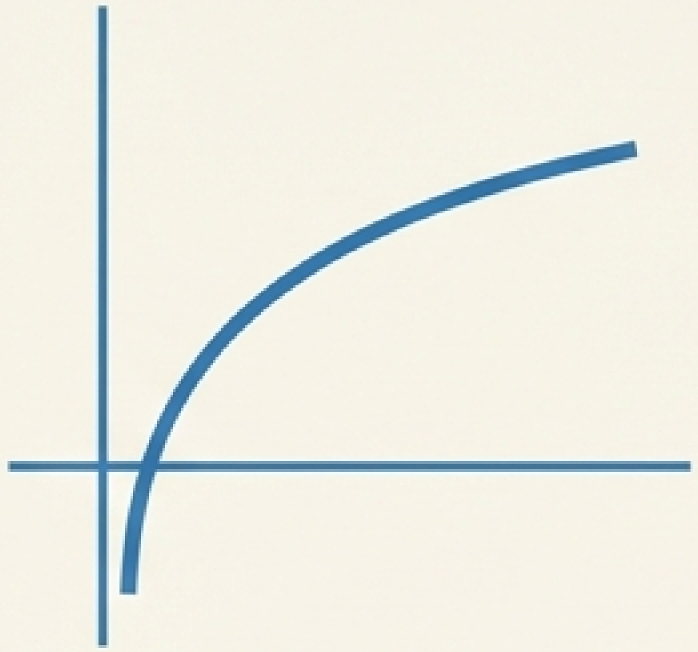
La Fonction Logarithme Népérien ($\ln$)

Synthèse de cours et Méthodes – Niveau Première/Terminale



Objectifs (Ce que vous saurez faire) :

- **Comprendre le lien** avec la fonction exponentielle.
- Simplifier des expressions algébriques $(\ln a + \ln b)$.
- **Étudier** la fonction : dérivée, variations, limites.
- **Résoudre** des équations et inéquations avec méthode.

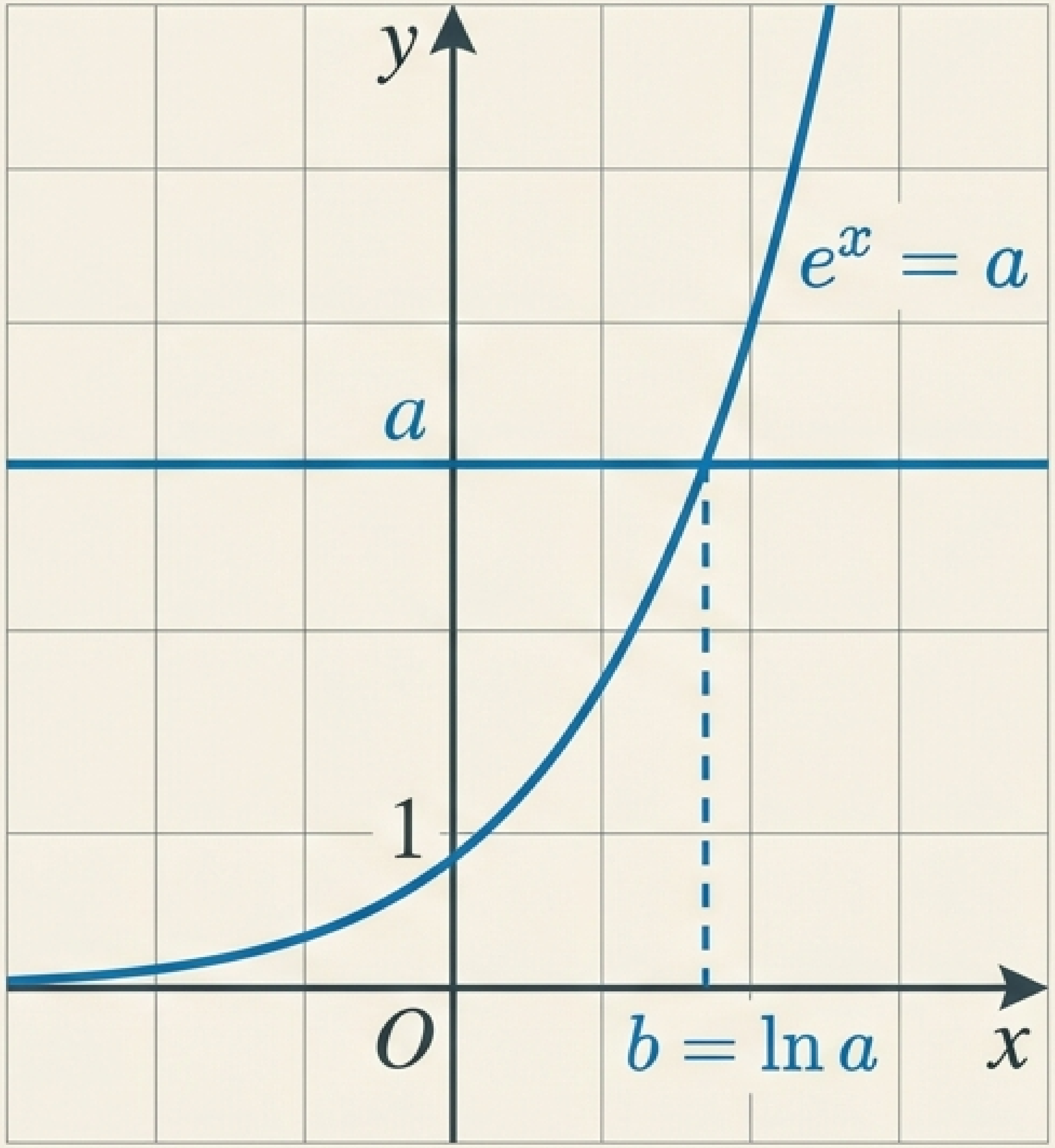
Définition : La réciproque de l'exponentielle

Concept : Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une **unique solution**.

Définition : Cette solution unique est appelée **logarithme népérien** de a, notée $\ln a$.

$$\boxed{\text{Pour } a > 0 : \quad e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a}$$

Attention : La fonction $\ln$ est définie uniquement sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



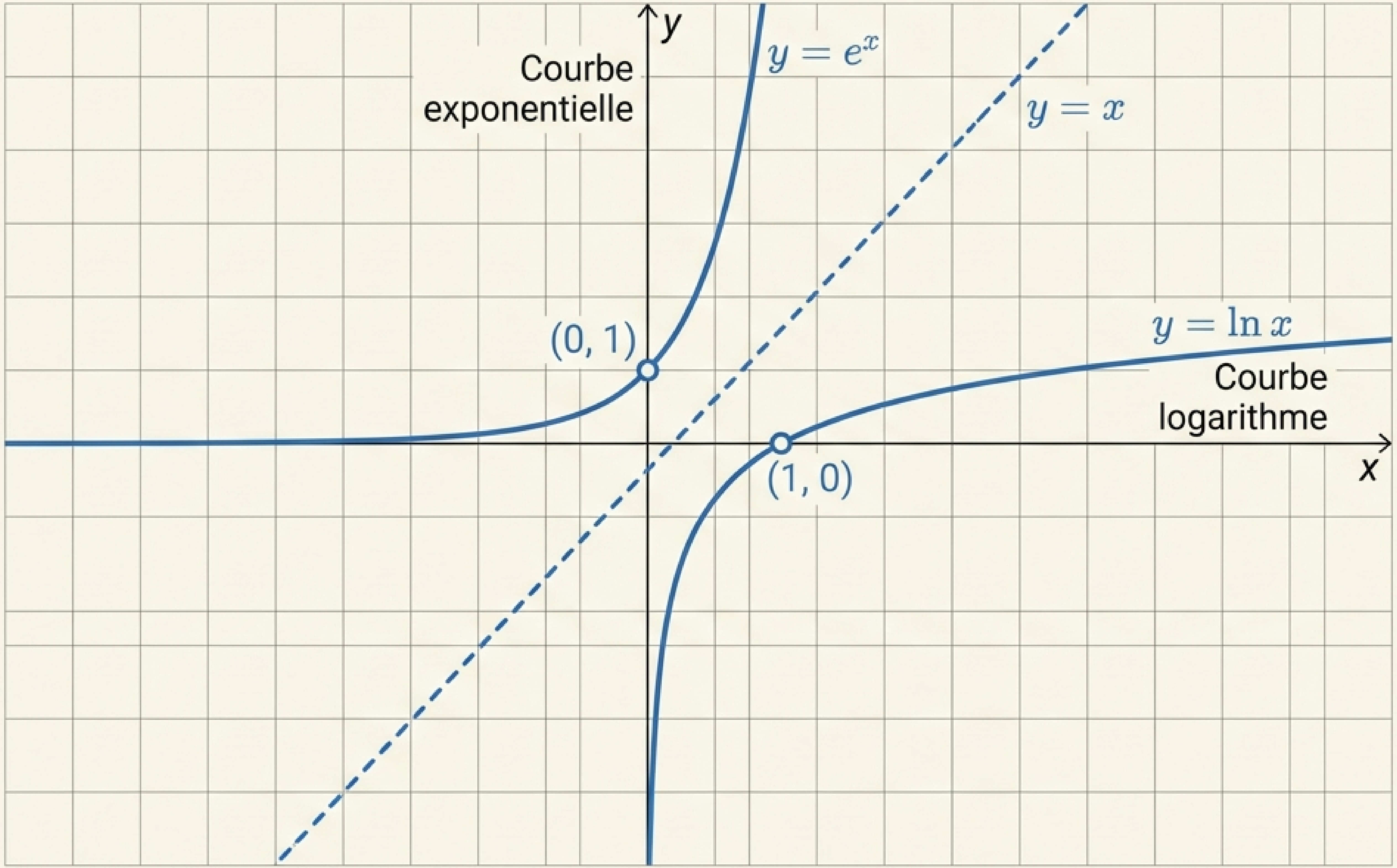
Équivalences fondamentales

1	Identités d'annulation
	For any $x > 0 : e^{\ln x} = x$ For any $x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$

2	Valeurs particulières (*À retenir**)
	$\ln(1) = 0$ car $e^0 = 1$ $\ln(e) = 1$ car $e^1 = e$

NotebookLM

Représentation graphique : Symétrie



Concept clé

Les courbes sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).

Propriété algébrique fondamentale

Transformation de produit en somme

Théorème : Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

Le logarithme transforme une multiplication en addition.
C'est sa propriété caractéristique.

Découle de la propriété des puissances : $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Règles de calcul (Corollaires)

Inverse

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

Quotient

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

Racine

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$$

Puissance ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

Astuce : Retenez $\ln(a^k) = k \ln a$ pour simplifier les exposants.

Exemples de simplification

Exemple A (Produit)	$\begin{aligned} \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5}) &= \ln\big((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})\big) \\ &= \ln(9-5) = \ln 4 \\ &= \mathbf{2\ln 2} \end{aligned}$
Exemple B (Quotient)	$\begin{aligned} 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3 &= \ln(2^3) + \ln 5 - \ln(3^2) \\ &= \ln 9 = \mathbf{ln}\left(\frac{40}{9}\right) \end{aligned}$
Exemple C (Mixte)	$\begin{aligned} \ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right) &= 2\ln e - (\ln 2 - \ln e) \\ &= 2 - \ln 2 + 1 \\ &= \mathbf{3 - \ln 2} \end{aligned}$

Étude de la fonction ln : Bases

- **Domaine de définition** : $D_f =]0\,;+\infty[$

- La fonction est continue sur son domaine.

- La fonction est **strictement croissante**.

Conséquence

$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$$

Dérivée de la fonction $\ln$

Théorème : La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Analyse du signe :

- Sur $]0\,;+\infty[$, on a $x > 0$.
- Donc la dérivée $\frac{1}{x}$ est **strictement positive**.
- Conclusion : La fonction est strictement croissante.

Tableau de variations & Éléments graphiques

x	0	1	$+\infty$
Signe de $\ln'(x)$		$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

- **Point d'intersection** : $(1\,;0)$
- **Tangente** en $x = 1$: équation $y = x - 1$.
- **Asymptote :** Verticale en $x = 0$ (l'axe des ordonnées).

Limites aux bornes

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Croissance lente vers l'infini

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Plongeon vers l'infini négatif

Interprétation graphique

- La droite d'équation $x = 0$ est **asymptote verticale** à la courbe.

MÉTHODE : Résoudre équations et inéquations

1

Domaine (Crucial)

Trouver les conditions d'existence : l'intérieur du ln doit être strictement positif $(u(x) > 0)$.

2

Transformer

Utiliser les règles algébriques pour obtenir la forme $\ln A = \ln B$ ou $\ln A = C$.

3

Résoudre

Appliquer l'exponentielle ou l'équivalence $(A = B)$.

4

Vérifier

Important : Ne garder que les solutions appartenant au domaine de l'étape 1.

Piège fréquent : oublier de vérifier le domaine !

Applications : Équations

Exercice 1

Résoudre $\ln(x-2) = 3$

Domaine : $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$.

Transformation : $x - 2 = e^3$.

Résolution : $x = e^3 + 2$.

Solution : $S = \{e^3 + 2\}$.

Exercice 2

Résoudre $e^{2x-1} = 3$

Domaine : Defined on $\mathbb{R}$.

Transformation : $2x - 1 = \ln 3$.

Résolution : $2x = 1 + \ln 3 \Rightarrow x = \frac{1+\ln 3}{2}$.

Solution : $S = \left\{\frac{1+\ln 3}{2}\right\}$.

Application : Inéquation avec piège

Résoudre $\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$

1. Domaine d'étude (Attention)

Il faut $3 - x > 0$ et $x + 1 > 0$. Soit $x < 3$ et $x > -1$.

$D =]-1\,;3[$

2. Résolution

$\ln(3-x) \leq \ln(x+1)$

$3 - x \leq x + 1$ (car la fonction $\ln$ est croissante)

$2 \leq 2x \Leftrightarrow x \geq 1$

3. Conclusion

On cherche l'intersection de $[1\,;+\infty[$ avec le domaine D.

Solution : $S = [1\,;3[$

NotebookLM

Croissances comparées & Bilan

Limites Usuelles (Hiérarchie de croissance)

- En $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (x l'emporte sur $\ln x$)
- En 0 : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ (x l'emporte)

Dérivée de la composée ln(*u*)

- Si $f(x) = \ln(u(x))$, alors $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
- Exemple : $f(x) = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Checklist Bac

[ ] Domaine de définition vérifié ?
[ ] Propriétés algébriques ($\ln(ab)$) connues ?
[ ] Limites et variations maîtrisées ?