# Równowaga rynkowa
# Model rynku Arrowa-Hurwicza

Mateusz Kruszewski     Adam Paulukanis     Paweł Sochoń

Uniwersytet w Białymstoku

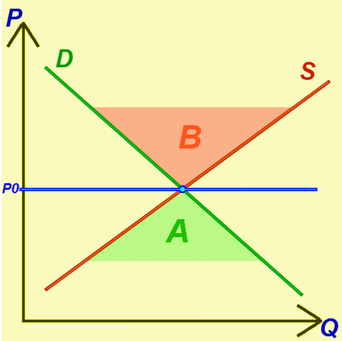
Białystok, 2012

# Outline

1. **Równowaga rynkowa**
   - Wstęp
   - Model rynku wg. Arrowa-Hurwicza
   - $k$-ty kupiec wybiera koszyk $x^k$
   - Wektor nadmiernego (nadwyżkowego) popytu na towar
   - Rynek w równowadze
   - Jeden dodatni wektor cen równowagi rynkowej

2. **Przykład**
   - Przykład 1

# Outline

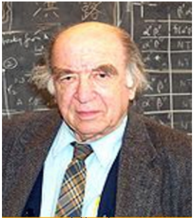



Nie interesuje nas pochodzenie dostarczanych na rynek towarów, ani mechanizm alokacji czynników produkcji. Zakładamy, że każdy postępuje racjonalnie, a gospodarka jest zdecentralizowana.

Model ten opracowali Leonid Hurwicz i Kenneth Joseph Arrow.

Opisuje on ludzi (*kupców*) sprzedających i kupujących towary przy założeniach:

- kupcy maksymalizują swoje indywidualne korzyści,
- popyt na towary jest równy ich podaży.


L.Hurwicz


K.J.Arrow

Na rynek przybywa $m$ kupców, przynosząc $n$ rodzajów towarów.

Oznaczenia:

- $y^k = (y_1^k, \ldots, y_n^k)$ – koszyk towarów dostarczanych na rynek przez $k$-tego kupca,
- $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ – koszyk towarów, które jest on gotów nabyć,
- $p = (p_1, \ldots, p_n)$ – wektor cen towarów,
- $X^k = R_+^n$ – przestrzeń towarów $k$-tego kupca,

gdzie: $k = 1, \ldots, m$.

Zakładamy, że

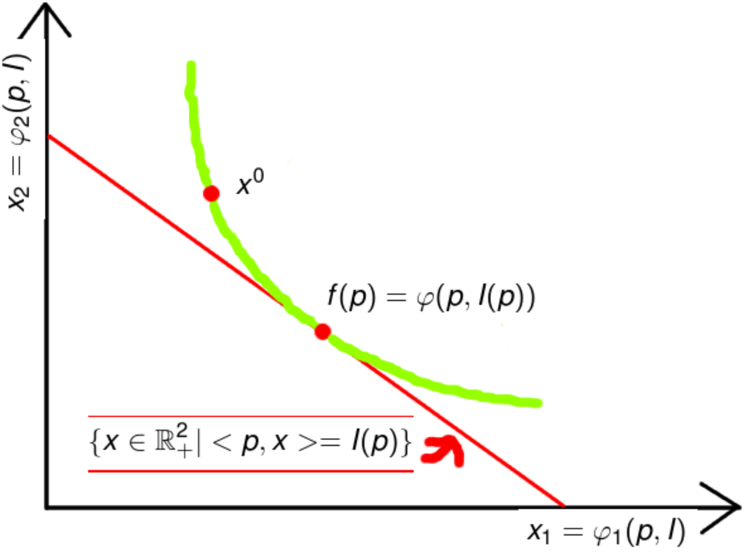
$$< p, x^k > \leqslant < p, y^k >,$$

czyli wartość nabywanego przez kupca $k$ koszyka towarów nie przekracza wartości towarów przez niego sprzedawanych.

Ponadto zakładamy, że kupcy nie dysponują żadnymi innymi dochodami poza tymi, które uzyskują ze sprzedaży swoich zapasów towarów.

Kupiec ma pewne preferencje, które opisujemy przy użyciu funkcji użyteczności $u^k (k = 1, \ldots, m)$.

# Wykres


$x_2 = \varphi_2(p, I)$
$x^0$
$f(p) = \varphi(p, I(p))$
$\{x \in \mathbb{R}^2_+ | < p, x >= I(p)\}$
$x_1 = \varphi_1(p, I)$

Jeżeli funkcje $u^k$ są ciągłe, silnie wklęsłe i rosnące na $\mathbb{R}^n_+$, to jest to standardowy warunek, przy którym rozwiązaniem *Zadania* jest ciągła na $\operatorname{int}\mathbb{R}^{n+1}_+$ $x^k$ funkcja cen $p$ i dochodu $< p, y^k >= I^k$, czyli

**Zadanie**

$$\text{fc:} \quad u^k(x) \to \max$$
$$\text{wo:} \quad \begin{cases} < p, x >\leqslant< p, y^k > \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$x^k = \varphi^k(p, I^k),$$

gdzie

$$\varphi^k(p, I^k) = \arg \max_{\substack{< p, x >\leqslant I^k \\ x \geqslant 0}} u^k(x).$$

Dla wygody zamiast $x^k$ będziemy pisać

$$f^k(p) = \varphi^k(p, I^k) = \varphi^k(p, < p, y^k >).$$

**Definicja: (*popyt* minus *podaż*)**

$$z(p) = \sum_{k=1}^{m} x^k - \sum_{k=1}^{m} y^k = \sum_{k=1}^{m} f^k(p) - \sum_{m=1}^{m} y^k$$

$z_i(p) > 0$ oznacza nadwyżkę popytu nad podażą towaru *i*,
$z_i(p) < 0$ oznacza nadmiar podaży nad popytem towaru *i*.

Popyt na towar oferowany za darmo
zawsze przekracza jego podaż

$$\forall_i (p_i = 0 \Rightarrow z_i(p) > 0).$$

**Definicja:** $z(\overline{p}) = 0$

Mówimy, że **rynek jest w równowadze**, jeżeli ustaliły się na nim ceny $\overline{p} > 0$, przy których wektor nadmiernego popytu spełnia warunek

$$z(\overline{p}) = 0.$$

Wektor $\overline{p}$ nazywamy **wektorem cen równowagi**.

Równowagę na rynku utożsamiamy z taką sytuacją, kiedy popyt na towary zostaje zrównoważony przez ich podaż, a każdy z uczestników wymiany opuszcza rynek w przekonaniu, że przy tych cenach, które ostatecznie się ustaliły, dokonał najkorzystniejszego zakupu towarów.

Założenia:

**(I)** Funkcje $f^k$ są ciągłe i różniczkowalne na $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$,

**(II)** $\forall_i (p_i = 0 \rightarrow z_i(p) > 0$,

**(III)** Macierz funkcyjna $J(p) = (\frac{\partial z_i}{\partial p_j})_{(n,n)}$ spełnia warunek

$$\forall_{\lambda \in R^n \setminus (R^n_+ \cup R^n_-)}, \forall_{p \in \text{int } P^n_+(1)} (\lambda J(p) \lambda^T < 0),$$

gdzie int $P^n_+(1) = \{p \in \text{int } R^n_+ \mid ||p|| = 1\}$.

**Model Arrowa-Hurwicza**

Istnieje jeden dodatni wektor cen równowagi rynkowej określony z dokładnością do struktury.

# Outline

# Przykład 1

Na rynek przybywa $m$ kupców, a przedmiotem wymiany są dwa towary. Funkcja użyteczności $k$-tego kupca ma następującą postać:

$$u^k(x_1, x_2) = a_k \ln x_1 + (1 - a_k) \ln x_2,$$

$(0 < a_k < 1)$, a jego przestrzeń towarów $X^k = R^2_+$. Przy cenach $p = (p_1, p_2)$ $k$-ty kupiec rozwiązuje zadanie:

**Zadanie**

$\max\{a_k \ln x_1 + (1 - a_k) \ln x_2\}$

**wo**

$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant I^k(p)$
$x_1, x_2 \geqslant 0.$

Gdzie
$I^k(p) = p_1 y_1^k + p_2 y_2^k$,
$y^k = (y_1^k, y_2^k)$ jest wektorem dostarczanych przez niego towarów.

Rozwiązując *Zadanie 1.*, otrzymujemy funkcję popytu

$$f^k(p) = \left( \frac{a_k I^k(p)}{p_1}, \frac{(1-a_k) I^k(p)}{p_2}. \right)$$

Wprowadzając oznaczenia $A = \sum_{k=1}^m a_k y_2^k > 0$, $B = \sum_{k=1}^m (1-a_k) y_1^k > 0$, dochodzimy do funkcji nadmiernego popytu

$$z(p) = \left( A\frac{p_2}{p_1} - B, B\frac{p_1}{p_2} - A \right).$$

Przyrównując do zera prawą stronę $z(p)$, widzimy, że wektory cen równowagi $\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2)$ są określone jednoznacznie i mają postać

$$\overline{p} = \lambda(A, B), \qquad \lambda > 0.$$

Zauważmy, że stan równowagi rynkowej istnieje, mimo że funkcje popytu $f^k$ nie spełniają założenia I.

## Więcej na ten temat

- Emil Panek – *Ekonomia matematyczna*,
- internet.

Dziękujemy za uwagę.