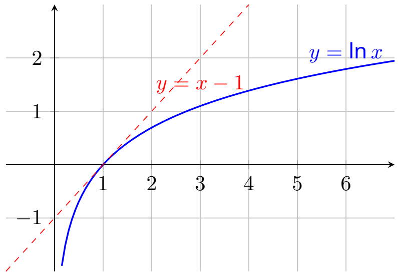
3) Représentation graphique

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



Remarque : On a $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$, la courbe admet une tangente au point d'abscisse 1 d'équation :

$$y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x - 1$$

IV. Croissances comparées

Théorème :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (x \ln x) = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (x^n \ln x) = 0$

Preuve :

- $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \end{array}\right\}$ par composition $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$.

Par passage à l'inverse, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0 \end{array}\right\}$ par composition $\lim_{x\to0^+} (\ln x \times e^{\ln x}) = 0$ donc $\lim_{x\to0^+} (x \ln x) = 0$.

Exemple : Déterminons la limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x - \ln x)$.

$x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-\ln x}{x} = 0 \text{ (croissance comparée)} \end{array}\right\} \text{par somme } \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 \end{array}\right\} \text{par produit } \lim_{x\to+\infty}(x - \ln x) = +\infty.$$