Matematikk III - eksamen V2020 fasit

15/5/20

1

(55%) Gitt funksjonen $f(x, y) = x^2 - 2x + 1 - \frac{1}{2}x^2y + xy - \frac{1}{2}y$.

a) Regn ut $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ og $f(1, 1)$.

b) Bestem $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$.

c) Bestem stasjonære punkter for funksjonen, og klassifiser dem hvis mulig.

d) Finn en normalvektor til f i punktene $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ og $(1, 1)$.

En stykkevis bilineær splinefunksjon interpolerer f i punktene $P_0(0, 0)$, $P_1(1, 0)$, $P_2(2, 0)$, $P_3(2, 2)$ og $P_4(0, 2)$.

e) Tegn figur av trianguleringen til punktene $\{P_i\}$ i xy-planet med nummerering av trekantene fra 0 til 2. Sett opp en topologi/struktur for trianguleringen med node/vertex indekser og naboinformasjon.

f) Regn ut normalvektoren for hver trekant og sammenligne med resultatet i d).

g) Interpolasjonsfeilen i et punkt (x,y) er definert ved den vertikale avstanden mellom funksjonen f og interpolanten. Bruk barysentriske koordinater og regn ut interpolasjonsfeilen i punktet $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2

(15%) Gitt punktene $(1, \frac{1}{2})$, $(2, 0)$ og $(4, 1)$. Bruk minste kvadraters metode til å bestemme ligningen for den rette linjen som er best mulig tilpasset disse punktene.

3

(15%) I en spill-scene er et trofe/item plassert i posisjon (1,1) i xy-planet. En NPC skal patruljere fram og tilbake langs en kubisk Bezierkurve for å beskytte trofeet. Bezierkurven har kontrollpunktene (0,0), (4,2), (-2,2) og (2,0).

Tegn figur med kontrollpolygon. Skisser Bezierkurven og forklar/vis tydelig hvilken metode du bruker til å skissere kurven.

4

(15%)

a) Et subtraksjonsspill har en stabel med 21 brikker og S={1, 5, 6}. Finn alle P-posisjoner og N-posisjoner. Vinner spiller I eller spiller II?

b) I et Nim-spill er det tre stabler med 10, 12 og 13 brikker. Avgjør om neste spiller kan vinne og bestem i så fall hvilke(t) trekk han må gjøre.

5 Fasit

5.1

Funksjonen kan også skrives $f(x,y) = (x-1)^2(1-\frac{y}{2})$ som gir enklere utregning.

a) $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$ og $f(1,1) = 0$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1)(1-\frac{y}{2})$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x-1)^2$.

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee y = 2$ og $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vi får stasjonære punkter langs linjen x=1 og langs linjen y=2. Videre,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - y, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 - x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Vi får da $\Delta = -(1-x)^2$. For x=1 gir dermed ikke 2.derivert-testen noe svar, for $x \neq 1$ blir $\Delta < 0$ og vi har sadelpunkt.

d) Vi skal finne en normalvektor til f i punktene $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ og $(1,1)$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} \Longrightarrow \mathbf{n} = [1,0,-\frac{3}{4}] \times [0,1,-\frac{1}{8}] = [\frac{3}{4},\frac{1}{8},1]$
$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0 \Longrightarrow \mathbf{n} = [0,0,1]$.

En stykkevis bilineær splinefunksjon interpolerer f i punktene $P_0(0,0)$, $P_1(1,0)$, $P_2(2,0)$, $P_3(2,2)$ og $P_4(0,2)$.

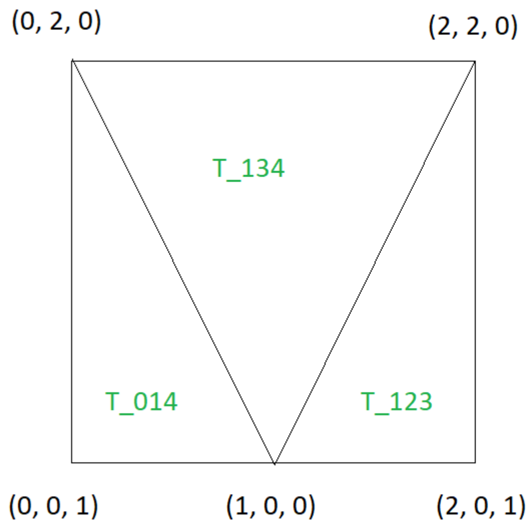
e) Tegn figur av trianguleringen til punktene $\{P_i\}$ i xy-planet med nummerering av trekantene fra 0 til 2. Sett opp en topologi/struktur for trianguleringen med node/vertex indekser og naboinformasjon.

```
0 0 1
1 0 0
2 0 1
2 2 0
0 2 0

0 1 4  1 -1 -1
1 3 4 -1  0  2
1 2 3 -1  1 -1
```

f) Regn ut normalvektoren for hver trekant.
$T_{014} : \mathbf{n}_0 = [1,0,-1] \times [0,2,-1] = [2,1,2]$
$T_{134} : \mathbf{n}_1 = [1,2,0] \times [-1,2,0] = [0,0,1]$
$T_{123} : \mathbf{n}_2 = [1,0,1] \times [0,1,-1] = [-2,1,2]$

Sammenligning: Normalvektor $\vec{n}_0$ fra d) $[1,0,-\frac{3}{4}]$ blir normalisert [0.60, 0.10, 0.80] og [2, 1, 2] blir normalisert [0.67, 0.33, 0.67]. $[0.60, 0.10, 0.80] \times [0.67, 0.33, 0.67] = 0.971$. Siden cosinus til vinkelen mellom de to normalene er nær 1, er vinkelen mellom normalene liten $(\cos^{-1}(0.971) = 13.8)$.



Figur 1: Oppgave 2e

g) Hvor stor er interpolasjonsfeilen (avstanden mellom spline interpolanten og funksjonen f i punktet $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$?

For hver trekant kan vi finne ligningen til planet trekanten ligger i ved $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{P_i}) = 0$.

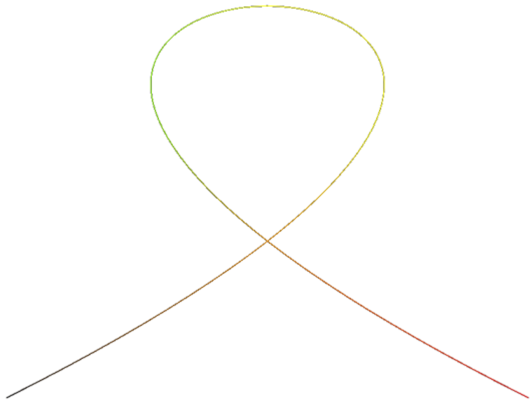
- For trekant T_{014}: Dobbelt areal=2. La $X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$Barysentriske koordinater:
  $u = (P_1 - X) \times (P_4 - X) = |[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]|/2 = \frac{1}{4}$
  $v = (P_4 - X) \times (P_0 - X) = |[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]|/2 = \frac{1}{2}$
  $w = (P_0 - X) \times (P_1 - X) = |[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]|/2 = \frac{1}{4}$
  $z = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{4}$
  $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{16} \Longrightarrow f - z = -\frac{1}{16}$

5.2

Se figur 2.1 i forelesningsnotater. Vi får ved minste kvadraters metode $a = \frac{3}{14}$ og $b = 0$, altså er ligningen for den rette linjen $y = \frac{3}{14}x$.

5.3

Se 2



Figur 2:

5.4

a) Et subtraksjonsspill har en stabel med 21 brikker og S={1, 5, 6}. Finn alle P-posisjoner og N-posisjoner. Vinner spiller I eller spiller II?

   0 brikker igjen er en P-posisjon, 1 brikke igjen er en N-posisjon, 2 brikker igjen er en P-posisjon. Vi får tre gjentagelser av NPNPNNP (start på 1), slik at når spillet starter er brikke 21 en P-posisjon. Spilleren som åpner taper spillet.

b) I et Nim-spill er det tre stabler med 10, 12 og 13 brikker. Avgjør om neste spiller kan vinne og bestem i så fall hvilke(t) trekk han må gjøre.

   $10 = 1010_2,\ 12 = 1100_2,\ 13 = 1101_2$. 10-9, 12-5 og 13-7 er alle vinnertrekk siden det gir Nim-sum lik 0, jfr Bouton's teorem.