Eksamen i Matematikk III - fasit

16. mai 2018

Tillatte hjelpemidler: Alle trykte og håndskrevne. Kalkulator.

Alle deloppgaver (a, b, ...) teller like mye.

1

La $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ y_0 = 0$ og $y_1 = 1$ og gitt funksjonen $g(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$. La $p(x)$ være polynomet for kubisk Hermite interpolasjon av g på intervallet $[0,1]$.

a) Regn ut $y_0' = g'(0),\ y_1' = g'(1)$ og sett opp interpolasjonsproblemet på matriseform $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ hvor $\mathbf{b}^T = [y_0\ y_1\ y_0'\ y_1']$.

Vi har $g'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x$ og får da $y_0' = \frac{\pi}{2}$ og $y_1' = 0$.
$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ og $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ innsatt for $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$ gir på matriseform $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}^T = [a\ b\ c\ d]$ og $\mathbf{b}^T = [0\ 1\ \frac{\pi}{2}\ 0]$.

b) Bruk resultatet fra a) til å bestemme interpolasjonspolynomet $p(x)$.

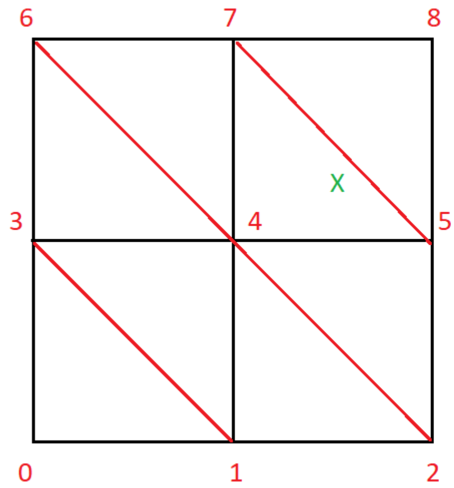
To ukjente kan bestemmes direkte av ligning 1 og 3, $d = 0$ og $c = \frac{\pi}{2}$. Da gjenstår to ligninger med to ukjente og vi får $a = \frac{\pi}{2} - 2$ og $b = 3 - \pi$. Dette gir $p(x) = (\frac{\pi}{2} - 2)x^3 + (3-\pi)x^2 + \frac{\pi}{2}x$.

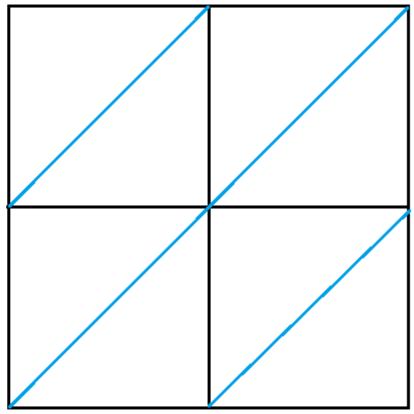
2

Gitt funksjonen $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)},\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.

a) Regn ut $f(\frac{i}{2}, \frac{j}{2}),\ i = 0,1,2,\ j = 0,1,2$.

	$i=0$	$i=1$	$i=2$
$j=2$	$f(0,1) = e^{-1}$	$f(\frac{1}{2},1) = e^{-\frac{5}{4}}$	$f(1,1) = e^{-2}$
$j=1$	$f(0,\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{4}}$	$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}$	$f(1,\frac{1}{2}) = e^{-\frac{5}{4}}$
$j=0$	$f(0,0) = 1$	$f(\frac{1}{2},0) = e^{-\frac{1}{4}}$	$f(1,0) = e^{-1}$





Med avrundede verdier:

0.368	0.287	0.135
0.779	0.607	0.287
1.000	0.779	0.368

b) Bestem $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x\, e^{-(x^2+y^2)}$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y\, e^{-(x^2+y^2)}$
$\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -e^{-\frac{1}{2}} \approx -0.607.$

c) Bruk $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ og de partiellderiverte til å finne en normalvektor til $f(x, y)$ i punktet $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Tangentvektorer $\mathbf{u}$=(1, 0, -0.607) og $\mathbf{v}$=(0, 1, -0.607).
$\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0.607, 0.607, 1)$.
$|\mathbf{n}|^2 = 1.739$, $|\mathbf{n}| = 1.318$. Enhetsnormalvektor (0.461, 0.461, 0.759).

d) Vi antar nå at vi kjenner de 9 punktene med funksjonsverdier fra a), men at funksjonen er ukjent. Forklar hva slags funksjon $z = f(x, y)$ vi da kan lage. Tegn figur.

Vi har 9 punkter som definerer 4 kvadrater i xy-planet. Vi kan lage en triangulering med 8 triangler ved å trekke diagonal i hvert kvadrat. Vi får en kontinuerlig flate som består av trekanter. Dette er en stykkevis bilineær splinefunksjon.

e) Når funksjonen/flaten skal rendres, trenger man gjerne normalvektor for hvert vertex. Regn ut en tilnærming for normalvektoren i punktet $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ for funksjonen i d).

Vi skal finne en normal i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ nummerert med 4 på figur. I denne noden/vertex møtes 6 trekanter. Vi regner ut normalen til hver av dem med kryssprodukt.

T_{ijk}		$\mathbf{n}_{ijk}$
T_{634}	$(0.0, -0.5, 0.411) \times (0.5, 0.0, -0.172)$	$= (0.0860, 0.205, 0.25)$
T_{143}	$(0.0, 0.5, -0.172) \times (-0.5, 0.0, 0.172)$	$= (0.0860, 0.0860, 0.25)$
T_{412}	$(0.0, -0.5, 0.172) \times (0.5, 0.0, -0.411)$	$= (0.205, 0.0860, 0.25)$
T_{254}	$(0.0, 0.5, 0.081) \times (-0.5, 0.0, 0.320)$	$= (0.160, 0.0405, 0.25)$
T_{745}	$(0.0, -0.5, 0.320) \times (0.5, 0.0, -0.320)$	$= (0.160, 0.160, 0.25)$
T_{476}	$(0.0, 0.5, -0.320) \times (-0.5, 0.0, 0.081)$	$= (0.0405, 0.160, 0.25)$

En approksimasjon til normalvektoren i node 4 er $\Sigma \mathbf{n}_{ijk} = (0.7375, 0.7375, 1.5)$. Normalvektor med lengde 1 blir (0.453, 0.453, 0.768). Resultatet stemmer bra med normalvektor i c).

f) Gitt et punkt $P = (\frac{3}{4}, \frac{2}{3})$ (feil i oppgaveteksten) og en triangulering av punktene fra a). Anta at man skal bestemme hvilken trekant T_i som inneholder P, og starter et søk i en av trekantene som har et vertex i $x = 0, y = 0$. Vis hvordan man bruker barysentriske koordinater til å bestemme T_i.

Med venstre triangulering får vi $(P_1 - P) \times (P_3 - P) = (-\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}) \times (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{6}) = -\frac{11}{24}$. Den barysentriske koordinaten u for P med hensyn på P_0 får vi da ved å dividere på $|(P_1 - P_0) \times | = \frac{1}{4}$ slik at $u = -\frac{11}{6}$.

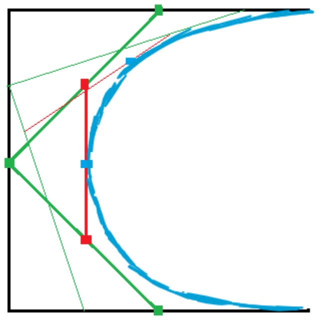
Tilsvarende:
$(P_3 - P) \times (P_0 - P) = (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{6}) \times (-\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}) = \frac{3}{8}$ og $v = \frac{3}{2}$.
$(P_0 - P) \times (P_1 - P) = (-\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}) \times (-\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$ og $w = \frac{4}{3}$.

Siden ikke alle de barysentriske koordinatene er mellom 0 og 1, er $P \notin T_{013}$ og fordi u<0 fortsetter vi søket i T_{143}. Med den venstre trianguleringen vil utregningen for T_{143} og ytterligere to triangler gi en negativ barysentrisk koordinat. Hvis trianguleringen til høyre er valgt, med start i T_{014}, finner man riktig triangel i tredje iterasjon.

3

a) Gitt kontrollpunktene (1,1), (0,1), (0,0) og (1,0). Skisser en kubisk Bezier kurve med disse kontrollpunktene. Forklar og tegn hvordan du bruker deCasteljau algoritmen.

b) Gitt skjøtvektor $\mathbf{t} = \{0, 0, 1, 1\}$. Bestem alle lineære og kvadratiske B-splines.



$B_{0,1} = 1 - x,\ B_{1,1} = x,\ w_{0,2} = x,\ w_{1,2} = x \Rightarrow 1 - w_{1,2} = 1 - x$
$B_{0,2}(x) = w_{0,2}B_{0,1} + (1 - w_{1,2})B_{1,1} = x(1 - x) + (1 - x)x = 2x(1 - x).$

4

a) Et subtraksjonsspill har en stabel med 21 brikker og S={1, 2, 5}. Finn alle P-posisjoner og N-posisjoner. Vinner spiller I eller spiller II?

Med start på 0 brikker igjen får vi mønsteret PNN slik at brikke 21 er en P-posisjon og når spiller I starter vinner spiller II.

b) I et Nim-spill er det tre stabler med 6, 9 og 14 brikker. Avgjør om neste spiller kan vinne og bestem i så fall hvilke(t) trekk han må gjøre.

$6 = 110_2,\ 9 = 1001_2$ og $14 = 1110_2$ slik at nim-sum $6 \oplus 9 \oplus 14 = 0001$. Neste spiller kan vinne ved å ta bort 1 brikke fra stabel med 6 da dette gir nim-sum 0 og er en P-posisjon i følge Bouton's teorem. Det er ikke flere kolonner (på binær form) med odde antall 1-ere og dermed ingen flere vinnertrekk.

- slutt på oppgaven -