פרוייקט גמר בקורס אנאליזה נומרית:
אינטרפולאציית Neville
Neville's Method

אדם אהרוני   מאור ולדמן

מכון טכנולוגי חולון HIT

יום חמישי, 01. מרץ, 2021.

פרולוג:

בהינתן $n+1$ נקודות דאטה, קיים פולינום ייחודי מסדר $\leq n$ העובר דרך הנקודות הנ.ל..
באמצעות שיטת Neville ניתן להגיע לערך אותו פולינום בנקודה כלשהי.

- השיטה מבוססת על שיטת האינטרפולאצייה של ניוטון (Newton) ועל מציאת הפרשים מחולקים.

פולינום האינטרפולאצייה:

בהינתן $n+1$ נקודות דאטה $(x_k; y_k)$, $k = 0; 1; \ldots; n$, כאשר שיעורי ה-x שונים, פולינום האינטרפולאצייה הוא פולינום מסדר של לפחות n המקיים את:

$$\forall k = 0; 1; \ldots; n: \quad p(x_k) = y_k$$

הפולינום הזה קיים והוא ייחודי. שיטת Neville מוצאת את ערך פולינום האינטרפולאצייה הנ.ל. בנקודה x כלשהי.
נגדיר פולינום $p_{i;j}(x)$ (כאשר מתקיים $i \leq j$) בתור פולינום מסדר של $j - i$ העובר דרך נקודות הדאטה הנתונות $(x_k; y_k)$ עבור $k = i; i+1; \ldots; j$.

תהליך מציאת הפולינום:

על הפולינומים לקיים את היחס הרקורסיבי:

$$\begin{cases} p_{i;\,i}\left(x\right) & = y_i \\ p_{i;\,j}\left(x\right) & = \frac{\left(x-x_j\right)p_{i;\,j-1}\left(x\right)-\left(x-x_i\right)p_{i+1;\,j}\left(x\right)}{x_i-x_j} \end{cases} \; ; \quad \begin{matrix} 0 \le i \le n \\ 0 \le i < j \le n \end{matrix}$$

נוסחת הנסיגה הזו יכולה לחשב את $p_{0;\,n}\left(x\right)$, שהוא הערך אותו אנו מחפשים.

הוכחת הנוסחה הרקורסיבית:

הביטוי $p_{i;\,i}(x) = y_i$ הוא מיידי, ואת הנוסחה הרקורסיבית נוכיח באמצעות אינדוקצייה:
בהינתן $i;\,j$ עם פולינום $p_{i;\,j-1}(x)$ העובר דרך הנקודות $(x_k;\ y_k)$ עם $k = i;\ i+1;\ldots;\ j-1$,
וכן הפולינום $p_{i+1;\,j}(x)$ העובר דרך הנקודות $(x_k;\ y_k)$ עם $k = i+1;\ i+2;\ldots;\ j$.
לפי ההנחה הנ.ל. מתקיים:

$$\begin{cases} p_{i;\,j-1}(x_k) = y_k & i \le k \le j-1 \\ p_{i+1;\,j}(x_k) = y_k & i-1 \le k \le j \end{cases}$$

הוכחה:

ולכן, עבור $i+1 \leq k \leq j-1$, מתקבל:

$$p_{i;j}\left(x_k\right) = \frac{\left(x_k - x_j\right) p_{i;j-1}\left(x_k\right) - \left(x_k - x_i\right) p_{i+1;j}\left(x_k\right)}{x_i - x_j} =$$

$$= \frac{\left(x_k - x_j\right) y_k - \left(x_k - x_i\right) y_k}{x_i - x_j} = y_k$$

וכן:

$$\begin{cases} p_{i;j}\left(x_i\right) & = \frac{\left(x_i - x_j\right) p_{i;j-1}\left(x_i\right)}{x_i - x_j} = y_i \\ p_{i;j}\left(x_j\right) & = \frac{-\left(x_j - x_i\right) p_{i+1;j}\left(x_j\right)}{x_i - x_j} = y_j \end{cases}$$

ולכן $p_{i;j}\left(x\right)$ עובר דרך כל הנקודות $\left(x_k;\ y_k\right)$ כאשר $k = i;\ i+1; \ldots; j$.

הוכח.

דוגמה:

ניקח את $n=4$. נוכל להשתמש בנוסחת הרקורסייה על מנת למלא את התרשים משמאל לימין באופן הבא:

$$
\begin{array}{ccccc}
p_{0;0}(x)=y_0 & & & & \\
& p_{0;1}(x) & & & \\
p_{1;1}(x)=y_1 & & p_{0;2}(x) & & \\
& p_{1;2}(x) & & p_{0;3}(x) & \\
p_{2;2}(x)=y_2 & & p_{1;3}(x) & & \boxed{p_{0;4}(x)} \\
& p_{2;3}(x) & & p_{1;4}(x) & \\
p_{3;3}(x)=y_3 & & p_{2;4}(x) & & \\
& p_{3;4}(x) & & & \\
p_{4;4}(x)=y_4 & & & &
\end{array}
$$

דוגמה

התהליך מביא לנו את $p_{0;\,4}\left(x\right)$, שהוא בעצם ערך הפולינום העובר דרך כל $n+1$ נקודות הדאטה (מתנאי ההתחלה) בנקודה x כלשהי.

(ניתן גם לומר שאלגוריתם זה רץ בסיבוכיות של $O\left(n^2\right)$, הוכחה בהמשך)

זמן הריצה של האלגוריתם:

בהתחשב בכך שכדי למצוא את פולינום $p_{0;n}(x)$ נצטרך להשתמש ברקורסייה שבה מחשבים לראשונה n פולינומים, לאחר מכן $n-1$ פולינומים וכן הלאה...
מכאן, גודל הפולינומים שמחשבים מובא על ידיי:

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i$$

הוכחה

מדובר בסכום סדרה חשבונית סטאנדארטית. לא קשה לראות שהסכום מקיים:

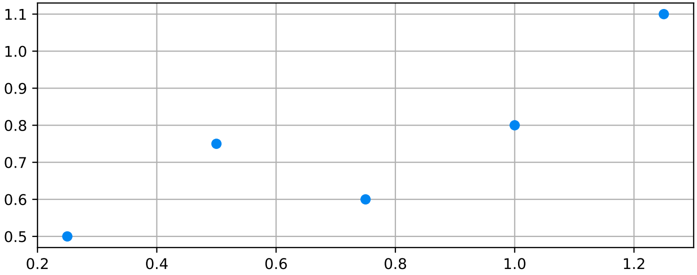
$$S = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \\ = \boxed{O\left(n^2\right)}$$

ומכאן, הגענו לזמן ריצה של $O\left(n^2\right)$.

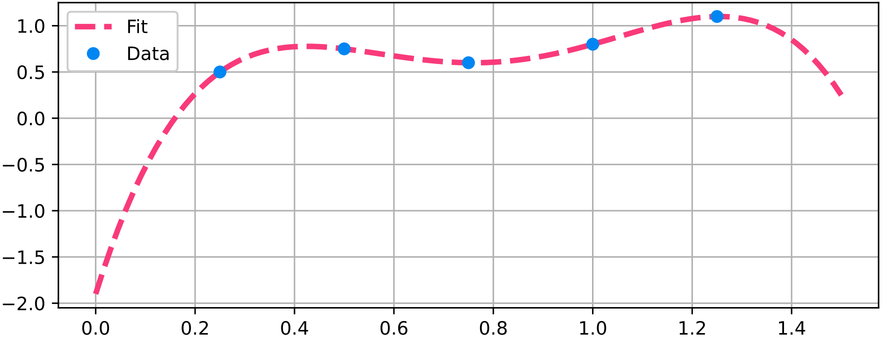
הוכח.

דוגמה N°1:

הפונקצייה לפני אינטרפולאצייה:

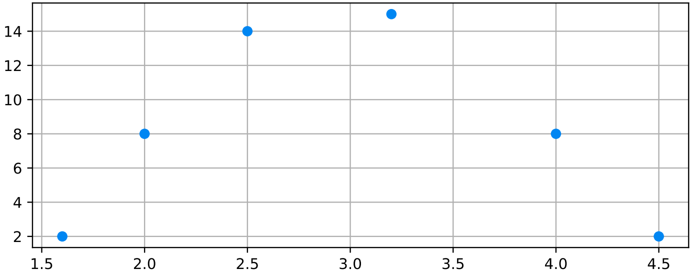


הפונקצייה אחרי אינטרפולאצייה:

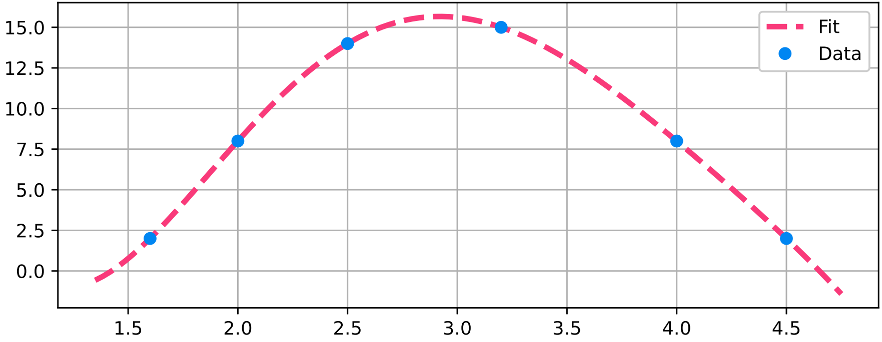


דוגמה N°2:

הפונקצייה לפני אינטרפולאצייה:

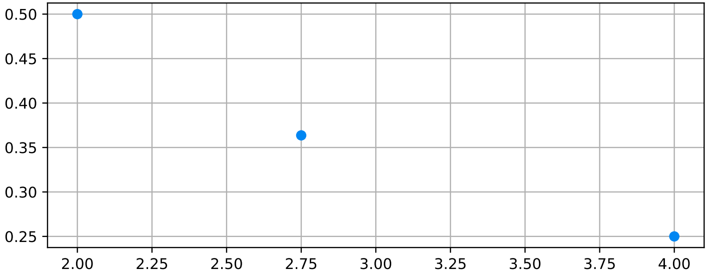


הפונקצייה אחרי אינטרפולאצייה:

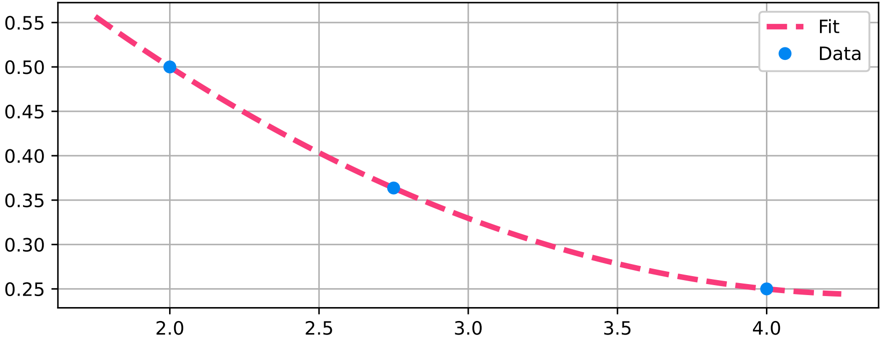


דוגמה N°3:

הפונקצייה לפני אינטרפולאצייה:

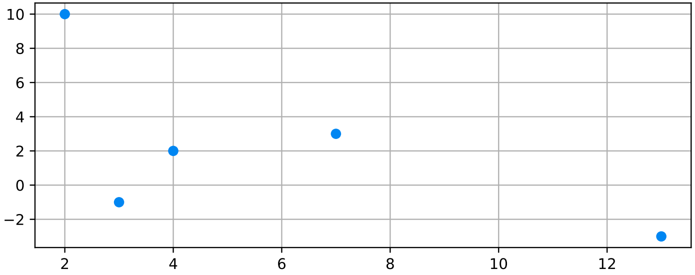


הפונקצייה אחרי אינטרפולאצייה:

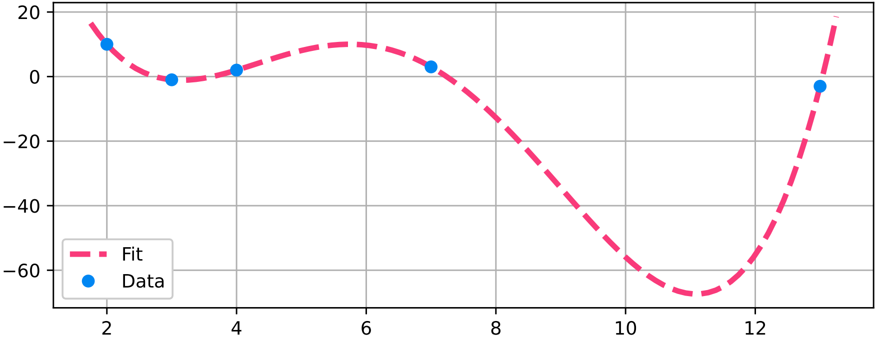


דוגמה N°4:

הפונקצייה לפני אינטרפולאצייה:

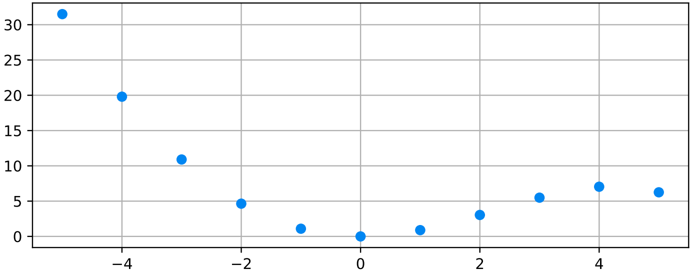


הפונקצייה אחרי אינטרפולאצייה:

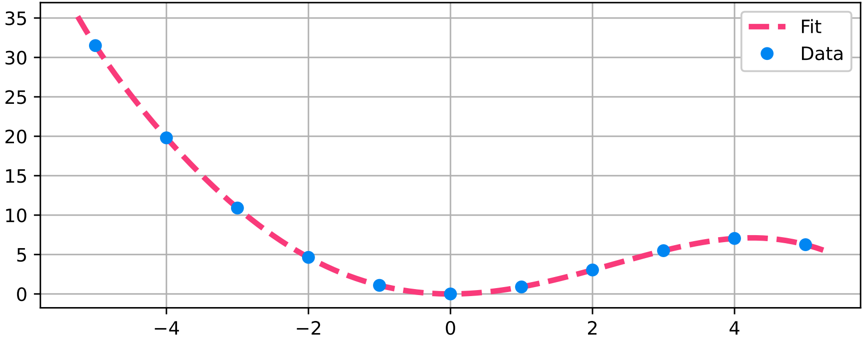


דוגמה N°5:

הפונקצייה לפני אינטרפולאצייה:

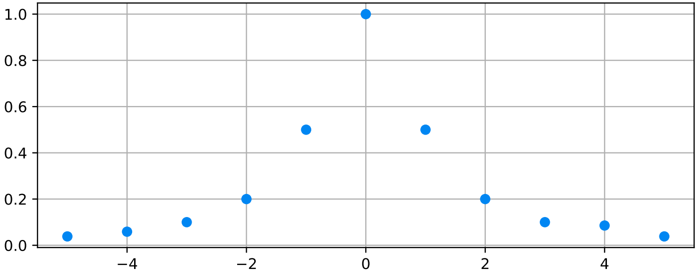


הפונקצייה אחרי אינטרפולאצייה:



דוגמה N°6:

הפונקצייה לפני אינטרפולאצייה:



הפונקצייה אחרי אינטרפולאצייה: