Universit
Nangui Abrogoua

Rapport d'Analyse Numérique

Comparaison des Méthodes d'Intégration Numérique

Applications aux Quadratures de Gauss et Méthodes Classiques

Fofana Adama

Master 2 Génie Informatique

Université Nangui Abrogoua

Présenté le 6 Janvier 2026
Devant le Docteur Sylvain ZEZE
Année Académique 2025-2026

Table des matières

Introduction Générale **5**

1 Méthodes d'Intégration Numérique **6**
1.1 Quadratures de Gauss 6
1.1.1 Gauss-Legendre 6
1.1.2 Gauss-Laguerre 6
1.1.3 Gauss-Chebyshev 6
1.2 Méthode Composite de Simpson 6
1.3 Intégration par Spline Cubique 6

2 Fonctions Tests et Méthodologie **7**
2.1 Description des Fonctions Tests 7
2.2 Paramètres Expérimentaux 8

3 Résultats Expérimentaux **9**
3.1 Synthèse des Performances 9
3.2 Résultats Détailés par Fonction 9
3.2.1 Fonction Chebyshev 9
3.2.2 Fonction Laguerre 10
3.2.3 Fonction Combinée 10
3.2.4 Fonction Neutre (Runge) 10

4 Analyse Comparative et Interprétation **11**
4.1 Convergence des Méthodes 11
4.2 Efficacité Computationnelle 11
4.3 Analyse par Type de Fonction 11
4.3.1 Fonctions avec Poids Spécifique 11
4.3.2 Fonction avec Poids Exponentiel 11
4.3.3 Fonction Standard 12

5 Discussion Critique des Résultats **13**
5.1 Succès et Performances Exceptionnelles 13
5.2 Limitations et Problèmes Identifiés 13
5.2.1 Problème avec la Fonction Chebyshev 13
5.2.2 Limitations Méthodologiques 13
5.3 Validation des Hypothèses Théoriques 13

6 Conclusions et Recommandations **14**
6.1 Conclusions Principales 14
6.2 Recommandations Pratiques 14
6.3 Perspectives d'Amélioration 14
6.3.1 Améliorations Algorithmiques 14
6.3.2 Extensions Futures 14

7 Synthèse Finale **15**
7.1 Tableau de Bord des Performances . . . 15
7.2 Enseignements Clés . . . 15
7.3 Recommandations Stratégiques . . . 15
7.4 Message Final . . . 16
7.5 Perspective Finale . . . 16

Annexes **17**
7.6 Résultats Bruts Complets . . . 17
7.7 Code Python Essentiel . . . 17
7.8 Références Bibliographiques . . . 18

Table des figures

Liste des tableaux

1 Configuration expérimentale 8
2 Meilleure précision par fonction et méthode 9
3 Temps d'exécution moyens (en secondes) 9
4 Performances détaillées - Fonction Chebyshev 9
5 Performances détaillées - Fonction Laguerre 10
6 Performances détaillées - Fonction Combinée 10
7 Performances détaillées - Fonction Neutre 10
8 Taux de convergence observés 11
9 Rapport précision/temps (log10) 11
10 Validation des propriétés théoriques 13
11 Guide de sélection des méthodes 14
12 Évaluation globale des méthodes 15
13 Résultats bruts - Fonction Chebyshev (extrait) 17
14 Résultats bruts - Fonction Laguerre 17

Introduction Générale

L'intégration numérique, également appelée quadrature numérique, constitue un pilier fondamental du calcul scientifique. Ce rapport présente une étude comparative exhaustive de cinq méthodes d'intégration numérique appliquées à quatre fonctions tests représentant différents cas d'utilisation.

Objectifs du Travail

- Implémenter et comparer cinq méthodes d'intégration numérique
- Tester ces méthodes sur des fonctions avec différents types de poids
- Analyser la précision et l'efficacité computationnelle
- Établir des recommandations pratiques pour le choix des méthodes

Méthodes Étudiées

1. Quadrature de Gauss-Legendre (méthode générale)
2. Quadrature de Gauss-Laguerre (pour intégrales avec poids e^{-x})
3. Quadrature de Gauss-Chebyshev (pour poids $1/\sqrt{1-x^2}$)
4. Méthode composite de Simpson (méthode classique)
5. Intégration par spline cubique (méthode d'interpolation)

1 Méthodes d'Intégration Numérique

1.1 Quadratures de Gauss

1.1.1 Gauss-Legendre

Pour l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

où x_i et w_i sont les points et poids de Legendre sur $[-1, 1]$.

1.1.2 Gauss-Laguerre

Pour les intégrales sur $[0, \infty)$ avec poids e^{-x} :

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

1.1.3 Gauss-Chebyshev

Pour les intégrales sur $[-1, 1]$ avec poids $1/\sqrt{1-x^2}$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

1.2 Méthode Composite de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right]$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$ et n pair.

1.3 Intégration par Spline Cubique

1. Échantillonnage de la fonction aux points x_i
2. Construction d'une spline cubique interpolatrice
3. Intégration analytique de la spline

2 Fonctions Tests et Méthodologie

2.1 Description des Fonctions Tests

1. Fonction Chebyshev

$$f(x) = \cos(10x)$$
$$\text{Intervalle} : [-1, 1]$$
$$\text{Poids} : 1/\sqrt{1-x^2}$$
$$\text{Valeur exacte} : -7.726\,299\,908\,6 \times 10^{-1}$$
$$\text{Caractéristique} : \text{Fonction oscillante}$$

2. Fonction Laguerre

$$f(x) = 1/(1+x^2)$$
$$\text{Intervalle} : [0, \infty)$$
$$\text{Poids} : e^{-x}$$
$$\text{Valeur exacte} : 6.214\,496\,242\,4 \times 10^{-1}$$
$$\text{Caractéristique} : \text{Décroissance lente}$$

3. Fonction Combinée

$$f(x) = \cos(x)$$
$$\text{Intervalle} : [0, 1]$$
$$\text{Poids} : 1/\sqrt{1-x^2}$$
$$\text{Valeur exacte} : 1.201\,969\,715\,3$$
$$\text{Caractéristique} : \text{Combinaison de poids}$$

4. Fonction Neutre (Runge)

$$f(x) = 1/(1+25x^2)$$
$$\text{Intervalle} : [-1, 1]$$
$$\text{Poids} : \text{aucun}$$
$$\text{Valeur exacte} : 5.493\,603\,067\,8 \times 10^{-1}$$
$$\text{Caractéristique} : \text{Fonction lisse}$$

2.2 Paramètres Expérimentaux

TABLE 1 – Configuration expérimentale

Paramètre	**Valeur**
Valeurs de n testées	4, 8, 16, 32, 64, 128
Nombre de répétitions	5
Tolérance numérique	1×10^{-10}
Environnement	Python 3.x avec SciPy

3 Résultats Expérimentaux

3.1 Synthèse des Performances

Table 2 – Meilleure précision par fonction et méthode

Fonction	Méthode optimale	Erreur minimale	n optimal
Chebyshev	Simpson	5.91×10^{-1}	8
Laguerre	Gauss-Laguerre	1.93×10^{-14}	128
Combinée	Gauss-Chebyshev	1.74×10^{-1}	4
Neutre	Gauss-Legendre	1.04×10^{-14}	128

Table 3 – Temps d'exécution moyens (en secondes)

Méthode	Chebyshev	Laguerre	Combinée	Neutre
Gauss-Legendre	2.20×10^{-4}	-	2.00×10^{-4}	2.40×10^{-4}
Gauss-Laguerre	-	3.60×10^{-4}	-	-
Gauss-Chebyshev	6.00×10^{-5}	-	8.00×10^{-5}	4.00×10^{-5}
Simpson	8.00×10^{-5}	-	6.00×10^{-5}	8.00×10^{-5}
Spline	4.20×10^{-4}	-	5.20×10^{-4}	5.00×10^{-4}

3.2 Résultats Détailés par Fonction

3.2.1 Fonction Chebyshev

Table 4 – Performances détaillées - Fonction Chebyshev

Méthode	Meilleur n	Erreur	Temps (s)	Convergence
Gauss-Legendre	8	6.59×10^{-1}	2.60×10^{-4}	Stable à partir de n=8
Gauss-Chebyshev	128	6.64×10^{-1}	1.20×10^{-4}	Amélioration lente
Simpson	8	5.91×10^{-1}	1.20×10^{-4}	Meilleure précision
Spline	128	6.64×10^{-1}	5.20×10^{-4}	Convergence progressive

Observation : Toutes les méthodes présentent des erreurs importantes (> 0.5) pour cette fonction oscillante.

3.2.2 Fonction Laguerre

TABLE 5 – Performances détaillées - Fonction Laguerre

n	Gauss-Laguerre	Erreur	Temps (s)	Convergence
4	$6.364\,270 \times 10^{-1}$	1.50×10^{-2}	3.60×10^{-4}	-
8	$6.200\,750 \times 10^{-1}$	1.37×10^{-3}	7.00×10^{-4}	11x
16	$6.215\,065 \times 10^{-1}$	5.69×10^{-5}	3.80×10^{-4}	24x
32	$6.214\,493 \times 10^{-1}$	3.43×10^{-7}	6.20×10^{-4}	166x
64	$6.214\,496 \times 10^{-1}$	2.31×10^{-10}	5.20×10^{-4}	1485x
128	$6.214\,496 \times 10^{-1}$	1.93×10^{-14}	1.32×10^{-3}	11970x

Observation : Gauss-Laguerre démontre une convergence exponentielle remarquable.

3.2.3 Fonction Combinée

TABLE 6 – Performances détaillées - Fonction Combinée

Méthode	Meilleur n	Erreur	Temps (s)	Précision relative
Gauss-Legendre	4	3.60×10^{-1}	2.00×10^{-4}	Référence
Gauss-Chebyshev	4	1.74×10^{-1}	8.00×10^{-5}	2.1x meilleur
Simpson	4	3.60×10^{-1}	1.40×10^{-4}	Équivalent
Spline	4	3.60×10^{-1}	6.20×10^{-4}	Équivalent

Observation : Gauss-Chebyshev offre la meilleure précision grâce à son adaptation au poids.

3.2.4 Fonction Neutre (Runge)

TABLE 7 – Performances détaillées - Fonction Neutre

Méthode	Meilleur n	Erreur	Temps (s)	Convergence
Gauss-Legendre	128	1.04×10^{-14}	1.06×10^{-3}	Exponentielle
Gauss-Chebyshev	8	1.75×10^{-2}	6.00×10^{-5}	Limitée
Simpson	128	5.21×10^{-10}	8.00×10^{-5}	Algébrique
Spline	128	2.49×10^{-10}	6.20×10^{-4}	Algébrique

Observation : Gauss-Legendre excelle pour cette fonction lisse sans singularité.

4 Analyse Comparative et Interprétation

4.1 Convergence des Méthodes

Table 8 – Taux de convergence observés

Méthode	Chebyshev	Laguerre	Combinée	Neutre
Gauss-Legendre	≈ 0.00	-	≈ 0.00	≈ 9.80
Gauss-Laguerre	-	≈ 13.54	-	-
Gauss-Chebyshev	≈ -0.00	-	≈ -0.00	≈ -0.00
Simpson	≈ -0.00	-	≈ -0.00	≈ 4.13
Spline	≈ -0.00	-	≈ 0.00	≈ 4.68

4.2 Efficacité Computationnelle

Table 9 – Rapport précision/temps (log10)

Méthode	Chebyshev	Laguerre	Combinée	Neutre
Gauss-Legendre	3.48	-	3.25	11.02
Gauss-Laguerre	-	10.73	-	-
Gauss-Chebyshev	4.05	-	3.34	4.64
Simpson	3.87	-	3.24	9.82
Spline	3.20	-	2.76	9.60

4.3 Analyse par Type de Fonction

4.3.1 Fonctions avec Poids Spécifique

Fonctions Chebyshev et Combinée (poids $1/\sqrt{1-x^2}$) :

- **Gauss-Chebyshev** : Théoriquement optimale mais résultats mitigés
- **Simpson** : Surprenamment compétitive pour Chebyshev
- **Explication :** L'erreur importante (~ 0.6) suggère un problème dans le calcul de la valeur exacte

4.3.2 Fonction avec Poids Exponentiel

Fonction Laguerre (poids e^{-x}) :

- **Gauss-Laguerre** : Performance exceptionnelle (erreur 1.93×10^{-14})
- **Convergence exponentielle** démontrée
- **Exclusivité :** Seule méthode applicable à cet intervalle infini

4.3.3 Fonction Standard

Fonction Neutre (sans poids) :

- **Gauss-Legendre** : Excellence performance (erreur 1.04×10^{-14})
- **Simpson et Spline** : Bonnes performances
- **Gauss-Chebyshev** : Inadaptée (erreur 1.75×10^{-2})

5 Discussion Critique des Résultats

5.1 Succès et Performances Exceptionnelles

- **Gauss-Laguerre** : Convergence spectaculaire sur sa fonction cible
- **Gauss-Legendre** : Excellence sur fonction standard
- **Simpson** : Robustesse et simplicité efficaces

5.2 Limitations et Problèmes Identifiés

5.2.1 Problème avec la Fonction Chebyshev

Anomalie observée :

- Toutes les méthodes donnent des erreurs importantes (> 0.5)
- La valeur exacte $-7.726\,299\,908\,6 \times 10^{-1}$ semble problématique
- **Hypothèses :**
  1. Erreur dans le calcul de la valeur exacte théorique
  2. Problème d'implémentation du poids $1/\sqrt{1-x^2}$
  3. Singularités aux bornes non correctement traitées

5.2.2 Limitations Méthodologiques

- **Adaptabilité limitée :** Chaque méthode de Gauss est spécialisée
- **Complexité d'implémentation :** Spline nécessite plus de ressources
- **Intervalles infinis :** Seule Gauss-Laguerre gère $[0, \infty)$

5.3 Validation des Hypothèses Théoriques

Table 10 – Validation des propriétés théoriques

Propriété	**Théorie**	**Observé**	**Validation**
Convergence Gauss	Exponentielle	Oui (Laguerre, Neutre)	
Convergence Simpson	$O(h^4)$	Oui (Neutre)	
Spécialisation Gauss	Forte	Très forte	
Stabilité Simpson	Bonne	Confirmée	
Coût Spline	Élevé	Confirmé	

6 Conclusions et Recommandations

6.1 Conclusions Principales

1. **Spécialisation payante :** Les méthodes de Gauss adaptées sont imbattables sur leurs domaines
2. **Gauss-Legendre universelle :** Excellente performance sur fonctions standards
3. **Simpson robuste :** Bon compromis simplicité/performance
4. **Spline coûteuse :** Justifiée seulement si interpolation nécessaire
5. **Importance du bon outil :** Le choix de la méthode est critique

6.2 Recommandations Pratiques

Table 11 – Guide de sélection des méthodes

Type d'intégrale	Méthode recommandée	Justification
Standard sur intervalle fini	**Gauss-Legendre**	Précision exceptionnelle
Avec poids e^{-x} sur $[0, \infty)$	**Gauss-Laguerre**	Seule méthode adaptée
Avec poids $1/\sqrt{1-x^2}$	**Gauss-Chebyshev**	Théoriquement optimale
Application simple/générale	**Simpson**	Bon compromis global
Besoin d'interpolation	**Spline cubique**	Double fonctionnalité
Calcul pédagogique	**Simpson**	Simplicité d'explication
Prototypage rapide	**Simpson**	Développement facile
Production haute précision	**Gauss adaptée**	Performance maximale

6.3 Perspectives d'Amélioration

6.3.1 Améliorations Algorithmiques

- **Méthodes adaptatives :** Pas variable selon la régularité
- **Combinaison de méthodes :** Utiliser différentes méthodes par sous-intervalles
- **Optimisation numérique :** Meilleure gestion des singularités
- **Validation automatique :** Contrôle d'erreur intégré

6.3.2 Extensions Futures

- **Intégrales multiples :** Extension aux intégrales doubles et triples
- **Intégrales singulières :** Méthodes spécialisées pour singularités
- **Calcul parallèle :** Exploitation du parallélisme pour les grands n
- **Applications réelles :** Tests sur problèmes physiques concrets

7 Synthèse Finale

7.1 Tableau de Bord des Performances

Table 12 – Évaluation globale des méthodes

Méthode	Précision	Vitesse	Simplicité	Spécialisation	Score /10
Gauss-Legendre	**9/10**	7/10	6/10	Moyenne	7.5
Gauss-Laguerre	**10/10***	7/10	6/10	**Forte**	8.0*
Gauss-Chebyshev	6/10	**8/10**	6/10	**Forte**	6.5
Simpson	7/10	**8/10**	**9/10**	Faible	8.0
Spline	7/10	6/10	5/10	Moyenne	6.0

*Sur sa fonction cible uniquement

7.2 Enseignements Clés

Principaux enseignements :

1. **Adaptation au problème :** La méthode optimale dépend du type d'intégrale
2. **Convergence exponentielle :** Les méthodes de Gauss la démontrent clairement
3. **Simplicité vs performance :** Simpson offre un excellent compromis
4. **Validation nécessaire :** Importance de vérifier les valeurs exactes
5. **Spécialisation efficace :** Les méthodes adaptées sont imbattables sur leur domaine

7.3 Recommandations Stratégiques

1. **Pour l'enseignement :** Commencer par Simpson, introduire Gauss progressivement
2. **Pour la recherche :** Utiliser Gauss adaptée au problème
3. **Pour le développement :** Simpson pour le prototypage, Gauss optimisée pour la production
4. **Pour l'ingénierie :** Choisir en fonction des contraintes temps/précision
5. **Pour l'analyse critique :** Toujours valider avec plusieurs méthodes

7.4 Message Final

Conclusion Générale

Cette étude comparative démontre l'importance cruciale du choix adapté de la méthode d'intégration.

Les méthodes de Gauss excellent par leur précision et convergence rapide sur leurs domaines spécialisés.
La méthode de Simpson brille par son équilibre entre simplicité et performance.
L'intégration par spline trouve sa place quand l'interpolation est nécessaire.

La maîtrise de l'intégration numérique repose sur la compréhension des forces et limites
de chaque méthode, permettant de sélectionner l'outil optimal pour chaque problème spécifique.

7.5 Perspective Finale

**En intégration numérique comme en ingénierie,
l'excellence réside dans l'adaptation de l'outil au problème,
et non dans la recherche d'une solution universelle.**

Annexes

7.6 Résultats Bruts Complets

Table 13 – Résultats bruts - Fonction Chebyshev (extrait)

Méthode	n	Valeur	Erreur	Temps (s)
Gauss-Legendre	4	$-1.739\,016$	9.66×10^{-1}	1.02×10^{-3}
Gauss-Legendre	8	$-1.140\,765 \times 10^{-1}$	6.59×10^{-1}	2.60×10^{-4}
Gauss-Chebyshev	4	$-1.714\,387$	9.42×10^{-1}	1.80×10^{-4}
Gauss-Chebyshev	8	$-1.341\,910 \times 10^{-1}$	6.38×10^{-1}	8.00×10^{-5}
Simpson	4	$4.318\,591 \times 10^{-1}$	1.20	1.00×10^{-4}
Simpson	8	$-1.816\,301 \times 10^{-1}$	5.91×10^{-1}	1.20×10^{-4}

Table 14 – Résultats bruts - Fonction Laguerre

n	Valeur	Erreur	Temps (s)
4	$6.364\,270 \times 10^{-1}$	1.50×10^{-2}	3.60×10^{-4}
8	$6.200\,750 \times 10^{-1}$	1.37×10^{-3}	7.00×10^{-4}
16	$6.215\,065 \times 10^{-1}$	5.69×10^{-5}	3.80×10^{-4}
32	$6.214\,493 \times 10^{-1}$	3.43×10^{-7}	6.20×10^{-4}
64	$6.214\,496 \times 10^{-1}$	2.31×10^{-10}	5.20×10^{-4}
128	$6.214\,496 \times 10^{-1}$	1.93×10^{-14}	1.32×10^{-3}

7.7 Code Python Essentiel

```python
class IntegrationNumerique:
    def __init__(self):
        pass

    def gauss_legendre(self, f, a, b, n):
        """Quadrature de Gauss-Legendre classique"""
        if b == np.inf:
            def g(t):
                x = t / (1 - t**2) if t != 1 else np.inf
                return f(x) * (1 + t**2) / (1 - t**2)**2
            a_tr = -0.999
            b_tr = 0.999
        else:
            g = f
            a_tr = a
            b_tr = b

        x, w = roots_legendre(n)
        t = 0.5 * (b_tr - a_tr) * x + 0.5 * (a_tr + b_tr)
        integral = 0.5 * (b_tr - a_tr) * np.sum(w * g(t))
```

```
        return integral

    def gauss_laguerre(self, f, n):
        """Quadrature de Gauss-Laguerre pour [0, +   )"""
        x, w = roots_laguerre(n)
        integral = np.sum(w * f(x))
        return integral

    def simpson_composite(self, f, a, b, n):
        """M thode composite de Simpson"""
        if n % 2 == 1:
            n += 1

        h = (b - a) / n
        x = np.linspace(a, b, n+1)
        y = f(x)

        integral = h/3 * (y[0] + y[-1] +
                          4*np.sum(y[1:-1:2]) +
                          2*np.sum(y[2:-2:2]))
        return integral
```

Listing 1 – Structure de la classe IntegrationNumerique

7.8 Références Bibliographiques

Références

[1] Quarteroni, A., Saleri, F., Sacco, R. (2007). *Méthodes numériques pour le calcul scientifique*. Springer.

[2] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (2007). *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.

[3] Stroud, A. H., Secrest, D. (1966). *Gaussian Quadrature Formulas*. Prentice-Hall.

[4] Davis, P. J., Rabinowitz, P. (2007). *Methods of Numerical Integration*. Dover Publications.

[5] Heath, M. T. (2018). *Scientific Computing : An Introductory Survey*. SIAM.