



# פרוייקט גמר בקורס אנאליזה נומרית: Neville Neville's Method

אדם אהרוני   מאור ולדמן

מכון טכנולוגי חולון HIT

יום חמישי, 01. מרץ, 2021.

## פרולוג:

בהינתן  $n + 1$  נקודות, קיים פולינום ייחודי מסדר  $n \leq$  העובר דרך הנקודות הנ"ל. באמצעות שיטת Neville ניתן להגיע לאותו פולינום. השיטה מבוססת על שיטת האינטרפולאציה של ניוטון (Newton) ועל מציאת הפרשים מחולקים.

## תהליך מציאת הפולינום:

בהינתן  $n + 1$  נקודות  $(x_i; y_i)$  כאשר שיעורי ה- $x$  שונים, פולינום האינטרפולאציה הוא פולינום מסדר של לפחות  $n$  המקיים את:

$$\forall i = 0 \dots n :$$

$$p(x_i) = y_i$$

הפולינום הזה קיים והוא ייחודי. שיטת Neville מוצאת את ערך הפולינום הנ.ל. בנקודה  $x$  כלשהי.

נגדיר את הפולינום  $p_{i,j}(x)$  בתור פולינום מסדר של  $j - i$  העובר דרך הנקודות הנתונות  $(x_k; y_k)$  עבור  $k = i \dots j$ .

על הפולינום לקיים את היחס הרקורסיבי:

$$\begin{cases} p_{i;i}(x) = y_i; & 0 \leq i \leq n \\ p_{i;j}(x) = \frac{(x-x_j)p_{i;j-1}(x) - (x-x_i)p_{i+1;j}(x)}{x_i - x_j}; & 0 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

נוסחת הנסיגה הזו יכולה לחשב את  $p_{0;n}(x)$ , שהוא הערך אותו אנו מחפשים.



## דוגמה:

ניקח את  $n = 4$ . נוכל להשתמש בנוסחת הרקורסייה על מנת למלא את התרשים משמאל לימין באופן הבא:

$$p_{0;0}(x) = y_0$$

$$p_{1;1}(x) = y_1$$

$$p_{2;2}(x) = y_2$$

$$p_{3;3}(x) = y_3$$

$$p_{4;4}(x) = y_4$$

$$p_{0;1}(x)$$

$$p_{1;2}(x)$$

$$p_{2;3}(x)$$

$$p_{3;4}(x)$$

$$p_{0;2}(x)$$

$$p_{1;3}(x)$$

$$p_{2;4}(x)$$

$$p_{0;3}(x)$$

$$p_{1;4}(x)$$

$$p_{0;4}(x)$$

התהליך מביא לנו את  $p_{0;4}(x)$ , שהוא בעצם ערך הפולינום העובר דרך כל  $n + 1$  נקודות הדאטה (מתנאי ההתחלה) בנקודה  $x$  כלשהי.  
(ניתן גם לומר שאלגוריתם זה רץ בסיבוכיות של  $O(n^2)$ .)

## זמן הריצה של האלגוריתם:

בהתחשב בכך שכדי למצוא את פולינום  $p_{0;n}(x)$  נצטרך להשתמש ברקורסייה שבה מחשבים לראשונה  $n$  פולינומים, לאחר מכן  $n - 1$  פולינומים וכן הלאה... מכאן, גודל הפולינומים שמחשבים מובא על ידי:

$$n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1$$

מדובר בסדרה חשבונית, שסכומה מובא על ידי:

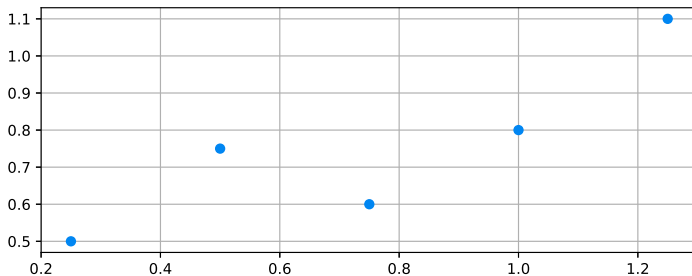
$$s = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} =$$

$$= \boxed{O(n^2)}$$



# דוגמה N°1

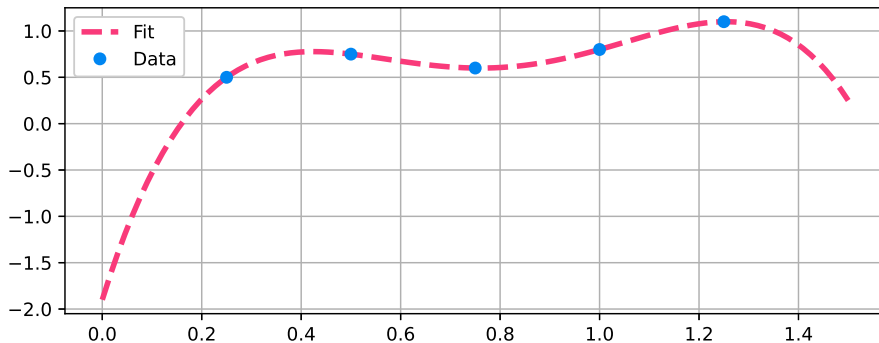
## הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:







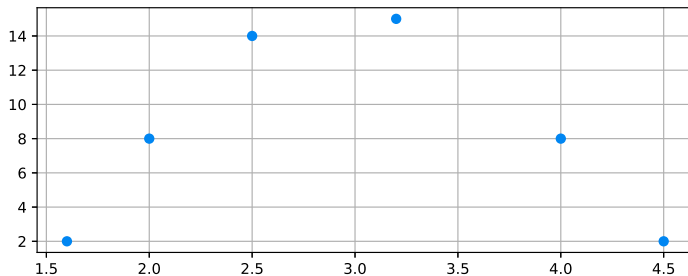
## הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:





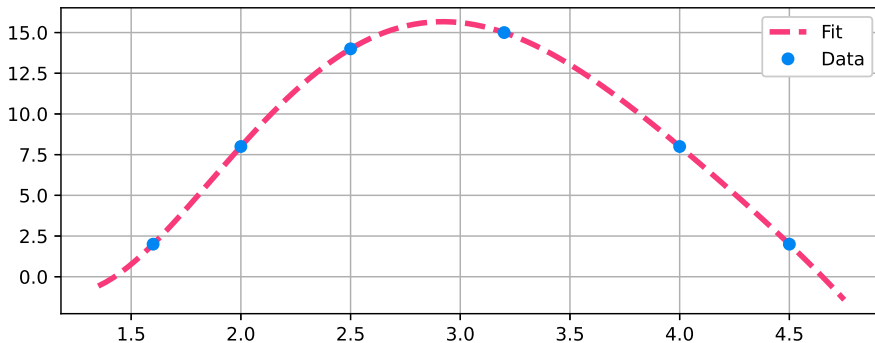
# דוגמה N<sup>2</sup>:

## הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:





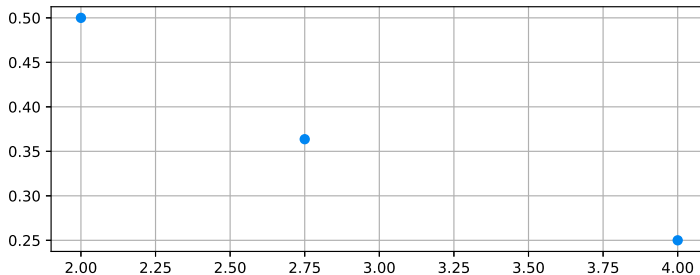
## הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:





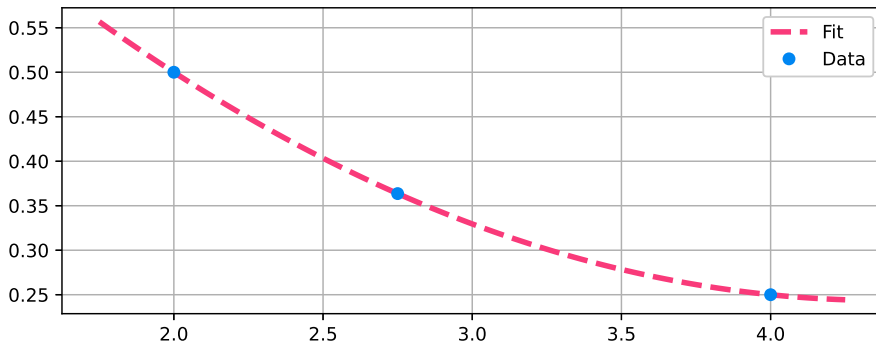
# דוגמה N<sup>3</sup>:

## הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:



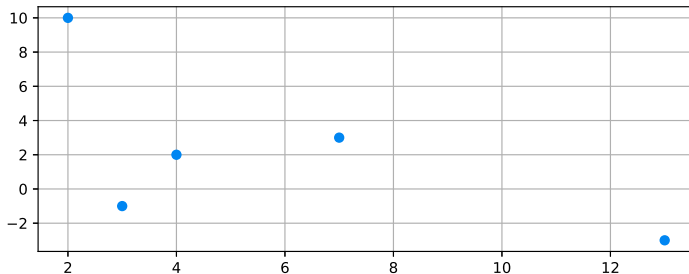


## הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:



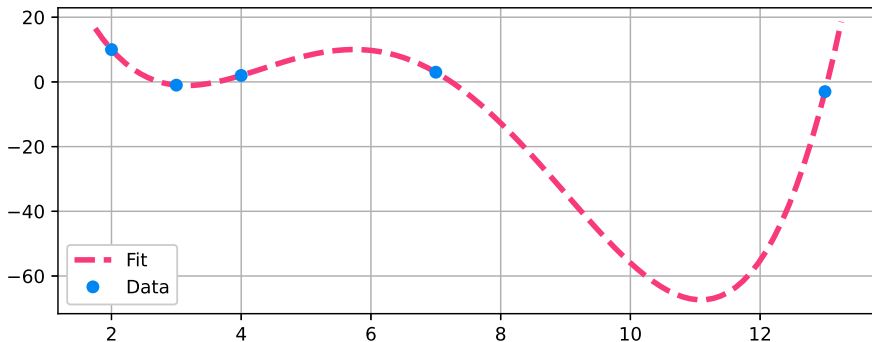
## דוגמה N°4:

### הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:





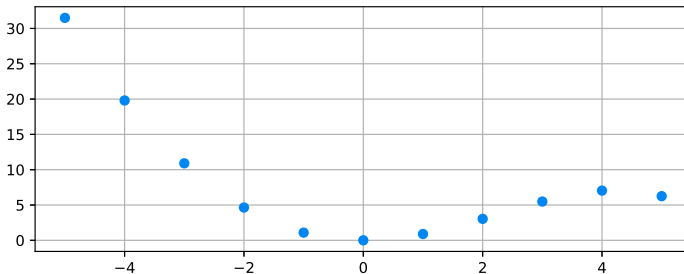
## הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:





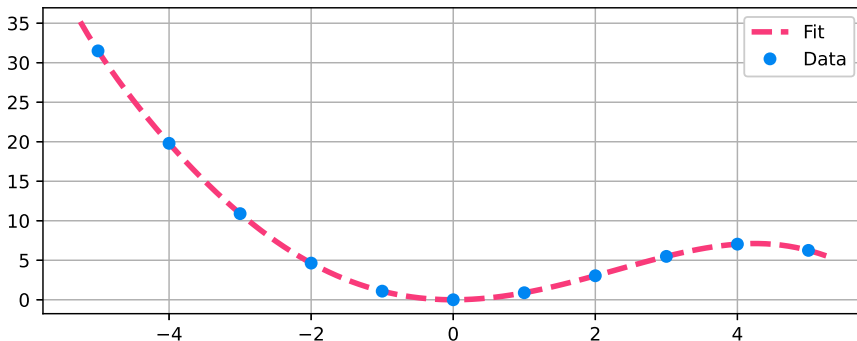
# דוגמה N°5

## הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:





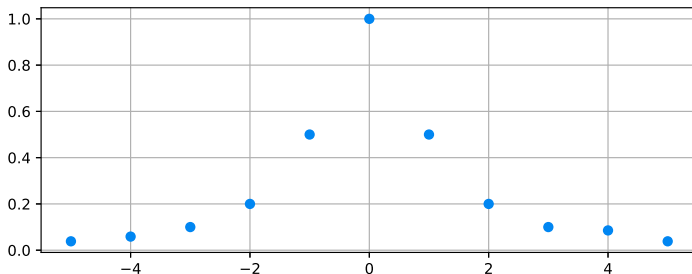
## הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:





# דוגמה $N^6$ :

## הפונקצייה לפני אינטרפולאציה:





## הפונקצייה אחרי אינטרפולאציה:

