

Poesz Attila

Inkonzisztencia a döntéshozatalban

Operációkutatás és Aktuáriustudományok Tanszék

Témavezető: Dr. Temesi József CSc

Copyright © Poesz Attila

Budapesti Corvinus Egyetem
Általános és Kvantitatív Közgazdaságtan Doktori Iskola

Inkonzisztencia a döntéshozatalban
Ph.D. értekezés

Poesz Attila

Budapest, 2017.

Tartalomjegyzék

Ábrák jegyzéke	3
Táblázatok jegyzéke	6
Előszó	7
1. Kutatási terület bemutatása	11
1.1. Többszemponútú döntési modellek	11
1.2. Páros összehasonlítás	12
1.2.1. Páros összehasonlítás mátrix	13
1.3. Inkonzisztencia mérése	15
1.3.1. Saaty-féle inkonzisztencia index (CR)	16
1.3.2. Koczkodaj inkonzisztencia index (CM)	18
1.4. Többszemponútú döntési probléma megoldása	21
1.4.1. AHP	21
2. Tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok	27
2.1. Minta gyűjtése	27
2.2. Általános tulajdonságok	29
2.2.1. A hányados skála elemeinek eloszlása	29
2.2.2. Mátrix sorainak, illetve oszlopainak függetlensége . . .	30
3. Inkonzisztencia szintjét befolyásoló tényezők	33
3.1. Kutatási célok	33
3.2. Kísérlet felépítése	34
3.3. Eredmények	37
3.3.1. Inkonzisztencia elemzése teljes kitöltés mellett	37
3.3.2. Inkonzisztencia a kérdezési folyamat során	42
3.3.3. Súlyvektorok elemzése	46

4. Konzisztenssé alakítható mátrixok	55
4.1. Mátrixok a logaritmizált térben	56
4.2. Megváltoztatandó elemek minimális száma	58
4.3. Gráf reprezentáció	60
4.3.1. Egy elem megváltoztatása	60
4.3.2. Két elem módosítása	67
4.3.3. Három elem módosítása	71
5. Inkonzisztencia csökkentése	75
5.1. Inkonzisztencia indexek formalizálása logaritmizált térben . .	77
5.2. Optimalizálási feladat általános alakja	78
5.3. Inkonzisztencia csökkentése	82
5.3.1. A Saaty-féle CR index	82
5.3.2. A Koczkodaj-féle CM index	86
5.3.3. Peláez és Lamata-féle CI index	90
5.3.4. Aguarón és Moreno-Jiménez GCI indexe	92
5.3.5. c_3 index	95
5.3.6. Fedrizzi és Giove ρ indexe	96
5.4. Egy számpélda	96
6. Condition of Order Preservation (COP)	99
6.1. COP bemutatása	100
6.2. Súlyozási módszerek és a COP kiterjesztések	101
6.2.1. Logaritmikus legkisebb négyzetek módszere (LLS) . . .	101
6.2.2. Logaritmikus legkisebb abszolút hiba (LLAE)	101
6.2.3. Sajátvektor módszer (EM)	102
6.3. Szimulációs modellkeret	104
6.4. Analitikus eredmények	105
7. Összefoglalás	109
Irodalomjegyzéke	111

Ábrák jegyzéke

1.1. AHP - Szempontfa	22
1.2. Szempontfa a toronyház építés módjának kiválasztásához . . .	24
2.1. A 137 tapasztalati páros összehasonlítási mátrixban az egész elemek eloszlása	30
2.2. Páros összehasonlítási értékek empirikus eloszlásának összeha- sonlítása Gass és Standard eredményével	31
2.3. Mátrixok sorainak/oszlopainak vizsgálata	31
3.1. Teljesen kitöltött és az egy hiányzó elemet tartalmazó má- trixok CR inkonzisztenciája, méret és kitöltési sorrend szerint megbontva	39
3.2. Az egyéni 6×6 páros összehasonlítás mátrixok CR inkonzisz- tenciája véletlen kitöltési sorrendnél	46
4.1. A 4.1. állítás bizonyításában használt részgráf	57
4.2. Részgráf a 4.3. állítás bizonyításához, $n = 4$ esetben	61
4.3. Részgráf a 4.3. állítás bizonyításához az $n \geq 5$ esetben	62
4.4. Részgráf, amely szemlélteti az (i, j, k) triád és a vele azonos élekkel rendelkező triádok kapcsolatát az $n \geq 5$ esetben	63
4.5. A 4.2. példa szemléltetése	67
4.6. Két él lehetséges kapcsolata, független (a) és csatlakozó (b) . .	68
4.7. A három él lehetséges elhelyezkedései	72
6.1. Véletlen generált mátrixok átlagos CR inkonzisztencia értékei a σ paraméter függvényében	105

Táblázatok jegyzéke

1.1. Az AHP hányados skála egész értékei	14
1.2. CM inkonzisztencia index értelmezése	20
2.1. Az AHP hányados skála egész elemeinek meghatározása	29
3.1. A kitöltési sorrendek szemléltetése	36
3.2. A kísérletsorozatban résztvevő hallgatók száma az egyes szempontok és mátrix méretek szerint	37
3.3. Teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok átlagos CR inkonzisztenciája %-ban mérve	38
3.4. Teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok átlagos CM inkonzisztenciája	40
3.5. A \log_{CR} index lineáris regressziós becslésének eredménye . . .	41
3.6. A \log_{CM} index lineáris regressziós becslésének eredménye . . .	41
3.7. Nem teljesen kitöltött 6×6 páros összehasonlítás mátrixok átlagos CR inkonzisztenciája, nyaralók összehasonlításánál . . .	44
3.8. Nem teljesen kitöltött 6×6 páros összehasonlítás mátrixok átlagos CR inkonzisztenciája, országok területének összehasonlításánál	44
3.9. Nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix CR inkonzisztenciájának elemzése lineáris kevert regresszióval	45
3.10. A lépésenként becsült súlyvektor és a teljes kitöltésből származó súlyvektor átlagos Euklideszi távolsága, nyaralók esetén, 8×8 mátrixoknál	47
3.11. A lépésenként becsült súlyvektor és a teljes kitöltésből származó súlyvektor átlagos Euklideszi távolsága, térképek esetén, 8×8 mátrixoknál	48
3.12. A lépésenként becsült és a teljes kitöltésből származó alternatív rangsorok átlagos rangkorrelációja 6×6 mátrixoknál . . .	48

3.13. Átlagos rangsor mátrix 6×6 mátrixok esetében, térképes problémánál	50
3.14. Átlagos rangsor mátrix 6×6 mátrixok esetében, nyaralás problémánál	50
3.15. Intranszitiv triádokat tartalmazó mátrixok darabszáma a triádok és a CR inkonzisztencia mutató alapján	52
4.1. Inkonzisztens triádok száma a megváltoztatandó mátrixelemek számának (K) és helyzetének függvényében	65
5.1. Philadelphiától mért távolságok összehasonlítása	97
6.1. Azon mátrixok száma, amelyekre létezik a COP-t teljesítő súlyvektor	105
6.2. Eltérés normák átlaga a 3 alap- és a 3 módosított módszer esetében	106
6.3. A rangsorfordulások átlagos száma a 3 alap- és a 3 módosított módszer esetében	107

Előszó

Egy felnőtt ember számára természetes dolog nap, mint nap döntéseket hozni, bízva a döntés helyességében. Azonban vannak olyan döntési problémák, melyek méretük, komplexitásuk, bonyolult szempontrendszerük, vagy más tulajdonságuk miatt, nagyon pontosan előkészített és indokolható döntési eljárást igényelnek. A cél megfogalmazásától, a végső döntésig mindennek indokolhatónak és átláthatónak kell lennie. A különféle módszerek egyik kritikus pontja az emberi következetlenség, melynek okai lehetnek például a megfelelő szaktudás hiánya, vagy a szubjektív adatok jelenléte. Ezt a nem kívánt tulajdonságot nevezik inkonzisztenciának. Általában a valós problémáknál létezik valamilyen fokú inkonzisztencia, tehát ezt kizárni, semmisnek tekinteni nem lehet.

A disszertáció célja az, hogy jellemezze a páros összehasonlítás mátrixokban fellelő inkonzisztenciát, és definiáljon lehetséges inkonzisztencia csökkentő eljárásokat. A bemutatott módszerek lehetőséget teremtenek a "hiba helyének" meghatározására, ami a döntéshozóval való konzultációt követően lehetővé teszi a javítást.

A szükséges vizsgálatokhoz elengedhetetlen volt olyan adatbázisok létrehozása, amelyek az eddig széles körben elfogadott generált véletlen mátrixokkal szemben valódi mátrixokat tartalmaznak. A kutatáshoz összegyűjtöttem és felhasználtam a 2. fejezetben leírt valódi problémákból származó mátrixokat, amelyek rámutatnak a véletlen generált és a valódi mátrixok közötti eltérésre. Az eredmények hatására egyértelművé vált, hogy az inkonzisztencia további vizsgálatát kontrollált kísérleti körülmények között kitöltött mátrixokon szükséges elvégezni.

Az értekezés felépítése

Az 1. fejezetben bemutatásra kerülnek a többszemponútú döntési problémák és a megoldásukhoz használt, páros összehasonlítások módszere. Mivel a dolgozat nagy mértékben épít a valódi esetekre, ezért itt egy publikált valós probléma is szerepel szemléltetés céljából.

A disszertáció 2. fejezete tartalmazza a tapasztalati páros összehasonlítás mátrixokból felépülő minta összegyűjtésének menetét, illetve általános tulajdonságait (például az összehasonlítási elemek eloszlása).

A 3. fejezet a Budapesti Corvinus Egyetem hallgatóival végzett kísérleten alapszik és rámutat, hogy milyen tényezők befolyásolják a páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciájának szintjét.

A 4. fejezetben bemutatásra kerül kétféle megközelítés az 1-3 elem megváltoztatásával konzisztenssé alakítható mátrixok vizsgálatára. Az első eljárás egy vegyes 0-1 lineáris programozási feladat, amelynek optimális megoldása megadja a módosítandó elemek számát. A második megoldásnál gráfelméleti alapon kerül jellemzésre az 1-3 elemmel konzisztenssé alakítható mátrix.

A konzisztenssé alakítható mátrixok mellett fontos szerepet kapnak az inkonzisztencia szempontjából elfogadható mátrixok, amelyeknek részletes vizsgálata az 5. fejezetben olvasható.

A 6. fejezet a súlyozási módszerek számára előírt rangsor megtartási (COP) feltétel szükségességét vizsgálja.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet szeretném kifejezni témavezetőmnek, Temesi Józsefnek, aki rendkívül sokat tett kutatásom irányának meghatározásával és folyamatos támogatásával. Köszönettel tartozom Rapcsák Tamásnak, amiért az egyetemi éveim alatt felkeltette érdeklődésemet a téma iránt és bátorított a tudományos munka elkezdésében.

Hálás vagyok Bozóki Sándornak, Dezső Lindának, Fülöp Jánosnak és Pekka Korhonennek a közös kutatómunkáért, valamint a benyújtott cikkek elkészítésében nyújtott segítségért. Nagyon hasznos észrevételeket és tanácsokat kaptam Farkas Andrástól, Kéri Gerzsontól, Solymosi Tamástól,

amelyek szintén hozzájárultak az értekezés színvonalának növeléséhez.

Nagyon köszönöm feleségemnek a mérhetetlen türelmet és támogatást, ami lehetőséget teremtett a kutatáshoz.

1. fejezet

Kutatási terület bemutatása

A disszertáció ezen részében a vizsgálati eredmények megértéséhez elengedhetetlen fogalmakat vezetek be. Először a többszempon্তু döntési feladatokat ismertetem röviden, majd az ezek megoldására szolgáló módszertant.

1.1. Többszempon্তু döntési modellek

A többszempon্তু döntési feladat célja véges sok alternatíva véges sok szempont szerinti rangsorolása, esetenként elegendő az összességében legjobb alternatíva kiválasztása. A megoldás során szükség van a szempontok fontosságának számszerűsítésére (*súlyozására*) és az alternatívák pontozására (*értékelésére*) minden egyes szempont szerint. Csoportos döntési szituációkban felmerülhet még a döntéshozókhoz rendelt *szavazóerők megadása* is.

A döntési modelleket felépítő alapegységek a következők: cél, alternatívák, szempontok.

- **A célban** jelenik meg az az állapot, amit a döntéshozók el szeretnének élni, például az alternatívák rangsorolása, a legjobb alternatíva kiválasztása.
- **Az alternatívák** halmazát az adott döntési helyzetben releváns választási lehetőségek alkotják. Ezek lehetnek például mobil és immobil eszközök, lehetőségek, megvalósítandó tervek stb.
- **A szempontok** az alternatívák különféle objektív, illetve szubjektív tulajdonságainak részhalmaza. Az alternatívákat ezen tulajdonságok

figyelembevételével hasonlítjuk össze. Gyakran az áttekinthetőség érdekében szempontfába rendezetten jelennek meg. Minél komplexebb a probléma, annál több szempont megadása szükséges, amivel természetesen a feladat mérete és bonyolultsága is nő.

A megfogalmazott többszemponútú döntési problémák megoldására számos módszer létezik, azonban kizárólag a páros összehasonlításokra épülő módszerosztályt mutatom be részletesen, mivel a disszertáció központi témája ehhez kapcsolódik.

1.2. Páros összehasonlítás

A páros összehasonlítás a személyes preferenciákat tükröző, két objektum viszonyát leíró értékelés, ezért a többszemponútú döntési modellek megoldása során a páros összehasonlítások módszere alkalmazható mind

- a szempontok *súlyozására*,
- az egyes szempontok szerinti alternatívák *értékelésére*,
- illetve csoportos döntéseknél a döntéshozókhöz rendelt *szavazóerők megadásánál* is.

A felsorolt három lépésnél a döntéshozók az alábbi típusú kérdésekkel szembesülnek: „Két szempontot összehasonlítva melyik a fontosabb és az hányszor fontosabb? Egy adott szempont szerint két alternatívát összehasonlítva melyik a jobb és az hányszor jobb? Egy adott szempont szerinti pontozásban hányszor akkora súllyal vegyük figyelembe az egyik döntéshozó véleményét, mint a másikat?”

A páros összehasonlítások során az értékelésekhez használt skála módszerenként változhat:

- ordinális (rangsor)
- hányados

Az *ordinális skála* használata esetén kizárólag a szempont szerinti rangsor értékek, páronkénti összehasonlításnál a jobb objektum megadása szükséges.

A páros összehasonlítás korai alkalmazásai, amelyek közel 230 éve alakultak ki, szintén ordinális értékelésen alapulnak. Elsőként Jean-Charles Borda 1781-ben megjelent [3] publikációjában illetve, kortársa Marquis de Condorcet 1785-ös [16] írásában jelenik meg a páronkénti összehasonlítás, a szavazási feladatok megoldására. Ismert, hogy a két módszer nem mindig szolgáltat azonos eredményt.

A páros összehasonlítás módszertanának nagy előnye, hogy a könnyen elvégezhető *páronkénti összehasonlításokra* épül, így minden alkalommal csak két alternatívát szükséges az adott szempont szerint összemérnie a döntéshozónak/ szakembernek és nem szükséges globális preferenciákkal rendelkeznie a teljes alternatíva halmazon. Hátránya is éppen ebből fakad, mivel megfelelő szaktudás, tapasztalat hiányában, illetve figyelmetlenség esetén a páronkénti értékeket nézve már ordinális értékeléseknél is jelentősen sérülhet a tranzitivitás, akár körbeverés is lehetséges.

1.1. Definíció Legyen $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, ahol n az összehasonlítandó elemek száma, és vezessük be a következő preferencia relációt :

$$A \succ B, \quad \text{ha "A jobb, mint B".}$$

A **körbeverésről** akkor beszélünk, ha A_i, A_j, A_k alternatívákra

$$A_i \succ A_j \succ A_k \quad \text{és} \quad A_k \succ A_i.$$

Döntésméleti szempontból léteznek olyan problémák, ahol elfogadható a körbeverés az alternatívák között, azonban például mérnöki és orvosi esetekben ez elfogadhatatlan.

Hányados skála alkalmazásánál a páronkénti preferencia irányán túl, a két objektum értékelésbeli különbségének relatív mértékéről is információt kell szolgáltatni. Ezeket az egyes összehasonlításokat mátrixba rendezve kapható meg az adott szempont szerinti alternatívákra vonatkozó páros összehasonlítás mátrix.

1.2.1. Páros összehasonlítás mátrix

Ezek a speciális pozitív reciprok mátrixok az összehasonlítandó objektumok páronkénti összehasonlításaiból építhetők fel és általános alakjuk:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 1/a_{13} & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_+^{n \times n},$$

ahol a_{ij} megmutatja, hogy a i -edik objektum hányszor fontosabb/jobb/nagyobb a j -ediknél egy adott szempont szerint. Más szóval az a_{ij} a döntéshozó i és j alternatívák páros összehasonlításából kapott értékelése a megadott szempont szerint. A összehasonlításokhoz használatos skáláról megoszlanak a vélemények, vannak, akik csak 5 – illetve $1/5$ – maximális értékeket engednek meg [27], ezzel szemben az AHP módszertanban [38] az $a_{ij} \in \{1/9, 1/8, \dots, 1, 2, \dots, 9\}$ hányados skála értékeket lehet használni. Az értékek jelentése ennél a skálánál az 1.1. táblázatban olvasható.

1	egyformán fontos / előnyös
3	mérsékelten fontosabb / előnyösebb
5	sokkal fontosabb / előnyösebb
7	nagyon sokkal fontosabb / előnyösebb
9	rendkívüli mértékben fontosabb / előnyösebb
2,4,6,8	köztes értékek is felhasználhatók

1.1. táblázat. Az AHP hányados skála egész értékei

Az a_{ij} páros összehasonlítási értékekből felépített \mathbf{A} mátrix a következő fontos tulajdonságokkal rendelkezik:

$$a_{ii} = 1, \tag{1.1}$$

$$a_{ij} = 1/a_{ji}, \quad \forall i, j = 1 \dots n. \tag{1.2}$$

Az (1.1) szerint minden objektumnak az önmagával való összehasonlítása triviális módon 1-et ad, tehát a főátló minden eleme 1. Az (1.2) tulajdonság kimondja, hogy ha az i -edik objektum tulajdonságának értéke a_{ij} -szer akkora, mint a j -ediké, akkor a j -ediké $1/a_{ij}$ -szerese i értékének.

1.2. Definíció Az A páros összehasonlítás mátrix **konzisztens**, ha teljesíti az

$$a_{ik} = a_{ij}a_{jk} \quad (1.3)$$

transzitivitási feltételt minden $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ esetén.

A doktori értekezés egyik központi fogalma, az inkonzisztencia éppen ennek a tulajdonságnak a hiányát jelenti.

1.3. Definíció Az A páros összehasonlítás mátrix **inkonzisztens**, ha létezik legalább egy $i, j, k \in (1 \dots n), i \neq j \neq k$ indexhármass, amelyre

$$a_{ik} \neq a_{ij}a_{jk} \quad (1.4)$$

teljesül.

Tehát az inkonzisztenciát az 1.2. definícióból kiindulva tagadással értelmezhetjük, vagyis amelyik mátrix nem konzisztens, az inkonzisztens. A legkedvezőbb természetesen az lenne, ha ilyen nem fordulna elő, azonban az életben a döntéshozók nagyon ritkán tudnak tranzitív páros összehasonlítási értékeket megadni, amit az összegyűjtött tapasztalati páros összehasonlítás mátrixokból álló minta is alátámaszt (2. fejezet).

1.3. Inkonzisztencia mérése

A valós élet döntési feladatainál a páros összehasonlítás mátrixok ritkán konzisztensek. A döntési folyamat eredménye szempontjából sem mindegy azonban, hogy a döntéshozók által megadott összehasonlítások milyen mértékben állnak összhangban, vagy éppen ellentmondásban egymással. Ezért a páros összehasonlítás mátrixokat használó módszereknél kiemelkedő szerepe van a inkonzisztencia mérésének. Sajnálatos módon azonban ezt a nehezen megfogható jelenséget egyelőre matematikai eszközökkel is csak tagadással lehet megadni.

Az 1.2. definícióban ismertetett módon azokat a páros összehasonlítás mátrixokat, amelyekben minden $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ esetén teljesül a

$$a_{ik} = a_{ij}a_{jk}, \quad \forall i, j, k = 1 \dots n \quad (1.5)$$

transzitivitási feltételt **konzisztensnek** nevezzük.

Az (1.5) tulajdonság hiányában **inkonzisztens** mátrixokról beszélünk, ahol felmerül az inkonzisztencia mérésének a kérdése.

Ha az inkonzisztencia index értéke 0 akkor a mátrix konzisztens, ha pozitív akkor az a páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciájára utal. A gyakorlatban használt inkonzisztencia indexek folytonosak is, így az indexek pozitív értéke többé-kevésbé azt is jelzi, hogy az inkonzisztens mátrix mennyire tér el egy konzisztentstől.

Mivel a valódi helyzetekben kapott, tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok esetén a konzisztencia nehezen biztosítható, bizonyos szintű inkonzisztenciát általában még elfogadnak a döntéshozók. Gyakorlatilag ez azt jelenti, hogy egy adott inkonzisztencia indexhez létezik egy elfogadási szint. Egy A mátrixot csak akkor tartanak meg további felhasználás céljából, ha a mátrix inkonzisztenciája az elfogadási szint alá esik, illetve túl magas inkonzisztencia esetén elvetik a mátrixot, vagy újból elvégeztetik a szükséges páros összehasonlításokat.

1.3.1. Saaty-féle inkonzisztencia index (CR)

A Saaty [38] által javasolt inkonzisztencia mérőszám azon alapszik, hogy a páros összehasonlítás maximális sajátértéke (λ_{\max}) legalább akkora, mint a mátrix dimenziója (n), továbbá pontosan akkor teljesül az egyenlőség, ha a mátrix konzisztens. Az alapötletet, miszerint minél messzebb van a maximális sajátérték a mátrix méretétől, annál inkonzisztensebbnek tekinthető a mátrix, az alábbi módon lehet formalizálni:

$$CI_n = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}, \quad (1.6)$$

tehát CI_n egy pozitív lineáris transzformáltja λ_{\max} -nak, és az említett $\lambda_{\max} \geq n$ egyenlőtlenség miatt $CI_n \geq 0$. A CI_n értékét azonban önmagában nem lehet kezelni, hiszen nincs mihez viszonyítani, nem lehet megmondani, hogy mely érték számít nagyoknak és mely kicsinek. Az inkonzisztencia mérésének eredeti célja szerint ez annak felel meg, hogy mikor lehet elfogadhatatlannak vagy elfogadhatónak tekinteni a mátrixot. Saaty – azóta számos alkalommal kritizált – javaslata szerint jó viszonyítási alap a generált véletlen $n \times n$ -es

páros összehasonlítás mátrixok (elemeit az $1/9, 1/8, 1/7, \dots, 1/2, 1, 2, \dots, 8, 9$, arányskáláról egyenlő valószínűséggel választva) átlagos CI_n értéke, jelölje RI_n . Ekkor egy konkrét, döntéshozó által kitöltött páros összehasonlítás mátrix CR inkonzisztenciája a $CR_n = \frac{CI_n}{RI_n}$ aránnyal definiált és az elfogadhatóság feltételeként a 10%-os szabályként ismert $CR_n \leq 0.1$ egyenlőtlenség adható. A 10%-os szabállyal kapcsolatos kritikák egy részére válaszol a [48] cikk, illetve a kisebb méretű mátrixokra vonatkozó módosítás [39]. Fontos megjegyezni, hogy az inkonzisztencia mérésére számos további javaslat adható [12], azonban az elfogadhatósági küszöbérték megadása a legtöbb módszernél még nem történt meg.

CR kritikája:

- globális: az inkonzisztencia érték a teljes mátrixra jellemző, így nem mutat rá a probléma helyére,
- dimenzió függő: a méret növekedésével a véletlen generált mátrixok közül egyre kevesebb esik az elfogadási tartományba. Bozókinál [4] 10^7 generált véletlen mátrixból 7 dimenzió fölött nem található CR szempontból elfogadható.
- a 10%-os kritikus érték meghatározása is kérdéseket vet fel: a számítógépes kísérletek mennyiben fedik a valóságot, illetve az emberi sajátosságokat?
- nincs mögöttes tartalom: az értéke csupán egy szám, ami 10% és alatt a jó, egyébként nem.

Példa

Tekintsük az egyik valós problémához tartozó mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{3} & 9 & \boxed{5} & 1 \\ 1/3 & 1 & 9 & \boxed{9} & 1/3 \\ 1/9 & 1/9 & 1 & 1 & 1/9 \\ 1/5 & 1/9 & 1 & 1 & 1/7 \\ 1 & 3 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az A_1 , A_2 , A_4 alternatívákat összehasonlító páros összehasonlítási értékek nem tranzitívek, tehát a mátrix inkonzisztens. A CR index 7.11% értéket mutat, ami még elfogadható. Másfelől az inkonzisztencia elég nagy a $3 * 9 = 27 > 5$ reláció tekintetében.

1.3.2. Koczkodaj inkonzisztencia index (CM)

A CR -t tekintve többletjelentést hordozó mutató megalkotásához vissza kellett térni az alapokhoz. Az 1.2. definícióból látható, hogy páros összehasonlítási érték hármaskra követeljük meg a tranzitivitást konzisztencia esetén. Ez az oka, hogy a teljes páros összehasonlítás mátrixokat 3-3 objektumot összemérő mátrixokra lehet bontani, majd így vizsgálni az összefüggéseket.

1.4. Definíció $A \Gamma \in R^{3 \times 3}$ **triád** olyan páros összehasonlítás mátrix, amelyik az $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$, $n \geq 3$ objektum összehasonlításából felépülő mátrix része. Tetszőleges három különböző összehasonlított elem kiválasztásával megalkotható egy triád, melynek elemei az \mathbf{A} – ban megadottal egyeznek meg. Tehát, minden (i, j, k) indexhármassal $(1 \leq i < j < k \leq n)$ mellett a

$$\Gamma_{i,j,k} = \begin{pmatrix} 1 & a_{ij} & a_{ik} \\ 1/a_{ij} & 1 & a_{jk} \\ 1/a_{ik} & 1/a_{jk} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

triád, ahol a főátlóban szereplő egyesek sorra a_{ii} , a_{jj} , a_{kk} és minden a_{ij} , a_{ik} , $a_{jk} \in \mathbf{A}$. A fentiekből adódóan egy $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ mátrixnak $\binom{n}{3}$ triádja van.

Koczkodaj cikkében [27] az inkonzisztencia index bevezetésével ebből az új irányból közelíti meg a kérdést: a 3×3 -as esetben a mátrixokat egy döntési vektorral jellemzi és a konzisztens mátrixok döntési vektoraitól vett legkisebb relatív eltérésként értelmezi az inkonzisztenciát. A döntési vektor a döntéshozók által páros összehasonlítás révén meghatározott – a, b, c – elemekből áll,

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ 1/b & 1/c & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [a \ b \ c] \in \mathbf{R}_+^3.$$

Az $\mathbf{A} \in R^{3 \times 3}$ mátrixoknál az 1.2. definíció 1.3 tranzitivitás egyenletéből következik, hogy a konzisztens mátrixok száma három és a hozzájuk tartozó döntési vektorok,

$$\begin{bmatrix} \frac{b}{c} & b & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & ac & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & \frac{b}{a} \end{bmatrix}.$$

Ez alapján a CM , mint a legközelebbbitől vett relatív eltérés :

$$CM(\mathbf{A}_{3 \times 3}) = \min\left(\frac{1}{a}\left|a - \frac{b}{c}\right|, \frac{1}{b}\left|b - ac\right|, \frac{1}{c}\left|c - \frac{b}{a}\right|\right). \quad (1.8)$$

1.5. Definíció (Általános CM formula) Az $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$, $n \geq 3$ esetre való kiterjesztéskor, az inkonzisztenciát az \mathbf{A} maximális CM értékű triádja jellemzi, vagyis a következő formula írja le:

$$CM(\mathbf{A}_{n \times n}) = \max \{CM(\Gamma_{i,j,k}), i, j, k = 1 \dots n, i \neq j \neq k\}. \quad (1.9)$$

Triádokra épülő index előnyei

- rámutat a probléma helyére – pontosabban mindig a legnagyobbra
- az értéke jelentést hordoz – relatív eltérés a legközelebbi konzisztens triádtól, lásd az 1.2. táblázat. A táblázatban a Γ_{pl} példa triád szerepel és azok a tagok, aminek minimumaként megkapható az inkonzisztencia index, tehát a $CM(\Gamma_{pl}) = \min(CM_a, CM_b, CM_c)$ egyenlőség határozza meg.

Előtte azonban a példa mátrixnak kiemelném egy triádját, speciálisan azt, amelyik megfelelő szemléltető eszköz lesz a mérőszámoknál:

$$A_{pl} = \begin{pmatrix} \mathbf{C_1} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ A_1 & 1 & \boxed{5} & 3 & 3 & \boxed{3} \\ A_2 & 1/5 & 1 & 1/5 & 1/5 & \boxed{1/7} \\ A_3 & 1/3 & 5 & 1 & 1 & 1/3 \\ A_4 & 1/3 & 5 & 1 & 1 & 1/3 \\ A_5 & 1/3 & 7 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma_{pl} = \begin{pmatrix} & A_1 & A_2 & A_5 \\ A_1 & 1 & 5 & \boxed{3} \\ A_2 & 1/5 & 1 & 1/7 \\ A_3 & 1/3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

A Γ_{pl} triádban láthatóan nem teljesül az (1.3) tranzitivitási feltétel, vagyis nem konzisztens, amint azt a $a_{13} = 3 > \frac{5}{7} = a_{12}a_{23}$ reláció is mutatja.

	A_1	A_2	A_3	
A_1	1	$\boxed{21}$	3	$CM_a = \frac{1}{5} 21 - 5 = 3.2$
A_2	1/5	1	1/7	
A_3	1/3	7	1	

	A_1	A_2	A_3	
A_1	1	5	$\boxed{5/7}$	$CM_b = \frac{1}{3} 3 - 5/7 = 0.7619$
A_2	1/5	1	1/7	
A_3	1/3	7	1	

$\underbrace{\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/7 \\ 1/3 & 7 & 1 \end{matrix}}_{\Gamma_{pl}}$

	A_1	A_2	A_3	
A_1	1	5	3	$CM_c = 1/7 7 - 5/3 = 0.7619$
A_2	1/5	1	$\boxed{3/5}$	
A_3	1/3	7	1	

1.2. táblázat. CM inkonzisztencia index értelmezése

A Γ_{pl} esetében a képletbe való behelyettesítés után a $CM = 0.7619$. Egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy a maximális CM -el rendelkező

triád éppen a Γ_{pl} , tehát a $CM(A_{pl}) = CM(\Gamma_{pl}) = 0.7619$. Ez a CM érték úgy számítható, hogy a triád jelölt 3-as elemét $5/7$ -re kell módosítani, ami $16/7$ -del való csökkentés révén érhető el. Ekkor a relatív változás $CM(\Gamma_{pl}) = \frac{16/7}{3} = 0.7619$.

1.4. Többszempon্তু döntési probléma megoldása

A páros összehasonlítás mátrixokat használó módszerek megoldásánál a döntéshozó az egyes szempontok szerint páronként értékeli a kiválasztott alternatívákat, így minden szempontnál felépíthető egy páros összehasonlítás mátrix. A páros összehasonlítás mátrixból ki lehet számítani a teljes alternatíva halmazra vonatkozó fontossági értékeket, tehát azt a w_1, w_2, \dots, w_n pozitív számokból álló súlyvektort, amelyre teljesül

$$\sum_i^n w_i = 1. \quad (1.10)$$

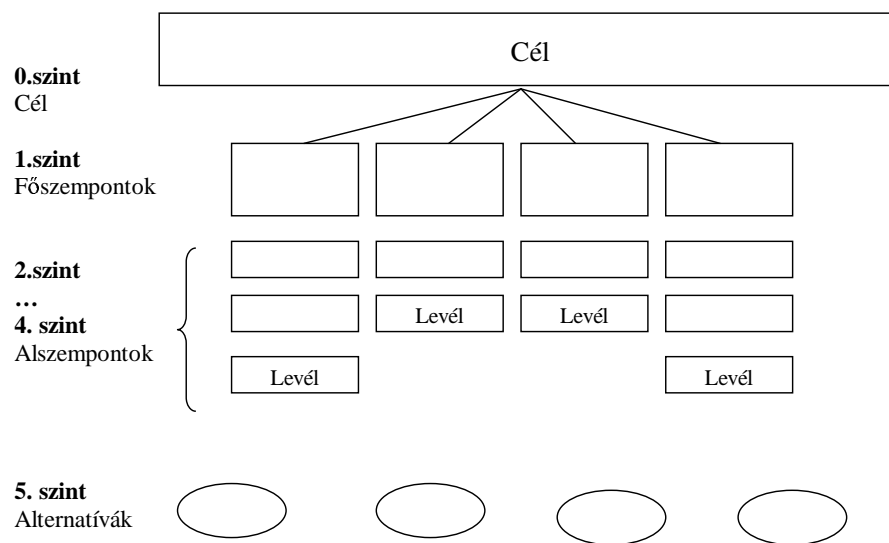
A szakirodalomban számos módszer létezik egy \mathbf{A} páros összehasonlítás mátrixból történő súlyvektor meghatározására. Az egyik legelterjedtebb eljárás az 1.4.1. fejezetben bemutatott AHP által használt sajátvektor módszer [38]. A széles körben használt súlyozási eljárások közé sorolható a szinguláris érték felbontás [22], a célprogramozás [13], illetve az úgynevezett távolság minimalizáló módszerek, mint a súlyozott [15], logaritmikus [18] és általános [15] legkisebb négyzetek elve. A súlyozási módszerekről jó áttekintést ad Bozóki [4] Ph.D. értekezése.

A különféle módszerek konzisztens mátrixoknál azonos súlyvektort adnak eredményül, míg azokban az esetekben amikor fellép az inkonzisztencia, a számított fontossági értékek eltérőek.

1.4.1. Analytic Hierarchy Process (AHP)

A Saaty által 1980-ban [38] ismertetett páros összehasonlításokra épülő eljárás, amely az 1.1. részben megfogalmazott többszempon্তু döntési problémák megoldására szolgál. A szempontokat a könnyebb kezelhetőség és áttekinthetőség érdekében szempontfába rendezi, ahol a szempontok több szinten,

hierarchikusan helyezkednek el. Közvetlenül a cél alatt találhatók a *főszempontok*, alattuk az *alszempontok*, majd az alternatívák. Egy adott ág legalsó szintjén elhelyezkedő szempontot/alszempontot szokás *levélszempontnak* is nevezni. A levélszempontok nem feltétlenül kerülnek a szempontfa azonos szintjeire, mint ahogy az 1.1. ábra is mutatja.



1.1. ábra. AHP - Szempontfa

A szempontok súlyozása és az alternatívák szempont szerinti értékeléseinek kiszámítása egyaránt a páros összehasonlítás módszerével történik. A páros összehasonlítás részben leírtak szerint, értékelésre az $\{1/9, 1/8, \dots, 1, 2, \dots, 9\}$ hányados skálát használja.

Az AHP módszertant az elmúlt években nagyon széles körben használták a legkülönbözőbb többszempontú döntési problémák megoldására, amelyek közül egyet, az egyszerűbb áttekinthetőség érdekében a következőkben részletesen ismertetek.

Hong-Kong-i felhőkarcoló építése

A European Journal of Operational Research (EJOR) folyóiratban megjelent cikk [46] egy felhőkarcoló építési munkálatait megelőző döntési folyamatról számol be, melynek *célja* a 40 emeletes építmény építési módjának kiválasztása. Az 1600 m^2 -es alapterület és a 120 méteres magasság

mutatja a beruházás nagyságát. Pontosan ilyen esetekben elengedhetetlen, hogy a döntések átláthatók és lehetőség szerint megkérdőjelezhetetlenek legyenek. A megbízott kivitelezők, építésszek stb. csoportja alkotja a *döntéshozó szakembereket*, ahol természetesen mindenki a saját szakterületén rendelkezik döntési jogkörrel. Az építési munkálatokért felelős döntéshozók és a szakemberek közösen megjelöltek 8 jelentős *szempontot*, amik között találhatók egymásnak ellentmondók is, mint például minőség \longleftrightarrow költség. Az *alternatívák* kiválasztása során 5 lehetséges építési módot jelöltek meg. A fent leírtakat strukturált formában, szempontfába rendezve az 1.2. ábrán jelenítettem meg.

A döntési modell felállítása után a megfelelő módszertan kiválasztása és a modell megoldása következett. A felírt döntési problémát tovább nehezítik a szubjektív szempontok, mint például az építési idő.

A várható építési idő megbecsléséhez figyelembe kell venni több külső tényezőt például:

- környezet – időjárás, talaj, szél stb
- beszállító – megfelelő időben jön-e minden.

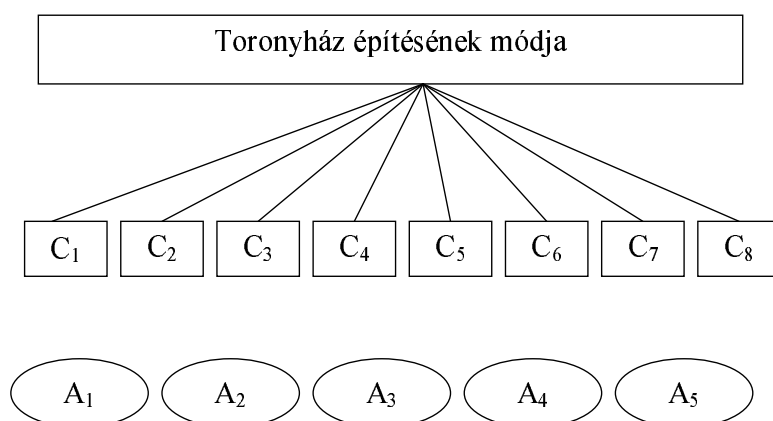
Aki részt vett már felhőkarcoló építésében képes számolni ezekkel a hatásokkal, mert rendelkezik szakmai tapasztalattal. Ez a felbecsülhetetlen többlet információ szükséges a cél eléréséhez, vagyis a megfelelő építési mód kiválasztásához. Ilyen jellegű adatok kinyerésére alkalmas eszköz az AHP és a páros összehasonlítás mátrixok módszere.

Alternatívák

- A_1 : acél szerkezet
- A_2 : megerősített beton, fa állvánnyal
- A_3 : megerősített beton, 'proprietary' állvánnyal
- A_4 : előre gyártott betonelemekből épülő homlokzat
- A_5 : beton mag merevítve

Szempontok

C_1 : építési idő	C_5 : erőforrás
C_2 : költség	C_6 : minőség
C_3 : projekt komplexitása	C_7 : építési szempontok
C_4 : biztonság	C_8 : piaci szempontok



1.2. ábra. Szempontfa a toronyház építés módjának kiválasztásához

Tekintsük a költség szemponthoz – C_2 – tartozó páros összehasonlítás mátrixot a példa mátrixnak és jelölje A_{pl} :

$$A_{pl} = \begin{pmatrix} \mathbf{C_2} & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ A_1 & 1 & \boxed{5} & 3 & 3 & \boxed{3} \\ A_2 & 1/5 & 1 & 1/5 & 1/5 & \boxed{1/7} \\ A_3 & 1/3 & 5 & 1 & 1 & 1/3 \\ A_4 & 1/3 & 5 & 1 & 1 & 1/3 \\ A_5 & 1/3 & 7 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az (1, 2) elem azt fejezi ki, hogy az A_1 alternatíva 5-ször jobb a költségek terén, mint az A_2 . Egyértelmű következmény, hogy az A_2 alternatíva ötöd olyan jó, mint az A_1 . A mátrix konzisztenciáját egyetlen intranzitív összehasonlítás hármas megtalálásával el lehet vetni. Az A_{pl} példa mátrixban ilyenek többek között az A_1 , A_2 , A_5 alternatívákat egymással összehasonlító értékelések, mivel:

1. A_1 5-ször jobb, mint A_2 , és
2. A_1 3-szor jobb, mint A_5 , de
3. A_2 7-szer rosszabb, mint A_5 , miközben az (1), (2) pontok következménye kellene, hogy legyen az, hogy A_2 3/5-ször rosszabb, mint az A_5 .

Ez pontosan a tranzitivitás megsértését jelenti, ezért az 2. definíció szerint ez a mátrix nem konzisztens, vagyis *inkonzisztens*. A döntési feladathoz tartozó további nyolc mátrixnál szintén fellép inkonzisztencia. Ennek ellenére az ezekből a mátrixokból számított értékeket felhasználták, mert az AHP-hez tartozó CR inkonzisztencia mutató még elfogadható inkonzisztencia szintet jelzett.

2. fejezet

Tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok

Az értekezés ezen részében rátérek a tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok vizsgálatára. Valós alkalmazások során felmerülő nehézségek kezelésére tapasztalati úton létrehozott mátrixok analízisa nem volt eddig jellemző az irodalomban. Leginkább véletlenül generált mátrixok használata terjedt el a könnyű és gyors előállítás miatt. Az ilyen mintákban azonban pusztán matematikai tulajdonságokat lehet keresni, illetve felfedezni. Bármely döntéshozó akarva, akaratlanul is képez a rendszerben némi inkonzisztenciát. Pontosan ennek megismerése a célom.

Nagyon fontos a tapasztalatiság a vizsgálat szempontjából, ezért tapasztalati mátrixok egy mintáját hozom létre, ami mindenki számára elérhető lesz az interneten, így további ilyen kérdések megválaszolásához adhat segítséget.

2.1. Minta gyűjtése

A többszemponútú döntési problémákból összegyűjtött 153 tapasztalati páros összehasonlítás mátrix alkotja a mintát. Ezeknek pontos forrása megtalálható korábbi dolgozatomban [33]. A gyűjtő munka nagy része az interneten történt, az egyetemről elérhető tudományos adatbázisokban, mint például a ScienceDirect, SpringerLink, EISZ, illetve az internetes keresők csatornáin keresztül az *AHP "case study"* kulcsszóval. Több mint száz cikk áttanulmányozása és néhány internetes link után kaptam meg azt a 23

feladatot, amiben az itt vizsgált mátrixok szerepeltek.

Tárolás és azonosítás

A mátrixok összegyűjtését követte a digitalizálás, amikor a cikkekben közölt a tapasztalati páros összehasonlítás mátrixokat, először egy táblázatkezelőbe írtam be, majd innen a MATLAB szoftverbe ültettem át. A MATLAB több mátrix egymás-utáni ciklus alapú vizsgálatát egy 3 dimenziós tömbbel sikerült megoldani. Ez egy rétegekből álló $M(i, j, k)$ mátrix, amelynek minden rétege egy általános $A(i, j)$ mátrix. Tehát a 23-as mátrix $(2, 5)$ -s elemét az $M(2, 5, 23)$ helyen tároltam el. Az M mátrix minden rétegének azonos dimenziójú kellett, hogy legyen, ezért a legnagyobb mátrixnál kisebb méretűeket 0-val töltöttem fel. A kutatás folyamán szükségessé vált a különféle ismérvek szerint szűrt és csoportokba rendezett mátrixok egyértelmű azonosítás, ezért minden rétegben egy újabb sor került bevezetésre, ami cikk és mátrix azonosítót is tartalmazott. A 23. mátrix, amely a 4. cikkben szerepelt a következő alakban tárolódott:

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1/2 & 0 & & & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & 0 \\ 0 & & & & & & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 23 \end{pmatrix}.$$

Pontosítás

A tényleges vizsgálatokat megelőzte egy pontosítási fázis, mely lényegében abból állt, hogy a mátrixokat teljesen reciprokká alakítottam. Ezt abban az esetben lehetett végrehajtani, ha adott (i, j) esetén $\mathbf{A}(i, j)$ vagy főátlóra szimmetrikus reciprokok párja $\mathbf{A}(j, i)$ egész volt, hiszen ellenkező esetben nem tudható, hogy a döntéshozó milyen értéket adott eredetileg. A segédprogram futása során kiderült, hogy

- volt néhány mátrix, amelyek nem pontos értékekkel lettek digitalizálva,

- egy cikkben voltak 0 mátrix elemek [29]. A kérdéses helyeken mindig csak 1 alatti értékek hiányoztak, mivel a reciprokok értékek egészek voltak, ezért ide is az egész döntési értékek reciprocai kerültek. Az általam kiszámított fontossági vektorok megegyeztek a cikkben publikálttal, ezért az így módosított mátrixot bennhagytam a mintában.

A 153 tapasztalati páros összehasonlítás mátrix közül végül összesen 16 mátrixot elimináltam: elsőként 8 db $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$ mátrixot, mert 2 dimenzióban csak egy páros összehasonlítási értéket kell meghatározni és ekkor az inkonzisztencia kizárható. Ezt követően újabb 8 mátrix bizonyult a dolgozat szempontjából irrelevánsnak, mert ezek 5 döntéshozó geometriai középpel aggregált mátrixai és így se $\mathbf{A}(i, j)$, se főátlóra szimmetrikus reciprokok párja $\mathbf{A}(j, i)$ nem volt egész, vagyis a fent leírt javítási eljárást nem lehetett végrehajtani.

Az alábbi eredményeket 137 tapasztalati páros összehasonlítás mátrixból álló mintából kaptam, ahol minden mátrix kielégíti az (1.1)-(1.2) tulajdonságokat.

2.2. Általános tulajdonságok

2.2.1. A hányados skála elemeinek eloszlása

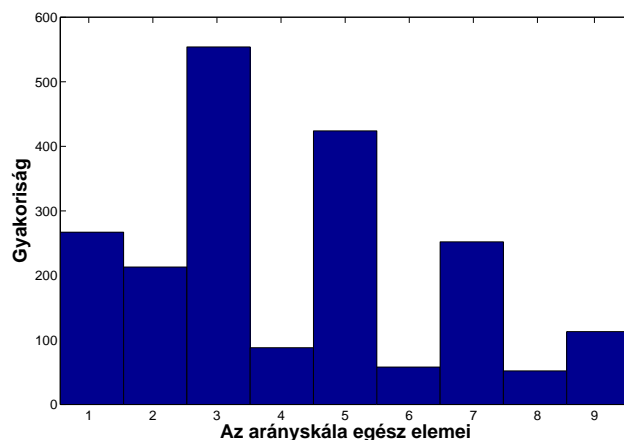
Elsőként a mátrixokban a Saaty által javasolt hányados skála $1/9, 1/8, \dots, 1, \dots, 9$ elemeinek gyakoriságát számoltam ki.

A 2.1 ábrából látható, hogy az elemek eloszlása nem egyenletes. A döntéshozók az 1, 3, 5, 7, 9 értékeket gyakrabban használták, mint a többit. A magyarázat a skála definíciójában keresendő.

1	egyformán fontos / előnyös
3	mérsékelten fontosabb / előnyösebb
5	sokkal fontosabb / előnyösebb
7	nagyon sokkal fontosabb / előnyösebb
9	rendkívüli mértékben fontosabb / előnyösebb
2,4,6,8	köztes értékek is felhasználhatók

2.1. táblázat. Az AHP hányados skála egész elemeinek meghatározása

Látható a 2.1. táblázatban, hogy nem minden egész skála értékhez tartozik szóban vagy írásban magyarázat, hanem csak a páratlanokhoz. A maradék



2.1. ábra. A 137 tapasztalati páros összehasonlítási mátrixban az egész elemek eloszlása

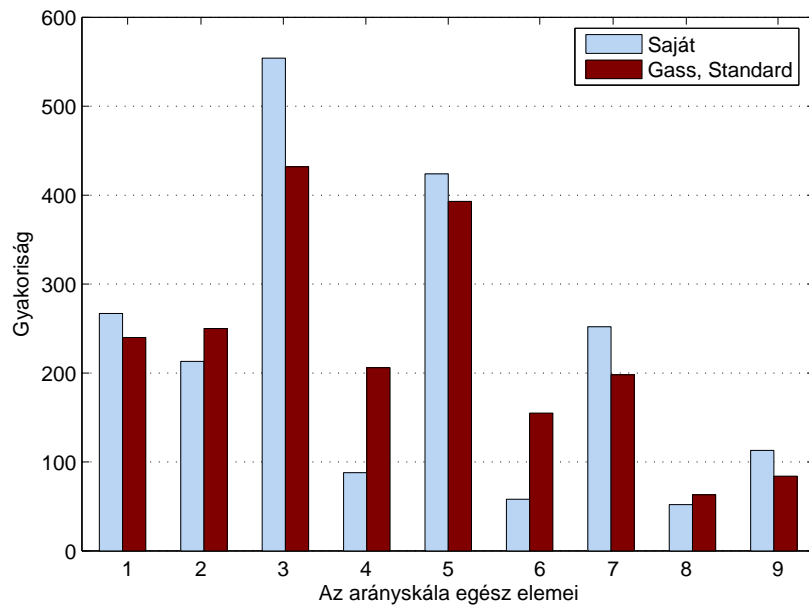
páros számok csak együttesen lettek értelmezve, mint köztes értékek. Összevetve a kiugró elemek és a pontosan megfogalmazott skála értékek csoportját, látható az egyezés.

Gass és Standard [23] 384 tapasztalati összehasonlítás mátrixot vizsgált meg és hasonló eredményt kaptak. A 2.2 ábra összehasonlító hisztogramjáról leolvasható, hogy mind a két mintában megtalálható a fent kifejtett értékelési probléma.

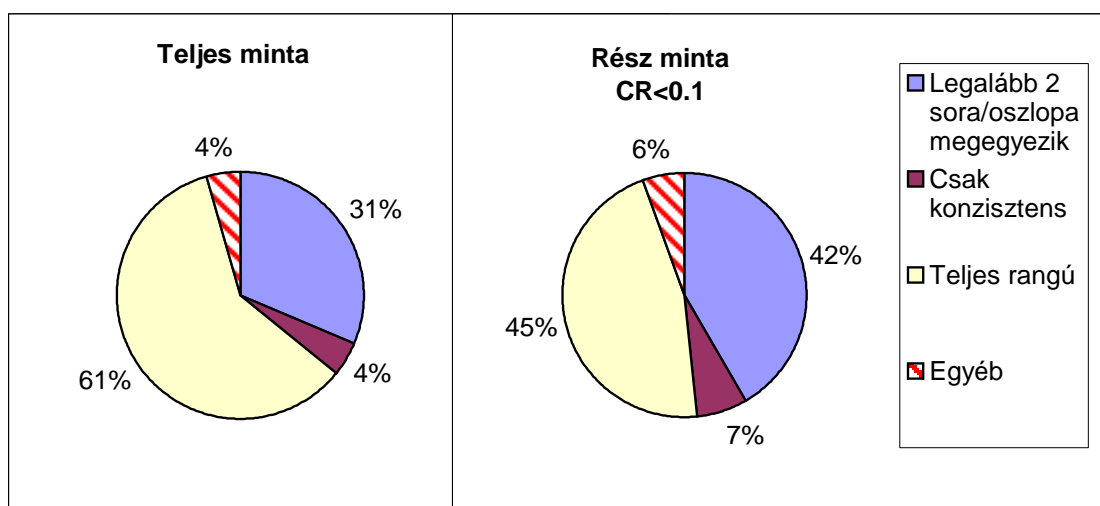
2.2.2. Mátrix sorainak, illetve oszlopainak függetlensége

A páros összehasonlításokra vonatkozó arányskala elemeinek eloszlása után a mátrix oszlopait, illetve sorait figyeltem meg. A 137 mátrix közül 43-nak volt legalább 2 azonos sora, illetve ebből következően 2 azonos oszlopa, ami 37%-os arányt jelent. A teljes rangú mátrixok ¹ száma 82 volt. Konzisztensnek bizonyult 16, azonban itt volt 10 átfedés a "legalább 2 sora azonos" mátrixokkal. A fenti számokat összegezve $43 + 82 + 6 = 131$, tehát csak 6 mátrix nem lett kiválasztva. Azonos lépéseket követve, a $CR < 0.1$ esetben a legalább 2 azonos sorral/oszloppal rendelkező mátrixok száma 37, a teljes rangúaké 41, míg a konzisztensek természetesen itt is 16-an voltak 10 átfedéssel. Látható, hogy most mindössze 5 mátrixot nem választottunk ki. Az eredményeket a 2.3 ábra szemlélteti.

¹Teljes rangú egy mátrix, ha rangja megegyezik a dimenziójával.



2.2. ábra. Páros összehasonlítási értékek empirikus eloszlásának összehasonlítása Gass és Standard eredményével



2.3. ábra. Mátrixok sorainak/oszlopainak vizsgálata

3. fejezet

Inkonzisztencia szintjét befolyásoló tényezők

3.1. Kutatási célok

A disszertáció következő fejezete egy tudományos kísérleten alapszik, amelynek célja a páros összehasonlítás mátrix tulajdonságainak feltárása. Korábban már számos kutatás érvelt a nagyszámú, jól dokumentált, ellenőrzött körülmények között előállított mátrixok mellett, azonban csak néhány cikk, illetve kutatási eredmény látott napvilágot ebben a témában. Ezek közül fontos kiemelni a 2.2.1 fejezetben már bemutatott Gass és Standard [23] szerzőpáros kutatását, amely rámutatott a véletlen generált mátrixok és a valós, tapasztalati mátrixok közötti lényeges különbségekre. Rácz Anett és Rácz Tibor István [35] kontrollált körülmények között elvégzett, empirikus kísérletben vizsgálta a döntéshozót érő külső és belső ingerek hatását az inkonzisztenciára.

A kutatás fő célja volt, hogy feltárja a tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok karakterisztikáját és az inkonzisztenciával való kapcsolatát. A vizsgálat kiterjedt a mátrixok kitöltése során tapasztalt inkonzisztencia elemzésére, így indirekt módon a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra is. A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok használata akkor kap fontos szerepet, ha a kérdezési folyamat megszakad és nincs lehetőség a befejezésére, illetve ha egy-egy mátrixelem hiányzik és pótlásukra már nincs lehetőség. Több kutatás is született ebben a témában, például Harker [24], valamint a Bozóki, Fülöp és Rónyai [9] szerzőhármás cikkei. A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix optimális kitöltése és inkonzisz-

tenciájának kiszámítása releváns a következő téma bemutatása során. Fontos kutatási kérdés, hogy lehet-e nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixot használni az összehasonlítandó elemek számának csökkentése érdekében.

A kísérlet lebonyolítását és a kutatómunkát Temesi József témavezetőmmel, Bozóki Sándorral, illetve Dezső Lindával közösen végeztük. A kapott eredményeket az *Annals of Operations Research*-ben [5] publikáltuk és a megjelenés óta 8 darab cikkben hivatkoztak rá [P2.1] – [P2.8]. Saját hozzájárulásom a közös kutatáshoz,

- a 454 darab páros összehasonlítás mátrix elemeinek és azok sorrendjének rögzítése olyan strukturált formába, amely minél szélesebb elemzéseket tesz lehetővé (MATLAB és SPSS formátum),
- a digitalizált adathalmaz tisztítása, elírások kiszűrése,
- a számításokhoz szükséges programok elkészítése, tesztelése, illetve a bemutatott eredmények kiszámítása,
- a statisztikai elemzések tervezésében, elkészítésében és az eredmények kiértékelésében meghatározó szerep (Dezső Lindával közösen),
- a kitöltési folyamat során megfigyelhető rangsorváltozások vizsgálatára szolgáló rangsor mátrix definiálása, kivitelezése és elemzése.

3.2. Kísérlet felépítése

A kísérlet a Budapesti Corvinus Egyetem 227 hallgatójának bevonásával zajlott, akiknek az átlagos életkor 22 év volt. A diákok között 39%-a férfi és 61%-a nő volt, ez az arány megfelel a Corvinus egyetem teljes hallgatóinál tapasztalt aránynak.

Minden kísérlet az egyetem termeiben zajlott, az előadóval történt előzetes egyeztetést követően. A kísérlet során az előadó bemutatta a kísérletvezetőket és kiemelte, hogy a részvétel önkéntes alapon történik, így bármikor megszakítható. Fontos kiemelni, hogy a kísérletsorozat során senki sem utasította el a részvételt.

A résztvevők a kísérlet során egyedi azonosítóval és hitelesítő pecséttel ellátott füzetet kaptak. A füzet minden lapja egy-egy páros összehasonlítást tartalmazott, amelyben nem lehetett visszalapozni, azaz eltérni az előre rögzített sorrendtől. Az első oldalon egy gyakorló példa szerepelt, amely áttekintése után a résztvevő diákok kérdéseket tehettek fel a feladattal kapcsolatban. Ha valaki befejezte a kitöltést, akkor az ismertetett szabályok szerint meg kellett várni, amíg mindenki más is elkészül. A kísérletsorozatban való közreműködés egy résztvevő számára átlagosan 25 percet vett igénybe.

A teszt kialakítása és a kísérleti körülmények a következő négy, inkonzisztenciára ható tényező vizsgálata köré épültek:

- probléma típusa (szubjektív, objektív),
- páros összehasonlítás mátrix mérete (4×4 , 6×6 , 8×8),
- kérdezési sorrend (szekvenciális, véletlen, Ross),
- kitöltési folyamat (nem teljes kitöltés) elemzése.

Probléma típusa

Annak érdekében, hogy a probléma típusának hatását vizsgálni lehessen, két, eltérő tulajdonságú összehasonlítási elemeket tartalmazó csoport került kialakításra: szubjektív és objektív.

Az objektívnek tekintett feladatban a résztvevőknek egy fiktív vaktérképen, kitalált országok területét kellett összehasonlítaniuk. Az összehasonlítás első lépéseként a kiosztott füzetben két ország közül a diákok megjelölték a nagyobb területtel rendelkező országot, majd ezután numerikus skálán értékelték a becsült eltérés mértékét. A szubjektív feladatnak tekintett alternatívák vizsgálata szintén a fent leírt kétlépcsős módszerrel történt, annyi különbséggel, hogy itt nyaralók páronkénti összehasonlítása volt a cél. Tehát a résztvevőknek két darab, egy szubjektív és egy objektív páros összehasonlítás sorozatot készítettek el, vagyis indirekt módon két mátrixot töltöttek ki. Az elvégzendő feladatok sorrendje véletlenszerűen változott minden csoportnál.

Mátrixméret

A kísérlet során vizsgált második tényező a mátrix mérete, amelynél a 4,

6 és 8 alternatívát összehasonlító mátrixokat vizsgáltam. Az összehasonlítandó elemek számának növekedésével a döntéshozó számára szükséges összehasonlítások száma is exponenciálisan nő, így több időt és energiát igényel azok elvégzése, amely feltételezésünk szerint indirekt módon növeli az inkonzisztenciát

Kérdezési sorrend

A kérdezési sorrend, a páros összehasonlítás mátrix elemeinek előre meghatározott sorrendben történő kitöltését jelenti. A kísérletben felállított hipotézisek teszteléséhez kutatócsoportunk három különböző kitöltési sorrendet alkalmazott. Az első kérdezési sorrend a szekvenciális (sor-folytonos) kitöltés, ahol az adott szubjektív vagy objektív alternatívákat szekvenciális sorrendben hasonlítunk össze. A második esetben egy korábban generált véletlen sorrendben történt a kitöltés. Az utolsó kitöltési eljárás a Ross [36] által 1934-ben publikált szabály, amely teljesíti az optimális kiegyensúlyozott összehasonlítások két feltételét. Ez a szabály egyfelől maximalizálja egy elem ismételt összehasonlításainak távolságát, másfelől minden elem a lehető legkiegyensúlyozottabban szerepel az összehasonlítások első és második felében is.

A bevezetett kérdezési, kitöltési sorrendek által a 6×6 esetben egymáshoz rendelt összehasonlítandó párokat mutatja a 3.1. táblázat. Összevetve a Ross-féle és a szekvenciális kitöltést, látható, hogy a szekvenciális szabályt követve az 1. elem szerepel az első 5 darab összehasonlításban és minden alkalommal az első helyen, amíg Ross-nál teljesül az optimális kiegyensúlyozottság.

Sorszám \ Kitöltés	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
szekvenciális	A-B	A-C	A-D	A-E	A-F	B-C	B-D	B-E	B-F	C-D	C-E	C-F	D-E	D-F	E-F
véletlen	A-F	B-E	A-C	F-E	C-D	B-D	B-F	A-E	C-E	A-D	E-D	C-F	B-C	A-D	B-A
Ross	A-B	F-D	E-A	C-B	E-F	A-C	B-D	F-A	D-C	E-B	A-D	C-E	B-F	D-E	C-F

3.1. táblázat. A kitöltési sorrendek szemléltetése

A bemutatott 3 tényező alapján, a kísérlet felépítése 18-féle (az egyes alcsoportok alapján $2(\text{típus}) \times 3(\text{méret}) \times 3(\text{kitöltési sorrend})$) eltérő karakterisztikájú páros összehasonlítás mátrixcsoport vizsgálatát tette lehetővé. Összesen 9 alkalommal végeztünk kísérletet, egyenként átlagosan 25 résztvevővel, ahol mindenki egy objektív és egy szubjektív típusú feladatot kapott. A kísérletsorozat végére összesen 454 darab teljesen kitöltött páros összeha-

sonlítás mátrix született. A kapott mátrixokból álló adatbázis felépítését a 3.2. táblázat mutatja.

Méret	objektív 230	szubjektív 224	teljes 454
4×4	68	69	137
6×6	80	77	157
8×8	82	78	160
Kitöltési sorrend	230	224	454
szekvenciális	75	75	150
véletlen	77	74	151
Ross	78	75	153

3.2. táblázat. A kísérletsorozatban résztvevő hallgatók száma az egyes szempontok és mátrix méretek szerint

A páros összehasonlítás mátrixok ellenőrzését követően 9 darab mátrixról egyértelműen kiderült, hogy hibás vagy hiányzó összehasonlításokat tartalmazott. Ezek a mátrixok a további elemzésekbe nem kerültek be, így 445 páros összehasonlítás mátrix képezte az elemzés alapját.

3.3. Eredmények

3.3.1. Inkonzisztencia elemzése teljes kitöltés mellett

A tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok csak nagyon ritkán teljesítik a konzisztencia feltételt, azonban a megfelelő eredmény (súlyvektor, preferencia) számításához elengedhetetlen, hogy a páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciája elfogadható legyen. Az eredmények robosztusságának vizsgálata érdekében az 1.3.1 részben bemutatott Saaty-féle CR , illetve az 1.3.2 fejezetben tárgyalt Kockodaj-féle CM inkonzisztencia indexeket alkalmaztam.

Szubjektivitás hatása

Az első felállított hipotézis arra vonatkozik, hogy az inkonzisztencia szintje függ a döntési probléma jellegétől. A kezdeti feltevésünk szerint a szubjektív értékelések esetében magasabb az inkonzisztencia, mint a hasonló méretű

objektívebbnek tekinthető elemeknél (alternatíváknál). Jelen kísérletben a nyaralók (szubjektív) összehasonlításánál magasabb CR és CM inkonzisztencia várható, mint az objektívnek tekinthető térképekénél.

A várakozásokat teljes mértékben alátámasztják a 3.3. táblázatban látható CR és a 3.4. táblázatban bemutatott CM eredmények, amelyeknél minden egyes mező értéke 22-27 mátrix átlagos inkonzisztenciája alapján adódott.

	nyaraló			térkép		
	4×4	6×6	8×8	4×4	6×6	8×8
szekvenciális	8,10	10,75	12,46	0,67	0,81	1,31
véletlen	10,38	9,47	13,10	0,78	0,86	2,51
Ross	8,75	10,63	13,31	0,70	0,94	1,73
Összes	9,06	10,28	12,96	0,71	0,87	1,86

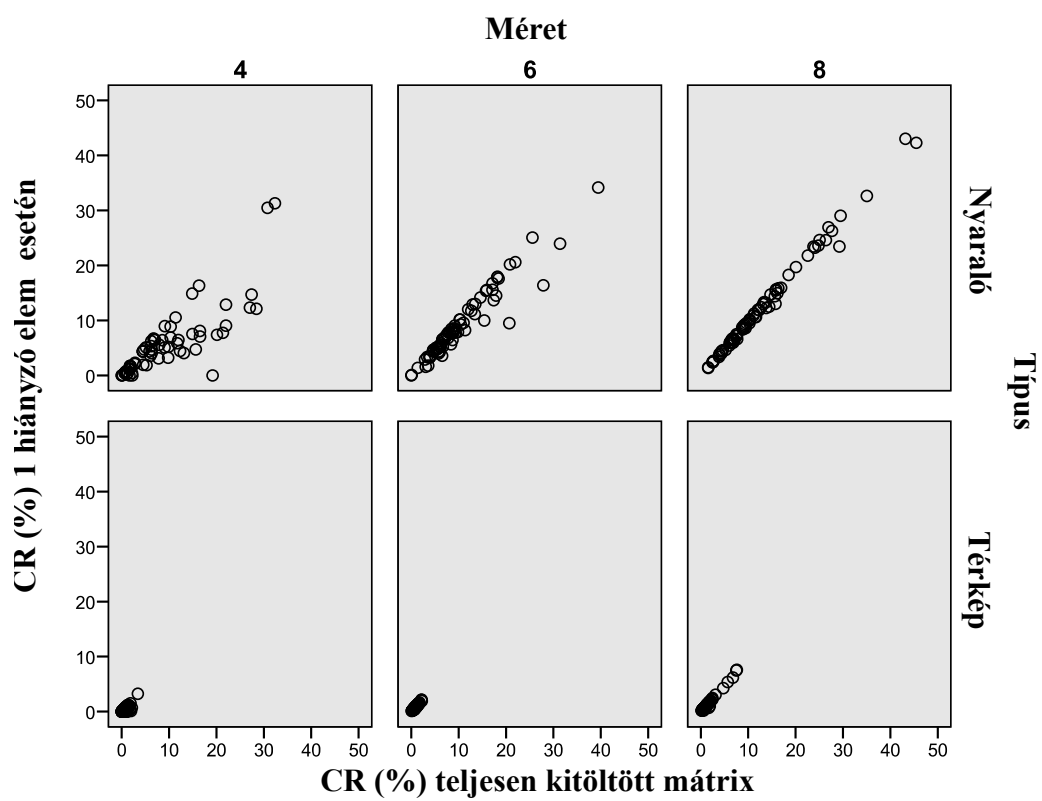
3.3. táblázat. Teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok átlagos CR inkonzisztenciája %-ban mérve

A 3.3. táblázatban látható, hogy a szubjektív feladat (nyaralók) esetében a CR index átlagos értéke a Saaty-féle index 10%-s küszöbérték környékén szóródott, ezzel szemben az objektív problémánál (országok területének összevetése) 1% körüli átlagos CR inkonzisztencia szint volt jellemző. Ezt a jelentős eltérést támasztja alá az egyes mátrixok inkonzisztenciájának értékeit szemléltető 3.1 ábra is.

Tehát a CR index a várakozásnak megfelelően adott méret és kitöltési sorrend esetén szignifikánsan magasabb inkonzisztenciát mutat a nyaralók összehasonlításánál, mint a térképes feladatnál, amit a Mann-Whitney U teszt [30] is alátámaszt (tesztstatisztika értéke 2285,00, $p \leq 0,001$).

Az objektív és szubjektív feladatoknál az inkonzisztencia szinteknek a kitöltés során tapasztalt dinamikája is eltérő, amit a teljesen kitöltött és az egy hiányzó elemű 4×4 -es, 6×6 -os és 8×8 -as mátrixok vizsgálatával kapott 3.1 ábra is szemléltet. A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának, illetve egyéb tulajdonságainak részletes vizsgálatát a 3.3.3 fejezet tartalmazza.

A Koczkodaj-féle CM indexnél a Saaty-féle indexhez hasonló eredményt kaptunk, amelyet a 3.4. táblázat szemléltet. A CM -nél csak néhány,



3.1. ábra. Teljesen kitöltött és az egy hiányzó elemet tartalmazó mátrixok CR inkonzisztenciája, méret és kitöltési sorrend szerint megbontva

nagyon speciális esetben [28] beszélhetünk elfogadott kritikus küszöbértékről, azonban a CM 1.5. definíciója alapján ismert, hogy a mutató növekedése az inkonzisztencia emelkedését jelenti.

	nyaraló			térkép		
	4×4	6×6	8×8	4×4	6×6	8×8
szekvenciális	0,62	0,79	0,87	0,29	0,45	0,54
véletlen	0,68	0,77	0,86	0,31	0,46	0,57
Ross	0,60	0,82	0,90	0,28	0,46	0,58
Összes	0,63	0,79	0,88	0,29	0,46	0,56

3.4. táblázat. Teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok átlagos CM inkonzisztenciája

Mátrixméret

A legtöbb kutató és gyakorlati szakember egyetért abban, hogy a páros összehasonlítás mátrix méretének növekedésével az inkonzisztencia szintje is növekszik. Egyes kutatók szerint a „mágikus 7-s szabály” ([31], [40]) követése az ideális megoldás. A szabály értelmében a 7×7 dimenziónál nagyobb mátrixok használata egyértelműen az elfogadható szint fölé emeli az inkonzisztenciát. Ennek egyik egyszerű magyarázata, hogy az összehasonlítások számának ilyen mértékű növekedése jelentős szellemi megterhelést jelent a döntéshozónak, például egy 8×8 páros összehasonlítás mátrix kitöltése összesen 28 összehasonlítás elvégzését igényli. Azonban igaz, hogy minden lépésben kizárólag két alternatíva összehasonlítását végzi a döntéshozó, azonban az összehasonlítandó elemek növelése exponenciálisan emeli az összehasonlítások számát és ezzel az egész folyamat időigényesebbé és kimerítőbbé válik, ami csökkenti a teljesítményt.

A fenti érvelés vezetett a következő kutatási kérdéshez: A mátrix méretének (összehasonlítandó elemek számának) növekedése magasabb inkonzisztenciát okoz?

A korábban bemutatott 3.3 táblázatban is látható, hogy a növekvő méret hatására a CR inkonzisztencia emelkedik. Ezzel teljesen azonos képet kapunk a CM indexnél is, amelynek eredményeit a 3.4. táblázat foglalja össze. A statisztikai összefüggés feltárásához a Log_{CR} index értékeire illesztettünk lineáris regressziót típus, kitöltési sorrend és a méret változók bevonásával. A

regresszió eredményéből (3.5 táblázat) leolvasható, hogy a szubjektív összehasonlításoknál (nyaralók) szignifikánsan magasabb a CR index értéke, illetve a méret növekedése szignifikánsan magasabb CR inkonzisztencia indexet eredményez mind a két típus esetében. A regressziós analízist elvégezve a CM indexre hasonló következtetéseket lehet levonni a 3.6. táblázatból. Egyedüli eltérés, hogy a (típus \times méret) változó szignifikáns az egyenletben. Tehát a CM index esetén a méret növekedésével minden típusnál szignifikánsan növekedik az inkonzisztencia, de a szubjektív feladattípusok esetében a növekedés kisebb mértékű.

	Becslés	Std error	Wald chi-sq (df)	P-érték
típus				
térkép	0,00	n.a.	n.a.	n.a.
nyaraló	2,34	0,32	53,13 (1)	0,00
kitöltés				
véletlen	0,00	n.a.	n.a.	n.a.
szekvenciális	-0,02	0,1	0,05 (1)	0,83
Ross	0,04	0,10	0,15 (1)	0,70
méret	0,15	0,04	16,51 (1)	0,00
nyaraló x méret	0,00	0,05	0,00 (1)	0,95

Teljes likelihood arány $\chi^2(5)$ tesztstatisztika
értéke 477,01, p-érték < 0,001

3.5. táblázat. A \log_{CR} index lineáris regressziós becslésének eredménye

	Becslés	Std error	Wald chi-sq (df)	P-érték
típus				
térkép	0,00	n.a.	n.a.	n.a.
nyaraló	1,06	0,11	85,09 (1)	0,00
kitöltés				
véletlen	0,00	n.a.	n.a.	n.a.
szekvenciális	-0,01	0,04	0,03 (1)	0,86
Ross	0,01	0,04	0,04 (1)	0,84
méret	0,16	0,01	162,63 (1)	0,00
nyaraló x méret	-0,07	0,02	16,51 (1)	0,00

Teljes likelihood arány $\chi^2(5)$ tesztstatisztika
értéke 392,66 , p-érték < 0,001

3.6. táblázat. A \log_{CM} index lineáris regressziós becslésének eredménye

A kapott eredmények ismeretében a következő két állítás fogalmazható meg.

3.1. Állítás *Az inkonzisztencia szintje szignifikánsan magasabb a szubjektív feladatoknál, mint az objektíveknél.*

3.2. Állítás *Az összehasonlítandó elemek növekedése szignifikánsan emeli páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának szintjét.*

Kitöltési sorrend

A kutatás kezdetén alapvető hipotézis volt, hogy a vizsgált 3 eltérő kitöltési sorrendben kitöltött páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztencia szintjei különbözni fognak. A kísérlet során azonban kiderült, hogy a gyűjtött mátrixokban nem volt tapasztalható hatása a kitöltési sorrendnek. Ezt támasztják alá a CR -nél a 3.3. és 3.5., valamint CM indexnél a 3.4. és 3.6. táblázatok is.

3.3. Állítás *A kitöltési sorrendnek nincs szignifikáns hatása a páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciájára.*

A következő részben kiterjesztjük vizsgálatunkat a páros összehasonlítás mátrix egyik alosztályára, a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra.

3.3.2. Inkonzisztencia a kérdezési folyamat során

A kísérlet gondos felépítése és az alkalmazott eszközök révén rögzítésre került a kitöltési folyamat minden fázisa, amely lehetővé tette, hogy figyelemmel kísérjük és elemezzük páros összehasonlítás mátrixok tulajdonságait a kitöltés során. A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix fogalmát elsőként Harker vezette be 1987-ben, amely szerint ide tartozik minden olyan páros összehasonlítás mátrix, amelynek legalább egy eleme hiányzik. Fontos megjegyzés, hogy minden teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix valójában nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix sorozatából épül fel.

Bozóki, Fülöp és Koczkodaj [6] és [9] szerzők nevéhez fűződik a CM és CR inkonzisztencia indexek, valamint a sajátérték módszer kiterjesztése nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixra.

Legyen A egy nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix, ahol a hiányzó, illetve ismeretlen elemeket jelölje $*$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & * & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & * \\ * & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & * & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Jelölje $x_1, x_2, \dots, x_d > 0$ az A felső háromszög mátrix hiányzó mátrix elemeit, illetve a $1/x_1, 1/x_2, \dots, 1/x_d$ jelölje ezen elemek reciprokát az alsó háromszög mátrixban, továbbá az ismert elemeket jelölje a_{ij} . Ekkor az $A(x_1, x_2, \dots, x_d)$ mátrix egy teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix minden $(x_1, x_2, \dots, x_d) > 0$ vektor esetén.

$$\mathbf{A}(x_1, x_2, \dots, x_d) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & x_1 & \dots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & a_{23} & \dots & x_d \\ 1/x_1 & 1/a_{23} & 1 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/x_d & 1/a_{3n} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

Tekintve a páros összehasonlítás mátrix CR inkonzisztencia indexe és a maximális sajátvektorához tartozó λ_{max} sajátértéke között fennálló kapcsolatra, a nem teljesen kitöltött mátrixokra megfogalmazott Sajátvektor módszer a következő sajátérték minimalizáló feladat optimális megoldásaként áll elő

$$\lambda_{max}(X) = \min\{\lambda_{max}(\mathbf{A}(x_1, x_2, \dots, x_d)) | x_1, x_2, \dots, x_d > 0\}. \quad (3.1)$$

A CR index kiterjeszthető a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra is, alkalmazva az 1.3.1 részben bemutatott egyenletet

$$CR(\mathbf{A}(X)) = \frac{\lambda_{max}(X) - n}{RI_n(n-1)}. \quad (3.2)$$

A Koczkodaj-féle CM index kiterjesztése CR indexhez hasonló módon történik

$$CM(\mathbf{A}(X)) = \min\{CM(\mathbf{A}(x_1, x_2, \dots, x_d)) | x_1, x_2, \dots, x_d > 0\}. \quad (3.3)$$

A kísérlet felépítése lehetővé tette ¹, hogy utólag reprodukálható legyen a kitöltés folyamata és ezzel párhuzamosan a kitöltés során dinamikusan változó inkonzisztencia. A dinamikusan változó inkonzisztencia elemzésére alkalmas az egyes osztályokba sorolt mátrixok lépésenkénti átlagos inkonzisztencia szintje. Ezt mutatják be a 3.7. és a 3.8. táblázatok. A táblázatok oszlopaiban az „elemek száma”, a mátrixban már megadott páros összehasonlítás elemekre utal, amíg a sorok a különböző kitöltési sorrendek szerinti bontást mutatják. A 6×6 mátrixoknál az elemek száma a minimálisan szükséges elemszámtól ($n - 1 = 5$) a teljes kitöltésig ($\frac{n(n-1)}{2} = 15$) terjed. A 3.7. és a 3.8. táblázatok a lépésenkénti átlagos inkonzisztenciát mutatják be a nyaralós és a térképes feladatoknál.

elemek száma \ kitöltés	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
szekvenciális	0,00	0,96	1,82	3,71	4,74	5,66	6,61	7,33	8,35	9,21	10,75
véletlen	0,00	1,38	2,77	3,49	4,42	4,97	6,25	6,91	8,17	8,19	9,47
Ross	0,00	1,37	2,5	3,84	4,93	5,45	6,27	7,24	7,85	9,52	10,63

3.7. táblázat. Nem teljesen kitöltött 6×6 páros összehasonlítás mátrixok átlagos CR inkonzisztenciája, nyaralók összehasonlításánál

elemek száma \ kitöltés	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
szekvenciális	0,00	0,13	0,18	0,25	0,32	0,4	0,48	0,55	0,64	0,72	0,81
véletlen	0,00	0,06	0,11	0,2	0,4	0,5	0,57	0,65	0,71	0,72	0,8
Ross	0,00	0,07	0,14	0,23	0,31	0,37	0,51	0,69	0,73	0,83	0,88

3.8. táblázat. Nem teljesen kitöltött 6×6 páros összehasonlítás mátrixok átlagos CR inkonzisztenciája, országok területének összehasonlításánál

A táblázatokból leolvasható, hogy mind a két típusú problémánál a CR inkonzisztencia a kitöltés során a 0-tól lineárisan nő egészen a teljesen kitöltött mátrix inkonzisztencia szintjéig. Az inkonzisztencia statisztikai elemzése érdekében lineáris kevert modellt illesztettünk a kitöltés során megőrzött CR inkonzisztencia adatokra, amelynek outputját a 3.9. táblázat tartalmazza. A kevert regressziós modellben CR inkonzisztenciát magyarázó szisztematikus hatás az ismert mátrix elemek száma, véletlen hatás a probléma típusa, a kitöltési sorrend, a méret valamint ezek kereszthatásai. A kevert modellbe bevont véletlen hatások szignifikánsak a χ^2 tesztstatisztika ($\chi^2(3) = 2895$,

¹Mivel a kiosztott füzetben nem volt lehetőség visszalapozni, így a mátrixelemek kitöltésének sorrendjét előre rögzíteni lehetett.

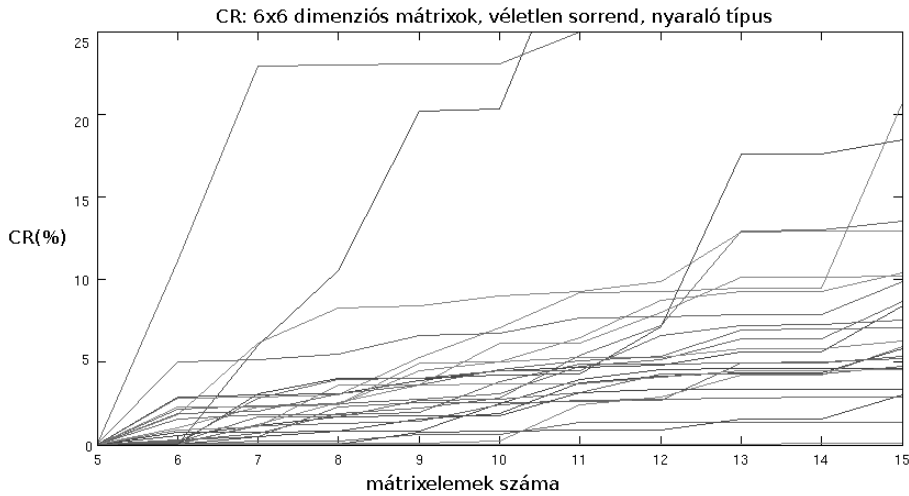
$p\text{-érték} < 0,001$) alapján. A 3.9. táblázat alapján elmondható, hogy a *CR* inkonzisztencia lineárisan nő a kitöltés során (a négyzetes változó a $p\text{-érték}$ alapján nem szignifikáns). A kitöltött elemek számának hatására a *CR* index értéke nagyobb mértékben emelkedik a nyaraló típusú feladatoknál, azonban ez a hatás nem mutatható ki sem a szekvenciális kitöltés esetében, sem a mátrix méretének növekedésével. Az eredményből az is kitűnik, hogy az objektív (térképek) összehasonlításánál a véletlen sorrendhez magasabb *CR* inkonzisztencia szint tartozik. Ez a kitöltési hatás a nyaralóknál viszont már nem figyelhető meg. A mátrix méretet tekintve, a regressziós modellből kiderül, hogy a vártak megfelelően a nagyobb méret magasabb inkonzisztenciával jár. Ez a mérettel összefüggő hatás azonban a nyaralók esetében már kisebb mértékben jelentkezik.

Változó \ Statisztikai érték	Becslés	Std hiba	T-érték (df)	P-érték
Szisztematikus hatás				
sorszám	0,02	0,00	10,23 (5463)	0,00
sorszám ²	0,00	0,00	0,32 (5463)	0,75
Véletlen hatás				
T=típus				
T(térkép)	0,00	N/A	N/A	N/A
T(nyaraló)	0,07	0,00	15,63 (5463)	0,00
K=kitöltés				
K(véletlen)	0,00	N/A	N/A	N/A
K(szekvenciális)	-0,001	0,00	-2,71 (5463)	0,01
K(Ross)	-0,01	0,00	-5,12 (5463)	0,00
M=méret	0,01	0,00	7,04 (5463)	0,00
sorszám \times T(nyaraló)	0,001	0,00	39,74 (5463)	0,00
sorszám \times K(Ross)	0,00	0,00	0,86 (5463)	0,40
sorszám \times K(szekvenciális)	-0,00	0,00	-2,77 (5463)	0,01
T(nyaraló) \times K(Ross)	0,02	0,00	7,08 (5463)	0,00
T(nyaraló) \times K(szekvenciális)	0,00	0,00	3,50 (5463)	0,00
sorszám \times M	-0,00	0,00	-8,66 (5463)	0,00
T(nyaraló) \times M	-0,02	0,00	-20,51 (5463)	0,00

Véletlen hatások szignifikanciáját tesztelő teljes likelihood arány tesztstatisztika értéke $\chi^2(3) = 2895$, $p\text{-érték} < 0,001$

3.9. táblázat. Nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix *CR* inkonzisztenciájának elemzése lineáris kevert regresszióval

Az előzőekben bemutatott táblázatok az egyes alcsoportok átlagos inkonzisztenciájáról és annak a kitöltés során bekövetkezett változásáról adnak



3.2. ábra. Az egyéni 6×6 páros összehasonlítás mátrixok CR inkonzisztenciája véletlen kitöltési sorrendnél

képet, de az alcsoportba tartozó egyedi elemekről nem adnak információt. A 3.2. ábra az egyes személyek egyéni inkonzisztenciáját grafikusán mutatja be, amelynél a vízszintes tengelyen a mátrixban kitöltött elemek száma, függőleges tengelyen a CR inkonzisztencia értéke szerepel. Az ábrán a nyaralók összehasonlításánál véletlen kérdezési sorrendben kitöltött, 6×6 méretű mátrixok inkonzisztenciája látható. Egy mátrix kitöltés során mért lépésenkénti inkonzisztenciáját egy-egy vonal reprezentálja. Mivel ebben az alcsoportba (nyaraló, 6×6 méret, véletlen kitöltés) összesen 26 mátrix sorolható, ezért az ábrán 26 darab vonalat látható.

Tekintettel a disszertáció méretére a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok elemzése során kapott további táblázatok és ábrák a dolgozat mellékletében érhetők el.

3.3.3. Súlyvektorok elemzése

A kitöltés során fellépő inkonzisztencia vizsgálatának egy másik formája a mátrix kitöltése során számított súlyvektor és a teljesen kitöltött mátrix súlyvektorának összevetése.

Az elemzéshez elsőként az egyes kitöltési fázisokban a CR vagy a CM indexet minimalizáló mátrixelemek kiszámítása történt. Ezt követően az optimálisan

kitöltött mátrixból meghatároztuk a súlyvektort, amelyet a teljesen kitöltött mátrix súlyvektorával vetettük össze.

A súlyvektorok összehasonlítása két szinten történt:

- kardinálisan
- ordinálisan.

A **kardinális** eltérések kimutatása az n dimenziós Euklideszi térben ábrázolt súlyvektorok hasonlóságának és közelségének mérésén alapszik, amelynek egyik kiváló eszköze az Euklideszi távolság. A 3.10. táblázat a nyaralóknál, a 3.11. táblázat a térképes feladatnál mutatja a 8×8 méretű mátrixok esetén sajátvektor módszerrel számított átlagos Euklideszi távolságokat az adott kitöltési lépésben. A táblázatokban a minimálisan szükséges elemszámtól $(n-1)$ a teljesen kitöltött mátrixig $(\frac{n(n-1)}{2})$ nyomon követhető a kitöltési folyamat során kapott lépésenkénti és a végső súlyvektorok távolsága. A többi mátrix mérethez hasonlóan itt is megfigyelhető az átlagos távolságok monoton csökkenése, ami kizárólag néhány alkalommal sérül².

elemek száma \ kitöltés	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
szekvenciális	0,17	0,16	0,16	0,15	0,13	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08	0,06
véletlen	0,22	0,22	0,20	0,20	0,18	0,17	0,13	0,11	0,10	0,10	0,09
Ross	0,23	0,20	0,16	0,15	0,13	0,13	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08

elemek száma \ kitöltés	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
szekvenciális	0,06	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03	0,02	0,01	0,00
véletlen	0,08	0,08	0,06	0,06	0,05	0,05	0,05	0,03	0,03	0,02	0,00
Ross	0,07	0,07	0,06	0,05	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,00

3.10. táblázat. A lépésenként becsült súlyvektor és a teljes kitöltésből származó súlyvektor átlagos Euklideszi távolsága, nyaralók esetén, 8×8 mátrixoknál

A döntési probléma jellegének hatása ebben az elemzésben is világosan kimutatható, mivel a szubjektív feladatnál az átlagos távolság 2-3 szorosa az azonos tulajdonságokkal rendelkező objektív feladatnál. A kapott eredmények alapján az is kitűnik, hogy a kitöltési sorrendnek nincs hatása, mindazonáltal a lépésenkénti átlagos távolságokat tekintve, maximális érték legtöbb alkalommal a véletlen kitöltésnél szerepel. A súlyvektorok lépésenkénti kardinális vizsgálatából levont következtetést a 3.4. állítás foglalja össze:

²Az Euklideszi távolságok monoton csökkenés sérül a 3.11. táblázat véletlen kitöltéséhez tartozó sorának 11 és 12 számokkal jelzett oszlopában.

elemek száma \ kitöltés	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
szekvenciális	0.054	0.054	0.047	0.044	0.043	0.04	0.039	0.035	0.033	0.031	0.03
véletlen	0.059	0.062	0.057	0.048	0.045	0.046	0.044	0.035	0.033	0.032	0.029
Ross	0.091	0.081	0.053	0.048	0.042	0.033	0.032	0.03	0.028	0.026	0.025

elemek száma \ kitöltés	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
szekvenciális	0.029	0.021	0.015	0.015	0.010	0.010	0.007	0.006	0.003	0.003	0,000
véletlen	0.028	0.023	0.020	0.017	0.015	0.010	0.010	0.008	0.008	0.006	0,000
Ross	0.024	0.021	0.017	0.016	0.015	0.014	0.011	0.009	0.009	0.005	0,000

3.11. táblázat. A lépésenként becsült súlyvektor és a teljes kitöltésből származó súlyvektor átlagos Euklideszi távolsága, térképek esetén, 8×8 mátrixoknál

3.4. Állítás *A páros összehasonlítás mátrixok kitöltése során a döntéshozók többsége kvázi-konzisztens módon viselkedik.*

A súlyvektorok **ordinális** vizsgálata a lépésenkénti súlyvektorok kiszámítása után kapott alternatíva sorrendekkel lehetséges. Az elemzés során az előző részben leírtakkal azonos módon a végső (teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix) és a kitöltési folyamat köztes lépéseinél számított sorrendek összevetése történik. A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokból és a teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokból számított súlyvektorok ordinális összevetését Spearman-fél rangkorrelációval, illetve a bevezetett rangsor mátrixszal is elvégeztük. A 3.3. állításban megfogalmazottak alapján a sorrendnek nincs hatása az inkonzisztenciára ezért az ordinális elemzésénél ezen tulajdonság szerinti megbontást nem vettük figyelembe és kizárólag a méret, illetve probléma típus alapján bontottuk szét a mintát.

A 3.12. táblázat foglalja össze a 6 alternatívát összehasonlító mátrixok átlagos Spearman-féle rangkorrelációját megkülönböztetve a probléma jellegét. A Spearman-féle együttható értéke +1, ha a sorrend azonos és -1, ha a sorrend teljesen ellentétes.

elemek száma \ típus	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
nyaraló	0,82	0,88	0,90	0,92	0,93	0,94	0,96	0,97	0,97	0,98	1,00
térkép	0,99	0,99	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

3.12. táblázat. A lépésenként becsült és a teljes kitöltésből származó alternatíva rangsorok átlagos rangkorrelációja 6×6 mátrixoknál

Az objektív problémának tekintett térképes feladatnál már néhány mátrixelem megadása után kapott nagyon magas rangkorreláció jelzi, hogy a pár elemmel részlegesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixból közel azonos rangsor adódik, mint a teljes kitöltésnél. Ezt az eredményt támasztják alá az egyéni mátrixoknál végzett vizsgálatok is. A rangkorreláció kiválóan alkalmas a teljes rangsorra vonatkozó tulajdonságok feltárására azonban a legtöbb döntési problémánál a rangsor elején elhelyezkedő alternatívák sorrendje fontosabb a rangsor végén elhelyezkedőkénél. A rangsorfordulások helyének pontosabb vizsgálata céljából vezettük be a rangsor, illetve az átlagos rangsor mátrixot.

3.1. Definíció Az R^n rangsor mátrix a_{ij}^n eleme 1, ha a páros összehasonlítás mátrix teljes kitöltése mellett számított i -dik, illetve az n -dik lépésnél kapott j -dik rangsor elem azonos, ellenkező esetben 0.

A 3.1. definícióból következik, hogy a rangsor mátrix minden sorában, valamint oszlopában egyetlen nullától eltérő elem szerepel.

3.1. Példa Egy 4×4 páros összehasonlítás mátrixnál az 5. összehasonlítás után képzett rangsor mátrix

$$\mathbf{R}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

amely szerint a nem teljes kitöltésből számított rangsornál a végső rangsorban 1. és a 2. helyen szereplő alternatívákat megelőzi a végső rangsor 3. helyén álló alternatíva.

Ha az R^n egy egységmátrix akkor az n -dik összehasonlítás elvégzését követően számított rangsor azonos a végső alternatíva rangsorral (teljes kitöltés mellett).

3.2. Definíció Az \bar{R}^n átlagos rangsor mátrix \bar{a}_{ij}^n eleme megmutatja, hogy a vizsgált páros összehasonlítás mátrixok hány százalékánál azonos a teljes kitöltés mellett számított i -dik, illetve az n -dik lépésnél kapott j -dik rangsor elem.

Az átlagos rangsor mátrixnál definíció szerint minden sor-, illetve oszlop-összeg 1.

A kísérlet során gyűjtött mátrixok elemzésénél fontos tudományos kérdés, hogy lehet-e csökkenteni a szükséges páros összehasonlítások számát a végső rangsor megtartása mellett. Erre a kérdésre ad választ az átlagos rangsor mátrix, amely használatával az alternatíva rangsorok változásai lépésről-lépésre nyomon követhetők. A 3.13. és a 3.14. táblázatok tartalmazzák a 6×6 mátrixok átlagos rangsor mátrixait a 10-dik és a 14-dik lépésben.

(a) 10 összehasonlítás után az \bar{R}^{10}							(b) 14 összehasonlítás után az \bar{R}^{14}						
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
1	99	1	0	0	0	0	1	100	0	0	0	0	0
2	1	99	0	0	0	0	2	0	100	0	0	0	0
3	0	0	99	1	0	0	3	0	0	100	0	0	0
4	0	0	1	99	0	0	4	0	0	0	100	0	0
5	0	0	0	0	99	1	5	0	0	0	0	100	0
6	0	0	0	0	1	99	6	0	0	0	0	0	100

3.13. táblázat. Átlagos rangsor mátrix 6×6 mátrixok esetében, térképes problémánál

(a) 10 összehasonlítás az \bar{R}^{10}							(b) 14 összehasonlítás az \bar{R}^{14}						
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
1	83	16	0	1	0	0	1	92	7	1	0	0	0
2	15	65	18	1	0	1	2	7	84	8	0	0	1
3	1	17	73	9	0	0	3	1	9	90	0	0	0
4	0	2	8	81	8	1	4	0	0	1	98	1	0
5	1	0	1	8	73	17	5	0	0	0	2	95	3
6	0	0	0	0	19	81	6	0	0	0	0	4	96

3.14. táblázat. Átlagos rangsor mátrix 6×6 mátrixok esetében, nyaralós problémánál

A térképes problémához tartozó 10 összehasonlítás után kapott átlagos rangsor mátrix első sora a 3.13. táblázat (a) részében jól mutatja, hogy a teljes kitöltés alapján első helyre rangsorolt alternatíva az esetek 99%-ban már 10 összehasonlítás után is az első helyre kerül, valamint a maradék 1% a második helyre sorolódott.

Hasonló módon az előzőhöz, a végső rangsorban második helyen szereplő alternatíva az esetek 99%-ban már 10 összehasonlítást követően megfelelő helyen szerepel, amelyet az átlagos rangsor mátrix második sorából lehet leolvasni.

A 3.14. (a) részben szereplő nyaralókhoz tartozó átlagos rangsor mátrix első sora alapján a végső rangsorban első helyen álló alternatíva 10 összehasonlítás után az esetek 83%-ban kerül a rangsor elejére, a fennmaradó 17%-ban a második (16%), illetve a negyedik (1%) helyen végez. A kapott eredményből le lehet vonni azt a következtetést, hogy a szubjektív feladatnál (nyaralók) 15-ből 10 összehasonlítás elvégzése után kevésbé jól közelíthető a végső alternatíva rangsor, mint az objektív feladatoknál.

A 3.13. és a 3.14. táblázatok (b) része a 14 elem (egyetlen hiányzó összehasonlítás) kitöltése után kapott átlagos rangsor mátrixokat mutatja, amelyből azonnal látszik, hogy az objektív feladatnál teljes mértékben egyezik rangsor (főatlóban 100% szerepel). Ezzel ellentétben a szubjektív problémánál még az utolsó elem is képes megváltoztatni az alternatívák rangsorát. A többi mátrix méret és kitöltési szint mellett kapott átlagos rangsor mátrixok is alátámasztják a kapott eredményeket.

Összességében elmondható, hogy a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok használhatóak a végső rangsor egy elfogadható közelítésére, így sok esetben a kérdezési/ kitöltési folyamat a teljes kitöltés előtt megszakítható. Azonban a számítások alapján az objektív problémáknál szignifikánsan kevesebb páros összehasonlítás elvégzése is jó közelítést ad, mint a szubjektív feladatoknál. Ez az eredmény kiváló kutatási alapot szolgáltat a jövőre nézve, a minimálisan szükséges páros összehasonlítások számának meghatározásához, amellyel megbízható becslés adható az alternatívák rangsorára.

3.5. Állítás *A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok használhatóak a végső alternatíva rangsor becslésére.*

A kísérlet során gyűjtött tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok lehetőségét biztosítanak az inkonzisztencia karakterisztikájának vizsgálatára is. A mátrixokban előforduló intranzitív triádok információt adnak a páros összehasonlítás mátrixok strukturális problémájáról. Egy páros összehasonlítás

mátrix ugyanis nem lehet konzisztens amennyiben legalább egy intranzitív triádja van.

Az inkonzisztens triádok számát legalább két fontos értékkel érdemes összevetni. Az első a mátrix triádjainak a száma, $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. A másik releváns érték az inkonzisztens triádok maximális száma az adott méretű páros összehasonlítás mátrixban. Az erre vonatkozó tételt Kendhal és Smith 1940-ben [25] bizonyították, amely szerint

- ha n páros, akkor $\frac{n^3-n}{24}$,
- ha n páratlan, akkor $\frac{n^3-4n}{24}$

felső korlátot ad az inkonzisztens triádok számára.

A 3.15. táblázat tartalmazza a 454 elemű mintában talált 38 darab, intranzitív triádokat tartalmazó mátrixok bontását CR inkonzisztencia és az intranzitív triádok száma szerint. A várákosoknak megfelelően a legtöbb mátrix a CR mutató 10%-os határértékénél magasabb inkonzisztenciával rendelkezik (túlnyomórészt a 3-nál több intranzitív triád esetén). Azonban szerepel a mintában 10 olyan, a CR inkonzisztencia szerint elfogadható páros összehasonlítás mátrix, amelyben van intranzitív triád.

CR (%)	Intranzitív triádok							Összesen
	1	2	3	4	5	6	7	
0 - 5	3	1						4
5 - 10	4	1			1			6
10 - 20	9	2		2				13
20 - 40	4	1	2	1		3		11
- 40		2				1	1	4
Összesen	20	7	2	3	1	4	1	38

3.15. táblázat. Intranzitív triádokat tartalmazó mátrixok darabszáma a triádok és a CR inkonzisztencia mutató alapján

A disszertáció következő fejezeteiben a páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának csökkentésére szolgáló módszereket mutatok be. A kiválasztott optimalizálási feladat megadja azokat a mátrixelemeket, amelyek

megváltoztatása után a mátrix konzisztens (4. fejezet), vagy elfogadható inkonzisztenciával rendelkező (5. fejezet) lesz. A jelenlegi adatbázisban 45 mátrix tehető konzisztenssé legfeljebb 2 elem módosításával. Fontos kiemelni, hogy az inkonzisztencia ilyen módon történő csökkentése, illetve teljes eliminálása téves eredményre is vezethet, például ha a módosítás után kapott súlyvektorok nem felelnek meg a döntéshozó eredeti preferenciájának. Ezért a korrekciós folyamat elengedhetetlen része a döntéshozóval történő egyeztetés, a módszer által javasolt módosítások jóváhagyása.

4. fejezet

K lépésben konzisztenssé alakítható mátrixok

A 3. fejezetben bemutattam, hogy a páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciáját több tényező is befolyásolja, amelyeknek hatását a kontrollált kísérleti keretek között sikerült számszerűsíteni. Létezik azonban olyan tényező, amelyet nem vizsgáltunk, pedig szinte minden esetben növeli a páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciáját: a téves adat. A tévedés származhat például adatrögzítési hibából, véletlen elírásból, fáradtság vagy leterheltség okozta figyelmetlenségből. Egy ilyen apró tévedés képes jelentősen (szélsőséges esetben az elfogadási szint fölé) növelni egy gondosan megalkotott mátrix inkonzisztenciáját.

A következő fejezet a néhány elem megváltoztatásával konzisztenssé alakítható mátrixokat vizsgálja. A kapott eredmények többek között lehetőséget biztosítanak a tévesen megadott páros összehasonlítás mátrixelemek detektálására, illetve azok optimális értékének kiszámítására (lehetséges javítási irány).

Az értekezés ezen fejezetében tárgyalt kutatáson Bozóki Sándorral és Fülöp Jánossal közösen dolgoztunk és a kapott eredményeket angol nyelven publikáltuk [7]. A megjelenés óta 19 cikkben [P1.1] – [P1.19] hivatkozták a közös eredményeinket.

Egyéni hozzájárulásaim a közös kutatási eredmények eléréséhez:

- páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciájának vizsgálata logaritmizált térben
- gráf reprezentáció ötlete és kialakítása

- inkonzisztens triádok számának meghatározása.

4.1. Mátrixok a logaritmizált térben

Egy A $n \times n$ -es pozitív mátrix esetén legyen $\bar{A} = \log A$ az az $n \times n$ -es mátrix, amelynek elemeire

$$\bar{a}_{ij} = \log a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

teljesül. Ekkor az 1.2. definíció 1.3 tranzitivitási egyenlete alapján az A páros összehasonlítás mátrix pontosan akkor konzisztens, ha

$$\bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki} = 0, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Jelölje $G = \{\mathcal{N}, \mathcal{A}\}$ azt az irányított gráfot, aminek csúcsait $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$, valamint irányított éleit $\mathcal{A} = \{(i, j) \mid i, j \in \mathcal{N}, i \neq j\}$ halmaz tartalmazza. A G irányított gráf i csúcsából j csúcsába vezető (i, j) éléhez rendelt súlyt jelölje \bar{a}_{ij} .

Legyen az $(i, j), (j, k), (k, i)$ a G irányított gráf három különböző csúcsa és jelöljük (i, j, k) -val ezen csúcsok egymáshoz kapcsolódó éleiből kialakult körhármast. Az A páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó G irányított gráf körhármasaihoz egyértelműen megfeleltethetők az 1.4. definícióban megadott triádok, ezért továbbiakban a körhármakra is a triád kifejezést használjuk.

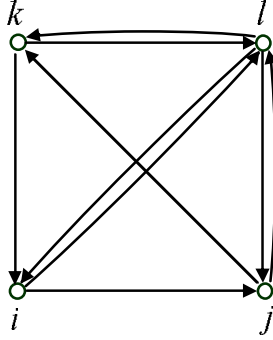
Az (i, j, k) triád $w(i, j, k)$ súlya az egyes élek súlyainak összegeként adódik:

$$w(i, j, k) = \bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki}. \quad (4.2)$$

A triád súlyának (4.2)-es definíciójából következik, hogy a G irányított gráfban egy triád súlya függ a csúcsok bejárásának sorrendjétől, tehát

$$w(i, j, k) = w(j, k, i) = w(k, i, j) = -w(k, j, i) = -w(j, i, k) = -w(i, k, j), \quad (4.3)$$

teljesül. Továbbá egy A mátrix pontosan akkor konzisztens, ha minden triádja konzisztens, vagyis a (4.1) összefüggés alapján az A -hoz tartozó G irányított gráf minden körhármasánál az élek össze-súlya nulla. Az inkonzisztens triádok számánál az azonos csúcsok permutációi során előálló $(i, j, k), (j, k, i)$,



4.1. ábra. A 4.1. állítás bizonyításában használt részgráf

(k, i, j) , (k, j, i) , (j, i, k) , (i, k, j) triádokat azonosnak tekintjük és pontosan egyszer vesszük figyelembe.

Elsőként megmutatjuk, hogy ha $A \in R^{n \times n}$ inkonzisztens, akkor a hozzá tartozó G irányított gráfban legalább $n - 2$ darab inkonzisztens triád (nem nulla összsúlyú körhármass) szerepel.

4.1. Állítás *Legyen (i, j, k) egy inkonzisztens triád a $G = \{\mathcal{N}, \mathcal{A}\}$ $|\mathcal{N}| > 3$ irányított gráfban. Ekkor tetszőleges $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ csúcs esetén az (ℓ, i, j) , (ℓ, j, k) és (ℓ, k, i) triádok közül legalább az egyik inkonzisztens.*

Bizonyítás: A 4.1. ábrán látható a G irányított gráf egy 4 csúcsú részgráfja, amelyről leolvasható, hogy a 4 csúcs alkotta 4 triád súlya között fennáll a következő összefüggés:

$$w(\ell, i, j) + w(\ell, j, k) + w(\ell, k, i) = w(i, j, k).$$

A $w(i, j, k) \neq 0$ teljesül, mivel feltettük, hogy az (i, j, k) inkonzisztens, így a másik három triád közül legalább egynek nem nulla az éleinek összsúlya, tehát inkonzisztens.

□

Mivel a 4.1. állításban szereplő $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ csúcsot $(n - 3)$ -féleképpen lehet kiválasztani és feltettük, hogy az (i, j, k) inkonzisztens, ezért az állításból két következmény fogalmazható meg.

4.1. Következmény *Ha az A páros összehasonlítás mátrix inkonzisztens, akkor a hozzá tartozó G irányított gráfban legalább $n-2$ darab inkonzisztens triád van. \square*

4.2. Következmény *Ha az A páros összehasonlítás mátrix inkonzisztens, akkor a hozzá tartozó G irányított gráfban tetszőleges $i \in \mathcal{N}$ esetén létezik (i, j, k) inkonzisztens triád. \square*

A 4.2. következmény gyakorlati haszna például, hogy ha egy páros összehasonlítás mátrixról el szeretnénk dönteni, hogy konzisztens-e, akkor az $\binom{n}{3}$ triád helyett elegendő $\binom{n-1}{2}$ triádra elvégezni a konzisztencia ellenőrzését.

4.2. Megváltoztatandó elemek minimális száma

A tapasztalati páros összehasonlítás mátrixokon végzett elemzéseim [33] is alátámasztják, hogy a valódi döntési helyzetekben létrehozott mátrixok csak ritkán konzisztensek. A disszertáció ezen részében azon mátrixokat vizsgáljuk, amelyek 1-3 elem és azok reciprokainak (a továbbiakban egy elem megváltoztatása alatt a mátrixelem és annak főátlóra szimmetrikus reciprokának átírását értjük) megváltoztatásával konzisztenssé alakíthatóak. Az ilyen mátrixok a gyakorlatban is előfordulhatnak, ha egy következetes döntéshozó véletlenül elír vagy eltéveszt egy páros összehasonlítás értéket és ezzel inkonzisztenciát visz a döntési eljárásba. A téves elem következtében a mátrixból számított súlyvektor már nem tükrözi a döntéshozó valódi preferenciáját az alternatívák terén, ezért az így kapott döntés helyessége is megkérdőjelezhető.

A következő részben két olyan megközelítést mutatunk be, amelyek képesek a legfeljebb K elem megváltoztatásával konzisztenssé tehető mátrixokat detektálni. A módszerek optimális megoldásának részeként megkapjuk a megváltoztatandó elemeket és azok optimális értékeit. Ezen információ birtokában a döntéshozónak elegendő a kérdéses páros összehasonlításokat felülvizsgálnia és nem szükséges a teljes páros összehasonlítási folyamat megismétlése.

Az első módszer egy vegyes 0 – 1 programozási feladat, ami megadja az A mátrixnak azt a legfeljebb K elemét, amelyek alkalmas megváltoztatásával az A mátrix konzisztenssé alakítható. A második megközelítés a korábban

definiált G irányított gráf triádjainak elemzésén alapszik.

Tegyük fel, hogy az $M \geq 1$ egy felső korlátja az eredeti A és a módosított mátrix elemeinek, azaz

$$a_{ij} \leq M, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

Egy ilyen M felső korlát könnyen megadható, például az AHP módszertanban a Saaty féle arányskálából adódik az $M = 9$ korlát. Ha egy elméleti M felső korlát nem meghatározható, akkor konkrét páros összehasonlítás feladatoknál általában természetesen adódik egy észszerű M korlát.

Jelölje $\bar{M} = \log M$ az eredeti és a módosított mátrixelemekhez rendelt felső korlát logaritmusát, aminek segítségével felírható a következő optimalizálási feladat:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \\ \text{f.h.} \quad & x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0, \quad \forall \{i, j, k\} \subset \mathcal{N}, \quad |\{i, j, k\}| = 3 \\ & x_{ij} = -x_{ji}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ & -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ & -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ & y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \end{aligned} \quad (4.5)$$

ahol x_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, folytonos változók és a módosítandó mátrix-elemeinek a logaritmusát jelölik, y_{ij} , $i = 1, \dots, n-1$, $j = i+1, \dots, n$, bináris változók, amelyek megadják az optimumban módosítandó (i, j) elemeket (ha $y_{ij} = 1$), illetve a változatlan mátrixelemeket (ha $y_{ij} = 0$).

4.2. Állítás *A (4.5) optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix konzisztens legyen feltéve, hogy az eredeti és a módosított mátrix elemeire egyaránt teljesül a (4.4) feltétel.*

Annak a kérdésnek a megválaszolásához, hogy az A mátrix legfeljebb K elem (és azok reciprokainak) megváltoztatásával konzisztenssé alakítható-e, a

következő feltétel csatolása szükséges a (4.5) programozási feladathoz

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \leq K \quad (4.6)$$

feltétel csatolása szükséges. Ekkor elegendő egy lehetséges megoldás keresése a felvetett kérdés megválaszolásához.

A fenti megközelítés gyakorlati alkalmazásánál elengedhetetlen egy megoldó szoftver, amely a döntéstámogatási folyamat során képes kezelni a (4.5) vagy a (4.5)-(4.6) problémákat. Az egészértékű programozási feladat megoldó módszerek $\binom{n}{2}$ darab bináris változóval, exponenciális lépésben tudják megoldani a fenti (4.5), (4.5)-(4.6) feladatokat.

A következőkben részletesen bemutatásra kerülő gráfelméleti megközelítésnek az előnye, hogy nem igényel optimalizálási eszköztárat és egyszerű implementálni.

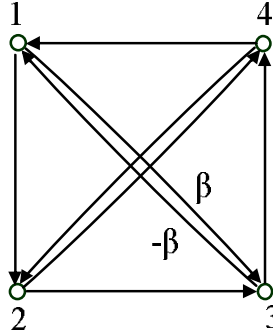
4.3. Gráf reprezentáció

4.3.1. Egy elem megváltoztatása

A (4.5) programozási feladat egy speciális esete, amikor egyetlen elem megváltoztatásával konzisztens mátrix kapható.

4.3. Állítás *Egy $A \in R^{n \times n}$ inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix pontosan akkor tehető konzisztenssé egy elem megváltoztatásával, ha a hozzá tartozó G irányított gráf pontosan $n - 2$ darab inkonzisztens triádot tartalmaz. Ha $n \geq 4$, akkor ez a módosítás egyértelmű.*

Bizonyítás: A szükségesség bizonyításához tegyük fel, hogy az A egy konzisztens mátrix egyetlen elemének megváltoztatása révén kapható. Ha egy konzisztens mátrix a_{ij} elemét megváltoztatjuk, akkor a hozzá tartozó G irányított gráfban a megfelelő (i, j) irányított él (és az ellentétes irányítású (j, i) él) súlya is megváltozik. Eltekintve az élek irányításától, az (i, j) él pontosan $n - 2$ darab triádban szerepel, tehát ezen él módosítása következtében $n - 2$ darab triád súlya változik meg és lesz nullától különböző. A módosított (i, j) élt nem tartalmazó triádok súlya változatlanul 0, következésképpen pontosan



4.2. ábra. Részgráf a 4.3. állítás bizonyításához, $n = 4$ esetben

$n - 2$ darab inkonzisztens triád jött létre az (i, j) él súlyának megváltoztatása után.

Az elégségeség bizonyításához tegyük fel, hogy a G irányított gráf $n - 2$ darab inkonzisztens triádot tartalmaz.

Ha $n = 3$, akkor az állítás triviális, mivel egy három elemű páros összehasonlítás mátrix (triád) tetszőleges, főátlón kívüli elemének optimális megváltoztatásával konzisztenssé alakítható.

Az $n = 4$ esetben a G irányított gráfnak négy csúcsa ($N = \{1, 2, 3, 4\}$) és négy triádja van, amelyekből a kezdeti feltevés alapján kettő inkonzisztens. Legyenek az $(1, 2, 3)$ és az $(1, 3, 4)$ triádok inkonzisztensek, valamint a $(2, 4, 1)$ és a $(2, 3, 4)$ triádok konzisztensek (4.2. ábra). A konzisztens triádok éleinek súlyára felírva a konzisztencia egyenleteket adódnak az

$$\bar{a}_{2,4} + \bar{a}_{4,1} + \bar{a}_{1,2} = 0 \quad (4.7)$$

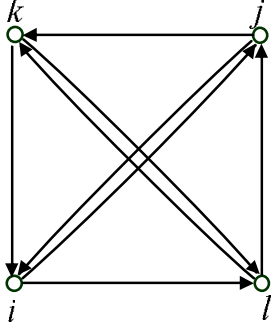
$$\bar{a}_{2,3} + \bar{a}_{3,4} + \bar{a}_{4,2} = 0 \quad (4.8)$$

összefüggések. A (4.7) és a (4.8) egyenletek összeadása és az $\bar{a}_{ij} = -\bar{a}_{ji}$, $i, j = 1, \dots, 4$, helyettesítése után

$$\bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{2,3} = \bar{a}_{1,4} + \bar{a}_{4,3}. \quad (4.9)$$

Bevezetve a $\beta = \bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{2,3} = \bar{a}_{1,4} + \bar{a}_{4,3}$ jelölést, módosítsuk az $(1, 3)$ él súlyát a gráfban β -ra:

$$\bar{a}_{1,3} := \beta, \quad \bar{a}_{3,1} := -\beta. \quad (4.10)$$



4.3. ábra. Részgráf a 4.3. állítás bizonyításához az $n \geq 5$ esetben

A módosítással biztosított az $(1, 2, 3)$ és az $(1, 3, 4)$ triádok konzisztenciája:

$$\bar{a}_{1,2} + \bar{a}_{2,3} + (-\beta) = 0, \quad \beta + \bar{a}_{3,4} + \bar{a}_{4,2} = 0, \quad (4.11)$$

miközben az eredetileg is konzisztens $(2, 4, 1)$ és $(2, 3, 4)$ triádok éleinek össz-súlya nem változott.

Az $n \geq 5$ esetben jelölje $\alpha = w(i, j, k)$ az (i, j, k) inkonzisztens triád súlyát. A kezdeti feltevés értelmében a G irányított gráf $n - 2$ darab inkonzisztens triádot tartalmaz, ezért a 4.1. állításból következik, hogy az $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ esetén az (ℓ, i, j) , (ℓ, j, k) és (ℓ, k, i) triádok közül pontosan egy inkonzisztens. A következőkben megmutatjuk, hogy ezen triád éleinek össz-súlya szintén α -val egyenlő.

Legyen az (ℓ, i, j) triád inkonzisztens, ahol $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ (4.3. ábra). Ekkor a 4.1. állítás miatt az (ℓ, j, k) és (ℓ, k, i) triádok konzisztensek, amelyekre felírva az

$$\bar{a}_{\ell j} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{kl} = 0, \quad (4.12)$$

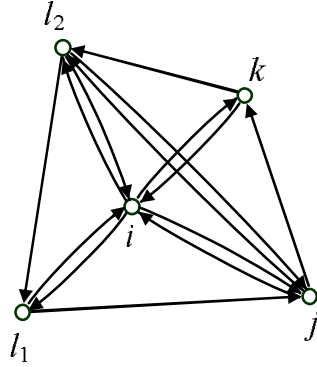
$$\bar{a}_{\ell k} + \bar{a}_{ki} + \bar{a}_{il} = 0, \quad (4.13)$$

konzisztencia egyenletet, majd a (4.12) és a (4.13) egyenleteket összeadva és átrendezve

$$\bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki} = \bar{a}_{jl} + \bar{a}_{li} \quad (4.14)$$

adódik. Mind a két oldalhoz hozzáadva \bar{a}_{ij} -t

$$\alpha = w(i, j, k) = \bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki} = \bar{a}_{li} + \bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jl} = w(\ell, i, j) \quad (4.15)$$



4.4. ábra. Részgráf, amely szemlélteti az (i, j, k) triád és a vele azonos éllel rendelkező triádok kapcsolatát az $n \geq 5$ esetben

kapható, hogy az (ℓ, i, j) inkonzisztens triád súlya azonos az (i, j, k) triád súlyával.

Eddig megmutattuk, hogy ha az inkonzisztens triádok egy közös éllel kapcsolódnak egymáshoz, akkor a kapcsolódó triádok súlya azonos. A következőkben belátjuk, hogy ha a mátrixban $n - 2$ darab inkonzisztens triád szerepel akkor az inkonzisztens triádoknak egy közös élük van.

Indirekt módon feltesszük, hogy létezik $\ell_1 \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ csúcs, amelyre az (ℓ_1, i, j) triád inkonzisztens, és egy másik $\ell_2 \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k, \ell_1\}$ csúcs, amely esetén az (ℓ_2, k, i) triád szintén inkonzisztens (4.4. ábra). A 4.1. állítás alapján, az (ℓ_2, k, i) inkonzisztenciája következtében az (ℓ_2, j, k) konzisztens, továbbá a (j, ℓ_2, ℓ_1) triád is konzisztens, mivel nincs közös éle az (i, j, k) triáddal. Az (ℓ_2, j, k) és (j, ℓ_2, ℓ_1) konzisztens triádok éleinek súlyát összegezve kapható

$$\bar{a}_{jk} + \bar{a}_{k\ell_2} + \bar{a}_{\ell_2\ell_1} + \bar{a}_{\ell_1j} = 0 \quad (4.16)$$

Az (i, ℓ_2, ℓ_1) triád konzisztens, ezért $w(i, \ell_2, \ell_1) = 0$, továbbá korábban feltettük, hogy $w(i, j, k) = \alpha$ és ezért a 4.1. állítás miatt $w(\ell_1, j, i) = w(\ell_2, i, k) = -\alpha$. Összeadva az (i, ℓ_2, ℓ_1) , (ℓ_1, j, i) , (i, j, k) és (ℓ_2, i, k) triádok súlyait,

$$\bar{a}_{jk} + \bar{a}_{k\ell_2} + \bar{a}_{\ell_2\ell_1} + \bar{a}_{\ell_1j} = -\alpha, \quad (4.17)$$

ami ellentmond a (4.16) egyenletnek, mivel $\alpha \neq 0$.

Az általánosság megsértése nélkül feltehető, hogy az (ℓ, i, j) , $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ triád inkonzisztens. Legyen az (ℓ, i, j) triád súlya egyenlő $w(i, j, k) = \alpha$ -val.

Ekkor az (i, j) él \bar{a}_{ij} súlyát $(\bar{a}_{ij} - \alpha)$ -ra csökkentve, az összes (i, j) élt tartalmazó inkonzisztens triád súlya 0 lesz, miközben a többi konzisztens triád súlya nem változik.

Az $n \geq 4$ esetben a módosítandó él és annak optimális módosításának mértéke is egyértelmű, mert kizárólag az (i, j) él szerepel minden inkonzisztens triádban. Ha bármely más él súlya változna, akkor legalább egy inkonzisztens triád változatlan maradna.

□

4.4. Állítás *Legyen az $A \in R^{n \times n}$ egy inkonzisztens mátrix, amely egy konzisztens mátrix K darab elemének (és reciprokának) megváltoztatásával kapható. Ekkor az A -hoz tartozó G irányított gráf legfeljebb $K(n - 2)$ darab inkonzisztens triádot tartalmaz.*

Bizonyítás: Egy konzisztens mátrixhoz tartozó gráfból kiindulva lépésenként egy irányított él súlya változik, így $n - 2$ darab triád súlya módosul. Természetesen nem zárható ki, hogy egy triád súlya egynél többször is megváltozzon, azonban legfeljebb $K(n - 2)$ triád súlya módosulhat. A kezdeti konzisztens mátrixban minden triád konzisztens, ezért K számú módosítás után legfeljebb $K(n - 2)$ inkonzisztens triád keletkezhet a G irányított gráfban.

□

Egy elem megváltoztatása ($K = 1$) esetén pontosan $n - 2$ darab inkonzisztens triád jön létre a gráfban. Ezzel ellentétben, ha feltesszük, hogy $K > 1$, akkor az inkonzisztens triádok száma függ a módosított élek kapcsolatától. Könnyű látni, hogy ha a megváltoztatott élek függetlenek (az éleknek nincsen közös csúcsa, akkor az inkonzisztens triádok száma $K(n - 2)$). Azonban, ha a módosított élek között vannak csatlakozók, akkor ezen élek súlyának módosítása képes kioltani egymást, így végül egyes módosított triádok súlya ismét nulla lehet. A 4.1. táblázat bemutatja, hogy $K = 2$ esetben az inkonzisztens triádok száma $K(n - 2) - 2$ és $K(n - 2)$, illetve $K = 3$ -nál $K(n - 2) - 6$ és $K(n - 2)$ között mozog, továbbá szemlélteti a változásra kijelölt elemek pozícióját.

Az előzőekből következik, hogy szélsőséges esetben az is előfordulhat, hogy K mátrixelem módosítása után a mátrix konzisztens marad. Ezt a ritka esetet szemlélteti a 4.1 példa.

(a) Inkonzisztens triádok száma

Esetek	K	3 elem közös triádban	2 elem közös triádban	konzisztens közös triádok	inkonzisztens triádok
I	1	-	-	-	$n - 2$
II	2	-	0	0	$2(n - 2)$
III/A	2	-	1	0	$2(n - 2) - 1$
III/B	2	-	1	1	$2(n - 2) - 2$
IV	3	0	0	0	$3(n - 2)$
V/A	3	0	1	0	$3(n - 2) - 1$
V/B	3	0	1	1	$3(n - 2) - 2$
VI/A	3	0	2	0	$3(n - 2) - 2$
VI/B	3	0	2	1	$3(n - 2) - 3$
VI/C	3	0	2	2	$3(n - 2) - 4$
VII/A	3	0	3	0	$3(n - 2) - 3$
VII/B	3	0	3	1	$3(n - 2) - 4$
VII/C	3	0	3	2	$3(n - 2) - 5$
VII/D	3	0	3	3	$3(n - 2) - 6$
VIII/A	3	1	0	0	$3(n - 2) - 2$
VIII/B	3	1	0	1	$3(n - 2) - 3$

(b) Megváltoztatandó elemek

Esetek	K	megváltoztatott mátrixelemek	dimenzió
I	1	α_{12}	$n \geq 3$
II	2	α_{12}, α_{34}	$n \geq 4$
III	2	α_{12}, α_{13}	$n \geq 4$
IV	3	$\alpha_{12}, \alpha_{34}, \alpha_{56}$	$n \geq 6$
V	3	$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{45}$	$n \geq 5$
VI	3	$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{24}$	$n \geq 4$
VII	3	$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}$	$n \geq 4$
VIII	3	$\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$	$n \geq 4$

(c) Példa mátrix

$$\log(A) = [\alpha_{ij}]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{16} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{26} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 & \dots & \alpha_{36} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{16} & -\alpha_{26} & -\alpha_{36} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

4.1. táblázat. Inkonzisztens triádok száma a megváltoztatandó mátrixelemek számának (K) és helyzetének függvényében

4.1. Példa Legyen A egy $n \times n$ páros összehasonlítás mátrix, ahol $n \geq 3$ és elemeire teljesül, hogy

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha, & i = 1; j = 2, \dots, n, \\ 1/\alpha, & j = 1; i = 2, \dots, n, \\ 1, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $\alpha > 0$ tetszőleges. Egyszerű belátni, hogy A konzisztens és bármely más tetszőlegesen választott $\alpha > 0$ értékre is az marad, amely pontosan az $(n - 1)$ darab $a_{1j} = \alpha$ elemének módosítását jelenti.

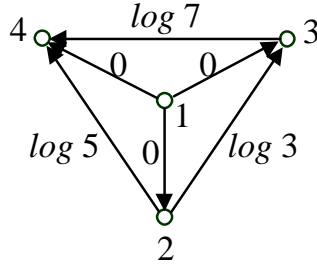
A 4.3. és a 4.4. állítások ismeretében felmerül a kérdés, hogy egy A inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix K elem megváltoztatásával pontosan akkor tehető konzisztenssé, ha a hozzá tartozó G irányított gráf legfeljebb $K(n - 2)$ inkonzisztens triádot tartalmaz. Azonban ez a sejtés nem igaz, ahogy azt a 4.2. példa is szemlélteti.

4.2. Példa Legyen $n = 4$ és

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1/3 & 1 & 7 \\ 1 & 1/5 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrixhoz tartozó G irányított gráfban mind a négy triád inkonzisztens, így eltérő súllyal rendelkeznek, amit a 4.5. ábra szemléltet. A 4.3. állítást alkalmazva az A mátrix nem tehető konzisztenssé egyetlen elemének megváltoztatásával. Mivel $K = 2$ esetén fennáll a $K(n - 2) \leq 4$ egyenlőtlenség, ezért ha a fent megfogalmazott sejtés igaz, akkor az A mátrix két elemmel konzisztenssé alakítható. Azonban bármely G irányított gráfbeli él súlyának módosítása után legalább három inkonzisztens triád marad, amelyeket nem lehet konzisztenssé alakítani egyetlen további él súlyának optimális megválasztásával.

A 4.2. példa is rámutat, hogy csupán az inkonzisztens triádok száma nem ad elégséges feltételt a legfeljebb K elem módosításával konzisztenssé alakítható mátrixok azonosítására. Ehhez szükséges az inkonzisztens triádok kapcsolatának, azok súlyainak és a súlyok arányainak figyelembevétele is.



4.5. ábra. A 4.2. példa szemléltetése

4.5. Állítás Egy A inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix egy elem módosításával pontosan akkor tehető konzisztenssé, ha a mátrixhoz tartozó G irányított gráfban létezik olyan (i, j) irányított él, amelyre minden (ℓ, i, j) , $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j\}$ triád súlya azonos, nullától különböző, valamint minden más triád konzisztens. Az ilyen tulajdonságú (i, j) irányított éleknél a módosítás iránya és mértéke egyértelmű. Az $n \geq 4$ esetben legfeljebb egy ilyen (i, j) él létezik.

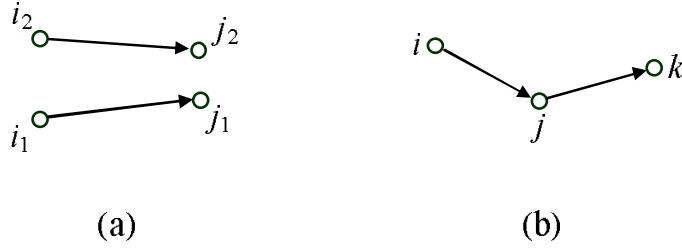
4.3.2. Két elem módosítása

A két elem megváltoztatásával konzisztenssé tehető mátrixokra megfogalmazható állítás sok elemében hasonlít a 4.5. állításra, azonban itt már a két él kapcsolatának elemzése is szükségessé válik. A két él lehet egymástól független (4.6.a ábra), illetve közös csúcs esetén csatlakozó (4.6.b ábra).

Könnyű belátni, hogy $n = 3$ esetén az élek kizárólag a 4.6.b ábrán ábrázolt módon helyezkedhetnek el, továbbá azt is, hogy tetszőleges $A \in R^{3 \times 3}$ inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix két elem módosításával végtelen sok módon konzisztenssé alakítható.

4.6. Állítás Egy A inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix pontosan akkor tehető két elemének megváltoztatásával konzisztenssé, ha a megfelelő G irányított gráfban az alábbi két eset valamelyike teljesül:

1. $\exists (i_1, j_1)$ és (i_2, j_2) független élek, valamint nem nulla α_1 és α_2 , hogy minden (ℓ, i_1, j_1) , $\ell \in \mathcal{V} \setminus \{i_1, j_1\}$ triád súlya α_1 és minden (ℓ, i_2, j_2) , $\ell \in \mathcal{V} \setminus \{i_2, j_2\}$ triád súlya α_2 , valamint az összes többi triádra teljesül a konzisztencia feltétel.



4.6. ábra. Két él lehetséges kapcsolata, független (a) és csatlakozó (b)

2. Léteznek az (i, j) és (j, k) csatlakozó élek, valamint nem nulla α_1 és α_2 , hogy minden (ℓ, i, j) , $\ell \in \mathcal{V} \setminus \{i, j, k\}$ triád súlya α_1 , minden (ℓ, j, k) , $\ell \in \mathcal{V} \setminus \{i, j, k\}$ triád súlya α_2 , továbbá az (i, j, k) triád súlya $\alpha_1 + \alpha_2$, és az összes többi triádra teljesül a konzisztencia feltétel.

Ha $n \geq 4$, akkor az élek súlyának megváltoztatása egyértelmű bármely olyan G irányított gráfbeli élpárnál, amely kielégíti az 1. vagy a 2. feltételt. Ha $n \geq 5$, akkor legfeljebb egy G irányított gráfbeli élpár létezik, amely elegendő tesz az 1. feltételnek. Továbbá $n \geq 6$ esetén legfeljebb egy G gráfbeli élpár létezik, amely megfelel a 2. feltételnek.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az A páros összehasonlítás mátrix két elemének megváltoztatásával konzisztenssé tehető. A megfelelő két él lehet független (i_1, j_1) és (i_2, j_2) a 4.6.a ábra szerint, vagy csatlakozó (i, j) és (j, k) a 4.6.b ábra szerint.

Legyenek β_1 és β_2 olyan nem nulla számok, hogy az első feltétel esetében β_1 -t az $\bar{a}_{i_1 j_1}$, valamint β_2 -t az $\bar{a}_{i_2 j_2}$ súlyhoz hozzáadva biztosítják az A mátrix konzisztenciáját. Az (i_1, j_1) él módosítása miatt minden (ℓ, i_1, j_1) , $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i_1, j_1\}$ triád súlya módosul, hasonlóképpen a (i_2, j_2) él korrekciója következtében minden (ℓ, i_2, j_2) , $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i_2, j_2\}$ triád súlya változik. A konzisztenciája miatt az érintett triádok súlya 0 lesz.

A második feltétel esetében a nem nulla β_1 -t az \bar{a}_{ij} és nem nulla β_2 -t az \bar{a}_{jk} súlyokhoz hozzáadva az A mátrix konzisztenssé tehető. Az (ℓ, i, j) triádok súlya β_1 -vel, illetve a (ℓ, j, k) triádok súlya β_2 -vel változik minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ esetén. Továbbá megváltozik az (i, j) és (j, k) éleket tartalmazó (i, j, k) triád súlya is $\beta_1 + \beta_2$ -vel.

Mivel a fentiek alapján a módosított páros összehasonlítás mátrixban minden triád konzisztens, ezért triviálisan adódik az $\alpha_1 = -\beta_1$ és $\alpha_2 = -\beta_2$ választás, így biztosítható az első feltétel teljesülése az első esetben, illetve a második feltétel teljesül a második részben leírtak alapján.

Az elégségeség triviálisan adódik, mivel ha az első feltétel teljesül, akkor $(-\alpha_1)$ -t hozzáadva az $\bar{a}_{i_1j_1}$ -hez, valamint $(-\alpha_2)$ -t hozzáadva $\bar{a}_{i_2j_2}$ -hez minden triád konzisztens lesz. Hasonló módon, a második feltétel fennállásakor a mátrix konzisztenssé alakítható, az \bar{a}_{ij} él súlyának $(-\alpha_1)$ -gyel, illetve az \bar{a}_{jk} él súlyának $(-\alpha_2)$ -vel történő módosításával.

Megmutatjuk, hogy az első és a második feltétel közül legfeljebb egy teljesülhet. Indirekt módon feltesszük, hogy mindkét feltétel egyszerre áll fenn. Ekkor a G irányított gráf konzisztenssé alakítható az (i_1, j_1) és (i_2, j_2) független élek súlyának módosításával, valamint az (i, j) és (j, k) élek súlyának megváltoztatásával is. Azonban a 4 darab triád, amelyek az i_1, j_1, i_2 , valamint a j_2 csúcsokra épülnek, nem tehetők konzisztenssé a két kapcsolódó él súlyának módosításával.

A fenti bizonyításból egyszerűen következik, hogy $n \geq 4$ esetén az első vagy a második feltétel teljesülésekor a G irányított gráf konzisztenssé alakításához szükséges élek súlyának módosítása egyértelmű.

Legyen $n \geq 5$, ekkor feltehető, hogy létezik 2 darab olyan élpár, ami teljesíti az első feltételt. Az első élpár éleit az előzőekben használt (i_1, j_1) , (i_2, j_2) jelölje (lásd a 4.6.a ábrán). Tegyük fel, hogy az (i_1, j_1) él nincs benne a második élpárban, továbbá az $n \geq 5$ miatt létezik $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i_1, i_2, j_1, j_2\}$ csúcs. Az (ℓ, i_1, j_1) , (i_2, i_1, j_1) és (j_2, i_1, j_1) inkonzisztensek. Ezt a három triádot nem lehet konzisztenssé alakítani a második élpár súlyainak megváltoztatásával, mivel az (i_1, j_1) él nem része a második élpárnak.

Legyen $n \geq 6$, ekkor ismét feltehető, hogy létezik 2 darab olyan élpár, ami teljesíti a második feltételt. Az első élpár éleit szintén a korábban használt (i, j) , (j, k) módon jelöljük (lásd a 4.6.b ábrán). Tegyük fel, hogy az (i, j) él nincs benne a második élpárban, továbbá az $n \geq 6$ miatt léteznek az ℓ_1, ℓ_2 és $\ell_3 \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ csúcsok. Az (ℓ_1, i, j) , (ℓ_2, i, j) és (ℓ_3, i, j) triádok inkonzisztensek és nem lehet konzisztenssé alakítani a második élpár súlyainak megváltoztatásával, mivel a második élpár nem tartalmazza az (i, j) élt.

□

4.1. Megjegyzés Ha $n = 4$ és az élpárok száma kielégíti a 4.6. állítás első vagy második feltételét, akkor a megváltoztatás nem egyértelmű. Ez azt jelenti, hogy az inkonzisztens A páros összehasonlítás mátrixot eltérő konzisztens mátrixszá lehet alakítani két elem megváltoztatásával.

A következő páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó G irányított gráfban teljesül az első feltétel:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1/a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1/a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

ahol $a \neq \{0, 1\}$. Ekkor a (4.18) inkonzisztens mátrixból két elem megváltoztatásával eltérő konzisztens mátrixok nyerhetők:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 \\ 1/a & 1 & 1 & 1/a \\ 1/a & 1 & 1 & 1/a \\ 1 & a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan, a következő páros összehasonlítás mátrixhoz tartozó G irányított gráfban teljesül a második feltétel:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ 1/a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/b & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

ahol $a \neq \{0, 1\}$, $b \neq \{0, 1\}$, $a \neq b$, ekkor a (4.19) mátrixból két elem megváltoztatásával eltérő konzisztens mátrixok nyerhetők:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ 1/a & 1 & 1 & 1 \\ 1/a & 1 & 1 & 1 \\ 1/a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & b & b & b \\ 1/b & 1 & 1 & 1 \\ 1/b & 1 & 1 & 1 \\ 1/b & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel a (4.18) mátrixban három inkonzisztens triád, a (4.19) mátrixban négy inkonzisztens triád szerepel, így a 4.3. állítás alapján egyiket se lehet konzisztenssé alakítani egy elem (és reciprokának) megváltoztatásával.

Egyszerű megmutatni, hogy $n = 4$ esetén legfeljebb két eltérő élpár létezik, amelyik teljesíti az első feltételt, valamint legfeljebb három eltérő élpár képes teljesíteni a második feltételt.

4.2. Megjegyzés *Ha $n = 5$, akkor a második feltételt teljesítő élpár nem feltétlenül egyértelmű. Ezt szemlélteti a (4.20) mátrix, amelyhez tartozó G irányított gráf eleget tesz a második feltételnek:*

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & 1 & 1 \\ 1/a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

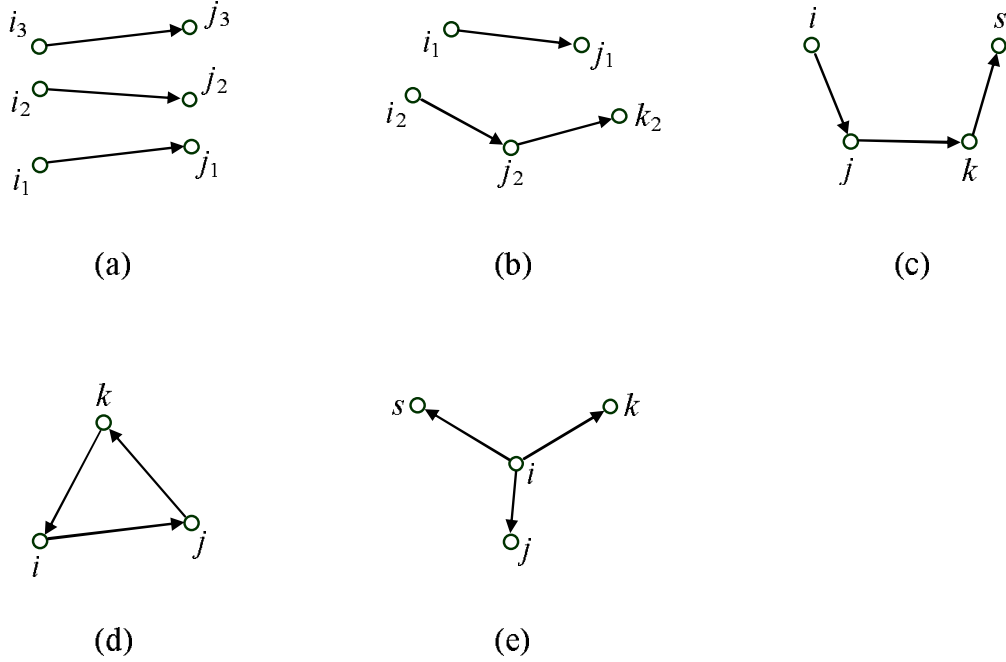
ahol $a \neq \{0, 1\}$, ekkor a (4.20) mátrixból két elem megváltoztatásával eltérő konzisztens mátrixok nyerhetők:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 1 & a & a & a & a \\ 1/a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel a (4.20) mátrix négy inkonzisztens triádot tartalmaz, ezért nem lehet egy elemmel és a reciprokának módosításával konzisztenssé alakítani. Az $n = 5$ esetén legfeljebb két eltérő élpár létezik, amelyik teljesíti a második feltételt.

4.3.3. Három elem módosítása

A három elem megváltoztatásával ($K = 3$) konzisztenssé alakítható mátrixok vizsgálata a növekvő elemszám és így ezek kapcsolatának vizsgálata miatt jóval összetettebb, mint az egy, illetve két elemmel bemutatott elemzés. A G irányított gráfban a három él öt különböző módon kapcsolódhat egymáshoz, ahogy azt a 4.7. ábra is mutatja. Ezért a következő állítás ezt az öt lehetséges esetet vizsgálja.



4.7. ábra. A három él lehetséges elhelyezkedései

4.7. Állítás Egy A inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix pontosan akkor tehető három elemének megváltoztatásával konzisztenssé, ha a megfelelő G irányított gráfban az alábbi öt eset valamelyike teljesül:

1. Léteznek az (i_t, j_t) független élek és nem nulla α_t , $t = 1, 2, 3$, amelyekre fennáll a $w(\ell, i_t, j_t) = \alpha_t$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i_t, j_t\}$, $t = 1, 2, 3$ esetén, valamint az összes többi triád konzisztens.
2. Léteznek az $(i_1, j_1), (i_2, j_2), (j_2, k_2)$ élek, ahol $|\{i_1, j_1, i_2, j_2, k_2\}| = 5$, és nem nulla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, amelyekre fennáll a $w(\ell, i_1, j_1) = \alpha_1$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i_1, j_1\}$ mellett, $w(\ell, i_2, j_2) = \alpha_2$ és $w(\ell, j_2, k_2) = \alpha_3$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i_2, j_2, k_2\}$ esetén, $w(i_2, j_2, k_2) = \alpha_2 + \alpha_3$, valamint az összes többi triád konzisztens.
3. Léteznek az $(i, j), (j, k), (k, s)$ élek, ahol $|\{i, j, k, s\}| = 4$, és nem nulla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, amelyekre fennáll a $w(\ell, i, j) = \alpha_1$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ mellett, $w(\ell, j, k) = \alpha_2$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k, s\}$ esetén, $w(\ell, k, s) = \alpha_3$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{j, k, s\}$ mellett, $w(i, j, k) = \alpha_1 + \alpha_2$, $w(j, k, s) = \alpha_2 + \alpha_3$, valamint az összes többi triád konzisztens.

4. Létezik az (i, j, k) triád és nem nulla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, amelyekre fennáll a $w(\ell, i, j) = \alpha_1, w(\ell, j, k) = \alpha_2$ és $w(\ell, k, i) = \alpha_3$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k\}$ mellett, $w(i, j, k) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, valamint az összes többi triád konzisztens.
5. Léteznek az $(i, j), (i, k), (i, s)$ egymástól különböző élek és nem nulla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, amelyekre fennáll a $w(\ell, i, j) = \alpha_1, w(\ell, i, k) = \alpha_2$, valamint $w(\ell, i, s) = \alpha_3$ minden $\ell \in \mathcal{N} \setminus \{i, j, k, s\}$ mellett, $w(i, j, k) = \alpha_1 - \alpha_2$, $w(i, k, s) = \alpha_2 - \alpha_3, w(i, s, j) = \alpha_3 - \alpha_1$, valamint az összes többi triád konzisztens.

A G irányított gráfot konzisztenssé alakító élek súlyai egyértelműek minden olyan élhármasnál, amely az 1.-5. feltételek közül egyet teljesít, kivéve $n = 3$ esetén a 4. feltételt, illetve $n = 4$ mellett az 5. feltételt, ahol véges számú lehetséges módosítás létezik.

Bizonyítás: A tétel bizonyítását részletesen tárgyaljuk a 2011-ben megjelent cikkben [7].

□

5. fejezet

Az inkonzisztencia csökkentése az elfogadási szint alá

Az előző fejezetben kulcskérdés a páros összehasonlítás mátrixok konzisztenssé tétele volt. Ebben a fejezetben a néhány elem megváltoztatásával elfogadható inkonzisztenciájúvá alakítható mátrixokat mutatom be. A vizsgált mátrixosztály fontosságát az adja, hogy a valódi döntési problémáknál már a mátrixok inkonzisztenciájának alacsony szintje elegendő (nem szükséges a konzisztencia) a döntési modellben történő alkalmazáshoz.

A következőkben bemutatásra kerülő eredményeket egy részét Bozóki Sándorral és Fülöp Jánossal közösen együttműködve dolgoztuk ki, illetve publikáltuk a Central European Journal of Operations Research [8] folyóiratban. A megjelenés óta Siraj, Mikhailov és Keane [P3.1] hivatkozták a közölt állításokat. Az értekezés szerzőjének saját hozzájárulása:

- a logaritmizált alak bevezetése,
- a Saaty-féle CR indexhez kapcsolódó NLP feladat felírásában meghatározó szerep,
- a Peláez és Lamata-féle CI index kapcsolódó NLP feladat felírása,
- az Aguarón és Moreno-Jiménez-féle GCI NLP feladatainak és a hozzájuk kapcsolódó állítások felírása,
- a c_3 és a ρ inkonzisztencia mutatókhoz kapcsolódó összefüggések bemutatása,

- a konvex nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok MATLAB-ban történő implementálása és megoldása.

A fejezetben bemutatásra kerülő nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok választ adnak arra a kérdésre, hogy adott páros összehasonlítás mátrix, inkonzisztencia index, valamint elfogadási szint esetén mi az A mátrix azon elemeinek a minimális száma, amelyek (és reciprokaik) megváltoztatásával az A mátrix elfogadható inkonzisztenciájúvá alakítható.

Ha kiderül, hogy viszonylag kevés elem megváltoztatásával elfogadható inkonzisztenciájúvá tehető a mátrix, akkor nem kizárható, hogy a többé-kevésbé konzisztens módon értékelő ennél a néhány elemnél kevésbé volt figyelmes, esetleg adatrögzítési hiba történt. Érdemes tehát újra kiértékelni ezeket az elemeket. Ha az értékelő ragaszkodik a korábbi értékekhez, vagy az új értékekkel sem érjük el az elfogadható inkonzisztencia szintjét, akkor ez a megközelítés nem járt sikerrel, az összes páros összehasonlítást újból el kell végezni. Ha azonban a kritikus elemek felülvizsgálata után kapott mátrix már elfogadható inkonzisztenciájú, akkor vele folytathatjuk a döntési eljárást.

A fenti vizsgálatokkal kapcsolatban megoldandó nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatoknál előnyös, ha a bináris változók relaxálásával kapott nemlineáris programozási feladatok konvex optimalizálási feladatok. Ebben az esetben ugyanis számos hatékony módszer és szoftver áll rendelkezésünkre, míg nemkonvexitás esetén módszertani és implementációs nehézségek is adódhatnak. Megmutatjuk, hogy az irodalomból ismert három alapvető inkonzisztencia index, a [10] dolgozatban is kiemelten vizsgált Saaty-féle CR [38], a Koczkodaj-féle CM [27, 19], illetve a Peláez és Lamata-féle CI [32] inkonzisztencia mérőszámok, továbbá az Aguarón és Moreno-Jiménez-féle GCI [1], Shiraishi és szerzőtársai c_3 [42, 43, 44] és a Fedrizzi és Giove ρ [20] inkonzisztencia indexek esetén a nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok a logaritmizált térben is megfogalmazhatóak, és ott már teljesül rájuk a konvexitási tulajdonság.

5.1. Inkonzisztencia indexek formalizálása logaritmizált térben

A 4.1 részben leírtakhoz hasonlóan, itt is szükséges bevezetni a mátrix elemeinek logaritmusát. Egy A $n \times n$ -es pozitív mátrix esetén legyen $\bar{A} = \log A$ az az $n \times n$ -es mátrix, amelynek elemeire

$$\bar{a}_{ij} = \log a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

teljesül. Ekkor az 1.2. definíció 1.3 tranzitivitási egyenlete alapján az A páros összehasonlítás mátrix pontosan akkor konzisztens, ha

$$\bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki} = 0, \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

Az (5.1) homogén lineáris egyenletrendszernek eleget tevő \bar{A} mátrixok egy lineáris alteret alkotnak $\mathbb{R}^{n \times n}$ -ben.

Jelölje \mathcal{P}_n az $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrixok halmazát és $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{P}_n$ a konzisztens mátrixok halmazát. Mivel a logaritmizált térben az (1.2) reciprocitási feltételnek az

$$\bar{a}_{ij} = -\bar{a}_{ji}$$

feltétel felel meg, $\log \mathcal{P}_n = \{\log A \mid A \in \mathcal{P}_n\}$ az $n \times n$ méretű ferdén szimmetrikus mátrixok halmazával azonos, amely $\mathbb{R}^{n \times n}$ egy $n(n-1)/2$ dimenziós lineáris alterét alkotja. A $\log \mathcal{C}_n = \{\log A \mid A \in \mathcal{C}_n\}$ halmaz az (5.1)-nek eleget tevő mátrixok halmaza, amelyről megmutatható, hogy $\mathbb{R}^{n \times n}$ egy $n-1$ dimenziós lineáris altere [14]. A definíciókból következően $\log \mathcal{C}_n \subset \log \mathcal{P}_n$.

Egy $\phi_n : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt inkonzisztencia indexnek nevezünk, ha $\phi_n(A) = 0$ minden konzisztens és $\phi_n(A) > 0$ minden inkonzisztens páros összehasonlítás mátrix esetén. A gyakorlatban használt inkonzisztencia indexek folytonosak is, így a $\phi_n(A) > 0$ érték többé-kevésbé azt is jelzi, hogy az inkonzisztens mátrix mennyire tér el egy konzisztensstől.

Mivel gyakorlati páros összehasonlítás mátrixok esetén a konzisztencia nehezen biztosítható, bizonyos szintű inkonzisztenciát még elfogadnak a döntéshozók. Ez a gyakorlatban úgy működik, hogy egy adott ϕ_n inkonzisztencia indexhez választanak egy $\alpha_n \geq 0$ elfogadási szintet, és egy $A \in \mathcal{P}_n$ mátrixot csak akkor tartanak meg további felhasználás céljából, ha $\phi_n(A) \leq \alpha_n$ teljesül, különben pedig elvetik azt, vagy pedig újból elvégeztetik a páros összehason-

lításokat. A mátrix kitöltéséhez szükséges összes páros összehasonlítás újbóli elvégzése gyakran időigényes feladat. Ezért egy előírt elfogadási szint feletti inkonzisztenciájú mátrix teljes elvetése előtt érdemes megvizsgálni, hogy van-e esély kevesebb számú páros összehasonlítás újbóli elvégzésével elfogadható inkonzisztenciájúvá tenni a mátrixot.

5.2. Optimalizálási feladat általános alakja

Adott ϕ_n inkonzisztencia index és α_n elfogadási szint esetén jelölje

$$\mathcal{A}_n(\phi_n, \alpha_n) = \{A \in \mathcal{P}_n \mid \phi_n(A) \leq \alpha_n\} \quad (5.2)$$

azaz azon $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrixok halmazát, amelyek ϕ_n szerinti inkonzisztencia értéke nem haladja meg az α_n elfogadási szintet. Legyen $A, \hat{A} \in \mathcal{P}_n$ és jelölje

$$d(A, \hat{A}) = |\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, a_{ij} \neq \hat{a}_{ij}\}| \quad (5.3)$$

azon elemek számát a felső háromszög pozíciókban, ahol a két mátrix eltér egymástól. Nyilván ugyanennyi az eltérő elemek száma az alsó háromszög pozíciókban is, ezért elegendő egyszer számolni.

Tekintsünk egy $A \in \mathcal{P}_n$ páros összehasonlítás mátrixot, amelyre $\phi_n(A) > \alpha_n$ teljesül, azaz nem elfogadható. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni a felső háromszög (és vele együtt az alsó háromszög) pozíciókban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix már elfogadható legyen. Matematikai alakban ez a

$$\begin{array}{ll} \min & d(A, \hat{A}) \\ \text{f.h.} & \hat{A} \in \mathcal{A}_n(\phi_n, \alpha_n) \end{array} \quad (5.4)$$

optimalizálási feladat megoldását jelenti, ahol \hat{A} elemei a változók.

Feltehetjük azt a kérdést is, hogy mi az a minimális inkonzisztencia szint, amit az $A \in \mathcal{P}_n$ mátrix legfeljebb K számú elemének (és azok reciprokainak)

megváltoztatásával elérhetünk. Ez a feladat matematikai alakban

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \\ \text{f.h.} \quad & d(A, \hat{A}) \leq K, \\ & \hat{A} \in \mathcal{A}_n(\phi_n, \alpha), \end{aligned} \tag{5.5}$$

ahol α és \hat{A} elemei a változó.

Az (5.4) és az (5.5) feladatokat a logaritmizált térben is megfogalmazhatjuk.

$$\log \mathcal{A}_n(\phi_n, \alpha_n) = \{X \in \log \mathcal{P}_n \mid \phi_n(\exp X) \leq \alpha_n\}, \tag{5.6}$$

ezért az (5.4) feladat a

$$\begin{aligned} \min \quad & d(\log A, X) \\ \text{f.h.} \quad & X \in \log \mathcal{P}_n, \\ & \phi_n(\exp X) \leq \alpha_n \end{aligned} \tag{5.7}$$

feladattal ekvivalens, ahol X elemei a változók, a d eltérésfüggvény pedig az (5.3) szerint van értelmezve ferdén szimmetrikus mátrixok esetén is. Az (5.7) első feltétele azt jelenti, hogy X a ferdén szimmetrikus mátrixok alteréből van, a második pedig egy nemlineáris egyenlőtlenség feltétel. A dolgozatban megmutatjuk, hogy ez egy konvex feltétel a Saaty-féle CR [38] és Koczkodaj-féle CM [19, 27] inkonzisztencia indexek esetén.

Az (5.5) feladat ekvivalens alakját is hasonló módon kaphatjuk:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \\ \text{f.h.} \quad & d(\log A, X) \leq K, \\ & X \in \log \mathcal{P}_n, \\ & \phi_n(\exp X) \leq \alpha, \end{aligned} \tag{5.8}$$

ahol α és X elemei a változók.

Az optimalizálási feladatokban nehezen kezelhető d eltérésfüggvényt kiválthatjuk az egészértékű modellezésben jól ismert nagy M módszer alkalmazásával. Ehhez feltételezni kell, hogy ismert egy $M \geq 1$ felső korlát az $A \in \mathcal{P}_n$ és az (5.4), illetve (5.5) feladatok optimális megoldásaként szóba

jöhető $\hat{A} \in \mathcal{P}_n$ mátrixok elemeire vonatkozóan, azaz

$$1/M \leq a_{ij} \leq M, \quad 1/M \leq \hat{a}_{ij} \leq M, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (5.9)$$

Egy ilyen M felső korlátot kaphatunk akkor, ha a konkrét ϕ_n ismeretében meg tudunk határozni egy korlátos tartományt, amely biztosan tartalmazza az (5.4), illetve (5.5) feladat legalább egy optimális megoldását. De ha elméleti M korlátot nem is tudunk könnyen meghatározni, konkrét páros összehasonlítási feladatoknál általában természetesen adódik egy észszerű M korlát.

Az (5.9) feltételt az

$$A, \hat{A} \in [1/M, M]^{n \times n} \quad (5.10)$$

mátrixalakban is felírhatjuk, és az (5.10) \hat{A} -ra vonatkozó korlátozását az (5.4), illetve az (5.5) feladathoz csatolva a

$$\begin{aligned} \min \quad & d(A, \hat{A}) \\ \text{f.h.} \quad & \hat{A} \in \mathcal{A}_n(\phi_n, \alpha_n) \cap [1/M, M]^{n \times n}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

illetve a

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \\ \text{f.h.} \quad & d(A, \hat{A}) \leq K, \\ & \hat{A} \in \mathcal{A}_n(\phi_n, \alpha) \cap [1/M, M]^{n \times n} \end{aligned} \quad (5.12)$$

feladatokat kapjuk.

Bevezetve az $\bar{M} = \log M$ jelölést, a logaritmizált térben az (5.11), illetve az (5.12) feladat ekvivalens alakja a következőképpen írható fel:

$$\begin{aligned} \min \quad & d(\log A, X) \\ \text{f.h.} \quad & X \in \log \mathcal{P}_n \cap [-\bar{M}, \bar{M}]^{n \times n}, \\ & \phi_n(\exp X) \leq \alpha_n, \end{aligned} \quad (5.13)$$

illetve

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \\ \text{f.h.} \quad & d(\log A, X) \leq K, \\ & X \in \log \mathcal{P}_n \cap [-\bar{M}, \bar{M}]^{n \times n}, \\ & \phi_n(\exp X) \leq \alpha. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Az (5.13) és (5.14) feladatra már közvetlenül alkalmazhatjuk a nagy-M technikát. Legyen $\bar{A} = \log A$, és vezessük be az $y_{ij} \in \{0, 1\}$, $1 \leq i < j \leq n$,

bináris változókat. Felhasználva, hogy $\bar{A} \in [-\bar{M}, \bar{M}]^{n \times n}$, az (5.13) feladat az alábbi ekvivalens, vegyes 0-1 programozási alakban is megfogalmazható:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \tag{5.15} \\
\text{f.h.} \quad & \phi_n(\exp X) \leq \alpha_n, \\
& x_{ij} = -x_{ji}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n.
\end{aligned}$$

Az (5.15) optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix ϕ_n inkonzisztenciája ne haladja meg az α_n elfogadási szintet. Az optimális megoldás $y_{ij} = 1$ értékei kijelölik a módosítandó elemeket, az $\exp x_{ij}$ értékek pedig egy módosítási lehetőséget mutatnak be, de azt a megfelelő páros összehasonlításokat esetleg újból elvégzőknek nem kell feltétlenül figyelembe venniük.

Az (5.15) feladatnak a bináris változók szerint több optimális megoldása is lehet, és ezeket külön-külön is érdemes lehet megvizsgálni. Az optimalizáló szoftverek azonban általában csak egy optimális megoldást szolgáltatnak, így a bináris változók szerinti összes optimális megoldás előállításáról saját magunknak kell gondoskodni.

Legyen L^* az (5.15) feladat optimumértéke, y_{ij}^* , $1 \leq i < j \leq n$, egy optimális megoldása és $I_0^* = \{(i, j) \mid y_{ij}^* = 0, 1 \leq i < j \leq n\}$. A

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} = L^* \tag{5.16}$$

feltétel (5.15)-höz való csatolásával azt biztosítjuk, hogy a továbbiakban csak (5.15) optimális megoldásai lehetnek (5.15)-(5.16) megengedett megoldásai. A

$$\sum_{(i,j) \in I_0^*} y_{ij} \geq 1 \tag{5.17}$$

feltétel csatolásával pedig egy már megtalált optimális megoldást zárunk ki a további keresésből. Amennyiben az derül ki, hogy az (5.15)-(5.16)-(5.17) feladatnak nincs megengedett megoldása, az azt jelenti, hogy megtaláltuk (5.15) összes optimális megoldását. Különbözik pedig az új optimális megoldáshoz is készítünk egy (5.17)-hez hasonló kizáró feltételt, csatoljuk azt is (5.17)-hez, és újból megoldjuk az (5.15)-(5.16)-(5.17) feladatot. Véges számú iteráció után előáll (5.15) bináris változók szerinti összes optimális megoldása.

Az (5.14) feladat az (5.15)-höz hasonlóan írható át ekvivalens alakra:

$$\begin{aligned}
& \min \quad \alpha & (5.18) \\
\text{f.h.} \quad & \phi_n(\exp X) \leq \alpha, \\
& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \leq K, \\
& x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \leq i \leq j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, & 1 \leq i < j \leq n.
\end{aligned}$$

Ha $\phi_n(\exp X)$ az X mátrix elemeinek konvex függvénye, az (5.15) és az (5.18) feladat relaxáltjai konvex optimalizálási feladatok, így (5.15), illetve (5.18) vegyes 0-1-es konvex programozási feladat.

5.3. Inkonzisztencia csökkentése

5.3.1. A Saaty-féle CR index

Az 1.3.1 részben bemutatott Saaty-féle CR inkonzisztencia index számításának lépései röviden a következők:

1. CI : a legnagyobb sajátértékből származtatott inkonzisztencia index

$$CI_n = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}, \quad (5.19)$$

2. RI_n : generált véletlen páros összehasonlítás mátrixok CI_n indexeinek átlaga,

3. CR_n : a CI_n és a RI_n arányból számított inkonzisztencia index:

$$CR_n = \frac{CI_n}{RI_n}. \quad (5.20)$$

A CR_n mutatóhoz tartozik egy 10 %-os elfogadási szint, így az (5.20)-at felhasználva az 5.2 fejezetben általánosan tárgyalt ϕ_n inkonzisztencia index speciális eseteként kaphatók a következő állítások.

Egy $X \in \log \mathcal{P}_n$ esetén jelölje $\lambda_{\max}(\exp X)$ az $A = \exp X$ mátrix maximális sajátértékét. Ekkor

$$\phi_n(\exp X) = \frac{\lambda_{\max}(\exp X) - n}{RI_n(n-1)}. \quad (5.21)$$

Az (5.21) összefüggésből látszik, hogy $\phi_n(\exp X)$ pontosan akkor konvex függvénye az X mátrix elemeinek, ha $\lambda_{\max}(\exp X)$ is az, ez utóbbi tulajdonság pedig bizonyítást nyert a [9] dolgozatban. Nevezetesen, $\lambda_{\max}(\exp X)$ nemcsak a ferdén szimmetrikus mátrixok alterén konvex, hanem az $n \times n$ -es mátrixok halmaza felett is.

A fentiek alapján bizonyítottuk, hogy (5.21) esetén (5.15), illetve (5.18) vegyes 0-1-es konvex optimalizálási feladat. Numerikus szempontból azonban nehézséget okoz, hogy $\phi_n(\exp X)$ nem adható meg explicit alakban, mivel a λ_{\max} értékek maguk is iterációs módszerrel számíthatók [38]. Ez a tény megnehezíti a standard megoldó szoftverek alkalmazását. Megmutatjuk azonban, hogy a λ_{\max} érték előáll egy konvex optimalizálási feladat optimumaként is, ezért a beágyazott optimalizálási feladat összevonható a beágyazó feladattal.

A Frobenius tétel egy speciális esetét fogjuk alkalmazni [38, 41]:

5.1. Állítás (Frobenius-tétel) *Legyen A egy $n \times n$ -es irreducibilis nemnegatív mátrix, $\lambda_{\max}(A)$ pedig az A legnagyobb sajátértéke. Ekkor*

$$\max_{w>0} \min_{i=1,\dots,n} \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}w_j}{w_i} = \lambda_{\max}(A) = \min_{w>0} \max_{i=1,\dots,n} \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}w_j}{w_i}. \quad (5.22)$$

Mivel a páros összehasonlítás mátrixok pozitív, irreducibilis mátrixok, az 5.1. állítás közvetlenül alkalmazható rájuk.

Az $\bar{a}_{ij} = \log a_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, mellé bevezetve a $z_i = \log w_i$, $i = 1, \dots, n$, jelöléseket is, (5.22) jobb oldali egyenlőségét a

$$\lambda_{\max}(A) = \min_z \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n e^{\bar{a}_{ij} + z_j - z_i} \quad (5.23)$$

alakra írhatjuk át. Az (5.23) jobb oldalán szereplő konvex exponenciális függvények összegei és azok maximuma szintén konvex, λ_{\max} tehát egy konvex optimalizálási feladat optimumaként is előáll. Az (5.23) összefüggést abban a formában is megfogalmazhatjuk, hogy $\lambda_{\max}(A)$ a

$$\begin{aligned} & \min \lambda \\ \text{f.h..} & \sum_{j=1}^n e^{\bar{a}_{ij} + z_j - z_i} \leq \lambda, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.24)$$

konvex optimalizálási feladat optimumértéke, ahol λ és z_i , $i = 1, \dots, n$ a változók.

Legyen α_n adott elfogadási szint a $\phi_n = CR_n$ inkonzisztencia index esetén. Ekkor az (5.15) feladatban szereplő

$$\phi_n(\exp X) \leq \alpha_n \quad (5.25)$$

feltétel (5.21) alapján $\lambda_{\max}(\exp X)$ segítségével is kifejezhető:

$$\lambda_{\max}(\exp X) \leq n + RI_n(n-1)\alpha_n. \quad (5.26)$$

Legyen $\alpha_n^* = n + RI_n(n-1)\alpha_n$. Ekkor (5.23) alapján, az \bar{a}_{ij} helyébe most x_{ij} -t írva, (5.26) a

$$\sum_{j=1}^n e^{x_{ij} + z_j - z_i} \leq \alpha_n^*, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.27)$$

feltételrendszerrel ekvivalens.

Az (5.15) feladatban az (5.25) feltétel helyett az (5.27) összefüggést írva a következő konvex vegyes 0-1-es optimalizálási feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \tag{5.28} \\
\text{f.h.} \quad & \sum_{j=1}^n e^{x_{ij}+z_j-z_i} \leq \alpha_n^*, \quad i = 1, \dots, n, \\
& x_{ij} = -x_{ji}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n.
\end{aligned}$$

5.2. Állítás Az (5.28) optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix CR_n inkonzisztenciája ne haladja meg az α_n elfogadási szintet, ahol $\alpha_n = \frac{\alpha_n^* - n}{RI_n(n-1)}$.

Az (5.18) feladatot is specializálhatjuk a $\phi_n = CR_n$ inkonzisztencia index esetére. A (5.21) összefüggés alapján ϕ_n minimalizálása ekvivalens λ_{\max} minimalizálásával. A λ_{\max} -ra vonatkozó (5.24)-et is figyelembe véve tekintsük az alábbi konvex vegyes 0-1-es optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned}
& \min \lambda \tag{5.29} \\
\text{f.h.} \quad & \sum_{j=1}^n e^{x_{ij}+z_j-z_i} \leq \lambda, \quad i = 1, \dots, n, \\
& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \leq K, \\
& x_{ij} = -x_{ji}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n.
\end{aligned}$$

5.3. Állítás Jelölje λ^* az (5.29) optimumértékét, és legyen $\alpha^* = \frac{\lambda^* - n}{RI_n(n-1)}$. Ekkor α^* a CR_n inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítás mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n \times n$ -es

páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.

5.3.2. A Koczkodaj-féle CM index

Koczkodaj [19, 27] által bevezetett inkonzisztencia index a 3×3 -as rész-mátrixokra, triádokra épül. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ 1/b & 1/c & 1 \end{pmatrix}$$

kitöltésű 3×3 -as páros összehasonlítás mátrix esetén legyen

$$CM(a, b, c) = \min \left\{ \frac{1}{a} \left| a - \frac{b}{c} \right|, \frac{1}{b} |b - ac|, \frac{1}{c} \left| c - \frac{b}{a} \right| \right\}.$$

Az index $n > 3$ esetén kiterjeszthető tetszőleges A $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrixra:

$$CM(A) = \max \{ CM(a_{ij}, a_{ik}, a_{jk}) \mid 1 \leq i < j < k \leq n \}. \quad (5.30)$$

A Saaty-féle CR_n indextől eltérően itt nem jelennek meg n -től függő paraméterek a konstrukcióban, ezért itt eltekintünk a CM_n alak használatától. Könnyen látható, hogy CM inkonzisztencia index, mivel tetszőleges $A \in \mathcal{P}_n$ esetén $CM(A) \geq 0$, és $CM(A) = 0$ pontosan akkor, ha A konzisztens.

Egy általános (a, b, c) triád esetén legyen

$$T(a, b, c) = \max \left\{ \frac{ac}{b}, \frac{b}{ac} \right\}. \quad (5.31)$$

Megmutatható, hogy a CM index és a T között függvényszerű kapcsolat áll fenn [10]:

$$CM(a, b, c) = 1 - \frac{1}{T(a, b, c)}, \quad T(a, b, c) = \frac{1}{1 - CM(a, b, c)}. \quad (5.32)$$

Mivel $T(a, b, c) \geq 1$, ezért $0 \leq CM(a, b, c) < 1$, így $0 \leq CM(A) < 1$.

Jelölje $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ az (a, b, c) triád logaritmizált értékeit, és legyen

$$\bar{T}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \max \{ \bar{a} + \bar{c} - \bar{b}, -(\bar{a} + \bar{c} - \bar{b}) \}.$$

Ekkor

$$T(a, b, c) = \exp(\bar{T}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})) \quad (5.33)$$

$$CM(a, b, c) = 1 - \frac{1}{\exp(\bar{T}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}))}. \quad (5.34)$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy CM már triádok esetén sem konvex függvénye a logaritmizált mátrixértékeknek, ezért a $\phi_n = CM$ inkonzisztencia index választás esetén az (5.15) és az (5.18) feladatban megjelenő $\phi_n(\exp X)$ az X mátrix elemeinek nem konvex függvénye. Megmutatjuk azonban, hogy a $(-\infty, 1)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő egyváltozós

$$f(t) = \frac{1}{1-t} \quad (5.35)$$

függvény alkalmazásával $f(\phi_n(\exp X)) = f(CM(\exp X))$ az X mátrix elemeinek már konvex függvénye. Ekkor az (5.15) feladat

$$\phi_n(\exp X) \leq \alpha_n$$

feltételét felcserélhetjük az

$$f(\phi_n(\exp X)) \leq f(\alpha_n)$$

konvex feltételre. Az (5.18) feladatban szereplő $\phi_n(\exp X)$ mátrixfüggvény helyett írhatunk közvetlenül $f(\phi_n(\exp X))$ -et, és a módosított feladat α^* optimumértékével számolt $f^{-1}(\alpha^*)$ érték lesz az eredeti (5.18) feladat optimumértéke.

Terjesszük ki az (5.31) által definiált T mutatót tetszőleges A $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrixra:

$$T(A) = \max \{T(a_{ij}, a_{ik}, a_{jk}) \mid 1 \leq i < j < k \leq n\}. \quad (5.36)$$

Mivel (5.32) alapján triádok esetén szigorúan monoton növekvő függvénykapcsolat van CM és T között, ezért

$$CM(A) = 1 - \frac{1}{T(A)} = f^{-1}(T(A)), \quad T(A) = \frac{1}{1 - CM(A)} = f(CM(A)), \quad (5.37)$$

ahol f az (5.35)-ben definiált függvény.

A T mutatót a logaritmizált térben kifejezve azt kapjuk, hogy

$$T(\exp X) = \max \left\{ \max \{ e^{x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}}, e^{-x_{ij}-x_{jk}-x_{ki}} \} \mid 1 \leq i < j < k \leq n \right\}. \quad (5.38)$$

Mivel (5.38) jobb oldalán konvex függvények maximumát képezzük, $T(\exp X)$ az X mátrix elemeinek konvex függvénye. Tehát a $\phi_n = CM$ inkonzisztencia index választás esetén $f(\phi_n(\exp X))$ már konvex függvény, és a fent elmondottak szerint módosított (5.15) és (5.18) már konvex vegyes 0-1-es optimalizálási feladat.

Bár $CM(\exp X)$ nem konvex, de kvázikonvex. Ehhez azt kell ellenőriznünk, hogy $CM(\exp X)$ alsó szinthalmaizai konvexek. Legyen $\beta \in [0, 1)$ tetszőlegesen választott lehetséges értéke $CM(\exp X)$ -nek. Mivel f szigorúan monoton növekvő, ezért

$$\{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid CM(\exp X) \leq \beta\} = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid f(CM(\exp X)) \leq f(\beta)\}.$$

Viszont $T(\exp X) = f(CM(\exp X))$ konvexitása miatt a fenti szinthalmaizok konvexek, ez pedig $T(\exp X)$ kvázikonvexitását jelenti.

5.4. Állítás $CM(\exp X)$ kvázikonvex az $n \times n$ -es mátrixok halmazán, $T(\exp X) = f(CM(\exp X))$ pedig konvex, ahol f (5.35) szerint van értelmezve.

A következőkben megmutatjuk, hogy az (5.15) és (5.18) feladat még egyszerűbb módon is megoldható, nevezetesen megfelelő lineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladatok segítségével. Kihasználva az exponenciális függvény szigorúan monoton növekvő voltát, (5.38) az alábbi formában is felírható:

$$T(\exp X) = e^{\max \{ \max \{ x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}, -x_{ij}-x_{jk}-x_{ki} \} \mid 1 \leq i < j < k \leq n \}}. \quad (5.39)$$

Az (5.39) összefüggés azt is jelenti, hogy $CM(A)$ meghatározható az $\bar{A} = \log A$ mátrix elemeivel képzett lineáris kifejezések maximumának meghatározásával, valamint az exponenciális és az f függvény egyszeri alkalmazásával.

5.5. Állítás ([6]) *Egy $n \times n$ -es A páros összehasonlítás mátrix Koczkodaj-féle CM inkonzisztenciája a következő egyváltozós lineáris programozási feladat optimális megoldásából számítható:*

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{f.h.} \quad & \bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki} \leq z, \quad 1 \leq i < j < k \leq n, \\ & -(\bar{a}_{ij} + \bar{a}_{jk} + \bar{a}_{ki}) \leq z \quad 1 \leq i < j < k \leq n. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Legyen z_{opt} az (5.40) optimumértéke. Ekkor $CM(A) = 1 - \frac{1}{\exp(z_{opt})}$.

A következőkben jelölje $\alpha_n = CM^*$ a $\phi_n = CM$ inkonzisztencia indexhez tartozó elfogadási szintet és legyen

$$z^* = \log \left(\frac{1}{1 - \alpha_n} \right). \quad (5.41)$$

Tekintsük a következő lineáris kevert 0-1 programozási feladatot:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \\ \text{f.h.} \quad & x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq z^*, \quad 1 \leq i < j < k \leq n, \\ & -(x_{ij} + x_{jk} + x_{ki}) \leq z^*, \quad 1 \leq i < j < k \leq n, \\ & x_{ij} = -x_{ji}, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \\ & -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ & -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\ & y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Az eddig tárgyaltak alapján közvetlenül adódnak a következő állítások.

5.6. Állítás *Az (5.42) optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix CM inkonzisztenciája ne haladja meg az α_n elfogadási szintet.*

Az (5.42) némi átalakításával az alábbi lineáris kevert 0-1 programozási feladatot írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
& \min \quad z & (5.43) \\
\text{f.h.} \quad & x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq z, & 1 \leq i < j < k \leq n, \\
& -(x_{ij} + x_{jk} + x_{ki}) \leq z, & 1 \leq i < j < k \leq n, \\
& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \leq K, \\
& x_{ij} = -x_{ji}, & 1 \leq i \leq j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, & 1 \leq i < j \leq n.
\end{aligned}$$

5.7. Állítás Jelölje z_{opt} az (5.43) optimumértékét. Ekkor $1 - \frac{1}{\exp(z_{opt})}$ a CM inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítás mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.

5.3.3. Peláez és Lamata-féle CI index

Peláez és Lamata [32] által javasolt CI inkonzisztencia index, a Koczkodaj-féle CM indexhez hasonlóan, a triádokra épül. Az index azon alapszik, hogy az (1.7) szerint definiált triád determinánsa nemnegatív és pontosan akkor 0, ha a triád konzisztens. A triád ezen tulajdonságát kihasználva, a szerzők az $A \in \mathcal{P}_n$ páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciáját a mátrix triádjainak átlagos determinánsával jellemezték:

$$CI_n(A) = \begin{cases} \det(A), & \text{ha } n = 3, \\ \frac{1}{NT(n)} \sum_{i=1}^{NT(n)} \det(\Gamma_i), & \text{ha } n > 3, \end{cases} \quad (5.44)$$

ahol $NT(n) = \binom{n}{3}$ az A mátrix triádjainak a számát, Γ_i , $i = 1, \dots, NT(n)$ az A mátrix triádjait, jelöli.

Megmutatjuk, hogy CI a logaritmizált mátrixelemek konvex függvénye, így $\phi_n = CI_n$ inkonzisztencia index választása esetén az (5.15) és az (5.18)

feladatban megjelenő $\phi_n(\exp X)$ az X mátrix elemeinek konvex függvénye.

$$\det(\Gamma) = \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} + \frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} - 2 \quad (5.45)$$

összefüggést. Bevezetve az $X = \log \Gamma \in \log \mathcal{P}_3$, illetve $\Gamma = \exp X$ jelölést, az (5.45) egyenlet átírható az X elemeinek konvex függvényére:

$$\det(\exp X) = e^{x_{ik}-x_{ij}-x_{jk}} + e^{x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}} - 2. \quad (5.46)$$

Legyen α_n adott elfogadási szint a $\phi_n = CI_n$ inkonzisztencia index esetén. Ekkor az (5.15) feladatban szereplő

$$\phi_n(\exp X) \leq \alpha_n$$

feltétel az (5.44) és az (5.46) alapján kifejezhető:

$$\frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left(e^{x_{ik}-x_{ij}-x_{jk}} + e^{x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}} - 2 \right) \leq \alpha_n. \quad (5.47)$$

Legyen $\alpha_n^* = (\alpha_n + 2)\binom{n}{3}$, ekkor az (5.47) egyenlet egyszerűbb alakját

$$\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left(e^{x_{ik}-x_{ij}-x_{jk}} + e^{x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}} \right) \leq \alpha_n^*, \quad (5.48)$$

beírva az (5.15) feladatba, a következő vegyes 0-1 konvex optimalizálási feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \quad (5.49) \\ \text{f.h. } & \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left(e^{x_{ik}-x_{ij}-x_{jk}} + e^{x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}} \right) \leq \alpha_n^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= -x_{ji}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ -\bar{M} &\leq x_{ij} \leq \bar{M}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ -2\bar{M}y_{ij} &\leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ y_{ij} &\in \{0, 1\}, & 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

5.8. Állítás Jelölje α_n az inkonzisztencia elfogadási szintet és legyen $\alpha_n^* = (\alpha_n + 2)\binom{n}{3}$. Az (5.49) optimumértéke megadja, hogy legalább hány

elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix CI inkonzisztenciája ne haladja meg az α_n küszöbértéket ($CI \leq \alpha_n$).

A többi inkonzisztencia indexhez hasonlóan, tekintsük a következő vegyes 0-1 konvex optimalizálási feladatot:

$$\begin{aligned}
& \min \alpha & (5.50) \\
\text{f.h. } & \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left(e^{x_{ik}-x_{ij}-x_{jk}} + e^{x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}} \right) \leq \alpha, \\
& x_{ij} = -x_{ji}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \leq K.
\end{aligned}$$

5.9. Állítás Jelölje α_{opt} az (5.50) optimumértékét. Ekkor $\frac{\alpha_{\text{opt}}}{\binom{n}{3}} - 2$ a CI inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítás mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.

5.3.4. Aguarón és Moreno-Jiménez GCI indexe

Az $A \in \mathcal{C}_n$ konzisztens páros összehasonlítás mátrixból számított W súlyvektor w_i és w_j komponenseinek hányadosa egyenlő a mátrix (i, j) elemével, vagyis a következő egyenlet teljesül

$$\frac{w_i}{w_j} = a_{ij}. \quad (5.51)$$

Aguarón és Moreno-Jiménez által definiált Geometriai konzisztencia index, GCI [1] az (5.51) tulajdonságra épül és az egyenlet két oldalának relatív eltérésének négyzetes logaritmikus összegeként írható fel

$$GCI_n(A, W) = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \log^2 \left(a_{ij} \frac{w_j}{w_i} \right). \quad (5.52)$$

Bevezetve az $X = \log A \in \log \mathcal{P}_n$ és a $Z = \log W$ jelöléseket a logaritmizált mátrixra, illetve a logaritmizált súlyvektorra, az (5.52) egyenletben szereplő GCI_n felírható az X és a Z elemeinek konvex függvényeként:

$$GCI_n(\exp X, \exp Z) = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_{ij} + z_j - z_i)^2. \quad (5.53)$$

Legyen α_n a $\phi_n = GCI_n$ inkonzisztencia indexhez tartozó elfogadási szint. Az (5.15) feladatban szereplő

$$\phi_n(\exp X) \leq \alpha_n$$

feltétel az (5.53) alapján kifejezhető:

$$\frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_{ij} + z_j - z_i)^2 \leq \alpha_n \quad (5.54)$$

A GCI inkonzisztencia index számításához szükséges a W súlyvektor ismerete. Számtalan módszer létezik egy $A \in \mathcal{P}_n$ páros összehasonlítás mátrixból kinyerhető súlyok meghatározására. Ebben a részben az AHP-ben használt sajátvektor módszer alapján írjuk fel a GCI inkonzisztencia indexre az (5.15) és az (5.18) optimalizálási feladatokat.

A Peron tétel szerint, amely speciálisan igaz minden $A \in \mathcal{P}_n$ páros összehasonlítás mátrixra is, létezik $\lambda > 0$ maximális sajátérték és $W > 0$ sajátvektor, amelyre teljesül az $AW = \lambda W$ egyenlet,

$$\frac{(Aw)_i}{w_i} = \lambda, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.55)$$

továbbá bevezetve az $X = \log A$, $Z = \log W$ jelöléseket

$$\sum_{j=1}^n e^{x_{ij} + z_j - z_i} = \lambda, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.56)$$

Az (5.15) feladatban az (5.25) feltétel helyett az (5.54) összefüggést írva, valamint csatolva az (5.56) feltételt a következő konvex vegyes 0-1-es optimalizálási

feladatot kapjuk:

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \tag{5.57} \\
\text{f.h. } & \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_{ij} + z_j - z_i)^2 \leq \alpha_n, \\
& \sum_{j=1}^n e^{x_{ij}+z_j-z_i} = \lambda, \quad 1 \leq i \leq n, \\
& x_{ij} = -x_{ji}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& z_1 = 0, \quad \lambda > 0
\end{aligned}$$

5.10. Állítás Az (5.57) optimumértéke megadja, hogy legalább hány elemet kell megváltoztatni az A $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban úgy, hogy a módosított páros összehasonlítás mátrix sajátvektor módszerrel kapott súlyvektorával számított, GCI_n inkonzisztenciája ne haladja meg az α_n elfogadási szintet.

Az (5.18) feladatot is specializálhatjuk a $\phi_n = GCI_n$ inkonzisztencia index esetére.

$$\begin{aligned}
& \min \quad \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_{ij} + z_j - z_i)^2 \tag{5.58} \\
\text{f.h. } & \sum_{j=1}^n e^{x_{ij}+z_j-z_i} = \lambda, \quad 1 \leq i \leq n, \\
& x_{ij} = -x_{ji}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -\bar{M} \leq x_{ij} \leq \bar{M}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& -2\bar{M}y_{ij} \leq x_{ij} - \bar{a}_{ij} \leq 2\bar{M}y_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \\
& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n y_{ij} \leq K, \\
& z_1 = 0, \quad \lambda > 0
\end{aligned}$$

5.11. Állítás Jelölje α_{opt} az (5.58) optimumértékét. Ekkor α_{opt} a sajátvektor

módszerrel kapott súlyvektorral számított GCI_n inkonzisztencia index minimálisan elérhető szintje olyan páros összehasonlítás mátrixok esetén, amelyeket úgy kapunk, hogy az A $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrix felső (és alsó) háromszög pozícióiban legfeljebb K elemet változtatunk meg.

5.3.5. c_3 index

Shiraishi és szerzőtársai [42, 43, 44] által bevezetett inkonzisztencia index a páros összehasonlítás mátrix karakterisztikus polinomjának c_3 együtthatójával egyenlő.

$$P_{A_n}(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \mathbf{c}_3\lambda^{n-3} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n \quad (5.59)$$

A szerzők belátták, hogy a c_3 együttható értéke a páros összehasonlítás mátrixok halmazában nem pozitív, illetve kizárólag konzisztens mátrixoknál vesz fel 0 értéket. Az 5.1 részben általánosan megfogalmazottak szerint, egy inkonzisztencia index minden páros összehasonlítás mátrix esetén kielégíti a $\phi_n(A) \geq 0$ egyenlőtlenséget, így a továbbiakban bevezetjük a $C_3 = -c_3$ indexet, amelyre teljesül a

$$\begin{aligned} C_3(A) &\geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{P}_n, \\ C_3(A) &= 0, \quad \text{ha } A \in \mathcal{C}_n \subset \mathcal{P}_n. \end{aligned}$$

A C_3 index a logaritmizált mátrixelemek konvex függvénye, mivel a Brunelli és társai [11] által belátottak szerint

$$C_3(A) = \binom{n}{3} CI_n(A), \quad (5.60)$$

minden $n \geq 3$ esetén. Az (5.47) egyenlőtlenség alapján a CI_n inkonzisztencia index felírható az $X = \log A \in \log P_n$ elemeinek konvex függvényeként

$$CI_n(\exp X) = \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left(e^{x_{ik}-x_{ij}-x_{jk}} + e^{x_{ij}+x_{jk}-x_{ik}} - 2 \right) \quad (5.61)$$

, ahol $n \geq 3$.

A kapott eredményből már könnyen felírhatóak az (5.15) és az (5.18) feladatok speciális esetei a $\phi_n = C_3$ indexre és a hozzá tartozó α_n elfogadási szintre.

5.3.6. Fedrizzi és Giove ρ indexe

Fedrizzi és Giove [20] ρ inkonzisztencia indexe a Tanin [47] által definiált $[r_{ij}]$ Fuzzy preferencia relációkra épül

$$\rho_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n (r_{ij} - r_{ik} - r_{kj} + 0,5)^2}{\binom{n}{3}} \quad (5.62)$$

,ahol $r_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \log_9(a_{ij}))$.

Brunelli és társai [11] megmutatták, hogy ρ index a GCI inkonzisztencia index skalár szorosa $n \geq 3$ esetén

$$\rho_n = \frac{3}{4 \ln^2(9)} GCI. \quad (5.63)$$

A ρ_n inkonzisztencia index az (5.53)-as $GCI_n(\exp X, \exp Z)$ egyenlet, valamint az (5.63) alapján felírható az $X = \log A \in \log \mathcal{P}_n$ és a $Z = \log W$ elemeinek konvex függvényeként,

$$\rho_n(\exp X, \exp Z) = \frac{3}{2 \ln^2(9)(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_{ij} + z_j - z_i)^2. \quad (5.64)$$

Az 5.64 alapján már megfogalmazhatóak az (5.15) és az (5.18) vegyes 0-1 konvex optimalizálási feladatok speciális esetei a $\phi_n = \rho$ indexre és a hozzá tartozó α_n elfogadási szintre.

5.4. Egy számpélda

A javasolt módszert egy Saaty [38] könyvéből származó klasszikus numerikus példán is bemutatjuk, mégpedig a CR inkonzisztencia mérőszám esetére. Az 5.1. táblázat 6 nagyváros Philadelphiától való távolságának páros összehasonlítási értékeit tartalmazza. Például az $a_{5,3} = 5$ azt jelenti, hogy a döntéshozó becslése szerint London ötször nagyobb távolságra fekszik Philadelphiától, mint Chicago.

Jelölje A az 5.1. táblázat páros összehasonlítás mátrixát. Azt kapjuk, hogy $\lambda_{\max}(A) = 6.4536$, és mivel $RI_6 = 1.24$, így $CR(A) = 0.0732$. Mivel $CR(A)$ értéke jóval a Saaty-féle 10%-os küszöb alatt van, az A mátrixot elfogadható inkonzisztenciájúnak tekinthetjük.

	Kairó	Tokió	Chicago	San Francisco	London	Montreal
Kairó	1	1/3	8	3	3	7
Tokió	3	1	9	3	3	9
Chicago	1/8	1/9	1	1/6	1/5	2
San Francisco	1/3	1/3	6	1	1/3	6
London	1/3	1/3	5	3	1	6
Montreal	1/7	1/9	1/2	1/6	1/6	1

5.1. táblázat. Philadelphiától mért távolságok összehasonlítása

Jelölje $A^{(1)}$ azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk, hogy felcseréljük az A mátrix $a_{1,2}$ és $a_{2,1}$ elemeit. Ez egy gyakori tévesztés páros összehasonlítás mátrixok kitöltésénél. Az $A^{(1)}$ mátrixra azt kapjuk, hogy $CR(A^{(1)}) = 0.0811$. Tehát az adatrögzítési hiba következtében ugyan emelkedett $A^{(1)}$ inkonzisztencia szintje, de még a 10%-os elfogadási szint alatt marad. Ebben az esetben tehát a javasolt módszertan nem tudja detektálni a hibát, az $A^{(1)}$ mátrixot elfogadja.

Nézzük meg most azt az esetet, amikor nem az $a_{1,2}$ és $a_{2,1}$, hanem az $a_{1,3}$ és $a_{3,1}$ elemek cserélődnek fel az A mátrixban. Jelölje $A^{(2)}$ az így kapott mátrixot. Ekkor $CR(A^{(2)}) = 0.5800$, amely jóval a 10%-os elfogadási szint felett van, és durva inkonzisztenciára utal. A megfelelő (5.28) megoldásként azt kapjuk, hogy az $A^{(2)}$ mátrix inkonzisztenciája egy elem (és a reciproka) megváltoztatásával a kritikus 10% alá hozható. Ez az elem éppen az elrontott $a_{1,3}$ pozícióban van, és megmutatható, hogy az (5.28) feladatnak ez az egyetlen optimális megoldása van a bináris változók szerint. Tehát a javasolt módszer felderítette az egy pozícióban történő javítás egyetlen lehetséges helyét, ami pont a véletlenül rossz helyre írt kiértékelés pozíciója.

Az előző példánál olyan durva inkonzisztencia emelkedést okozott a mátrix elrontása, hogy nem meglepő, hogy a módszer az egyértelmű visszajavítás lehetőségét kínálta fel. Kisebb mértékű inkonzisztencia emelkedésnél azonban már nem ilyen egyértelmű a helyzet.

Tegyük fel, hogy az A mátrix $a_{1,3}$ eleme most 2-re változik az előző példa $1/8$ értéke helyett. Ez az eredeti 8 értékhez képest kisebb eltérés, a módosított és $A^{(3)}$ -mal jelölt mátrix mátrix inkonzisztenciája is kevésbé nőtt meg: $CR(A^{(3)}) = 0.1078$. Az $A^{(3)}$ inkonzisztenciája alig haladja meg a kritikus 10%-os szintet, ezért várható, hogy egy elem módosításával is 10% alá hozható az inkonzisztencia, de az is, hogy erre több pozíció is kínálkozik. Valóban, a megfelelő (5.28) feladat optimumértéke 1, és az (5.16) és (5.17) csatolása utá-

ni újrafuttatásokkal kideríthető, hogy az (5.28) feladatnak a bináris változók szerint 6 optimális megoldása van. Nevezetesen, az $A^{(3)}$ mátrix inkonzisztenciája 10% alá vihető az $a_{1,3}$ mellett az $a_{1,4}$, $a_{1,5}$, $a_{2,6}$, $a_{3,4}$ és $a_{4,5}$ elemek külön-külön történő módosításával is. Jobb esetben az értékelő rögtön észreveszi, hogy az $a_{1,3}$ pozícióban elírás történt. Ha nem, akkor esetleg mind a 6 pozíció értékelését újra kell gondolnia, de ezek száma még mindig kisebb a felső háromszögben levő 15 elem számánál.

6. fejezet

Condition of Order Preservation (COP)

Az értekezés eddigi részeiben inkonzisztencia indexek, valamint teljesen, illetve nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok tulajdonságait mutattam be. A vázolt eredmények mind arra irányultak, hogy megismerjük és csökkentsük egy páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciáját. Ettől a gondolatmenettől valamelyest eltérve a következő részben egy, a súlyozási módszerektől megkövetelt feltételt vizsgálom.

Konzisztens páros összehasonlítás mátrixoknál minden súlyozási módszer azonos súlyvektort eredményez, ezzel ellentétben inkonzisztens mátrixoknál a végső súlyvektor a választott súlyozási eljárás függvényében más és más. Ha egy inkonzisztens mátrixból kinyert súlyvektor jobban tükrözi a döntéshozó preferenciarendezését (például kevesebb a rangsorfordulások száma), akkor az inkonzisztencia végső súlyvektorokra gyakorolt torzító hatása kisebb. Ebben a fejezetben az úgynevezett *COP* feltétel alkalmazása esetén elérhető súlyvektorokban történő változást vizsgálom.

A *COP* feltétellel kapcsolatos eredményeim kidolgozásában nyújtott segítségéért hálás vagyok Pekka Korhonen professzornak, aki a finnországi tanulmányutam során témavezetőmként segítette kutatómunkámat. Ezen újdonságokat a Vilniusban megrendezésre került EURO konferencián mutattam be 2012-ben [P10].

6.1. COP bemutatása

Bana e Costa és Vasnick 2008-ban [2] bevezették a Condition of Order Preservation (COP) feltételt, amit véleményük szerint egy rangsoroló eljárásból kapott súlyvektornak feltétlenül teljesítenie kell. A COP feltétel pontos definíciója a következő.

6.1. Definíció Legyen $A \in R^{n \times n}$ páros összehasonlítás mátrix, ekkor az A -ból számított w súlyvektor teljesíti a COP feltételt, ha $\frac{w_i}{w_j} > \frac{w_k}{w_l}$ teljesül minden i, j, k, l esetén ahol $a_{ij} > a_{kl}$.

A szerzők nem adtak módszert, amely elő tud állítani COP-t teljesítő súlyvektort. Ezért ha numerikus úton szeretnénk vizsgálni a COP feltételt, akkor elsőként a módszert kell definiálni.

A fenti COP feltétel definíciójában a végső súlyvektorok hányadosai szerepelnek. Ez a hányados alak mind az analitikus, mind a numerikus vizsgálatokat nehezíti, ezért a feltétel logaritmusát véve és bevezetve a $z_i = \log w_i$ új változót, kapható a következő lineáris alak:

$$\begin{aligned} z_i - z_j &> z_k - z_l & , \text{ ha } a_{ij} > a_{kl} \\ z_i - z_j &< z_k - z_l & , \text{ ha } a_{ij} < a_{kl} \\ -z_i + z_j + z_k - z_l &< 0 \\ -(-z_i + z_j + z_k - z_l) &< 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

A páros összehasonlítás mátrix elemei alapján felépíthető az 1 és -1 elemekből álló C_{ijkl} mátrix, amelynek segítségével a COP feltételt leíró egyenlőtlenségrendszer felírható a következő lineáris alakban.

$$C_{ijkl}(-z_i + z_j + z_k - z_l) < 0 \tag{6.2}$$

$$C_{ijkl} = \begin{cases} 1, & \text{ha } a_{ij} > a_{kl}, \\ -1, & \text{ha } a_{ij} < a_{kl} \end{cases}$$

Felhasználva a COP lineáris alakját, a következőkben bemutatok három súlyozási módszert és azok COP kiterjesztését.

6.2. Súlyozási módszerek és a COP kiterjesztések

A fejezetben 3 módszert fogok röviden bemutatni és megmutatom, hogy milyen módosításokkal képesek olyan súlyvektort meghatározni, ami teljesíti a COP feltételt. A továbbiakban a logaritmizált páros összehasonlítás mátrix elemeit fogom felhasználni, hasonlóan mint a 4.1. fejezetben. Legyen A egy $n \times n$ -es páros összehasonlítás mátrix, és jelölje $\bar{A} = \log A$ azt az $n \times n$ -es mátrixot, ahol $\bar{a}_{ij} = \log a_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$.

6.2.1. Logaritmikus legkisebb négyzetek módszere (LLS)

Az LLS technikát De Jong [18], valamint Chu [15] vezette be. A módszer előnye, hogy statisztikában is széles körben használják. Felírása szintén a logaritmizált mátrix elemekkel történik, így lehetőség nyílik a lineáris COP feltétel alkalmazására.

A módszer lényege, hogy a keresett súlyvektor és a megfelelő mátrixelemek különbségének négyzetes eltérését minimalizálja.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta_{ij}^2 \\ \text{f.h.} \quad & \bar{a}_{ij} - (z_i - z_j) = \Delta_{ij}, \quad \forall i, j \\ & \sum_{i=1}^n z_i = 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$COP : \quad C_{ijkl}(-z_i + z_j + z_k - z_l) < 0, \quad \forall i, j, k, l$$

6.2.2. Logaritmikus legkisebb abszolút hiba (LLAE)

Az LLAE [17] az előző módszerhez nagyon hasonlít, azonban itt a célfüggvény is lineáris. Másfelől viszont az LLAE korlátozó feltételeinek a száma kétszerese az LLS-ben alkalmazottaknál. Mivel ez a módszer is a logaritmizált mátrix elemekre épül, ezért itt is használható a lineáris COP feltétel. A lineáris feltétel csatolását követően egy olyan módosított feladat kapható, amely

a COP feltételt teljesítő súlyvektorok felett minimalizálja a végső súlyvektor és a megfelelő mátrixelemek különbségének abszolút eltérését.

$$\begin{aligned}
& \min && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} \\
& \text{f.h.} && -\bar{a}_{ij} + (z_i - z_j) \leq \Delta_{ij}, \quad \forall i, j \\
& && \bar{a}_{ij} - (z_i - z_j) \leq \Delta_{ij}, \quad \forall i, j \\
& && \sum_{i=1}^n z_i = 0
\end{aligned} \tag{6.4}$$

$$COP : \quad C_{ijkl}(-z_i + z_j + z_k - z_l) < 0, \quad \forall i, j, k, l$$

6.2.3. Sajátvektor módszer (EM)

A sajátvektor módszer az AHP módszertan szerves része, amelyet Saaty 1980-ban [38] vezetett be. Az elmúlt években az AHP az egyik legnépszerűbb módszerré vált, számos területen használják többszemponútú problémák megoldására, illetve jövőbeli események valószínűségének becslésére.

A sajátvektor módszer a páros összehasonlítási mátrix maximális sajátértékéhez tartozó sajátvektorból határozza meg a végső súlyvektort. Az EM módszer COP kiterjesztéséhez először szükséges a Frobénius tétel alternatív felírása.

Frobenius-tétel

Sekitani és Yamaka [41] tanulmányukban felírták a Frobenius-tétel egy alternatív formáját. A szerzők megmutatták, hogy egy nemnegatív és irreducibilis mátrix maximális (minden páros összehasonlítás mátrix nemnegatív és irreducibilis) sajátértékére (λ_{max}) és a hozzá tartozó pozitív sajátvektorra ($w > 0$) teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$\max_{w \geq 0} \min_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j}{w_i} \right) = \lambda_{max} = \min_{w \geq 0} \max_i \left(\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} w_j}{w_i} \right), \tag{6.5}$$

Az egyenlőség jobb oldalának a logaritmusát véve a maximális sajátérték (optimális megoldásban a t) és a hozzá tartozó sajátvektor (optimális megoldásban a z) meghatározható egy konvex nemlineáris programozási feladattal.

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{f.h.} \quad & \underbrace{\sum_{j=1}^n e^{\bar{a}_{ij}+z_j-z_i}}_{\text{szigorúan konvex}} \leq t, \quad \forall i \end{aligned} \tag{6.6}$$

A feltétel nemlineáris, de szigorúan konvex, ami biztosítja, hogy a talált lokális optimum egyben globális optimum is.

EM + COP

A (6.6) alapban felírt NLP formához csatolva a lineáris COP feltételt, a feladat továbbra is rendelkezni fog a konvexitás tulajdonsággal, tehát a talált optimális megoldás globalitása biztosított.

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{f.h.} \quad & \sum_{j=1}^n e^{\bar{a}_{ij}+z_j-z_i} \leq \lambda, \quad \forall i \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\text{COP} \quad C_{ijkl}(-z_i + z_j + z_k - z_l) < 0, \quad \forall i, j, k, l$$

A módosított *EM* módszer a *COP*-t teljesítő súlyvektorok között keresi azt, amelyik a célfüggvényt minimalizálja. Fontos megjegyezni, hogy az optimális megoldásban a súlyvektor nem feltétlenül sajátvektor és a célfüggvény érték se feltétlenül sajátérték. Ez csak abban a speciális esetben fog teljesülni, ha az A páros összehasonlítás mátrix maximális sajátértékéhez tartozó sajátvektor is teljesíti a *COP* feltételt.

A bemutatott módszerek ismeretében már lehetséges a *COP* feltétel vizsgálata numerikus eszközökkel.

6.3. Szimulációs modellkeret

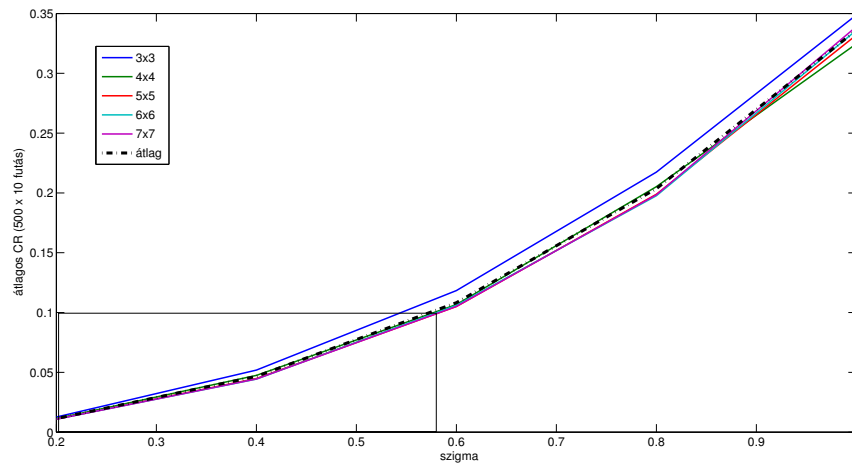
Az előző részben bemutatott elméleti modellek lehetőséget biztosítanak annak elemzésére, hogy a COP feltételt kielégítő eljárások (módosított módszerek) képesek-e jobb eredményt szolgáltatni, mint az alap módszerek. A megoldás jóságát két különböző módon mérjük:

- az eredeti súlyvektortól való eltérés normájával és
- az eredeti, valamint a adott módszerből kapott súlyvektor között fellépő rangsorfordulások számával.

A vizsgálatokhoz szükségesek a következő lépések.

- Konzisztens mátrixok generálása. Tegyük fel, hogy ez a páros összehasonlítás mátrix létezik a döntéshozó fejében, így az eredeti súlyvektor definíció szerint az ebből a mátrixból számított súlyvektor.
- Inkonzisztencia modellezése. Az inkonzisztenciát egy lognormális eloszlású paraméterrel viszem be a modellbe, tehát $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \exp(\epsilon)$, ahol $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$. A változó szórása σ , ami ebben az esetben szintén több értéket vehet fel.
- Inkonzisztens mátrixok generálása. A konzisztens mátrixok főátló feletti elemeit (a főátló alatti elemek a reciprocitás szerint adódnak) megszorozzuk a fenti inkonzisztencia változóval, így kapunk egy inkonzisztens mátrixot.
- Elemzések elvégzése.

A vizsgálatokat 3, 4, 5, 6 és 7 dimenziós páros összehasonlítás mátrixokra végeztem el. További kérdés, hogy milyen inkonzisztencia szint mellett érdemes elvégezni az elemzéseket. A bemutatott módszerek közül a CR -hez tartozó $CR = 10\%$ határértékkel számoltunk. Kezdeti lépésként elvégeztem egy szimulációt, ahol minden dimenzióban 500 inkonzisztens mátrixot generáltam, adott szórások (σ az inkonzisztencia paraméter) mellett, majd kiszámítottam az átlagos CR értéket. Tíz ismétlés után a futtatások átlagát mutatja a 6.1. ábra, amely alapján a vizsgálatokat $\sigma = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ értékek mellett végeztem el.



6.1. ábra. Véletlen generált mátrixok átlagos CR inkonzisztencia értékei a σ paraméter függvényében

6.4. Analitikus eredmények

Az előző részben bemutatott megfontolások alapján 5 különböző dimenzióban és 4 különböző σ érték mellett végeztem el vizsgálatokat, így összesen 20 alcsoport jött létre, amihez minden esetben 250 db konzisztens (ebből kapható az eredeti súlyvektor), illetve inkonzisztens mátrix tartozott.

A módosított LLS, LLAE és EM módszernek csak akkor van megoldása, ha a mátrixhoz létezik COP-t teljesítő súlyvektor, ezért az egyes alcsoportokon belül vettem azokat a mátrixokat, amelyekre ez a feltétel teljesül (lásd a 6.1. táblázatot).

Mátrixméret	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.4$	$\sigma = 0.6$	$\sigma = 0.8$
3×3	250	247	234	225
4×4	242	202	161	111
5×5	190	105	48	28
6×6	86	36	10	4
7×7	24	8	1	1

6.1. táblázat. Azon mátrixok száma, amelyekre létezik a COP-t teljesítő súlyvektor

A 6.1. táblázatban is látható, hogy a méret és az inkonzisztencia növekedésével csökken azoknak a mátrixoknak a száma, ahol létezik olyan

súlyvektor, amely teljesíti a COP feltételt. A továbbiakban ezeket a mátrixokat vizsgálom részletesebben.

A eltérés normák vizsgálatát a 6 módszerre és az összes alcsoportra a 6.2 táblázat tartalmazza. Látható, hogy 3 dimenzióban az alap- és a COP módszerek eredményei közel azonosak, amit a Wilcoxon rank-sum test is alátámaszt, mert nem mutat szignifikáns különbséget $p=5\%$ mellett. Kizárólag $\sigma = 0.6$ és $\sigma = 0.8$ mellett van szignifikáns eltérés a LLAE és LLAE+COP módszerek eredménye között. Tehát itt a COP-t teljesítő súlyvektorok jobban eltértek az eredeti súlyvektortól, mint az azt nem teljesítőket.

Az 5 dimenziós mátrixoknál minden esetben az alap súlyozási módszerek bizonyultak jobbnak és ugyanez mondható el a 4 és 6 dimenziós mátrixokról is.

Az egyetlen kivétel 7 dimenzióban található, ahol a $\sigma = 0.6$ és $\sigma = 0.8$ esetében már az egyes átlagok alacsonyabbak a módosított módszereknél, itt egyedül a $\sigma = 0.8$ és EM+COP módszernél volt az eltérés szignifikáns. Fontos megjegyezni, hogy ebbe az alcsoportba csak 1 mátrix tartozik, így ez erősen torzítja az eredményt.

3×3	EM	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.0369	0.0369	0.0369	0.0387	0.0387	0.0408
$\sigma = 0.4$	0.0814	0.0814	0.0814	0.0856	0.0845	0.0893
$\sigma = 0.6$	0.1208	0.1208	0.1208	0.1304	0.1293	0.1425
$\sigma = 0.8$	0.1505	0.1505	0.1505	0.1563	0.1564	0.1728

5×5	EM	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.0328	0.0327	0.0350	0.0594	0.1040	0.0570
$\sigma = 0.4$	0.0650	0.0654	0.0703	0.1050	0.1368	0.1067
$\sigma = 0.6$	0.0971	0.0953	0.0992	0.1362	0.1574	0.1476
$\sigma = 0.8$	0.1440	0.1418	0.1391	0.1618	0.1848	0.1748

7×7	EM	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.0258	0.0254	0.0266	0.1010	0.1265	0.0874
$\sigma = 0.4$	0.0680	0.0704	0.0775	0.1161	0.1343	0.1295
$\sigma = 0.6$	0.1232	0.1226	0.1327	0.1150	0.1622	0.1930
$\sigma = 0.8$	0.1864	0.1968	0.2419	0.1356	0.3183	0.2177

6.2. táblázat. Eltérés normák átlaga a 3 alap- és a 3 módosított módszer esetében

A rangsorfordulások számát tekintve az eredmények még inkább egyértelműek (6.3. táblázat). A 3-6 dimenziós mátrixoknál az alap módszereknél az átlagos rangsorfordulások száma kisebb, mint a COP módszereknél. A 7 dimenziós mátrixoknál is kizárólag a $\sigma = 0.6$ és $\sigma = 0.8$ értékek mellett fordult elő, hogy a módosított módszerek kevesebb rangsorfordulást eredményeztek. Korábban említettem, illetve a 6.1 táblázatban is látható, hogy ezekben az alcsoportokban csupán egy-egy db olyan mátrix van, amelyre teljesül a COP feltételt, ami torzítja a számításokat.

Az eltérések normáját és a rangsorfordulások számát tekintve tehát elmondható, hogy a COP feltétel megkövetelése nem eredményez jobb eredményt. Éppen ellenkezőleg: a módosított módszerek az alap súlyozási módszereknél gyengébb eredményt szolgáltatnak. Ezeket figyelembe véve kimondható, hogy a COP feltétel nem tekinthető szükséges feltételnek egy rangsoroló eljárásnál.

3×3	<i>EM</i>	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.0120	0.0120	0.0120	0.0480	0.0480	0.0480
$\sigma = 0.4$	0.0850	0.0850	0.0850	0.1660	0.1660	0.1660
$\sigma = 0.6$	0.1624	0.1624	0.1624	0.2906	0.2906	0.2906
$\sigma = 0.8$	0.2133	0.2133	0.2133	0.3200	0.3200	0.3200

5×5	<i>EM</i>	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.0642	0.0588	0.0802	0.1551	0.7914	0.7540
$\sigma = 0.4$	0.3861	0.3663	0.4653	0.7030	1.5941	1.4158
$\sigma = 0.6$	0.9375	0.8542	0.8333	1.0417	2.2708	2.0000
$\sigma = 0.8$	0.7037	0.7778	0.7778	1.0000	2.2222	1.8519

7×7	<i>EM</i>	LLS	LLAE	EM+COP	LLS+COP	LLAE+COP
$\sigma = 0.2$	0.2727	0.3182	0.4091	1.3182	5.1818	0.5455
$\sigma = 0.4$	1.3750	1.3750	1.7500	2.3750	7.7500	2.0000
$\sigma = 0.6$	4.0000	4.0000	5.0000	5.0000	2.0000	10.0000
$\sigma = 0.8$	3.0000	2.0000	1.0000	2.0000	8.0000	3.0000

6.3. táblázat. A rangsorfordulások átlagos száma a 3 alap- és a 3 módosított módszer esetében

7. fejezet

Összefoglalás

Valós döntési problémáknál a legtöbb esetben létezik valamilyen fokú inkonzisztencia, amelynek mérése/detektálása elengedhetetlen a döntési folyamat során. Ez a tény mutatja az értekezés témájának és az eredményeinek fontosságát, valamint a relevanciáját.

A disszertációban jellemeztem a páros összehasonlítás mátrixokban fellépő inkonzisztenciát, és inkonzisztencia csökkentő eljárásokat definiáltam. Kialakításra kerültek az inkonzisztencia vizsgálatához elengedhetetlen olyan adatbázisok, amelyek az eddig széles körben elfogadott generált véletlen mátrixokkal szemben valódi mátrixokat tartalmaznak. Az értekezés egyik fő eredménye, hogy a bemutatott módszerek lehetőséget teremtenek a hiba lokalizálására, ami a döntéshozóval való konzultációt követően lehetővé teszi a javítást.

A kutatáshoz összegyűjtött és felhasznált valódi problémákból származó mátrixok rámutatnak a véletlen generált és a valódi mátrixok közötti eltérésekre. Az elemzésekből egyértelműen kiderült, hogy az inkonzisztencia további vizsgálatát kontrollált kísérleti körülmények között kitöltött mátrixokon szükséges elvégezni. A Budapesti Corvinus Egyetem hallgatóival végzett kísérletben szerzőtársaimmal feltártuk, hogy milyen tényezők befolyásolják a páros összehasonlítás mátrix inkonzisztenciájának szintjét.

Az 1-3 elem megváltoztatásával konzisztenssé alakítható mátrixok vizsgálatához a vegyes 0-1 lineáris programozási feladatokat, illetve egy gráfelméleti megközelítést mutattam be. A definiált módszerek lehetőséget biztosítanak a tévesen megadott páros összehasonlítás mátrixelemek detektálására, illetve azok megfelelő értékének kiszámítására, megadva egy lehetséges javítási irányt. A kérdés jelentőségét mutatja, hogy már egyetlen téves elem következtében sem tükrözi megfelelően a mátrixból számított súlyvektor a döntéshozó

preferenciáit, ezzel a súlyvektor felhasználásával kapott döntést is megkérdőjelezve. A javasolt javító módszer ezt kiküszöböli.

A valódi döntési problémáknál megengedhető az inkonzisztencia egy alacsony szintje, ezért a konzisztenssé alakítható mátrixok után az inkonzisztencia szempontjából elfogadható mátrixok elemzését tárgyalta a dolgozat. A szakirodalomból ismert Saaty-féle CR, a Koczkodaj-féle CM, illetve a Peláez és Lamata-féle CI, és más elterjedt inkonzisztencia mérőszámok esetén felírásra kerül egy-egy konvex nemlineáris vegyes 0-1-es optimalizálási feladat is.

A Bana e Costa és Vasnick által előírt rangsor megtartási (COP) feltétel szükségességét vizsgáltam szimulációs keretek között. Az elvégzett összehasonlító elemzésből egyértelműen kimutattam, hogy a feltétel alkalmazásával nem érhető el jobb alternatíva értékelés.

Az egyes fejezetek eredményei nemzetközi konferencia előadásokban, illetve referált, angol nyelvű szakfolyóiratokban jelentek meg.

Irodalomjegyzék

- [1] Aguarón, J., Moreno-Jiménez, J.M. (2003): The geometric consistency index: Approximated thresholds, *European Journal of Operation Research*, **147**: 137–145.
- [2] Bana e Costa, C.A., Vansnick, J.-C. (2008): A critical analysis of the eigenvalue method used to derive priorities in AHP, *European Journal Of Operational Research*, **187**(3): 1422–1428.
- [3] Borda, J.C. de (1781): Mémoire sur les élections au scrutin, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris.
- [4] Bozóki S. (2006): Súlyozás páros összehasonlítással és értékelés hasznosági függvényekkel a többszempontú döntési feladatokban, Ph.D. értekezés, Budapesti Corvinus Egyetem Közgazdasági Ph.D. Program, Budapest
- [5] Bozóki, S., Dezső, L., Poesz, A., Temesi, J. (2013): Analysis of pairwise comparison matrices: an empirical research, *Annals of Operations Research*, **211**(1): 511–528. DOI 10.1007/s10479-013-1328-1
- [6] Bozóki, S., Fülöp, J., Koczkodaj, W.W. (2011): LP-based consistency-driven supervision for incomplete pairwise comparison matrices, *Mathematical and Computer Modelling*, **54**: 789–793.
- [7] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2011): On pairwise comparison matrices that can be made consistent by the modification of a few elements, *Central European Journal of Operations Research*, **19**(2): 157–175. DOI 10.1007/s10100-010-0136-9
- [8] Bozóki S., Fülöp J., Poesz, A. (2015): On reducing inconsistency of pairwise comparison matrices below an acceptance threshold, *Central Europe-*

an Journal of Operations Research, **23**(4), 849-866. DOI 10.1007/s10100-014-0346-7

- [9] Bozóki, S., Fülöp, J., Rónyai, L. (2010): On optimal completions of incomplete pairwise comparison matrices, *Mathematical and Computer Modelling*, **52**: 318–333.
- [10] Bozóki, S., Rapcsák, T. (2008): On Saaty’s and Koczkodaj’s inconsistencies of pairwise comparison matrices, *Journal of Global Optimization*, **42**(2): 157–175.
- [11] Brunelli, M., Critch, A., Fedrizzi, M. (2012): A note on the proportionality between some consistency indices in the AHP, *Applied Mathematics and Computation*, **219**(14): 7901–7906.
- [12] Brunelli, M., Fedrizzi, M. (2015): Axiomatic properties of inconsistency indices for pairwise comparisons, *Journal of the Operational Research Society*, **66**(1): 1–15.
- [13] Bryson, N. (1995): A goal programming method for generating priority vectors, *Journal of Operation Research Society*, **46**(5): 641–648.
- [14] Chu, M.T. (1997): On the optimal consistent approximation to pairwise comparison matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **272**: 155–168.
- [15] Chu, ATW, Kalaba, RE, Spingarn, K. (1979): A comparison of two methods for determining the weight belonging to fuzzy sets, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **4**: 531–538.
- [16] Condorcet, M. (1785): Essai sur l’Application de l’Analyse á la Probabilité des Décisions Rendues á la Pluralité des Voix, Paris.
- [17] Cook, W.D, Kress, M. (1988): Deriving weights from pairwise comparison ratio matrices: an axiomatic approach, *European Journal of Operational Research*, **37**: 355–62.
- [18] De Jong, P. (1984): A Statistical Approach to Saaty’s Scaling Method for Priorities, *Journal of Mathematical Psychology*, **28**: 467–478.
- [19] Duszak, Z., Koczkodaj, W.W. (1994): Generalization of a new definition of consistency for pairwise comparisons, *Information Processing Letters*, **52**: 273–276.

- [20] Fedrizzi, M., Giove, S. (2007): Incomplete pairwise comparisons and consistency optimization, *European Journal of Operational Research*, **183**: 303–313.
- [21] Gass, S.I. (1998): Tournaments, transitivity and pairwise comparison matrices, *Journal of the Operational Research Society*, **49**: 616–624.
- [22] Gass, S.I., Rapcsák, T. (2004): Singular value decomposition in AHP, *European Journal of Operational Research*, **154**: 573–584.
- [23] Gass, S.I., Standard, S.M. (2002): Characteristics of positive reciprocal matrices in the analytic hierarchy process, *Journal of Operational Research Society*, **53**: 1385–1389.
- [24] Harker, P.T. (1987): Incomplete pairwise comparisons in the analytic hierarchy process, *Mathematical Modelling*, **9**(11): 837–848.
- [25] Kendall, M.G., Smith, B.B. (1940): On the Method of Paired Comparisons, *Biometrika*, **31**(3-4): 324–345.
- [26] Kéri, G. (2005): Criteria for pairwise comparison matrices, *Szigma*, **36**: 139–148. (in Hungarian)
- [27] Koczkodaj, W.W. (1993): A new definition of consistency of pairwise comparisons, *Mathematical and Computer Modelling*, **18**(7): 79–84.
- [28] Koczkodaj, W.W., Herman, M.W., Orłowski, M. (1997): Using consistency-driven pairwise comparisons in knowledge-based systems, *Proceedings of the Sixth International Conference on Information and Knowledge Management*, *ACM Press*: 91–96.
- [29] Kousalya, P., Ravindranath, V., Vizayakumar, K. (2006): Student absenteeism in engineering colleges: evaluation of alternatives using AHP, *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, **2006**: 1–26.
- [30] Mann, H. B., Whitney, D. R. (1947): On a Test of Whether one of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other, *Annals of Mathematical Statistics*, **18**: 50–60.
- [31] Miller, G. A. (1956): The magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information, *The Psychological Review*, **63**: 81–97.

- [32] Peláez, J.I., Lamata, M.T. (2003): A new measure of inconsistency for positive reciprocal matrices, *Computer and Mathematics with Applications*, **46**: 1839–1845.
- [33] Poesz, A. (2008): Analysis of the inconsistency of empirical pairwise comparison matrices, Master's Thesis, Department of Decisions in Economics, Corvinus University of Budapest.
- [34] Poesz, A. (2009): Empirical pairwise comparison matrices (EPCM) – an on-line collection from real decisions, version EPCM-October-2009. [http: //www.sztaki.hu/~bozoki/epcm](http://www.sztaki.hu/~bozoki/epcm)
- [35] Rácz, A., Rácz T.I. (2016): Effects of the internal and external factors on decision consistency, 28th European Conference on Operational Research, Poznan, Lengyelország.
- [36] Ross, R.T. (1934): Optimum orders for the presentation of pairs in the method of paired comparison, *Journal of Educational Psychology*, **25**: 375–382.
- [37] Saaty, T.L. (1977): A scaling method for priorities in hierarchical structures, *Journal of Mathematical Psychology*, **15**: 234–281.
- [38] Saaty, T.L., The Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [39] Saaty, T.L., Fundamentals of Decision Making, RSW Publications, 1994.
- [40] Saaty, T.L., Ozdemir, M.S. (2003): Why the magic number seven plus or minus two, *Mathematical and Computer Modelling*, **38**(3-4): 233–244.
- [41] Sekitani, K., Yamaki, N. (1999): A logical interpretation for the eigenvalue method in AHP, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **42**: 219–232.
- [42] Shiraishi, S., Obata, T., Daigo, M. (1998): Properties of a positive reciprocal matrix and their application to AHP, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **41**: 404–414.
- [43] Shiraishi, S., Obata, T., Daigo, M., Nakajima, N. (1999): Assessment for an incomplete matrix and improvement of the inconsistent comparison: computational experiments, *Proceedings of ISAHP 1999*, Kobe, Japan

- [44] Shiraishi, S., Obata, T. (2002): On a maximization problem arising from a positive reciprocal matrix in the AHP, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **34**: 91–96.
- [45] Standard, S.M. (2000): Analysis of positive reciprocal matrices. Master’s Thesis, Graduate School of the University of Maryland.
- [46] Tam, C.M., Thomas, K.L. Tong, Gerald, W.C. Chiu (2006): Comparing non-structural fuzzy decision support system and analytical hierarchy process in decision-making for construction problems, *European Journal of Operational Research*, **174**: 1317–1324.
- [47] Tanino, T. (1984): Fuzzy preference orderings in group decision making, *Fuzzy Sets and Systems*, **12**: 117–131.
- [48] Vargas, L.G. (1982): Reciprocal matrices with random coefficients, *Mathematical Modelling*, **3**: 69–81.

Saját publikációkra kapott hivatkozások

- [P1.1] Antoniadou, K.A., Spyridakos, T., Koutsogeorgis, C.N., Tseles, D. (2011): Scale Inconsistency and the Boundary Problem, International Scientific Conference eRA-6, Piraeus, Görögország
- [P1.2] Černý, M., Hladík, M. (2016): Inverse optimization: towards the optimal parameter set of inverse LP with interval coefficients, *Central European Journal of Operations Research*, **24**(3): 747–762.
DOI 10.1007/s10100-015-0402-y
- [P1.3] Gastes, D., Gaul, W. (2012): The Consistency Adjustment Problem of AHP Pairwise Comparison Matrices. In Diamantopoulos, A., Fritz, W., Hildebrandt, L. (szerk.): Quantitative Marketing and Marketing Management - Marketing Models and Methods in Theory and Practice. Gabler Verlag, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2012, 51–62.
DOI 10.1007/978-3-8349-3722-3_2
- [P1.4] Gaul, W. and Gastes, D. (2012): A note on consistency improvements of AHP paired comparison data, *Advances in Data Analysis and Classification*, **6**(4): 289–302.
DOI 10.1007/s11634-012-0119-x

- [P1.5] Iványi, A. (2011): Comparison Based Ranking, *Algorithms of Informatics*, **3**(25): 1251–1306.
- [P1.6] Iványi, A., Lucz Loránd (2012): Multigráfok foksorozatai, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, **29**: 1–54.
- [P1.7] Iványi, A., Lucz, L., Móri. T., Sótér, P. (2011): On Erdős-Gallai and Havel-Hakimi algorithms, *Acta Universitatis Sapientiae, Informatica*, **3**(2): 230–268.
- [P1.8] Iványi, A., Schoenfield, J.E. (2012): Deciding football sequences, *Acta Universitatis Sapientiae, Informatica*, **4**(1): 130–183.
- [P1.9] Khatwani, G., Kar, A.K. (2016): Improving the Cosine Consistency Index for the analytic hierarchy process for solving multi-criteria decision making problems, *Applied Computing and Informatics*
DOI 10.1016/j.aci.2016.05.001
- [P1.10] Komáromi, É. (2013): A Kullback-Leibler relatív entrópia függvény alkalmazása páros összehasonlítás mátrix egy prioritásvektora meghatározására, *Sigma*, **44**(1-2): 1–19.
- [P1.11] Kou, G., Ergu, D., Peng, Y. and Shi, Y. (2013): IBMM for Inconsistent Data Identification and Adjustment in the AHP/ANP, *Data Processing for the AHP/ANP ,series: Quantitative Management*, **1**: 29–64.
DOI: 10.1007/978-3-642-29213-2_3
- [P1.12] Lim, C.Y., and Khoo, V.K. (2013): A triad-based inconsistency detection mechanism for eliciting tacit knowledge, 3rd International Conference on Digital Information and Communication Technology and its Applications (DICTAP2013), pp. 68–73. The Society of Digital Information and Wireless Communication (SDIWC), Ostrava, Csehország.
- [P1.13] Martinez, M., de Andres, D., Ruiz, J., Friginal, J. (2014): From measures to conclusions using Analytic Hierarchy Process in dependability benchmarking, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, **63**(11): 2548–2556.
DOI: 10.1109/TIM.2014.2348632

- [P1.14] Rotter, P. (2014): Extraction of relevant glass melting parameters based on the pairwise comparisons of sample images from a furnace, Glass Technology, *European Journal of Glass Science and Technology*, **A/55**(2): 55–62.
- [P1.15] Rotter, P. (2012): Multimedia information retrieval based on pairwise comparison and its application to visual search, *Multimedia Tools and Applications*, **60**(3): 573–587.
DOI 10.1007/s11042-011-0828-8
- [P1.16] Septifani, R., Effendi, U., Dewi, I.A. (2012): Penilaian kinerja departemen produksi dalam menerapkan reverse logistics dengan pendekatan Analytical Hierarchy Process dan Data Envelopment Analysis (Studi Kasus Di Pt Sinar Sosro Kantor Pabrik Mojokerto), Indonesian with English abstract; Performance assessment of production department in implementing reverse logistics with Analytical Hierarchy Process and Data Envelopment Analysis approach (Case Study at PT Sinar Sosro Mojokerto Factory Office)/, *Jurnal Industri*, **1**(2): 94–104.
- [P1.17] Siraj, S., Mikhailov, L., Keane, J.A. (2012): Preference elicitation from inconsistent judgments using multi-objective optimization, *European Journal of Operational Research*, **220**(2): 461–471.
DOI 10.1016/j.ejor.2012.01.049
- [P1.18] Temesi, J. (2011): Pairwise comparison matrices and the error-free property of the decision maker, *Central European Journal of Operations Research*, **19**(2): 239–249.
DOI 10.1007/s10100-010-0145-8
- [P1.19] Yadav, R., Khoo, V.K.T., Lim, C.Y. (2011): Automatic inconsistency detection for online responses, Proceedings of the 3rd International Conference on Computer Engineering and Technology (ICCET 2011), Kuala Lumpur, Malajzia, pp. 657–664.
DOI 10.1115/1.859735.paper100
- [P2.1] Bertsch, V., Hall, M., Weinhardt, C., Fichtner, W. (2016): Public acceptance and preferences related to renewable energy and grid expansion policy: Empirical insights for Germany, *Energy*, **114**(1): 465–477.
DOI 10.1016/j.energy.2016.08.022

- [P2.2] Brunelli, M. (2016): Studying a set of properties of inconsistency indices for pairwise comparisons, *Annals of Operations Research*
DOI 10.1007/s10479-016-2166-8
- [P2.3] Brunelli, M. (2015): Introduction to the Analytic Hierarchy Process, *SpringerBriefs in Operations Research*, Springer International Publishing
DOI 10.1007/978-3-319-12502-2
- [P2.4] Chen, K., Kou, G., Tarn, J.M., Song, Y. (2015): Bridging the gap between missing and inconsistent values in eliciting preference from pairwise comparison matrices, *Annals of Operations Research*, **235**(1): 155–175.
- [P2.5] Kazibudzki, P.T. (2016): An examination of performance relations among selected consistency measures for simulated pairwise judgments, *Annals of Operations Research*
DOI 10.1007/s10479-016-2131-6
- [P2.6] Lakicevic, M., Srdevic, B.M., Srdevic, Z.B. (2015): Multi-criteria approval for evaluating landscape management strategies (case study: Fruška Gora National Park), *Matica Srpska Journal for Natural Sciences*, **128**: 99–107.
- [P2.7] Ojala, V.M. (2015): Missing preferences in pairwise comparison matrices: a numerical study, BSc thesis, Aalto University, School of Science, Espoo. Supervisor: Hämäläinen, R.P., Advisor: Brunelli, M.
- [P2.8] Rivest, R. (2016): AHP: The Signal and The Noise - A numerical experiment on the possibility of getting the solution with much less pairwise comparisons, Poster presented at ISAHP 2016, London, UK.
- [P3.1] Siraj, S., Mikhailov, L., Keane, J.A. (2015): Contribution of individual judgments towards inconsistency in pairwise comparisons, *European Journal of Operational Research*, **242**(2): 557–567.
DOI 10.1016/j.ejor.2014.10.024
- [P13.1] Moshkovich, H.M., Mechitov A.I. (2016): ORCON - a decision aid for ordinal consistency in a pairwise comparison matrix, Research
DOI 10.13140

Saját publikációk

Idegen nyelvű

Referált szakmai folyóirat

- [P1] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2011): On pairwise comparison matrices that can be made consistent by the modification of a few elements, *Central European Journal of Operations Research*, **19**(2): 157–175. DOI 10.1007/s10100-010-0136-9
- [P2] Bozóki, S., Dezső, L., Poesz, A., Temesi, J. (2013): Analysis of pairwise comparison matrices: an empirical research, *Annals of Operations Research*, **211**(1): 511–528. DOI 10.1007/s10479-013-1328-1
- [P3] Bozóki S., Fülöp J., Poesz, A. (2015): On reducing inconsistency of pairwise comparison matrices below an acceptance threshold, *Central European Journal of Operations Research*, **23**(4), 849-866. DOI 10.1007/s10100-014-0346-7

Konferencia tanulmány

- [P4] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2010): A new approach of reducing the inconsistency of pairwise comparison matrices, International Conference on Computational Management Science, Bécs, Ausztria
- [P5] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2010): The similarities and differences of inconsistency indices, Veszprém Optimization Conference: Advanced Algorithms, Veszprén, Magyarország
- [P6] Bozóki, S., Dezső, L., Poesz, A., Temesi, J. (2010): Testing Some Properties of Pair-Wise Comparison Matrices, Decision Sciences Institute 2010 Annual Meeting Program, San Diego, Amerikai Egyesült Államok
- [P7] Bozóki, S., Dezső, L., Temesi, J., Poesz, A. (2011): Pairwise comparison matrices: an empirical research, The International Symposium on the Analytic Hierarchy Process, Sorrento, Olaszország

- [P8] Korhonen, P., Poesz, A. (2012): Analysing numerically three different methods to estimate a priority vector from inconsistent pairwise comparison matrices in AHP, The 25th European Conference on Operational Research, Vilnius, Litvánia
- [P9] Bozóki, S., Dezső, L., Temesi, J., Poesz, A. (2012): Inconsistency analysis through the completion of a pairwise comparison matrix, 76th Working Group for Multi-Criteria Decision Aiding, Portsmouth, Anglia
- [P10] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2014): On reducing inconsistency of pairwise comparison matrices below an acceptance threshold, 18th International Conference on Knowledge-Based and Intelligent Information & Engineering Systems, Gdynia, Lengyelország

Egyéb

- [P11] Poesz, A. (2009): Empirical pairwise comparison matrices (EPCM) – an on-line collection from real decisions, version EPCM-October-2009. [http: //www.sztaki.hu/~bozoki/epcm](http://www.sztaki.hu/~bozoki/epcm)

Magyar nyelvű

Referált szakmai folyóirat

- [P12] Poesz, A. (≥ 2017): A bankszektor hatékonyságának vizsgálata, *Sigma*, közlésre benyújtva, bírálat alatt.

Tudományos könyvfejezet

- [P13] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2012): Elfogadható inkonzisztenciájú páros összehasonlítás mátrixokkal kapcsolatos konvexitási tulajdonságok és azok alkalmazásai, Solymosi T., Temesi J. (szerk.) Egyensúly és optimum: Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára, Aula Kiadó, 169–184.

Konferencia tanulmány

- [P14] Bozóki, S., Fülöp, J., Poesz, A. (2009): A páros összehasonlítás triádjainak vizsgálata, XXVIII. Magyar Operációkutatási Konferencia, Balatonőszöd, Magyarország

TDK dolgozat

- [P15] Poesz, A. (2007): Tapasztalati páros összehasonlítás mátrixok inkonzisztenciájának vizsgálata, TDK dolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem
- [P16] Poesz, A. (2008, 2009): A páros összehasonlítás mátrixok kritikus értékeinek detektálása, TDK és OTDK dolgozat, Budapesti Corvinus Egyetem