Propriétés :

> La fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$.

> La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Conséquence : pour tous les réels x et y strictement positifs, $\ln x = \ln y \iff x = y$ et $\ln x < \ln y \iff x < y$.

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :
a) $\ln(2x-1) - \ln x = 2$

- L'égalité existe si : $\begin{cases} 2x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases} \iff x>\frac{1}{2}$. Donc $D =]\frac{1}{2};+\infty[$.
- Pour tout $x \in D$: $\ln(2x-1) - \ln x = 2 \iff \ln\left(\frac{2x-1}{x}\right) = \ln(e^2) \iff \frac{2x-1}{x} = e^2 \iff 2x-1 = xe^2 \iff 2x - xe^2 = 1 \iff x(2-e^2) = 1 \iff x = \frac{1}{2-e^2}$. Or $2-e^2<0$, donc $x<0 \notin D$. D'où $S = \emptyset$.

b) $\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$

- L'inégalité existe si : $\begin{cases} 3-x>0 \\ x+1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<3 \\ x>-1 \end{cases}$. Donc $D =]-1;3[$.
- Pour tout $x \in D$: $\ln(3-x) \leq \ln(x+1) \iff 3-x \leq x+1 \iff 2 \leq 2x \iff x \geq 1$. On a $[1;+\infty[\cap D = [1;3[$. Donc $S = [1;3[$.

2) Limites aux bornes de l'ensemble de définition

Théorème : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Preuve :
- Soit un intervalle $]A;+\infty[$ quelconque avec A un réel strictement positif.
Démontrons que cet intervalle contient toutes les valeurs de $\ln x$ dès que x est suffisamment grand.
On a $A>0$. Si $x>e^A$ alors $\ln x > \ln(e^A)$ soit $\ln x > A$. Donc $\ln x \in]A;+\infty[$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right\}$ par composition $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$. Or $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty$, ce qui implique $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Conséquence : La courbe représentative de la fonction ln admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.