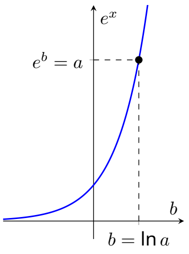
I. Fonction logarithme népérien

1) Définition

La fonction exponentielle est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0;+\infty[$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on a :
Pour tout a strictement positif, il existe un unique réel b tel que $e^b = a$.
On peut donc définir une fonction sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui, à tout réel strictement positif associe son antécédent par la fonction exponentielle. Cette fonction est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.



Définition :

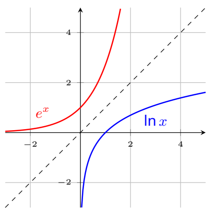
> On appelle logarithme népérien du réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. Le logarithme népérien de a est noté $\ln a$.

On a donc l'équivalence : $\begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ e^b = a \end{cases} \iff \begin{cases} a \in]0;+\infty[\\ b = \ln a \end{cases}$

> La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction qui, à tout réel x strictement positif, associe le réel $\ln x$.

Remarque :

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



2) Conséquences

Conséquences :

> Pour tout réel x strictement positif et tout réel y : $x = e^y \iff y = \ln x$

> Pour tout réel x strictement positif : $e^{\ln x} = x$

> Pour tout réel x : $\ln e^x = x$

> $\ln 1 = 0$ car $e^0 = 1$

> $\ln e = 1$ car $e^1 = e$

Applications :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(x-2) = 3$.
$x - 2 = e^3 \implies x = e^3 + 2$
Or $\ln(x-2)$ existe ssi $x - 2 > 0$ soit $x > 2$.
Comme $e^3 + 2 > 2$, on a :
$S = \{e^3 + 2\}$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, $e^{2x-1} = 3$.
$2x - 1 = \ln 3$
$2x = 1 + \ln 3$
$x = \frac{1+\ln 3}{2}$
$S = \{\frac{1+\ln 3}{2}\}$