Université
Nangui Abrogoua

Rapport d'Analyse Numérique

Comparaison des Méthodes de Résolution d'Équations Différentielles Ordinaires

Fofana Adama

Master 2 Génie Informatique

Université Nangui Abrogoua

Présenté le 6 Janvier 2026
Devant le Docteur Sylvain ZEZE
Année Académique 2025-2026

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction Générale

La résolution numérique d'équations différentielles ordinaires (EDO) constitue un domaine fondamental de l'analyse numérique avec des applications vastes en physique, ingénierie, biologie et économie. Ce rapport présente une étude comparative de trois méthodes classiques de résolution d'EDO : Euler explicite, Heun (Euler amélioré) et Runge-Kutta d'ordre 4.

Objectifs du Travail

- Implémenter et tester trois méthodes numériques de résolution d'EDO
- Comparer leur précision sur trois équations tests représentatives
- Analyser leur efficacité en termes de temps de calcul
- Établir des recommandations pratiques pour le choix des méthodes

Méthodologie

1. Développement d'une classe Python `SolveurEDO` implémentant les trois méthodes
2. Sélection de trois équations différentielles avec solutions analytiques connues
3. Mesure systématique des temps d'exécution et des erreurs
4. Visualisation comparative des résultats

1 Résultats Expérimentaux

1.1 Synthèse des Performances

TABLE 1 – Synthèse comparative des résultats

Méthode	Équation 1	Équation 2	Équation 3
Temps d'exécution (secondes)			
Euler	$<1 \times 10^{-6}$	$<1 \times 10^{-6}$	$<1 \times 10^{-6}$
Heun	$<1 \times 10^{-6}$	$<1 \times 10^{-6}$	$<1 \times 10^{-6}$
Runge-Kutta 4	$<1 \times 10^{-6}$	$<1 \times 10^{-6}$	$<1 \times 10^{-6}$
Erreur absolue maximale			
Euler	3.55×10^{-1}	5.30×10^{3}	7.77×10^{-1}
Heun	6.24×10^{-3}	2.59×10^{6}	4.77×10^{-1}
Runge-Kutta 4	4.18×10^{-6}	1.28×10^{9}	8.13×10^{-3}
Rang de précision (1 = meilleur)			
Euler	3	**1**	3
Heun	2	2	2
Runge-Kutta 4	**1**	3	**1**

1.2 Analyse Détailée par Équation

1.2.1 Équation 1 : Croissance exponentielle modifiée

$$z'(x) = 0.1 \cdot x \cdot z(x), \quad z(0) = 1$$

Résultats pour l'Équation 1 :

- **Runge-Kutta 4** : Performance exceptionnelle (erreur 4.18×10^{-6})
- **Heun** : Bonne précision (erreur 6.24×10^{-3})
- **Euler** : Précision modérée (erreur 3.55×10^{-1})
- **Amélioration RK4/Euler** : **85 000 fois plus précis**
- **Amélioration Heun/Euler** : **57 fois plus précis**

1.2.2 Équation 2 : Problème avec singularité

$$z'(x) = \frac{1 - 30x}{2\sqrt{x}} + 15z(x), \quad z(0.01) = \sqrt{0.01}$$

Analyse critique - Équation 2 :

- Toutes les méthodes présentent des erreurs très importantes
- **Euler** : Erreur "relativement" plus faible (5.30×10^3)
- **Runge-Kutta 4** : Échec de convergence (erreur 1.28×10^9)
- **Causes probables :**
  1. Singularité en $x = 0$ mal gérée
  2. Condition initiale problématique ($z(0.01) = 0.1$)
  3. Instabilité numérique due au coefficient $+15z(x)$

1.2.3 Équation 3 : Coefficient périodique

$$z'(x) = \pi \cos(\pi x) z(x), \quad z(0) = 1$$

Résultats pour l'Équation 3 :

- **Runge-Kutta 4** : Meilleure précision (erreur 8.13×10^{-3})
- **Heun** : Performance intermédiaire (erreur 4.77×10^{-1})
- **Euler** : Précision limitée (erreur 7.77×10^{-1})
- **Amélioration RK4/Euler** : **96 fois plus précis**
- **Comportement oscillant** bien capturé par RK4

2 Analyse Statistique et Comparaisons

2.1 Performances Relatives

TABLE 2 – Analyse comparative détaillée

Métrique	**Euler**	**Heun**	**RK4**
Moyenne des erreurs (log10)			
Équation 1	-0.45	-2.20	-5.38
Équation 3	-0.11	-0.32	-2.09
Stabilité relative			
Robustesse	**Élevée**	Moyenne	Faible pour problèmes raides
Simplicité	**Excellente**	Bonne	Complexe
Fiabilité	**Bonne**	Bonne	Excellente (hors problèmes raides)
Rapport qualité/prix			
Précision/coût	Faible	**Optimal**	Élevé

2.2 Rang des Méthodes par Critère

TABLE 3 – Classement des méthodes par critère d'évaluation

Critère	**1ère**	**2ème**	**3ème**
Précision générale	RK4	Heun	Euler
Vitesse d'exécution	Euler	Heun	RK4
Stabilité numérique	Euler	Heun	RK4
Simplicité	Euler	Heun	RK4
Coût calcul/précision	Heun	RK4	Euler
Robustesse problèmes raides	Euler	Heun	RK4

2.3 Observations Clés

- **Équation 1 :** RK4 démontre sa supériorité avec une erreur 4.18×10^{-6}
- **Équation 2 :** Problème mal posé - instabilité numérique importante
- **Équation 3 :** RK4 meilleur pour les coefficients variables
- **Temps d'exécution :** Toutes les méthodes ultra-rapides ($< 1 \times 10^{-6}$s)

3 Interprétation et Discussion

3.1 Succès et Échecs

3.1.1 Succès Remarquables

Cas de réussite : Équation 1

- **RK4** : Erreur $4.18 \times 10^{-6} \rightarrow$ performance exceptionnelle
- **Heun** : Erreur $6.24 \times 10^{-3} \rightarrow$ très bon compromis
- **Euler** : Acceptable pour applications non critiques
- **Conclusion :** Pour les problèmes réguliers, l'ordre de la méthode est déterminant

3.1.2 Problèmes Identifiés

Cas problématique : Équation 2

- Instabilité numérique sévère pour toutes les méthodes
- **Euler** : "Meilleure" performance relative
- **RK4** : Amplification des erreurs (phénomène de stiff problem)
- **Causes :**
  1. Terme $+15z(x)$ crée une instabilité exponentielle
  2. Singularité $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ mal gérée
  3. Condition initiale $z(0.01) = 0.1$ potentiellement incorrecte

3.2 Analyse des Erreurs

Table 4 – Analyse quantitative des performances

Paramètre	Euler	Heun	RK4
Amélioration relative (Éq.1)			
vs Euler	1x	57x	85 000x
vs Heun	0.018x	1x	1 500x
Rapport erreur/temps (log10)			
Équation 1	5.45	8.20	11.38
Équation 3	5.11	5.68	7.91
Efficacité numérique			
Score global	6.5/10	7.5/10	8.5/10*

*Score réduit pour RK4 due à son échec sur l'Équation 2

3.3 Impact du Pas d'Intégration

Influence du pas $h = 0.3$:

- **Pas relativement grand** pour une précision fine
- **RK4** : Tolère mieux les pas grands ($O(h^4)$ vs $O(h)$)
- **Euler** : Nécessite des pas très petits pour être précis
- **Recommandation :** Pour $h = 0.3$, RK4 est clairement supérieur
- **Perspective :** Avec $h = 0.01$, les écarts seraient encore plus marqués

4 Conclusions et Recommandations

4.1 Conclusions Principales

1. **RK4 confirme sa supériorité** pour les problèmes réguliers (erreur 4.18×10^{-6} sur Éq.1)
2. **Heun offre le meilleur compromis** global entre précision et complexité
3. **Euler reste utile** pour sa robustesse et sa simplicité
4. **L'Équation 2 révèle des limites** des méthodes explicites pour les problèmes raides

4.2 Recommandations Pratiques

Table 5 – Guide de sélection des méthodes

Scénario	**Méthode recommandée**	**Justification**
Calcul haute précision	**Runge-Kutta 4**	Erreur minimale (4.18×10^{-6})
Usage général	**Heun**	Bon compromis précision/-temps
Simulation temps-réel	**Euler**	Rapidité et simplicité
Problèmes potentiellement raides	**Euler**	Plus robuste aux instabilités
Enseignement	**Heun**	Équilibre théorie/pratique
Prototypage	**Euler**	Développement rapide

4.3 Améliorations Proposées

4.3.1 Sur le Plan Numérique

- **Réduire le pas d'intégration** pour améliorer la précision
- **Implémenter des méthodes adaptatives** à pas variable
- **Considérer des méthodes implicites** pour les problèmes raides
- **Ajouter un contrôle d'erreur** pour détecter les instabilités

4.3.2 Sur le Plan Algorithmique

- **Validation des conditions initiales** pour éviter les erreurs
- **Traitement des singularités** par changement de variable
- **Optimisation du code** pour les calculs intensifs
- **Parallélisation** des évaluations de fonctions

4.4 Perspectives de Recherche

1. **Étude des méthodes adaptatives** : pas variable selon l'erreur locale
2. **Analyse de stabilité** : détermination des régions de stabilité
3. **Comparaison avec méthodes implicites** : pour problèmes raides
4. **Application à des problèmes réels** : physique, ingénierie, biologie
5. **Optimisation des performances** : utilisation de bibliothèques numériques

5 Synthèse Finale

5.1 Récapitulatif des Résultats Clés

Principaux enseignements :

- **Précision maximale** : RK4 sur Éq.1 (4.18×10^{-6})
- **Meilleur compromis** : Heun sur l'ensemble des tests
- **Robustesse** : Euler meilleur sur problème difficile (Éq.2)
- **Vitesse** : Toutes les méthodes ultra-rapides ($< 1 \times 10^{-6}$s)
- **Impact du pas** : Déterminant pour la précision finale

5.2 Tableau de Bord des Performances

TABLE 6 – Tableau de bord comparatif

Indicateur	Euler	Heun	RK4	Unité
Précision Éq.1	3.55×10^{-1}	6.24×10^{-3}	4.18×10^{-6}	Erreur abs.
Précision Éq.3	7.77×10^{-1}	4.77×10^{-1}	8.13×10^{-3}	Erreur abs.
Temps moyen	$< 1 \times 10^{-6}$	$< 1 \times 10^{-6}$	$< 1 \times 10^{-6}$	Secondes
Complexité	$O(n)$	$O(2n)$	$O(4n)$	Opérations
Stabilité	$+++$	$++$	$+$	Qualitatif
Précision	$+$	$++$	$+++$	Qualitatif
Score final	6.5/10	7.5/10	8.0/10	/10

5.3 Message de Clôture

Conclusion Générale

Cette étude comparative révèle qu'aucune méthode n'est universellement supérieure.

RK4 excelle en précision pour les problèmes réguliers,
Heun offre le meilleur équilibre pour un usage général,
Euler conserve son utilité pour sa robustesse et simplicité.

Le choix optimal dépend du compromis entre précision requise, temps disponible
et nature du problème à résoudre. Pour des applications critiques, une analyse
préliminaire du problème est essentielle pour sélectionner la méthode adaptée.

5.4 Recommandations Finales

1. **Pour les débutants** : Commencer par Euler pour comprendre les bases
2. **Pour les applications standards** : Utiliser Heun comme méthode par défaut
3. **Pour la haute précision** : Adopter RK4 avec un pas adapté
4. **Pour les problèmes difficiles** : Tester plusieurs méthodes et vérifier la cohérence
5. **En production** : Valider toujours avec une méthode de référence

5.5 Perspective Finale

L'excellence en analyse numérique ne réside pas dans une méthode unique,
mais dans la capacité à choisir l'outil adapté à chaque situation.

Annexes

5.6 Résultats Bruts

Table 7 – Résultats bruts des tests

Méthode	**Équation**	**Temps (s)**	**Erreur max**
Euler	Équation 1	$< 1 \times 10^{-6}$	$3.550\,019 \times 10^{-1}$
Heun	Équation 1	$< 1 \times 10^{-6}$	$6.241\,864 \times 10^{-3}$
RK4	Équation 1	$< 1 \times 10^{-6}$	$4.176\,177 \times 10^{-6}$
Euler	Équation 2	$< 1 \times 10^{-6}$	$5.295\,275 \times 10^{3}$
Heun	Équation 2	$< 1 \times 10^{-6}$	$2.591\,209 \times 10^{6}$
RK4	Équation 2	$< 1 \times 10^{-6}$	$1.283\,694 \times 10^{9}$
Euler	Équation 3	$< 1 \times 10^{-6}$	$7.773\,448 \times 10^{-1}$
Heun	Équation 3	$< 1 \times 10^{-6}$	$4.772\,995 \times 10^{-1}$
RK4	Équation 3	$< 1 \times 10^{-6}$	$8.128\,572 \times 10^{-3}$

5.7 Reproduction des Conclusions Originales

Conclusions du programme original :

1. Runge-Kutta 4 est la méthode la plus précise (erreur minimale)
2. Euler est la méthode la plus rapide mais la moins précise
3. Heun est un bon compromis entre précision et vitesse
4. Pour des pas plus petits, toutes les méthodes seraient plus précises

Notre analyse confirme ces conclusions et les nuance :

- La supériorité de RK4 est confirmée sur les problèmes réguliers
- Euler est effectivement la plus rapide mais aussi la plus robuste
- Heun représente effectivement le meilleur compromis global
- L'importance du pas est critique, surtout pour Euler

5.8 Références Bibliographiques

Références

[1] Quarteroni, A., Saleri, F. (2006). *Calcul Scientifique : Cours, exercices corrigés et illustrations en MATLAB et Octave*. Springer.

[2] Butcher, J. C. (2016). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley.

[3] Heath, M. T. (2018). *Scientific Computing : An Introductory Survey*. SIAM.

[4] Hairer, E., Nørsett, S. P., Wanner, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*. Springer.

[5] Stoer, J., Bulirsch, R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis*. Springer.