Matematikk III - eksamen V2019 fasit

22. mai 2019

1

(20%) I en spill-scene i xy-planet er tre like fiender plassert på posisjonene $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ og $(\frac{5}{2}, 2)$. En strategi for spilleren er å finne en rett linje som er optimal med hensyn på avstand mellom spiller og fiender, og bevege seg mellom fiendene langs denne linjen. Dette kan løses ved bruk av minste kvadraters metode.

a) Tegn figur og sett opp matrisen og vektoren som er kalt henholdsvis $\mathbf{A}$ og $\mathbf{y}$ i forelesningsnotater for kurset.

b) Bestem ligningen for den rette linjen som spilleren skal bevege seg langs.

Hint: For en 2x2 matrise $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ er $\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

1.1 Fasit

Figur som figur 2.1 i forelesningsnotater. Vi får $\mathbf{x}^T = [\ a\ b\ ]$ og

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A^T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A^T A} = \begin{bmatrix} \frac{35}{4} & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 3 \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{A^T y} = \begin{bmatrix} \frac{13}{2} \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B^{-1}c} = \frac{1}{\frac{105}{4} - \frac{81}{4}} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{35}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{2} \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{35}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{2} \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{23}{24} \end{bmatrix}$$

Vi får $a = \frac{1}{4}$ og $b = \frac{23}{24}$.

2

(20%) I en annen spill-scene i xy-planet er fire trofeer/items plassert på posisjonene (0,1), (1,2), (2,0) og (4,2). En NPC skal patruljere langs et tredjegradspolynom som interpolerer disse punktene.

a) Sett opp interpolasjonsproblemet på formen **Ax=b** hvor **A** er en 4x4 matrise og **x** og **b** er 4-dimensjonale vektorer.

b) Bestem ligningen for tredjegradspolynomet som interpolerer punktene.

2.1 Fasit

Ax=b blir

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Løsning:

$$a = \frac{5}{8} = 0.625,\ b = -\frac{27}{8} = -3.375,\ c = \frac{15}{4} = 3.75, d = 1,$$

altså $p(x) = \frac{5}{8}x^3 - \frac{27}{8}x^2 + \frac{15}{4} + 1$.

C++ konsollprogram invers.cpp publisert 13/2 og lagt til i Canvas-modul **Transformasjoner, matriser og rom** 3/5 er tillatt hjelpemiddel og gir tallene direkte.

3

(40%) Vi har nå de samme trofeene og posisjonene som i oppgave 2. Her skal NPC-en patruljere langs en kubisk Bezier-kurve med kontrollpunkter A=(0,1), B=(1,2), C=(4,2) og D=(2,0). Kontrollpunktene til Bezier-kurven er altså de samme punktene som interpolasjonspunktene i oppgave 2, men i en annen rekkefølge.

a) Tegn opp kontrollpolygonet. Vis hvordan du bruker deCasteljau algoritmen til å finne punktet på kurven som svarer til parameterverdien $t = \frac{1}{2}$ og skisser kurven.

b) Bruk deCasteljau algoritmen til å regne ut kordinatene til dette punktet.

Vi antar videre at punktene (0,0), A, (0,2), B, D, (4,0), C er noder (vertices) til en triangulering for området [0,4] x [0,2] i xy-planet. Nevnte rekkefølge definerer indekseringen til nodene.

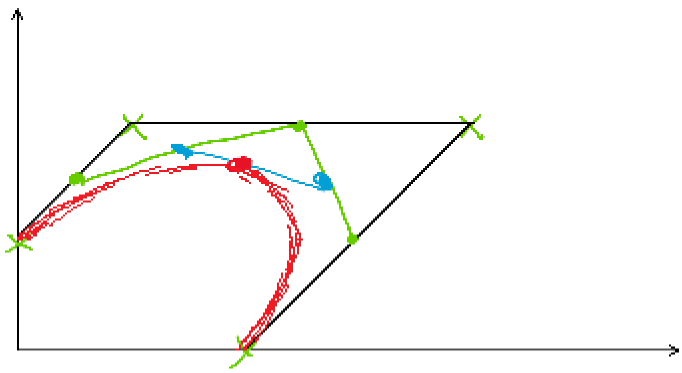
c) Sett opp en triangulering med noder og naboer for disse trekantene. DCB skal utgjøre en av trekantene.

Anta at hver node har en z-verdi gitt ved funksjonen $f(x, y) = xy$ og at z-verdien for alle andre punkter skal regnes ut ved hjelp av trianguleringsstrukturen. NPC-en skal altså patruljere langs en kubisk Bezierkurve i xy-planet. Men vi gir den i tillegg en høyde slik at den patruljerer på en flate satt sammen av trekanter.

d) Regn ut z-verdien til NPC-en for parameterverdi $t = \frac{1}{2}$. (Hint: punktet ligger i trekasnt DCB).

3.1 Fasit

a) Se figur 1. Om skissen: Kurven skal tangere kontrollpolygonet i endepunktene.



Figur 1:

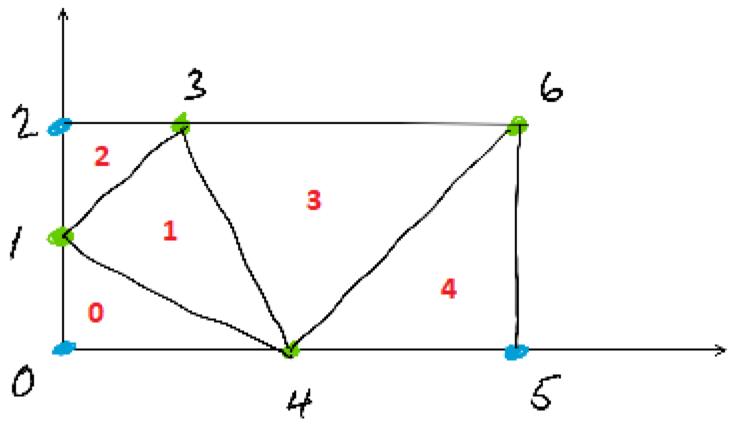
b) Benevner nedenfor midtpunkt mellom A og B for AB og tilsvarende.
$AB = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
$BC = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = (\frac{5}{2}, 2)$
$CD = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}D = (3, 1)$
$ABC = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC = (\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$
$BCD = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}CD = (\frac{11}{4}, \frac{3}{2})$
$ABCD = \frac{1}{2}ABC + \frac{1}{2}BCD = (\frac{17}{8}, \frac{13}{8})$
Det siste punktet $(\frac{17}{8}, \frac{13}{8})$ er altså punktet på Bezierkurven som svarer til parameterverdien $t = \frac{1}{2}$.

c) Vi setter først opp nodenes koordinater igjen med høyde (ikke et krav i oppgaven).

```
0 0 0
0 1 0
0 2 0
1 2 2
2 0 0
4 0 0
4 2 8
```

Trianguleringen og rekkefølgen på trianglene er ikke entydig her. DCB definerer omløpsretningen. En løsning er

```
0 4 1   1 -1 -1
1 4 3   3  2  0
1 3 2 -1 -1   1
3 4 6   4 -1  1
4 5 6  -1  3 -1
```



Figur 2:

d) Vi har fra a) at $P = (\frac{17}{8}, \frac{13}{8})$. Det er gitt at P ligger i trekant DCB.

$$(C - D) \times (B - D) = (2, 2) \times (-1, 2) = 6$$
$$(P - D) \times (P - C) = (-\frac{1}{8}, -\frac{13}{8}) \times (\frac{15}{8}, \frac{3}{8}) = 3$$
$$u = \frac{1}{2}$$
$$(P - C) \times (P - B) = (\frac{15}{8}, \frac{3}{8}) \times (-\frac{9}{8}, \frac{3}{8}) = \frac{9}{8}$$
$$v = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{16}$$
$$(P - B) \times (P - D) = (-\frac{9}{8}, \frac{3}{8}) \times (-\frac{1}{8}, -\frac{13}{8}) = \frac{15}{8}$$
$$w = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{16}$$

Vi får $u \cdot 2 + v \cdot 0 + w \cdot 8 = 1 + 0 + \frac{5}{16} \cdot 8 = \frac{7}{2}$.

4

(10%) La $t_0 = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = 2,\ t_3 = 2$. Bestem $B_{0,1}(t),\ B_{1,1}(t)$ og $B_{0,2}(t)$.

4.1 Fasit

En kan bruke rekursjonsformelen for B-splines, men $B_{0,1},\ B_{1,1}$ kan også tegnes opp på figur og skrives opp direkte:

$$B_{0,1}(t) = (1 - \frac{t}{2})B_{1,0}(t) \textbf{ og } B_{1,1}(t) = \frac{t}{2}B_{1,0}(t)$$

Begge disse lineære b-spline basisfunksjonene har kun ett ledd fordi vi har to skjøter i hver ende. De er da definert over samme intervallet - $B_{1,0}$ går fra $t_1 = 0$ til $2 = t_2$ her. Videre får vi ved hjelp av rekursjonsformelen

$$\begin{aligned} B_{0,2}(t) &= \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} B_{0,1} + \left(1 - \frac{t - t_1}{t_3 - t_1}\right) B_{1,1} \\ = \frac{t-0}{2-0}\left(1 - \frac{t}{2}\right) B_{1,0}(t) &+ \left(1 - \frac{t-0}{2-0}\right)\frac{t}{2}B_{1,0}(t) \\ = \frac{t}{2}(1 - \frac{t}{2}) &+ \frac{2-t}{2}\cdot\frac{t}{2} = \frac{t(2-t)}{2} = t - \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

5

(10%) Et spill er definert som følger:

- Det er to spillere og fem stabler med brikker.
- Et trekk består i å fjerne en eller flere brikker fra *en* av stablene.
- Spillerne trekker annenhver gang.
- Den som tømmer den siste stabelen vinner (slik at det ikke er flere brikker igjen).

Vi kaller stablene A, B, C, D og E. Antall brikker i hver stabel er: A: 20, B:5, C:14, D:22 og E:16. Avgjør om neste spiller kan vinne og bestem i så fall hvilke(t) trekk hun må gjøre.

5.1 Fasit

$20 = 10100_2,\ 5 = 101_2,\ 14 = 1110_2,\ 22 = 10110_2$ og $16 = 10000_2$ slik at nim-sum $20 \oplus 5 \oplus 14 \oplus 22 \oplus 16\ = 11001$. Neste spiller kan vinne ved å ta bort 7 brikker fra stabel A, D eller E da dette gir nim-sum 0 og er en P-posisjon i følge Bouton's teorem. Det er ikke flere kolonner (på binær form) med odde antall 1-ere og dermed ingen flere vinnertrekk.

									SUM							
	128	64	32	16	8	4	2	1		16	8	4	2	1		subtraher
20	0	0	0	1	0	1	0	0	-->	0	1	1	0	1	13	7
5	0	0	0	0	0	1	0	1								
14	0	0	0	0	1	1	1	0								
22	0	0	0	1	0	1	1	0	-->	0	1	1	1	1	15	7
16	0	0	0	1	0	0	0	0	-->	0	1	0	0	1	9	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0								
nim-sum	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**25_{10}**							