývané *interpretačná funkcia* štruktúry $\mathcal{M}$, ktoré

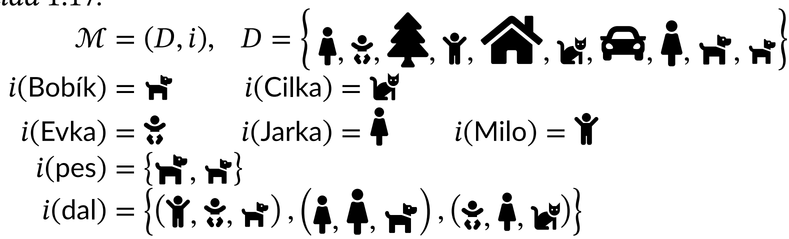
- každej indivíduovej konštante c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in D$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq D^n$.

Dohoda 1.16. Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, ...

Príklad štruktúry



Príklad 1.17.



Štruktúra ako informatický objekt

Štruktúru sme definovali pomocou *matematických* objektov.

Aký *informatický* objekt sa podobá na štruktúru?

Databáza:

Predikátové symboly jazyka $\sim$ veľmi zjednodušená schéma DB (arita $\sim$ počet stĺpcov)

Interpretácia predikátových symbolov $\sim$ konkrétne tabuľky s dátami

$i(\mathsf{pes}^1)$
1

$i(\mathsf{dal}^3)$		
1	2	3
		
		
		

Štruktúry — upozornenia

Štruktúr pre daný jazyk je *nekonečne veľa*.

Doména štruktúry

- môže mať ľubovoľné prvky;
- nijak *nesúvisí* s intuitívnym významom interpretovaného jazyka;
- môže byť *nekonečná*.

Interpretácia symbolov konštánt:

- každej konštante je priradený objekt domény;
- nie každý objekt domény musí byť priradený nejakej konštante;
- rôznym konštantám môže byť priradený rovnaký objekt.

Interpretácie predikátových symbolov môžu byť *nekonečné*.

Príklad 1.18 (Štruktúra s nekonečnou doménou). $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, i)$ $i(\mathsf{pes}) = \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \}$ $i(\mathsf{dal}) = \{ (n, m, n+m) \mid n, m \in \mathbb{N} \}$ $i(\mathsf{Bobík}) = 0$ $i(\mathsf{Cilka}) = 1$ $i(\mathsf{Evka}) = 3$ $i(\mathsf{Jarka}) = 5$ $i(\mathsf{Milo}) = 0$

Pravdivosť atomickej formuly v štruktúre

Ako zistíme, či je atomická formula pravdivá v štruktúre?

Definícia 1.19. Nech $\mathcal{M} = (D, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$ atomických formúl jazyka logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm $c_1 \doteq c_2$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* vtedy a len vtedy, keď $i(c_1) = i(c_2)$.

Predikátový atóm $P(c_1, \dots, c_n)$ jazyka $\mathcal{L}$ je *pravdivý v štruktúre* $\mathcal{M}$ vtedy a len vtedy, keď $(i(c_1), \dots, i(c_n)) \in i(P)$.

Vzťah *atóm A je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* skrátene zapisujeme $\mathcal{M} \models A$. Hovoríme aj, že $\mathcal{M}$ je *modelom A*.

Vzťah *atóm A nie je pravdivý v štruktúre $\mathcal{M}$* zapisujeme $\mathcal{M} \not\models A$. Hovoríme aj, že *$A$ je nepravdivý* v $\mathcal{M}$ a *$\mathcal{M}$ nie je modelom A*.

Príklad 1.20 (Určenie pravdivosti atómov v štruktúre).

$$\mathcal{M} = (D, i), \quad D = \{\ , \ , \ , \ , \ , \ , \ , \ , \ , \ \}$$

$i(\text{Bobík}) = $ $\qquad i(\text{Cilka}) = $

$i(\text{Evka}) = $ $\qquad i(\text{Jarka}) = $ $\qquad i(\text{Milo}) = $

$i(\text{pes}) = \{\ , \ \}$

$i(\text{dal}) = \{(\ , \ , \ ), (\ , \ , \ ), (\ , \ , \ )\}$

Atóm pes(Bobík) *je pravdivý* v štruktúre $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models$ pes(Bobík), lebo objekt $i(\text{Bobík}) = $ je prvkom množiny $\{\ , \ \} = i(\text{pes})$.

Atóm dal(Evka, Jarka, Cilka) *je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \models$ dal(Evka, Jarka, Cilka), lebo $(i(\text{Evka}), i(\text{Jarka}), i(\text{Cilka})) = (\ , \ , \ ) \in i(\text{dal})$.

Atóm Cilka $\doteq$ Bobík *nie je pravdivý* v $\mathcal{M}$, t.j., $\mathcal{M} \not\models$ Cilka $\doteq$ Bobík, lebo $i(\text{Cilka}) = \ \neq \ = i(\text{Bobík})$.

1.3 Zhrnutie

Zhrnutie

- Logika prvého rádu je rodina formálnych jazykov.
- Každý jazyk logiky prvého rádu je daný neprázdnou množinou indivíduových konštánt a množinou predikátových symbolov.
- Atomické formuly sú základnými výrazmi prvorádového jazyka.
  - Postupnosti symbolov $P(c_1, \dots, c_n)$ (predikátové) a $c_1 \doteq c_2$ (rovnostné).
  - Zodpovedajú pozitívnym jednoduchým výrokom o vlastnostiach, stavoch, vzťahoch, rovnosti jednotlivých pomenovaných objektov.

- Význam jazyku dáva štruktúra — matematický opis stavu sveta
  - Skladá sa z neprázdnej domény a z interpretačnej funkcie.
  - Konštanty interpretuje ako prvky domény.
  - Predikáty interpretuje ako podmnožiny domény/relácie na doméne.
- Pravdivosť atómu určíme interpretovaním argumentov a zistením, či je výsledná n-tica objektov prvkom interpretácie predikátu, resp. pri rovnostnom atóme, či sa objekty rovnajú.

Literatúra