II. Propriétés algébriques

Théorème : relation fonctionnelle
Pour tous les réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Preuve : Pour tous les réels x et y strictement positifs, on a :
$e^{\ln(x\times y)} = x \times y$ et $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = x \times y$.
Donc $e^{\ln(x\times y)} = e^{\ln x + \ln y}$. On en déduit que $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$.

Corollaire : Pour tous les réels x et y strictement positifs, on a :

> $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
>
> $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
>
> $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$
>
> $\ln(x^n) = n\ln(x)$ **avec n un entier relatif**

Preuve : Soient deux réels x et y strictement positifs.
- $\ln(x \times \frac{1}{x}) = \ln x + \ln(\frac{1}{x})$ et $\ln(x \times \frac{1}{x}) = \ln(1) = 0$. Donc $\ln x + \ln(\frac{1}{x}) = 0$ soit $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$.
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x \times \frac{1}{y}) = \ln x + \ln(\frac{1}{y}) = \ln x - \ln y$.
- $2\ln(\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x}) = \ln((\sqrt{x})^2) = \ln x$ soit $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$.
- démonstration par récurrence (pour x^n)

Exemples :

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$
$A = \ln((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}))$
$A = \ln(3^2 - 5) = \ln(4)$
$A = \ln(2^2) = 2\ln(2)$

$B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$
$B = \ln(2^3) + \ln 5 - \ln(3^2)$
$B = \ln(8 \times 5) - \ln(9)$
$B = \ln(\frac{40}{9})$

$C = \ln e^2 - \ln\frac{2}{e}$
$C = 2 - (\ln 2 - \ln e)$
$C = 2 - \ln 2 + 1 = 3 - \ln 2$

III. Etude de la fonction logarithme népérien

1) Sens de variation

Théorème :
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ **et pour tout** x **de** $]0;+\infty[$ **on a :** $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Preuve : On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
La fonction f définie par $f(x) = e^{\ln x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel x strictement positif, on a :
$f'(x) = \ln'(x) \times \exp'(\ln x) = \ln'(x) \times e^{\ln x} = \ln'(x) \times x$

or $f(x) = e^{\ln x} = x$ donc $f'(x) = 1$. Ainsi $1 = \ln'(x) \times x \iff \ln'(x) = \frac{1}{x}$.