

פרוייקט גמר בקורס אנאליזה נומרית: Neville Neville's Method

אדם אהרוני מאור ולדמן

מכון טכנולוגי חולון HIT

יום חמישי, 01. מרץ, 2021.

פרולוג:

במסגרת פרווייקט זה, נסביר, נפרט, ונראה בפעולה על שיטת האינטרפולאציה לפי Neville. נוכיח גם איך היא עובדת, נראה דוגמאות, וכן נשווה מול שיטות אינטרפולאציה אחרות שלמדנו בקורס.

במסגרת הפרוייקט הרחבנו את אופקינו בתחום האנאליזה הנומרית והאינטרפולאציה. הפרוייקט גרם לנו לחקור את שיטת Neville עד תום, ובכך נתן לנו מקור להשוואה עם שיטות אינטרפולאציה אחרות.

פרולוג:

בהינתן $n + 1$ נקודות דאטה, קיים פולינום ייחודי מסדר $n \leq$ העובר דרך הנקודות הנ"ל. באמצעות שיטת Neville ניתן להגיע לערך אותו פולינום בנקודה כלשהי.

● השיטה מבוססת על שיטת האינטרפולאציה של ניוטון (Newton) ועל מציאת הפרשים מחולקים.

פולינום האינטרפולאצייה:

בהינתן $n + 1$ נקודות דאטה $(x_k; y_k)$, $k = 0; 1; \dots; n$, כאשר שיעורי ה- x שונים, פולינום האינטרפולאצייה הוא פולינום מסדר של לפחות n המקיים את:

$$\forall k = 0; 1; \dots; n :$$

$$p(x_k) = y_k$$

הפולינום הזה קיים והוא ייחודי. שיטת Neville מוצאת את ערך פולינום האינטרפולאציה הנל. בנקודה x כלשהי.

נגדיר פולינום $p_{i,j}(x)$ (כאשר מתקיים $i \leq j$) בתור פולינום מסדר של $j - i$ העובר דרך נקודות הדאטה הנתונות $(x_k; y_k)$ עבור $k = i; i + 1; \dots; j$.

תהליך מציאת הפולינום:

על הפולינומים לקיים את היחס הרקורסיבי:

$$\begin{cases} p_{i;i}(x) = y_i & 0 \leq i \leq n \\ p_{i;j}(x) = \frac{(x-x_j)p_{i;j-1}(x) - (x-x_i)p_{i+1;j}(x)}{x_i - x_j} & 0 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

נוסחת הנסיגה הזו יכולה לחשב את $p_{0;n}(x)$, שהוא הערך אותו אנו מחפשים.

הוכחת הנוסחה הרקורסיבית:

הביטוי $p_{i;i}(x) = y_i$ הוא מיידית, ואת הנוסחה הרקורסיבית נוכיח באמצעות אינדוקציה:
 בהינתן $i; j$ עם פולינום $p_{i;j-1}(x)$ העובר דרך הנקודות $(x_k; y_k)$ עם $k = i; i+1; \dots; j-1$,
 וכן הפולינום $p_{i+1;j}(x)$ העובר דרך הנקודות $(x_k; y_k)$ עם $k = i+1; i+2; \dots; j$.
 לפי ההנחה הנ"ל. מתקיים:

$$\begin{cases} p_{i;j-1}(x_k) = y_k & i \leq k \leq j-1 \\ p_{i+1;j}(x_k) = y_k & i+1 \leq k \leq j \end{cases}$$

ולכן, עבור $i + 1 \leq k \leq j - 1$, מתקבל:

$$\begin{aligned} p_{i;j}(x_k) &= \frac{(x_k - x_j) p_{i;j-1}(x_k) - (x_k - x_i) p_{i+1;j}(x_k)}{x_i - x_j} = \\ &= \frac{(x_k - x_j) y_k - (x_k - x_i) y_k}{x_i - x_j} = y_k \end{aligned}$$

וכן:

$$\begin{cases} p_{i;j}(x_i) = \frac{(x_i - x_j) p_{i;j-1}(x_i)}{x_i - x_j} = y_i \\ p_{i;j}(x_j) = \frac{-(x_j - x_i) p_{i+1;j}(x_j)}{x_i - x_j} = y_j \end{cases}$$

ולכן $p_{i;j}(x)$ עובר דרך כל הנקודות $(x_k; y_k)$ כאשר $k = i; i + 1; \dots; j$.

דוגמה:

ניקח את $n = 4$. נוכל להשתמש בנוסחת הרקורסייה על מנת למלא את התרשים משמאל לימין באופן הבא:

$$p_{0;0}(x) = y_0$$

$$p_{1;1}(x) = y_1$$

$$p_{2;2}(x) = y_2$$

$$p_{3;3}(x) = y_3$$

$$p_{4;4}(x) = y_4$$

$$p_{0;1}(x)$$

$$p_{1;2}(x)$$

$$p_{2;3}(x)$$

$$p_{3;4}(x)$$

$$p_{0;2}(x)$$

$$p_{1;3}(x)$$

$$p_{2;4}(x)$$

$$p_{0;3}(x)$$

$$p_{1;4}(x)$$

$$p_{0;4}(x)$$

התהליך מביא לנו את $p_{0;4}(x)$, שהוא בעצם ערך הפולינום העובר דרך כל $n + 1$ נקודות הדאטה (מתנאי ההתחלה) בנקודה x כלשהי.

(ניתן גם לומר שאלגוריתם זה רץ בסיבוכיות של $O(n^2)$, הוכחה בהמשך)

זמן הריצה של האלגוריתם:

בהתחשב בכך שכדי למצוא את פולינום $p_{0;n}(x)$ נצטרך להשתמש ברקורסייה שבה מחשבים לראשונה n פולינומים, לאחר מכן $n - 1$ פולינומים וכן הלאה... מכאן, גודל הפולינומים שמחשבים מובא על ידי:

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \sum_{i=1}^n i$$

מדובר בסכום סדרה חשבונית סטאנדארטית. לא קשה לראות שהסכום מקיים:

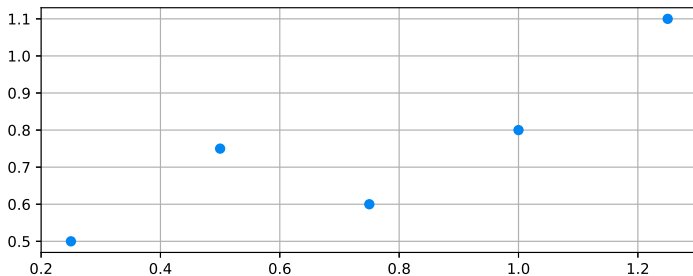
$$S = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} =$$
$$= \boxed{O(n^2)}$$

ומכאן, הגענו לזמן ריצה של $O(n^2)$.

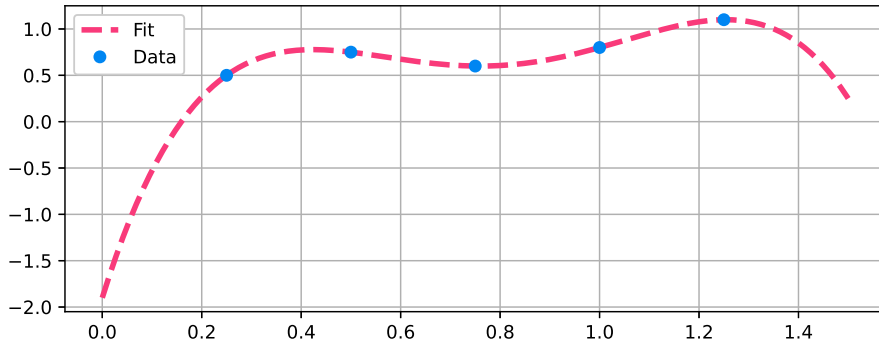
הוכח.

דוגמה N°1:

הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:

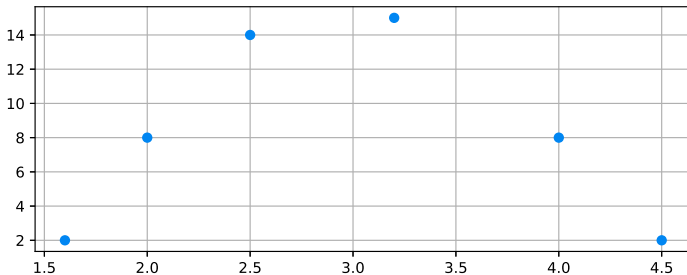


הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:

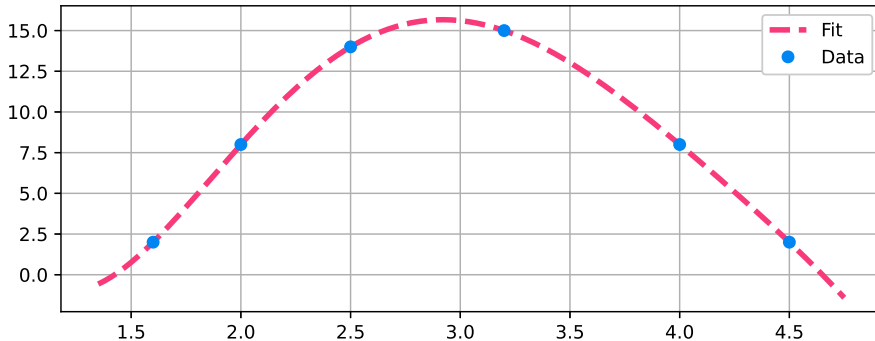


דוגמה N²:

הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:

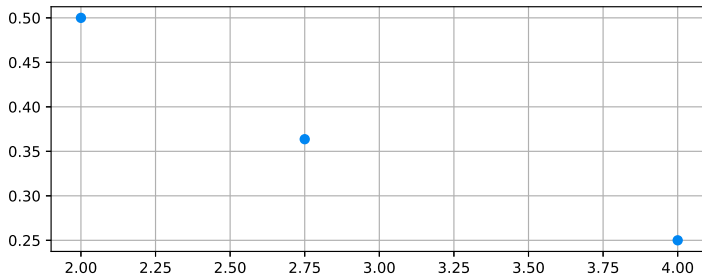


הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:

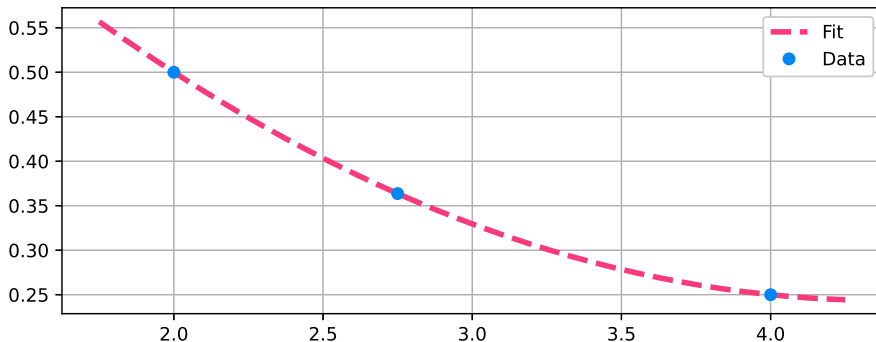


דוגמה N°3

הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:

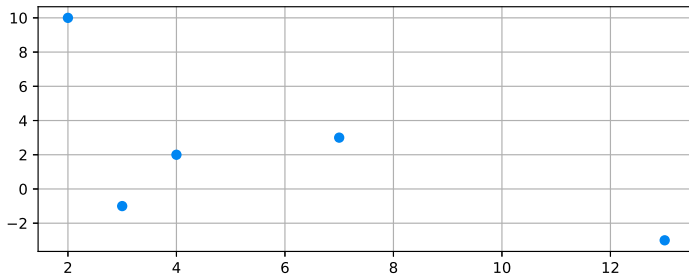


הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:

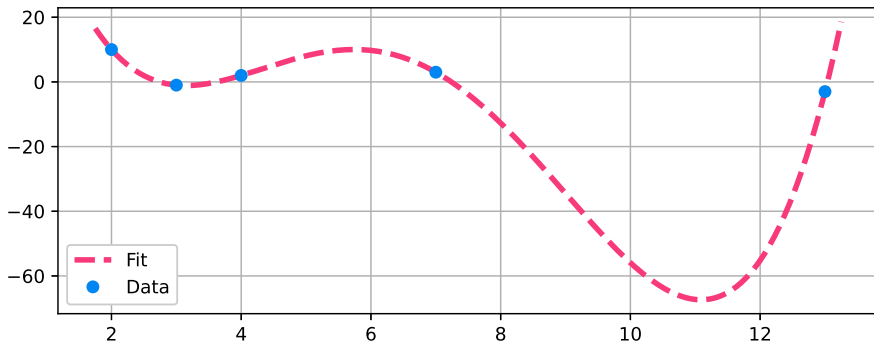


דוגמה N°4:

הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:

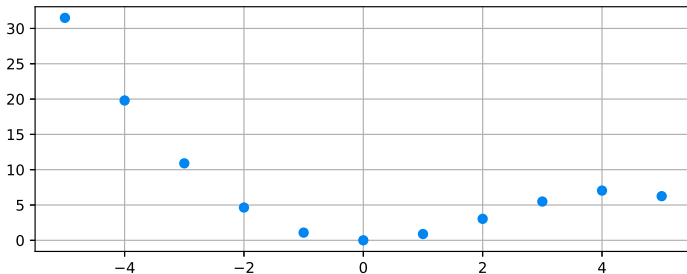


הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:

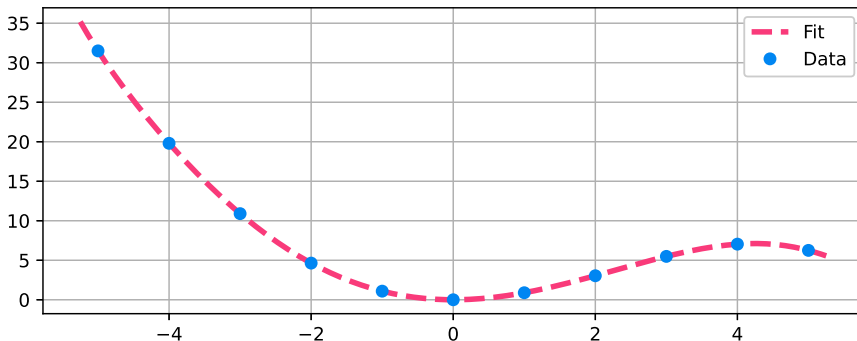


דוגמה N°5

הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:

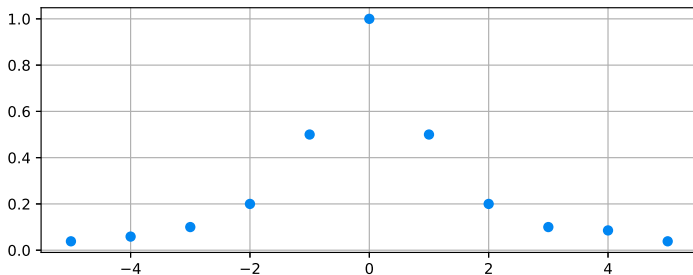


הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:

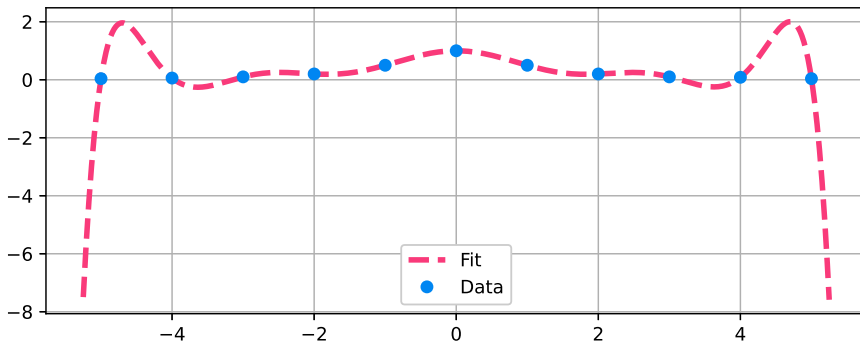


דוגמה N^6 :

הפונקציה לפני אינטרפולאציה:



הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:





השוואה עם טכניקות אחרות:

כעת, נערוך השוואה עם טכניקות אינטרפולאציה אחרות כמו:

- אינטרפולאציה לפי לאגראנז' (Lagrange)
- אינטרפולאציה לפי `np.polyfit`