1 Transformée de Laplace

Propriétés : Pour des signaux $x(t)$, $y(t)$:

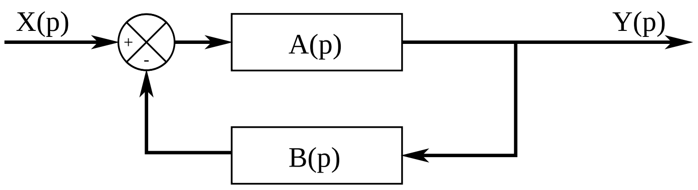
- Bijectivité : $\mathcal{L}(\mathcal{L}^{-1}(x(t))) = x(t)$
- Linéarité : (a, b constantes)
$$\begin{cases} \mathcal{L}(ax(t)+by(t)) = a\mathcal{L}(x(t)) + b\mathcal{L}(y(t)) \\ \mathcal{L}^{-1}(aX(p)+bY(p)) = a\mathcal{L}^{-1}(X(p)) + b\mathcal{L}^{-1}(Y(p)) \end{cases}$$
- Dérivation :
$$\begin{cases} \mathcal{L}(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}) = pX(p) - x(0^+) \\ \mathcal{L}(\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}) = p(pX(p) - x(0^+)) - \dot{x}(0^+) \end{cases}$$
C.I. nulles : (conditions d'*Heaviside*) ($n \in \mathbb{N}$) :
$$\mathcal{L}(\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n}) = p^n X(p)$$
- Intégration : $\mathcal{L}(\int_0^t x(\tau)d\tau) = \frac{1}{p}X(p)$
- Retard : $\mathcal{L}(x(t-\tau)) = \mathrm{e}^{-p\tau}X(p)$

Théorème de la valeur initiale :
$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{p\to+\infty} pX(p)$$
Théorème de la valeur finale :
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p)$$

Transformées usuelles	
Impulsion $\delta(t)$	1
Échelon $u(t)$	$\frac{1}{p}$
$\mathrm{C^{te}}$	$\frac{\mathrm{C^{te}}}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$

2 Schémas bloc

Fonction de transfert : $H(p) \hat{=} \frac{\text{Sortie}}{\text{Entre}} \hat{=} \frac{Y(p)}{X(p)}$



FTBO : $H_{\mathrm{BO}} = A(p)B(p)$ **FTBF :** $H_{\mathrm{BF}} = \frac{A(p)}{1+A(p)B(p)}$

Théorème de superposition : Pour un système soumis à plusieurs entrées $X_i(p)$, la sortie est :
$$Y(p) = \sum_k Y_k$$
où les $Y_k(p)$ sont les sorties obtenues pour l'entrée $X_k(p)$ en annulant les autres $X_i(p)$ (càd $i \neq k$).

3 Système du premier ordre

Forme canonique de la fonction de transfert :
$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}, \begin{cases} K \text{ gain statique} \\ \tau \text{ constante de temps} \end{cases}$$

Réponse impulsionnelle :

Signal d'entrée : $x(t) = \delta(t) \leftrightarrow X(p) = 1$

- Réponse : $y(t) = \frac{K}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$
- Pente à l'origine : $-\frac{K}{\tau^2}$

Réponse indicielle :

Signal d'entrée : $x(t) = u(t) \leftrightarrow X(p) = \frac{1}{p}$

- Réponse : $y(t) = K(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$
- Pente à l'origine : $\frac{K}{\tau}$
- Temps de réponse à 5% : $t_{5\%} = \ln(20)\tau \approx 3\tau$

Réponse à une rampe :

Signal d'entrée : $x(t) = tu(t) \leftrightarrow X(p) = \frac{1}{p^2}$

- Réponse : $y(t) = K(t - \tau + \tau\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})$
- Pente à l'origine : 0
- Asymptote à l'infini : $K(t-\tau)$