



פרוייקט גמר בקורס אנאליזה נומרית: Neville Neville's Method

אדם אהרוני מאור ולדמן

מכון טכנולוגי חולון HIT

יום חמישי, 01. מרץ, 2021.

פרולוג:

בהינתן $n + 1$ נקודות, קיים פולינום ייחודי מסדר $n \leq$ העובר דרך הנקודות הנ"ל. באמצעות שיטת Neville ניתן להגיע לאותו פולינום. השיטה מבוססת על שיטת האינטרפולאציה של ניוטון (Newton) ועל מציאת הפרשים מחולקים.



תהליך מציאת הפולינום:

בהינתן $n + 1$ נקודות $(x_i; y_i)$ כאשר שיעורי ה- x שונים, פולינום האינטרפולאציה הוא פולינום מסדר של לפחות n המקיים את:

$$\forall i = 0 \dots n :$$

$$p(x_i) = y_i$$

הפולינום הזה קיים והוא ייחודי. שיטת Neville מוצאת את ערך הפולינום הנ.ל. בנקודה x כלשהי.

נגדיר את הפולינום $p_{i,j}(x)$ בתור פולינום מסדר של $j - i$ העובר דרך הנקודות הנתונות $(x_k; y_k)$ עבור $k = i \dots j$.

על הפולינום לקיים את היחס הרקורסיבי:

$$\begin{cases} p_{i;i}(x) = y_i; & 0 \leq i \leq n \\ p_{i;j}(x) = \frac{(x-x_j)p_{i;j-1}(x) - (x-x_i)p_{i+1;j}(x)}{x_i - x_j}; & 0 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

נוסחת הנסיגה הזו יכולה לחשב את $p_{0;n}(x)$, שהוא הערך אותו אנו מחפשים.

דוגמה:

ניקח את $n = 4$. נוכל להשתמש בנוסחת הרקורסיה על מנת למלא את התרשים משמאל לימין באופן הבא:

$$p_{0;0}(x) = y_0$$

$$p_{1;1}(x) = y_1$$

$$p_{2;2}(x) = y_2$$

$$p_{3;3}(x) = y_3$$

$$p_{4;4}(x) = y_4$$

$$p_{0;1}(x)$$

$$p_{1;2}(x)$$

$$p_{2;3}(x)$$

$$p_{3;4}(x)$$

$$p_{0;2}(x)$$

$$p_{1;3}(x)$$

$$p_{2;4}(x)$$

$$p_{0;3}(x)$$

$$p_{1;4}(x)$$

$$p_{0;4}(x)$$

התהליך מביא לנו את $p_{0;4}(x)$, שהוא בעצם ערך הפולינום העובר דרך כל $n + 1$ נקודות הדאטה (מתנאי ההתחלה) בנקודה x כלשהי.
(ניתן גם לומר שאלגוריתם זה רץ בסיבוכיות של $O(n^2)$.)



זמן הריצה של האלגוריתם:

בהתחשב בכך שכדי למצוא את פולינום $p_{0;n}(x)$ נצטרך להשתמש ברקורסייה שבה מחשבים לראשונה n פולינומים, לאחר מכן $n - 1$ פולינומים וכן הלאה... מכאן, גודל הפולינומים שמחשבים מובא על ידי:

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1$$

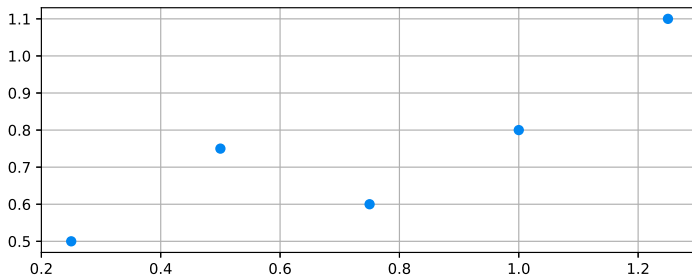
מדובר בסדרה חשבונית, שסכומה מובא על ידי:

$$S = \frac{n}{2} (n + 1) = \boxed{O(n^2)}$$



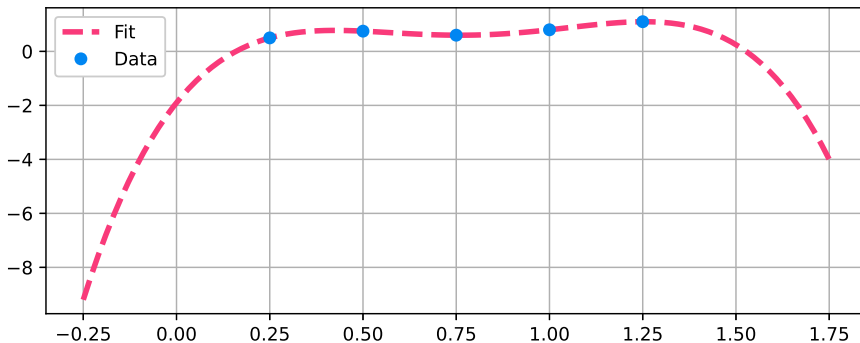
דוגמה 1^o:

הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:





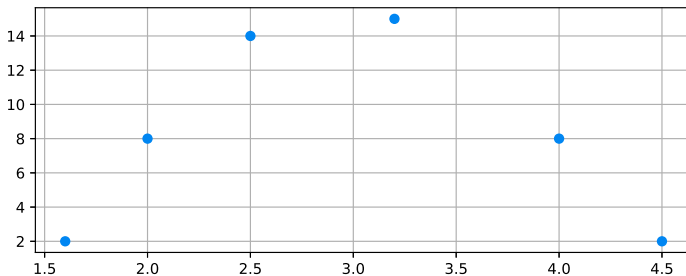
הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:





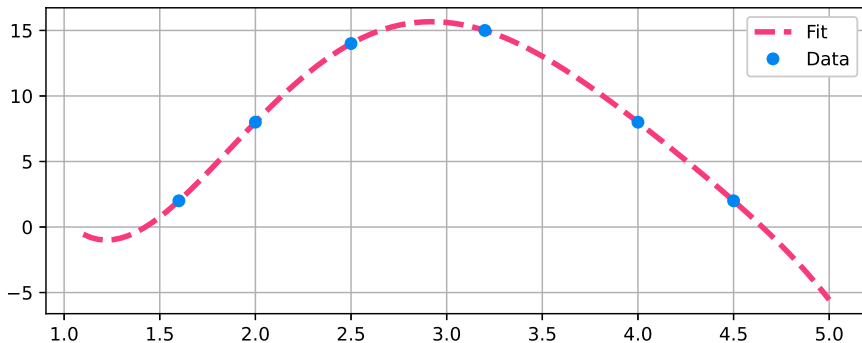
דוגמה N²:

הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:





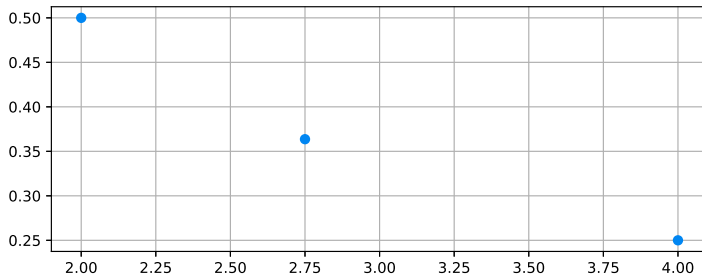
הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:





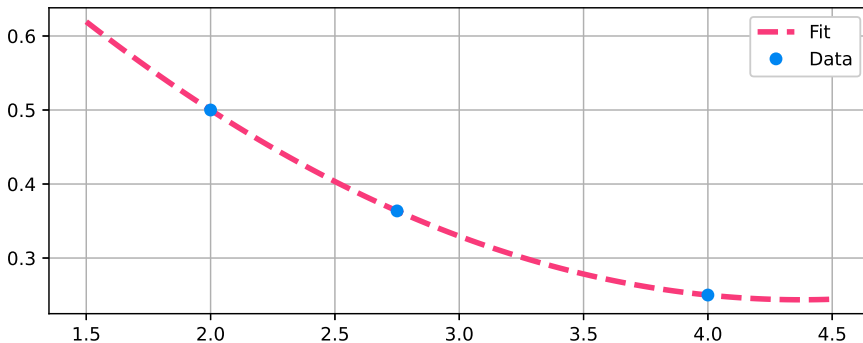
דוגמה N^3 :

הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:

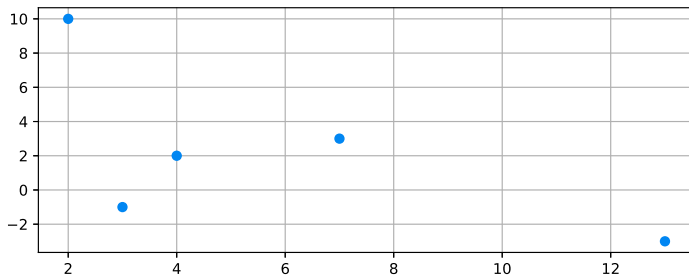




הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:

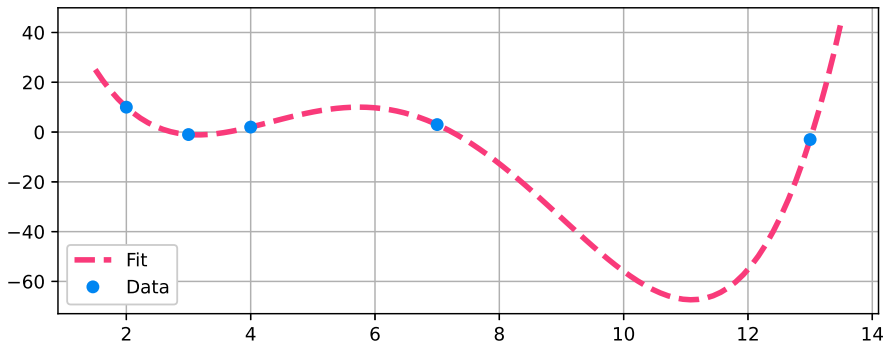


הפונקצייה לפני אינטרפולאצייה:





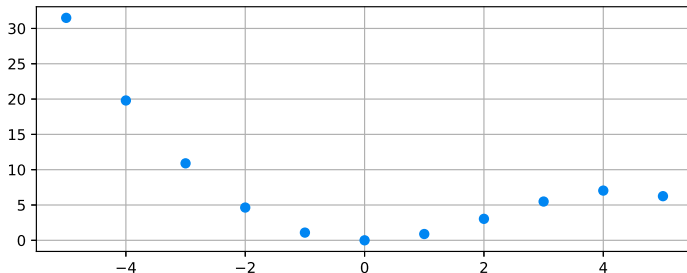
הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:





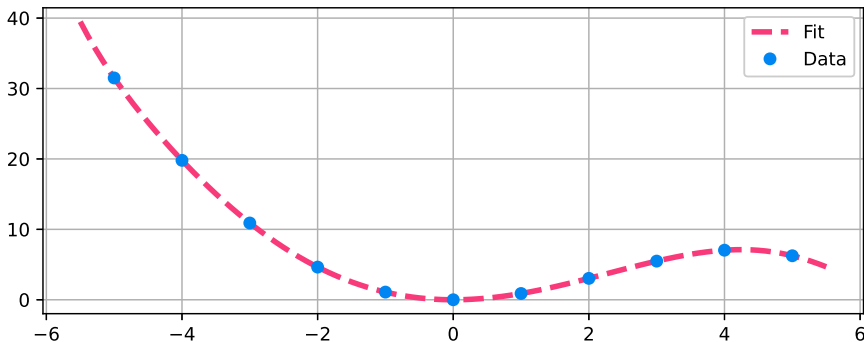
דוגמה N^5 :

הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:





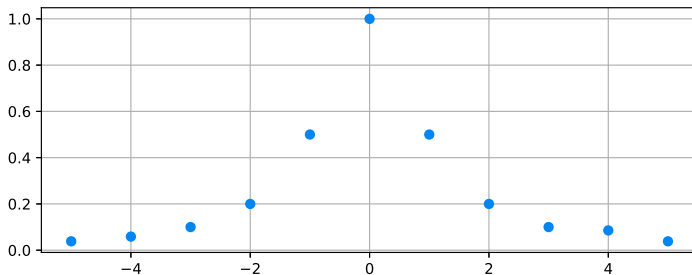
הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:





דוגמה N^6 :

הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:



הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:

