פרוייקט גמר בקורס אנאליזה נומרית: אינטרפולאציית Neville

Neville's Method

אדם אהרוני   מאור ולדמן

מכון טכנולוגי חולון HIT

יום חמישי, 01. מרץ, 2021.

פרולוג:

בהינתן $n+1$ נקודות, קיים פולינום ייחודי מסדר $\leq n$ העובר דרך הנקודות הנ.ל.. באמצעות שיטת Neville ניתן להגיע לאותו פולינום.
השיטה מבוססת על שיטת האינטרפולאצייה של ניוטון (Newton) ועל מציאת הפרשים מחולקים.

תהליך מציאת הפולינום:

בהינתן $n+1$ נקודות $(x_i; y_i)$ כאשר שיעורי ה-x שונים, פולינום האינטרפולאצייה הוא פולינום מסדר של לפחות n המקיים את:

$$\forall i = 0 \ldots n :$$
$$p(x_i) = y_i$$

הפולינום הזה קיים והוא ייחודי. שיטת Neville מוצאת את ערך הפולינום הנ.ל. בנקודה x כלשהי.
נגדיר את הפולינום $p_{i;j}(x)$ בתוך פולינום מסדר של $i - j$ העובר דרך הנקודות הנתונות $(x_k; y_k)$ עבור $k = i \ldots j$.

על הפולינום לקיים את היחס הרקורסיבי:

$$\begin{cases} p_{i;\,i}(x) & = y_i\,; \qquad 0 \le i \le n \\ p_{i;\,j}(x) & = \dfrac{(x-x_j)\,p_{i;\,j-1}(x)-(x-x_i)\,p_{i+1;\,j}(x)}{x_i-x_j}\,; \qquad 0 \le i < j \le n \end{cases}$$

נוסחת הנסיגה הזו יכולה לחשב את $p_{0;\,n}(x)$, שהוא הערך אותו אנו מחפשים.

דוגמה:

ניקח את $n = 4$. נוכל להשתמש בנוסחת הרקורסייה על מנת למלא את התרשים משמאל לימין באופן הבא:

$$
\begin{array}{ccccc}
p_{0;0}(x) = y_0 & & & & \\
 & p_{0;1}(x) & & & \\
p_{1;1}(x) = y_1 & & p_{0;2}(x) & & \\
 & p_{1;2}(x) & & p_{0;3}(x) & \\
p_{2;2}(x) = y_2 & & p_{1;3}(x) & & \boxed{p_{0;4}(x)} \\
 & p_{2;3}(x) & & p_{1;4}(x) & \\
p_{3;3}(x) = y_3 & & p_{2;4}(x) & & \\
 & p_{3;4}(x) & & & \\
p_{4;4}(x) = y_4 & & & &
\end{array}
$$

התהליך מביא לנו את $p_{0;4}(x)$, שהוא בעצם ערך הפולינום העובר דרך כל $n+1$ נקודות הדאטה (מתנאי ההתחלה) בנקודה x כלשהי.

(ניתן גם לומר שאלגוריתם זה רץ בסיבוכיות של $O(n^2)$.)

זמן הריצה של האלגוריתם:

בהתחשב בכך שכדי למצוא את פולינום $p_{0;n}(x)$ נצטרך להשתמש ברקורסייה שבה מחשבים לראשונה n פולינומים, לאחר מכן $n-1$ פולינומים וכן הלאה...
מכאן, גודל הפולינומים שמחשבים מובא על ידיי:

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1$$

מדובר בסדרה חשבונית, שסכומה מובא על ידיי:

$$S = \frac{n}{2}(n+1) = \boxed{O\left(n^2\right)}$$