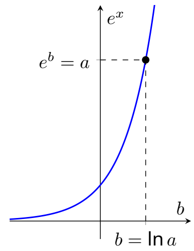
I. Fonction logarithme népérien

1) Définition

La fonction exponentielle est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0;+\infty[$ car $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on a :
Pour tout a strictement positif, il existe un unique réel b tel que $e^b = a$.
On peut donc définir une fonction sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui, à tout réel strictement positif associe son antécédent par la fonction exponentielle. Cette fonction est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.



Définition :

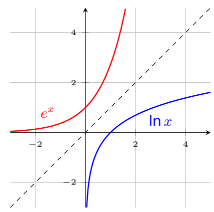
> On appelle logarithme népérien du réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. Le logarithme népérien de a est noté $\ln a$.

On a donc l'équivalence : $\begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ e^b = a \end{cases} \iff \begin{cases} a \in]0;+\infty[\\ b = \ln a \end{cases}$

> La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction qui, à tout réel x strictement positif, associe le réel $\ln x$.

Remarque :

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



2) Conséquences

Conséquences :

> Pour tout réel x strictement positif et tout réel y : $x = e^y \iff y = \ln x$

> Pour tout réel x strictement positif : $e^{\ln x} = x$

> Pour tout réel x : $\ln e^x = x$

> $\ln 1 = 0$ car $e^0 = 1$

> $\ln e = 1$ car $e^1 = e$

Applications :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\ln(x-2) = 3$.
$x - 2 = e^3 \implies x = e^3 + 2$
Or $\ln(x-2)$ existe ssi $x - 2 > 0$ soit $x > 2$.
Comme $e^3 + 2 > 2$, on a :
$S = \{e^3 + 2\}$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, $e^{2x-1} = 3$.
$2x - 1 = \ln 3$
$2x = 1 + \ln 3$
$x = \frac{1+\ln 3}{2}$
$S = \{\frac{1+\ln 3}{2}\}$

II. Propriétés algébriques

Théorème : relation fonctionnelle
Pour tous les réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Preuve : Pour tous les réels x et y strictement positifs, on a :
$e^{\ln(x\times y)} = x \times y$ et $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = x \times y$.
Donc $e^{\ln(x\times y)} = e^{\ln x + \ln y}$. On en déduit que $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$.

Corollaire : Pour tous les réels x et y strictement positifs, on a :

> $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
>
> $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
>
> $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$
>
> $\ln(x^n) = n\ln(x)$ **avec n un entier relatif**

Preuve : Soient deux réels x et y strictement positifs.
- $\ln(x \times \frac{1}{x}) = \ln x + \ln(\frac{1}{x})$ et $\ln(x \times \frac{1}{x}) = \ln(1) = 0$. Donc $\ln x + \ln(\frac{1}{x}) = 0$ soit $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$.
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x \times \frac{1}{y}) = \ln x + \ln(\frac{1}{y}) = \ln x - \ln y$.
- $2\ln(\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}) + \ln(\sqrt{x}) = \ln((\sqrt{x})^2) = \ln x$ soit $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$.
- démonstration par récurrence (pour x^n)

Exemples :

$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$
$A = \ln((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5}))$
$A = \ln(3^2 - 5) = \ln(4)$
$A = \ln(2^2) = 2\ln(2)$

$B = 3\ln 2 + \ln 5 - 2\ln 3$
$B = \ln(2^3) + \ln 5 - \ln(3^2)$
$B = \ln(8 \times 5) - \ln(9)$
$B = \ln(\frac{40}{9})$

$C = \ln e^2 - \ln\frac{2}{e}$
$C = 2 - (\ln 2 - \ln e)$
$C = 2 - \ln 2 + 1 = 3 - \ln 2$

III. Etude de la fonction logarithme népérien

1) Sens de variation

Théorème :
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ **et pour tout** x **de** $]0;+\infty[$ **on a :** $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Preuve : On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
La fonction f définie par $f(x) = e^{\ln x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel x strictement positif, on a :
$f'(x) = \ln'(x) \times \exp'(\ln x) = \ln'(x) \times e^{\ln x} = \ln'(x) \times x$

or $f(x) = e^{\ln x} = x$ donc $f'(x) = 1$. Ainsi $1 = \ln'(x) \times x \iff \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriétés :

> La fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$.

> La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Conséquence : pour tous les réels x et y strictement positifs, $\ln x = \ln y \iff x = y$ et $\ln x < \ln y \iff x < y$.

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :

a) $\ln(2x-1) - \ln x = 2$

- L'égalité existe si : $\begin{cases} 2x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases} \iff x>\frac{1}{2}$. Donc $D =]\frac{1}{2};+\infty[$.
- Pour tout $x \in D$: $\ln(2x-1) - \ln x = 2 \iff \ln\left(\frac{2x-1}{x}\right) = \ln(e^2) \iff \frac{2x-1}{x} = e^2 \iff 2x-1 = xe^2 \iff 2x - xe^2 = 1 \iff x(2-e^2) = 1 \iff x = \frac{1}{2-e^2}$. Or $2-e^2<0$, donc $x<0 \notin D$. D'où $S=\emptyset$.

b) $\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$

- L'inégalité existe si : $\begin{cases} 3-x>0 \\ x+1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<3 \\ x>-1 \end{cases}$. Donc $D =]-1;3[$.
- Pour tout $x \in D$: $\ln(3-x) \leq \ln(x+1) \iff 3-x \leq x+1 \iff 2 \leq 2x \iff x \geq 1$. On a $[1;+\infty[\cap D = [1;3[$. Donc $S = [1;3[$.

2) Limites aux bornes de l'ensemble de définition

Théorème : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Preuve :

- Soit un intervalle $]A;+\infty[$ quelconque avec A un réel strictement positif.
Démontrons que cet intervalle contient toutes les valeurs de $\ln x$ dès que x est suffisamment grand.
On a $A>0$. Si $x>e^A$ alors $\ln x > \ln(e^A)$ soit $\ln x > A$. Donc $\ln x \in]A;+\infty[$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

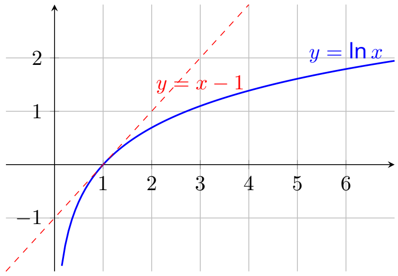
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right\}$ par composition $\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$. Or $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} -\ln x = +\infty$, ce qui implique $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

Conséquence : La courbe représentative de la fonction ln admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

3) Représentation graphique

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



Remarque : On a $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$, la courbe admet une tangente au point d'abscisse 1 d'équation :

$$y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x - 1$$

IV. Croissances comparées

Théorème :

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x^n \ln x) = 0$

Preuve :

- $\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ &\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \end{aligned}\right\}$ par composition $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$.

Par passage à l'inverse, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

- $\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ &\lim_{X \to -\infty} X e^X = 0 \end{aligned}\right\}$ par composition $\lim_{x \to 0^+} (\ln x \times e^{\ln x}) = 0$ donc $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$.

Exemple : Déterminons la limite : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x)$.

$x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \\ &\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} 1 = 1 \\ &\lim_{x \to +\infty} \frac{-\ln x}{x} = 0 \text{ (croissance comparée)} \end{aligned}\right\} \text{par somme } \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 \end{aligned}\right\}$ par produit $\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x) = +\infty$.

V. Fonction composée $x \to \ln(u(x))$

Théorème :
Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$.
La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et, pour tout x de I, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

- On pose $f = \ln u$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$.
  On a $f' = \frac{u'}{u}$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty \end{array}\right\}$ par composition $\lim_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$.