

Opracowywanie danych liczbowych i ich graficzna prezentacja

Zadanie 1 Za pomocą funkcji SUMA wyznaczyć:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 1 + 2 + 3 + \dots + 150 & \text{b) } 1 + 4 + 7 + \dots + 298 & \text{c) } 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2048 \\ \text{d) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} & \text{e) } \frac{1}{3} + \frac{4}{6} + \frac{7}{9} + \dots + \frac{298}{300} \end{array}$$

Należy zwrócić uwagę: w jaki sposób wprowadzamy serię danych, jak używać funkcji SUMA i jaka jest jej składnia, jak budujemy formuły.

Zadanie 2 Za pomocą odpowiedniej funkcji statystycznej wyznaczyć średnią arytmetyczną liczb:

$$\text{a) } 1, 9, 25, \dots, 2401, 2601 \quad \text{b) } -1, 4, -9, 16, \dots, -2401, 2500.$$

Należy zwrócić uwagę w jaki sposób korzystamy z kreatora funkcji.

Zadanie 3 W tabeli przedstawiono dzisiejsze zakupy Adama, który na każdy produkt uzyskał rabat w wysokości 12%. Uzupełnij tabelę, używając adresowania względnego i bezwzględnego. Rabat ma być uwzględniony w każdej wartości. Tabela ma być sformatowana tak jak na ilustracji.

	A	B	C	D	E	F
1	Produkt	Ilość	Cena	Wartość		
2	Cukier	1	3,60 zł		Rabat	12,00%
3	Jogurt	4	1,90 zł			
4	Sok	2	2,50 zł			
5	Chleb	1	2,40 zł			
6	Czekolada	2	3,50 zł			
7	Masło	1	3,95 zł			
8			Razem			

Należy zwrócić uwagę w jaki sposób formatujemy dane oraz na sposób adresowania względnego i bezwzględnego.

Zadanie 4 Utwórz tabliczkę mnożenia 10x10, korzystając z adresowania mieszanego. Należy napisać jedną formułę, która po skopiowaniu do odpowiednich komórek, da tabliczkę mnożenia.

Należy zwrócić uwagę na sposób adresowania mieszanego.

Zadanie 5 Ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową V_0 i przyspieszeniem a . Opracuj tabelę przedstawiającą jaką drogę przebędzie ciało w ciągu pierwszych 5 minut ruchu (tabela ma przedstawiać przebytą drogę w odstępach 10 sekundowych). Sporządź wykres liniowy zależności przebytej drogi od czasu. Arkusz ma być tak zaprojektowany, aby zmiana wartości V_0 i a była automatycznie uwzględniana w obliczeniach i na wykresie.

Należy zwrócić uwagę w jaki sposób wstawiamy i odpowiednio formatujemy wykres.

Zadanie 6 Każdy z graczy rzuca kostką 2 razy. Mamy 15 graczy. Wykorzystując arkusz kalkulacyjny sporządź tabelę z odpowiednimi formułami liczącymi:

1. symulacja rzutów; (wykorzystaj funkcję LOS.ZAOKR(dolna granica; górna granica)

2. suma oczek wyrzuconych;
3. dodatkowa premia za wyrzucone razem 10 oczek ((wykorzystaj funkcję JEŻELI) 3 pkt.);
4. dodatkowa premia za każdą wyrzuconą "6" w postaci 5 pkt.; (wykorzystaj zagnieżdżoną funkcję JEŻELI)
5. obliczyć sumę punktów zdobytych przez zawodników;
6. obliczyć średnią ilość wyrzuconych oczek przez zawodników;
7. wyznaczyć, ile razy została wyrzucona: 6, 5, 4, 3, 2, 1 (wykorzystaj funkcję LICZ.JEŻELI(zakres; kryterium)).

Należy zwrócić uwagę na składnie funkcji JEŻELI oraz LICZ.JEŻELI.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nr Gracza	Rzut 1	Rzut 2	Suma	premia za „6”	premia za 10 oczek	suma pkt.	średnia l. Oczek
2	1	3	4	7	0	0	7	3,5
3	2	2	1	3	0	0	3	1,5
4	3	6	1	7	5	0	12	3,5
5	4	2	5	7	0	0	7	3,5
6	5	2	4	6	0	0	6	3
7	6	3	3	6	0	0	6	3
8	7	6	1	7	5	0	12	3,5
9	8	2	3	5	0	0	5	2,5
10	9	2	1	3	0	0	3	1,5
11	10	4	2	6	0	0	6	3
12	11	4	2	6	0	0	6	3
13	12	6	6	12	10	0	22	6
14	13	4	3	7	0	0	7	3,5
15	14	1	3	4	0	0	4	2
16	15	5	2	7	0	0	7	3,5
17								
18	Ile razy wyrzucona							
19	1	5						
20	2	8						
21	3	6						
22	4	5						
23	5	2						
24	6	4						

Zadanie 7 W klasie mamy 10 uczniów, rejestrujemy oceny semestralne z 10 przedmiotów: j. polski, j. angielski, j. niemiecki, matematyka, historia, biologia, geografia, fizyka, chemia, informatyka. Wykorzystując arkusz kalkulacyjny wprowadź dane do tabeli i wykonaj następujące zadania:

1. obliczyć średnią ocen dla każdego ucznia;
2. zliczyć ilości poszczególnych ocen dla poszczególnych uczniów;
3. obliczyć średnią ocen dla każdego przedmiotu;
4. zliczyć ilości poszczególnych ocen dla poszczególnych przedmiotów;
5. obliczyć średnią ocen dla klasy;
6. zliczyć ilość osób, których średnia ocen przekracza 4,5;
7. wyświetlić wszystkie osoby, których średnia ocen przekracza 4,5;
8. sporządzić diagram kołowy prezentujący jaki procent ze wszystkich ocen stanowią oceny celujące, bardzo dobre itd.

Zadanie 8 Utwórz arkusz kalkulacyjny, który będzie obliczał "kredyt" według następujących zasad:

Kwota kredytu 20000,00 zł.

Czas kredytowania 3 lata.

Oprocentowanie w skali roku od faktycznego zadłużenia 22,5%.

Raty stałe.

Odsetki malejące.

Kredyt ma być obliczany miesięcznie (oddzielnie rata, odsetki i razem).

Zadanie 9 Rozwiąż zadanie fundusze. Treść zadania i plik z danymi w formacie txt pobierz ze strony www. Należy zwrócić uwagę w jaki sposób eksportujemy dane do arkusza kalkulacyjnego.

Matematyka w arkuszu kalkulacyjnym

Zadanie 10 Przygotuj arkusz, który po wprowadzeniu liczb a i b , będzie podawał odpowiedź na pytanie

- a) Czy liczba a jest podzielna przez liczbę b ?
- b) Czy suma liczb a i b jest liczbą nieparzystą?
- c) Czy liczby a i b są liczbami nieparzystymi?
- d) Czy liczba a lub b jest liczbą nieparzystą?

Należy zwrócić uwagę na użycie funkcji: MOD, I, LUB.

Zadanie 11 Przygotuj arkusz, który będzie podawał

- a) ile dzielników ma dana liczba naturalna z zakresy od 1 do 2000;
- b) sprawdzał czy ta dana liczba jest liczbą pierwszą;
- c) sprawdzał czy ta liczba jest liczbą doskonałą (liczba doskonała to taka liczba, że suma wartości jej dzielników właściwych równa się jej samej np. 28 jest liczbą doskonałą bo $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$).

Wskazówka: Użyj funkcji MOD(liczba; dzielnik), JEŻELI(test logiczny; wartość jeśli prawda; wartość jeśli fałsz), ILE.LICZB(wartość1; wartość2; ...) i SUMA(zakres).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Podaj liczbę naturalną z zakresu od 1 do 2000.				
2								
3					n=	6		
4								
5								
6								
7	Liczba dzielników liczby n:			4				
8								
9	Czy liczba n jest pierwsza?			NIE				
10								
11	Czy liczba n jest doskonała?			TAK				
12								

Zadanie 12 Przygotuj arkusz, w którym liczba naturalna z przedziału od 1 do 65535 przedstawiona zostanie w zapisie dwójkowym. Wzór arkusza zostanie przedstawiony na ekranie. Wykorzystaj możliwość ukrywania wierszy bądź kolumn w arkuszu.

Wskazówka: Użyj funkcji MOD(liczba; dzielnik) i CZ.CAŁK.DZIELENIA(liczba; dzielnik).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1																
2					ZAPIS LICZBY DZIESIĘTNEJ W SYSTEMIE DWÓJKOWYM											
3																
4					Podaj liczbę dziesiętną z zakresu od 1 do 65535:											
5																
6							n=	13								
7																
8	Zapis liczby n w systemie dwójkowym:															
10																
11	a16	a15	a14	a13	a12	a11	a10	a9	a8	a7	a6	a5	a4	a3	a2	a1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1

Zadanie 13 Wyznaczyć kolejnych wyrazów ciągu $x_{n+1} = (n+1)x_n$ dla $n \geq 0$, $x_0 = 1$. Co definiuje dany ciąg?

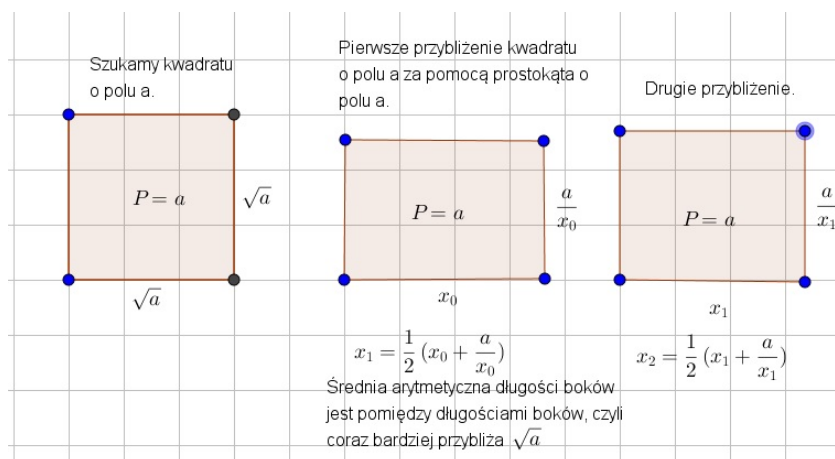
Już sumeryjscy matematycy jakieś 4000 lat temu znali algorytm wyznaczania pierwiastka kwadratowego. A mianowicie :

Ciąg dany wzorem rekurencyjnym $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ jest zbieżny kwadratowo do \sqrt{a} dla dowolnego $x_0 > 0$ tzn. wybieramy dowolną liczbę dodatnią i liczymy kolejno x_1 , x_2 itd. Kolejne liczby będą coraz bardziej bliskie \sqrt{a} .

Błąd bezwzględny – różnica pomiędzy wartością przybliżoną x_n a wartością rzeczywistą \sqrt{a} . **Błąd względny** – iloraz błędu bezwzględnego i wartości dokładnej \sqrt{a} .

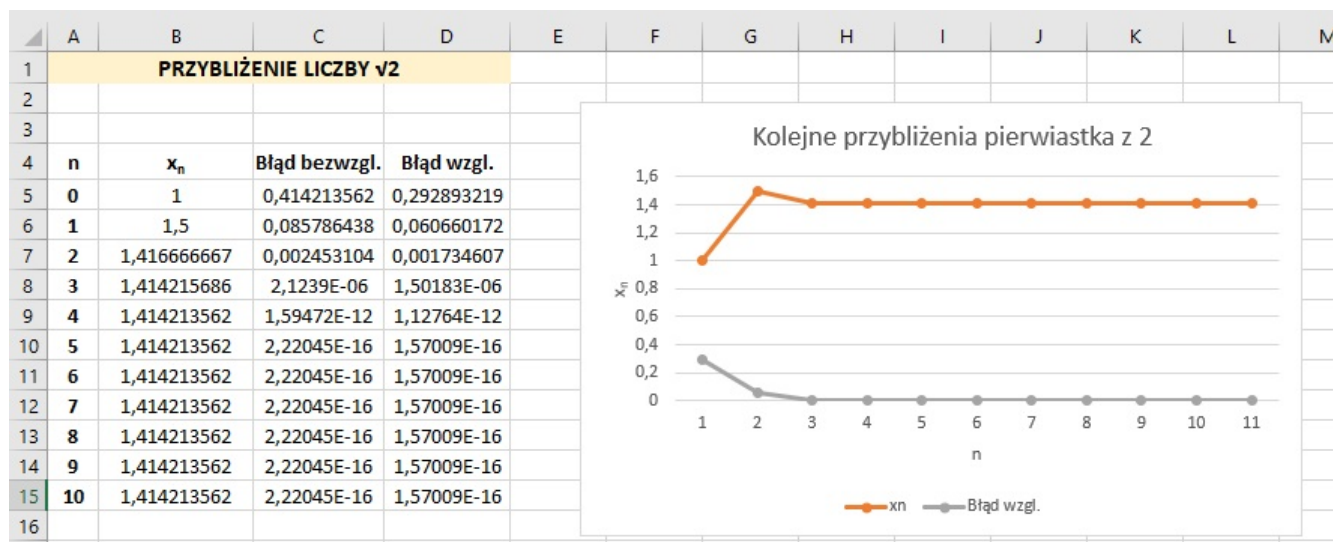
Uzasadnienie geometryczne

Jeśli przyjmiemy, że liczba podpierwiastkowa a jest polem kwadratu, to bok tego kwadratu wynosi \sqrt{a} . Można przyjąć początkową wartość jednego boku x_0 jako pewne przybliżenie szukanego pierwiastka. Wtedy drugi bok musi być równy $\frac{a}{x_0}$, aby pole prostokąta było równe a . Jeśli $x_0 = \frac{a}{x_0}$ to dany prostokąt jest kwadratem i x_0 jest równe \sqrt{a} . W przeciwnym razie jako kolejne przybliżenie boku przyjmujemy średnią arytmetyczną x_0 i $\frac{a}{x_0}$, czyli $x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right)$ itd.



Zadanie 14 Stosując powyższy wzór wyznaczyć w arkuszu kalkulacyjnym 10 pierwszych przybliżeń liczby $\sqrt{2}$. Obliczyć błąd względny i bezwzględny. Narysować wykres liniowy na którym będzie zaznaczone kolejne przybliżenia $\sqrt{2}$ i błąd względny.

Uwaga: Do zaznaczania zakresów możemy użyć kombinacji shift + strzałki, aby zaznaczyć komórki nieprzylegające do siebie należy użyć klawisza ctrl.



Zadanie 15 Metoda Newtona wyznaczenia pierwiastka równania $f(x) = 0$ polega na przybliżeniu go za pomocą ciągu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

gdzie jako x_0 wybieramy dowolne przybliżenie szukanego pierwiastka. Metoda ta przy odpowiednich założeniach jest zbieżna do szukanego pierwiastka.

- Za pomocą metody Newtona znaleźć przybliżenie liczby $\sqrt[3]{a}$ (liczba a jest podawana w osobnej komórce). W tym celu wyznaczyć wzór Newtona dla odpowiedniej funkcji f . Wyznaczyć 15 kolejnych wyrazów tego ciągu w arkuszu.
- Wyznaczyć błąd względny i bezwzględny kolejnych przybliżeń.
- Uzasadnij geometrycznie otrzymany wzór.

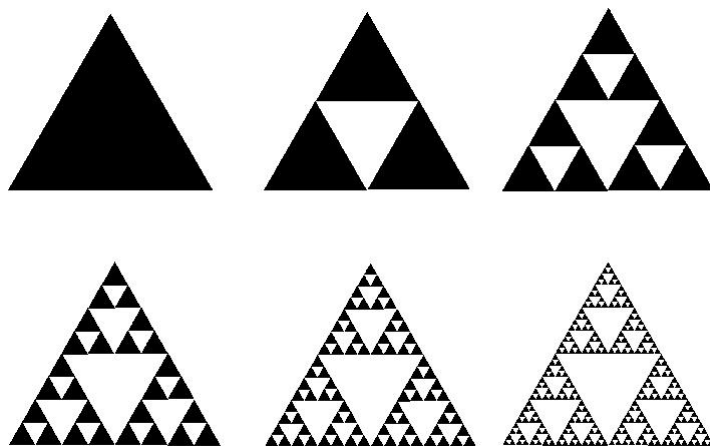
Zadanie 16 Dane jest równanie $4x^5 + 4x^2 - 1 = 0$.

- Uzasadnić wzór Newtona dla równania w postaci $f(x) = 0$.
- Znaleźć graficznie przybliżenia pierwiastków tego równania.
- Wyznaczyć ciągi Newtona, które będą zbieżne do każdego z pierwiastków tego równania. Czym się różnią te ciągi od siebie?

Ciekawy fraktal został skonstruowany przez wybitnego polskiego matematyka **Wacława Sierpińskiego** (stąd nazwa **trójkąt Sierpińskiego**). Konstrukcja trójkąta Sierpińskiego, nazywana również uszczelką Sierpińskiego, została opracowana w 1915 roku, jeszcze przed wprowadzeniem samego pojęcia fraktali.

Etapy powstawania trójkąta Sierpińskiego:

- Rysujemy trójkąt równoboczny. (zobacz rysunek)
- Dzielimy każdy bok trójkąta na pół i łączymy boki trójkąta (w efekcie otrzymujemy 4 mniejsze trójkąty).
- Pomijamy środkowy trójkąt, a w każdym z trzech pozostałych trójkątów dzielimy boki na pół i łączymy środki, aby powstały kolejne trójkąty itd.



Fraktale możemy również otrzymać w sposób wydawałoby się, zupełnie nieoczekiwany— jako wynik **losowego eksperymentu** gry w chaos.

Gra w chaos polega na tym, że startujemy z pewnego punktu x_0 i wyznaczamy jego kolejne iteracje za pomocą wzoru $x_{n+1} = f^m(x_n)$, gdzie f^m jest jedną z funkcji iterowanych, wybieraną niezależnie i losowo dla każdej iteracji.

Zasady gry w chaos dla trójkąta Sierpińskiego

Wybieramy trzy punkty na płaszczyźnie i oznaczamy je numerami 1, 2, i 3. Są to tzw. **punkty bazowe**. Następnie wybieramy jeszcze jeden punkt tzw. **punkt wiodący**.

Krok 1 Losujemy jedną z trzech liczb będących numerami punktów bazowych. Jeśli otrzymamy np. liczbę 3, wyznaczamy odcinek pomiędzy punktem wiodącym a punktem bazowym o numerze 3 i znajdujemy jego środek (zaznaczamy ten punkt). Punkt ten będzie teraz nowym punktem wiodącym.

Krok 2 Znów losujemy jedną z liczb 1, 2 lub 3 i, postępując jak w poprzednim kroku, wyznaczamy kolejny punkt wiodący itd.

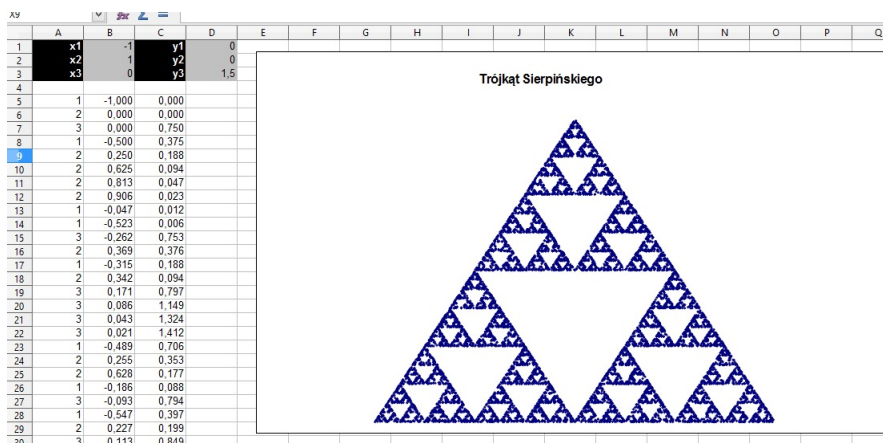
Zadanie Przeprowadź na kartce kilka pierwszych kroków gry w chaos. Przyjrzyj się efektom.

Zadanie 17 Przeprowadź w arkuszu kalkulacyjnym symulację gry w chaos dla 100, 1000, 3000 i 5000 punktów (należy na wykresie zmniejszyć wymiary punktów). Jako punkty bazowe wybierz $(-1;0)$, $(1;0)$ i $(0;1,5)$. Jako pierwszy punkt bazowy wybierz jeden z wylosowanych punktów bazowych. Przykładowy arkusz znajduje się na kolejnym slajdzie.

LOS.ZAKR(zakres) – losuje liczbę z podanego zakresu np. LOS.ZAKR(1;3) – podaje wylosowaną liczbę z zakresu od 1 do 3.

INDEKS(zakres;numer z zakresu) – funkcja ta podaje punkt o podanym numerze z zakresu np. INDEKS(B1:B3;A6) – wskazuje zawartość komórki z zakresu od B1 do B3, której komórki został podany w A6.

Uwaga: Obraz dla każdej liczby punktów należy zapisać w osobnym pliku.



Fraktal zwany **paprotką Barsnsleya**, o kształcie przypominającym liść paproci, odkrył Michael F. Barsnsley. Fraktal ten może być opisany za pomocą przekształceń afinicznych.

Przekształcenie afiniczne to wzajemnie jednoznaczne przekształcenie geometryczne, w której obrazem prostej jest inna prosta. Przekształceniami afinicznymi na płaszczyźnie są np.: symetria osiowa, symetria środkowa, przesunięcie równoległe, obrót, jednokładność, powinowactwo prostokątne i każde złożenie tych przekształceń. Przekształcenie afiniczne na płaszczyźnie opisują następujące zależności:

$$x' = ax + by + e$$

$$y' = cx + dy + f$$

gdzie

$a; b; c; d; e; f$ - współczynniki przekształcenia ($ad \neq bc$),

$x; y$ - współrzędne punktów przed przekształceniem,

$x'; y'$ - współrzędne punktów po przekształceniu.

W przypadku paprotki Barnsleya gra w chaos sprowadza się do przekształcenia współrzędnych punktu wiodącego za pomocą jednego z czterech przekształceń afinicznych opisanymi współczynnikami opisanymi w tabeli 1. W tabeli podano też prawdopodobieństwo wylosowania danego przekształcenia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Los	Nr	X	Y			a	b	c	d	e	f	Prawdopodobieństwo	Prawdopodobieństwo skumulowane
2	0,74	2	0,520	0,000		1	0,849	0,037	-0,037	0,849	0,075	0,183	0,73	0,73
3	0,12	1	0,516	0,164		2	0,197	-0,226	0,226	0,197	0,400	0,049	0,13	0,86
4	0,22	1	0,520	0,303		3	-0,150	0,283	0,260	0,237	0,575	-0,084	0,11	0,97
5	0,52	1	0,527	0,421		4	0,000	0,000	0,000	0,160	0,500	0,000	0,03	1,00
6	0,85	2	0,409	0,251										

tabela 1

Zadanie 18 Aby narysować paprotkę barnsleya w arkuszu kalkulacyjnym, wyznaczamy odpowiednio dużą liczbę współrzędnych punktu wiodącego, poddanego przekształceniom afinicznym, opisanymi współczynnikami ujętymi w tabeli 1. Dla każdego punktu losujemy przy użyciu funkcji LOS() liczbę, która posłuży do wyboru jednego przekształcenia (kolumna A).

Następnie za pomocą funkcji JEŻELI() sprawdzamy, w którym z przedziałów prawdopodobieństw mieści się wylosowana liczba, wybierając w ten sposób numer przekształcenia (kolumna B).

W kolumnach C i D, korzystając ze wzorów na przekształcenie afiniczne, obliczamy nowe współrzędne punktu

wiodącego (w wierszu 2 za pomocą klawiatury wpisujemy jego początkowe współrzędne).

Wszystkie obliczone współrzędne punktów przedstawiamy na wykresie XY (punktowy), wybierając, odpowiedni dla paprotki, zielony kolor.

Zadanie 19 Zmodyfikować tak wartości parametrów z poprzedniego zadania, aby w arkuszu powstał :

- a) trójkąt Sierpińskiego. Wyjanie matematyczne znaczenie zdefiniowanych przekształceń.
- b) Prostokątny trójkąt Sierpińskiego.
- c) Bliźniacza choinka.