פרוייקט גמר בקורס אנאליזה נומרית: אינטרפולציית Neville

Neville's Method

אדם אהרוני   מאור ולדמן

מכון טכנולוגי חולון HIT

יום שני, 01. מרץ, 2021.

פרולוג:

במסגרת פרוייקט זה, נסביר, נפרט, ונראה בפעולה על שיטת האינטרפולצייה לפי Neville. נוכיח גם איך היא עובדת, נראה דוגמאות, וכן נשווה מול שיטות אינטרפולצייה אחרות שלמדנו בקורס.

במסגרת הפרוייקט הרחבנו את אופקינו בתחום האנאליזה הנומרית והאינטרפולצייה. הפרוייקט גרם לנו לחקור את שיטת Neville עד תום, ובכך נתן לנו מקור להשוואה עם שיטות אינטרפולצייה אחרות.

פרולוג:

בהינתן $1 + n$ נקודות דאטה, קיים פולינום ייחודי מסדר $n \leq$ העובר דרך הנקודות. באמצעות שיטת Neville ניתן להגיע לערך אותו פולינום בנקודה כלשהי.

- השיטה מבוססת על שיטת האינטרפולצייה של ניוטון (Newton) ועל מציאת הפרשים מחולקים.

פולינום האינטרפולצייה:

בהינתן $n+1$ נקודות דאטה $(x_k; y_k)$, $k = 0; 1; \ldots; n$, כאשר שיעורי ה-x שונים, פולינום האינטרפולצייה הוא פולינום מסדר של לפחות n המקיים את:

$$\forall k = 0; 1; \ldots; n: \quad p(x_k) = y_k$$

הפולינום הזה קיים והוא ייחודי. שיטת Neville מוצאת את ערך פולינום האינטרפולצייה הנ.ל. בנקודה x כלשהי.

נגדיר פולינום $p_{i;j}(x)$ (כאשר מתקיים $i \le j$) בתור פולינום מסדר של $j - i$ העובר דרך נקודות הדאטה הנתונות $(x_k; y_k)$ עבור $k = i; i+1; \ldots; j$.

תהליך מציאת הפולינום:

על הפולינומים לקיים את היחס הרקורסיבי:

$$\begin{cases} p_{i;i}(x) = y_i & ; \quad 0 \leq i \leq n \\ p_{i;j}(x) = \dfrac{(x-x_j)p_{i;j-1}(x)-(x-x_i)p_{i+1;j}(x)}{x_i-x_j} & ; \quad 0 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

נוסחת הרקורסייה הזו יכולה לחשב את $p_{0;n}(x)$, שהוא הערך אותו אנו מחפשים.

הוכחת הנוסחה הרקורסיבית:

הביטוי $y_i = p_{i;i}(x)$ הוא מיידי, ואת הנוסחה הרקורסיבית נוכיח באמצעות אינדוקצייה:

בהינתן $i; j$ עם פולינום $p_{i;j-1}(x)$ העובר דרך הנקודות $(x_k; y_k)$ עם $k = i; i+1; \ldots; j-1$,
וכן הפולינום $p_{i+1;j}(x)$ העובר דרך הנקודות $(x_k; y_k)$ עם $k = i+1; i+2; \ldots; j$.
לפי ההנחה הנ.ל. מתקיים:

$$\begin{cases} p_{i;j-1}(x_k) = y_k & i \le k \le j-1 \\ p_{i+1;j}(x_k) = y_k & i-1 \le k \le j \end{cases}$$

ולכן, עבור $i+1 \le k \le j-1$, מתקבל:

$$p_{i;j}(x_k) = \frac{(x_k - x_j)\,p_{i;j-1}(x_k) - (x_k - x_i)\,p_{i+1;j}(x_k)}{x_i - x_j} =$$

$$= \frac{(x_k - x_j)\,y_k - (x_k - x_i)\,y_k}{x_i - x_j} = y_k$$

וכן:

$$\begin{cases} p_{i;j}(x_i) & = \frac{(x_i - x_j)\,p_{i;j-1}(x_i)}{x_i - x_j} = y_i \\ p_{i;j}(x_j) & = \frac{-(x_j - x_i)\,p_{i+1;j}(x_j)}{x_i - x_j} = y_j \end{cases}$$

ולכן $p_{i;j}(x)$ עובר דרך כל הנקודות $(x_k;\ y_k)$ כאשר $k = i;\ i+1;\ldots;\ j$.

הוכח.

דוגמה:

ניקח את $n = 4$. נוכל להשתמש בנוסחת הרקורסייה על מנת למלא את התרשים משמאל לימין באופן הבא:

$$
\begin{array}{ccccc}
p_{0;0}(x) = y_0 & & & & \\
 & p_{0;1}(x) & & & \\
p_{1;1}(x) = y_1 & & p_{0;2}(x) & & \\
 & p_{1;2}(x) & & p_{0;3}(x) & \\
p_{2;2}(x) = y_2 & & p_{1;3}(x) & & \boxed{p_{0;4}(x)} \\
 & p_{2;3}(x) & & p_{1;4}(x) & \\
p_{3;3}(x) = y_3 & & p_{2;4}(x) & & \\
 & p_{3;4}(x) & & & \\
p_{4;4}(x) = y_4 & & & &
\end{array}
$$

דוגמה

התהליך מביא לנו את $p_{0;4}(x)$, שהוא בעצם ערך הפולינום העובר דרך כל $n+1$ נקודות הדאטה (מתנאי ההתחלה) בנקודה x כלשהי.

(ניתן גם לומר שאלגוריתם זה רץ בסיבוכיות של $O(n^2)$, הוכחה בהמשך)

זמן הריצה של האלגוריתם:

בהתחשב בכך שכדי למצוא את פולינום $p_{0;n}(x)$ נצטרך להשתמש ברקורסייה שבה מחשבים לראשונה n פולינומים, לאחר מכן $n-1$ פולינומים וכן הלאה...
מכאן, גודל הפולינומים שמחשבים מובא על ידיי:

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \\ = \sum_{i=1}^{n} i$$

הוכחה

מדובר בסכום סדרה חשבונית סטנדרטית. לא קשה לראות שהסכום מקיים:

$$S = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\left(n+1\right)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \\ = \boxed{O\left(n^2\right)}$$

ומכאן, הגענו לזמן ריצה של $O\left(n^2\right)$.

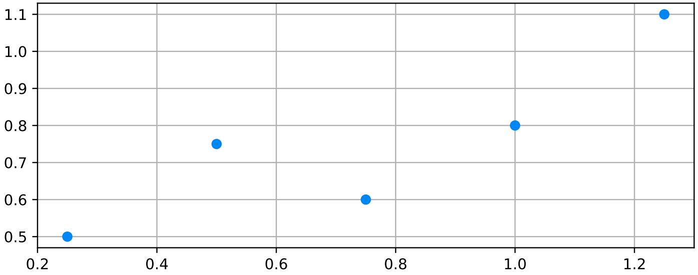
הוכח.

דוגמאות

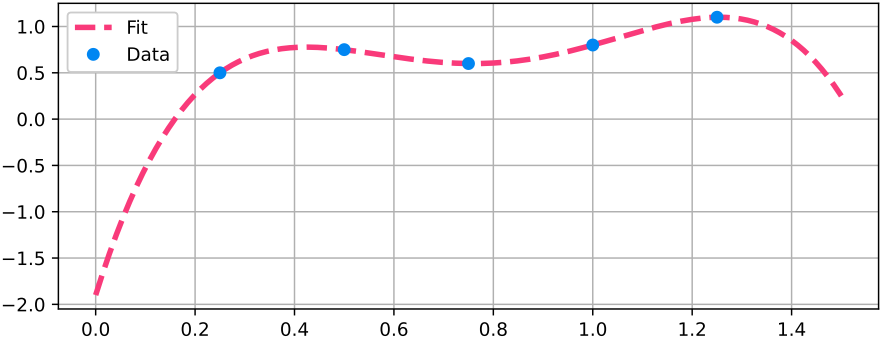
- רוב הפונקציות באו מהרצאות, תרגולים, ומטלות בית.

דוגמה N°1:

הפונקצייה לפני אינטרפולצייה:

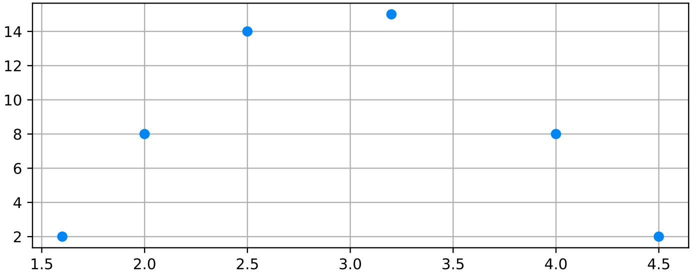


הפונקצייה אחרי אינטרפולצייה:

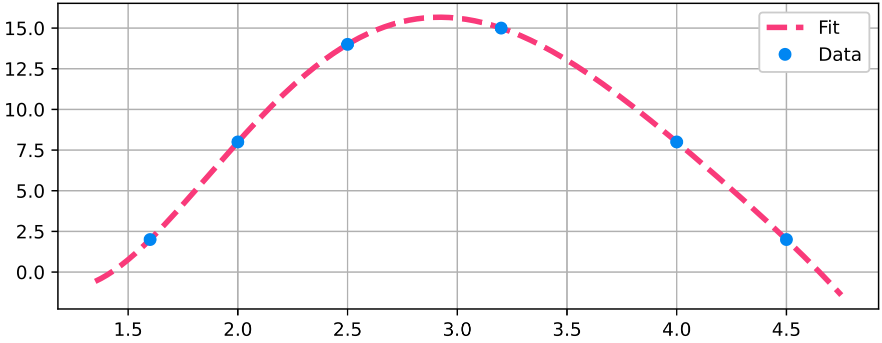


דוגמה N°2:

הפונקצייה לפני אינטרפולצייה:

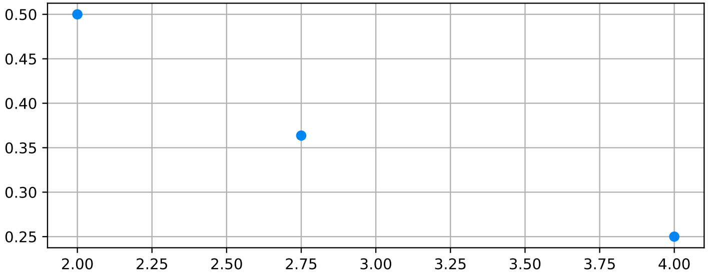


הפונקצייה אחרי אינטרפולצייה:

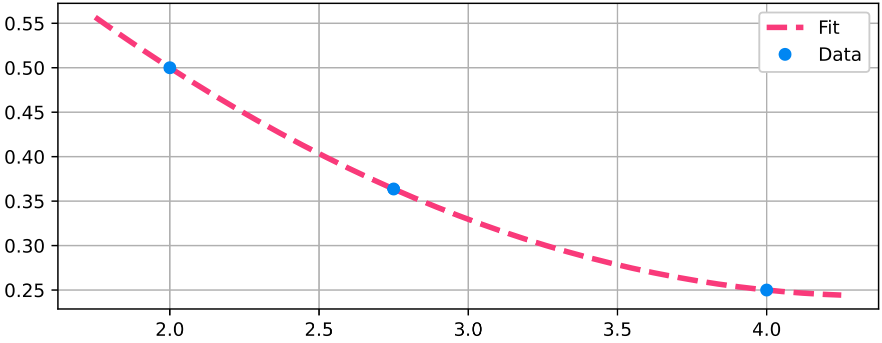


דוגמה N°3:

הפונקצייה לפני אינטרפולצייה:

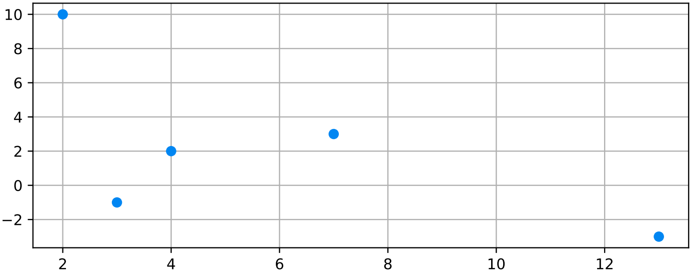


הפונקצייה אחרי אינטרפולצייה:

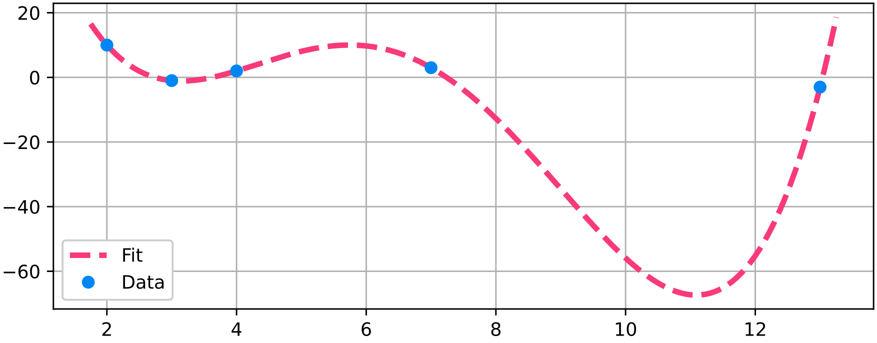


דוגמה N°4:

הפונקצייה לפני אינטרפולצייה:

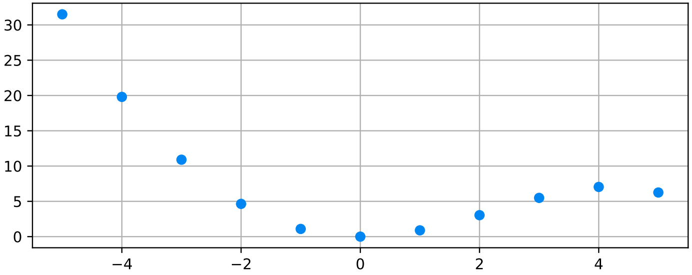


הפונקצייה אחרי אינטרפולצייה:



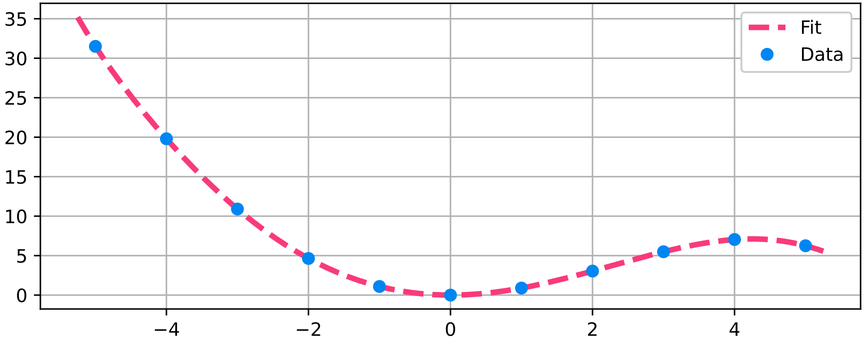
דוגמה N°5:

הפונקצייה לפני אינטרפולצייה:



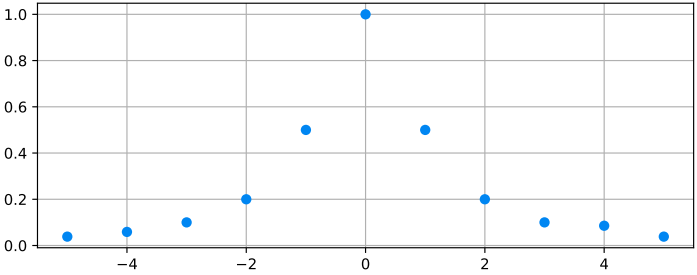
דוגמה N°5

הפונקצייה אחרי אינטרפולצייה:

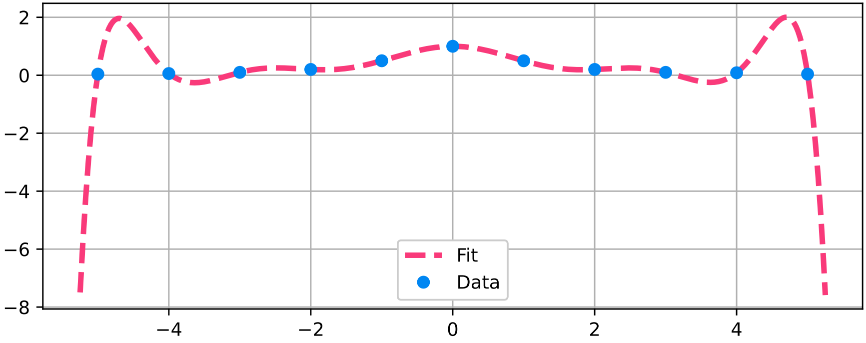


דוגמה N°6:

הפונקצייה לפני אינטרפולצייה:



הפונקצייה אחרי אינטרפולצייה:



השוואה עם טכניקות אחרות:

כעת, נערוך השוואה עם טכניקות אינטרפולצייה אחרות כמו:

- אינטרפולצייה לפי לאגראנז׳ (Lagrange)
- אינטרפולצייה לפי `numpy.polyfit`