V. Fonction composée $x \to \ln(u(x))$

Théorème :
Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$.
La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et, pour tout x de I, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

- On pose $f = \ln u$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$.
  On a $f' = \frac{u'}{u}$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array}\right\}$ par composition $\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$.